

# Geometría subyacente del entrelazamiento en sistemas de bosones duros



César Antonio Carvajal de la Haza

Tutor: Javier Rodríguez Laguna

Universidad Nacional de Educación a Distancia

Trabajo de final de grado

*Grado en Física*

Junio 2025

# Agradecimientos

En este espacio quiero expresar mis pensamientos más sinceros sobre esta etapa universitaria. Han sido cerca de nueve años intensos, llenos de obstáculos, pausas y muchas cuestas arriba. Pero también ha sido un camino repleto de aprendizaje, descubrimiento y momentos que me han transformado profundamente.

Quiero empezar agradeciendo a mi tutor, Javier, por haberme transmitido esa pasión y esas ganas por la cuántica que, de alguna manera, andaba buscando. También por su apoyo constante desde aquel mes de julio en el que buscaba una guía para adentrarme más en el mundo de la cuántica.

Agradezco también a mis seres queridos más cercanos, que siempre han estado ahí, confiando en que este momento llegaría.

Y, sin duda alguna, a mi madre: gracias por tu paciencia, por tu apoyo y por estar siempre ahí, en cada logro. Porque lo has hecho, y eso ha sido todo para mí.

# Resumen - Abstract

La Ley del Área del Entrelazamiento establece que, en estados de baja energía de Hamiltonianos locales, el entrelazamiento entre una región del sistema y el resto crece proporcionalmente al tamaño de su frontera. Este comportamiento, común en el estado fundamental de muchos sistemas cuánticos, admite excepciones cuya caracterización resulta clave para comprender la estructura de correlaciones cuánticas.

En este trabajo se analiza cómo la geometría de interacción entre qubits influye en el cumplimiento de dicha ley. Se construyen Hamiltonianos locales para diferentes redes de conexión, se calcula el estado fundamental y se obtiene la *Entanglement Adjacency Matrix* (EAM), que representa visualmente el patrón de entrelazamiento entre pares de qubits.

Comparando la EAM con la red física de interacciones se identifican casos donde la Ley del Área se respeta y otros donde aparecen desviaciones, asociadas a efectos no locales y a restricciones como la monogamia del entrelazamiento. El enfoque empleado proporciona una herramienta visual y cuantitativa para explorar los límites de validez de esta ley.

---

*The Entanglement Area Law states that, in low-energy states of local Hamiltonians, the entanglement between a region of the system and the rest scales proportionally to the size of their boundary. This behavior, common in the ground state of many quantum systems, admits exceptions whose characterization is essential to understand the structure of quantum correlations.*

*This work analyzes how the interaction geometry between qubits affects the validity of this law. Local Hamiltonians are constructed for various connection networks, the ground state is computed, and the Entanglement Adjacency Matrix (EAM) is obtained to visually represent the pattern of pairwise entanglement.*

*By comparing the EAM with the physical interaction network, we identify cases where the Area Law holds and others where significant deviations emerge, linked to nonlocal effects and constraints such as entanglement monogamy. The approach provides a visual and quantitative tool to explore the limits of validity of the Area Law.*

# Índice

<b>Lista de figuras</b>	<b>v</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
Motivación y contexto físico . . . . .	1
Objetivos del trabajo . . . . .	1
Metodología general . . . . .	2
Estructura del documento . . . . .	2
<b>1 Marco teórico</b>	<b>3</b>
1.1 Sistemas cuánticos de qubits . . . . .	3
1.2 Matriz densidad y entrelazamiento . . . . .	9
1.3 Medidas de entrelazamiento . . . . .	14
1.4 Entropía y Área . . . . .	16
1.5 <i>Entanglement Adjacency Matrix</i> . . . . .	17
<b>2 Metodología</b>	<b>19</b>
2.1 Definición del modelo físico . . . . .	20
2.2 Implementación computacional . . . . .	24
<b>3 Geometrías y resultados</b>	<b>31</b>
3.1 Geometrías estudiadas . . . . .	32
3.2 Comparación de los resultados . . . . .	43
3.3 Más allá de la Ley del Área . . . . .	44
<b>Conclusiones</b>	<b>46</b>
Conclusiones generales . . . . .	46
Utilidad de la EAM . . . . .	47
Líneas futuras . . . . .	47
<b>Declaración de autoría</b>	<b>48</b>
<b>Referencias</b>	<b>49</b>

## Lista de figuras

2.1	Configuraciones <i>half-filling</i> para el caso $N = 4$ . . . . .	22
2.2	Grafo de conexión para seguir el ejemplo. . . . .	24
2.3	EAM obtenida con el ejemplo de $N = 4$ . . . . .	28
3.1	Algunas de las geometrías de estudio: a. Geometría puente; b. Geometría de las dos torres; c. Geometría túnel; d. Geometría estrella; e. Geometría del benceno; f. Geometría árbol. . . . .	32
3.2	Grafo de la cadena lineal. La línea discontinua cierra la cadena. . . . .	33
3.3	Matriz de adyacencia y EAM de la cadena lineal simple. . . . .	33
3.4	Matriz de adyacencia y EAM de la cadena lineal periódica. . . . .	34
3.5	Matriz de adyacencia y EAM de una distribución de $3 \times 4$ qubits. . . . .	34
3.6	Matriz de adyacencia y EAM de una distribución de $3 \times 4$ qubits. . . . .	35
3.7	Comparación de los grafos de conexión de la geometría puente. . . . .	35
3.8	Matriz de adyacencia y EAM de la geometría puente. . . . .	35
3.9	Comparación de los grafos de conexión de la geometría de las dos torres. . . . .	36
3.10	Matriz de adyacencia y EAM de la geometría de las dos torres. . . . .	37
3.11	Comparación de los grafos de conexión de la geometría túnel. . . . .	38
3.12	Matriz de adyacencia y EAM de la geometría túnel. . . . .	38
3.13	Comparación de los grafos de conexión de la geometría estrella. . . . .	39
3.14	Matriz de adyacencia y EAM de la geometría estrella. . . . .	39
3.15	Comparación de los grafos de conexión de la geometría del benceno. . . . .	40
3.16	Matriz de adyacencia y EAM del benceno. . . . .	41
3.17	Comparación de los grafos de conexión de la geometría árbol. . . . .	42
3.18	Matriz de adyacencia y EAM de la geometría árbol. . . . .	42

# Introducción

## Motivación y contexto físico

El entrelazamiento cuántico es una de las propiedades más sorprendentes de la mecánica cuántica. Se manifiesta cuando dos o más sistemas cuánticos comparten correlaciones que no pueden explicarse por medios clásicos, de modo que las mediciones sobre uno de ellos afectan instantáneamente al otro, independientemente de la distancia entre ellos. Esta característica, que fascinó a Einstein y otros pioneros, ha pasado de ser una curiosidad conceptual a convertirse en un recurso esencial para el desarrollo de tecnologías cuánticas como la computación cuántica, la criptografía cuántica o la teleportación de estados, [4].

A medida que se desarrollan dispositivos cuánticos compuestos por múltiples qubits, se hace cada vez más importante entender cómo se distribuye el entrelazamiento entre las distintas partes del sistema. Este trabajo se enmarca dentro de ese objetivo general: analizar cómo influye la geometría física, es decir, la red de conexiones reales entre los qubits, en la estructura del entrelazamiento en el estado fundamental del sistema.

## Objetivos del trabajo

Este Trabajo de Fin de Grado tiene como objetivo principal analizar la relación entre la geometría de interacción y la distribución del entrelazamiento en sistemas de qubits para estudiar la Ley del Área del Entrelazamiento. En particular, se pretende:

- Construir y diagonalizar Hamiltonianos correspondientes a distintas geometrías de conexión entre qubits.
- Calcular el estado fundamental y la matriz de densidad del sistema.
- Obtener la *Entanglement Adjacency Matrix* (EAM), o matriz de adyacencia de entrelazamiento, para cada configuración y compararla con la matriz de adyacencia física.
- Identificar patrones y posibles regularidades, incluyendo el efecto de la monogamia del entrelazamiento, que limita la cantidad de entrelazamiento que puede compartirse entre múltiples qubits.

## Metodología general

En sistemas cuánticos de muchos cuerpos, las correlaciones cuánticas —y en particular el entrelazamiento— tienden a respetar la estructura física de interacciones del sistema. Esta idea se resume en la conocida *Ley del Área del Entrelazamiento*, según la cual el entrelazamiento entre una región del sistema y el resto escala con el tamaño de la frontera entre ambas [10].

No obstante, existen configuraciones en las que esta ley se viola o presenta desviaciones relevantes. Identificar y caracterizar estos casos resulta de gran interés para entender los mecanismos que gobiernan la distribución del entrelazamiento en estados fundamentales. En este trabajo se adopta como herramienta principal la matriz de adyacencia de entrelazamiento, una construcción basada en los llamados *Entanglement Links* (EL), o enlaces de entrelazamiento, [11,12,13], que permite representar visualmente el patrón de entrelazamiento entre pares de qubits. Esta matriz se compara con la matriz de adyacencia física del sistema para estudiar hasta qué punto la estructura de correlaciones cuánticas replica (o no) la topología de las interacciones.

Este enfoque permite abordar de forma cuantitativa y visual el estudio de los límites de validez de la ley del área, ofreciendo ejemplos concretos en los que el entrelazamiento se distribuye de manera no local o no estructuralmente fiel a las conexiones físicas.

## Estructura del documento

El trabajo se organiza de la siguiente manera:

- En el *Capítulo 1* se presentan los fundamentos teóricos necesarios, incluyendo una introducción a sistemas de qubits, medidas de entrelazamiento y la herramienta esencial para el estudio del trabajo: la matriz de adyacencia de entrelazamiento.
- En el *Capítulo 2* se describe la metodología empleada para construir los modelos, resolverlos numéricamente y obtener las matrices relevantes.
- El *Capítulo 3* recoge los resultados obtenidos para diferentes geometrías, con una discusión de los patrones observados.
- Finalmente, se encuentra un último apartado donde se presentan las conclusiones y posibles líneas de trabajo futuro.

*Hilbert space is gratuitously big*

— Carlton Caves [5]

# 1

## Marco teórico

### Contenidos

---

<b>1.1</b>	<b>Sistemas cuánticos de qubits . . . . .</b>	<b>3</b>
1.1.1	Producto tensorial y espacio de Hilbert . . . . .	4
1.1.2	Estados y operadores . . . . .	6
<b>1.2</b>	<b>Matriz densidad y entrelazamiento . . . . .</b>	<b>9</b>
1.2.1	Sistemas compuestos. Matriz densidad reducida . . . . .	12
1.2.2	Entrelazamiento . . . . .	13
<b>1.3</b>	<b>Medidas de entrelazamiento . . . . .</b>	<b>14</b>
1.3.1	Entropía de von Neumann . . . . .	14
1.3.2	Monogamia de entrelazamiento . . . . .	15
<b>1.4</b>	<b>Entropía y Área . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>1.5</b>	<b><i>Entanglement Adjacency Matrix</i> . . . . .</b>	<b>17</b>

---

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos necesarios para comprender, en su totalidad, los resultados que aparecen en este documento. Para ello, se parte del formalismo estándar de la mecánica cuántica tal como se expone en [7], [8], [9], y se introducen los conceptos de entrelazamiento y medidas asociadas siguiendo principalmente [2] y [11].

### 1.1 Sistemas cuánticos de qubits

El *bit* es el concepto fundamental de la computación e información clásicas. En el marco cuántico, este papel lo desempeña una entidad análoga: el *quantum bit* o *qubit*.

Un qubit, al igual que un bit clásico, puede encontrarse en dos estados distinguibles. No obstante, la naturaleza del estado cuántico difiere radicalmente de la del estado clásico.



## 1. Marco teórico

Mientras que un bit puede tomar el valor 0 ó 1, un qubit puede encontrarse en una superposición lineal de ambos estados base:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (1.1)$$

donde los números  $\alpha$  y  $\beta$  son números complejos que satisfacen  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Esta condición garantiza que el estado  $|\psi\rangle$  es un vector normalizado.

Desde una perspectiva matemática, el estado de un qubit puede interpretarse como un vector que pertenece a un espacio de Hilbert complejo de dimensión dos. Los vectores  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  forman una base ortonormal de dicho espacio, y cualquier estado  $|\psi\rangle$  es una combinación lineal (una superposición) de estos dos estados base.

Una diferencia fundamental entre el bit clásico y el qubit radica en el concepto de medición. En el caso clásico, uno puede observar directamente el estado del bit y determinar si es 0 ó 1. En cambio, en la mecánica cuántica, no es posible conocer el estado completo de un qubit mediante una única medición. Al medir el estado del qubit respecto al observable  $\hat{S}_z$ , que tiene como autofunciones los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ , el sistema da como resultado  $|0\rangle$  con probabilidad  $|\alpha|^2$ , y  $|1\rangle$  con probabilidad  $|\beta|^2$ .

Este principio subraya una distinción clave entre la información clásica y la cuántica: el estado de un sistema cuántico es, en general, inaccesible de forma directa. Solo se pueden obtener predicciones probabilísticas sobre los resultados de las mediciones. Esta división entre el estado interno del sistema y los resultados observables constituye uno de los pilares fundamentales de la computación cuántica.

De manera más general, en el marco formal de la mecánica cuántica, a cada sistema físico  $\mathcal{S}$  se le asocia un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ , definido sobre el cuerpo de los números complejos. Un estado dado del sistema se describe mediante un vector unitario  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ , denominado vector estado, o función de onda.

### 1.1.1 Producto tensorial y espacio de Hilbert

Supongamos ahora que tenemos un sistema compuesto por dos qubits. Si este fuera un sistema clásico, entonces podrían encontrarse en uno de los cuatro posibles estados: 00, 01, 10, y 11. Por su parte, en el caso cuántico, un sistema de dos qubits tiene una base con cuatro estados, que denotamos de forma análoga:  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$ , y  $|11\rangle$ . De esta modo, cualquier estado de dos qubits puede describirse como una superposición lineal de estos estados base:

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle. \quad (1.2)$$

### 1. Marco teórico

Al igual que en el caso de un solo qubit, el valor  $|\alpha_{ij}|^2$  representa la probabilidad de obtener el estado  $|ij\rangle$  al medir los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  en ambos qubits. Por ejemplo,  $|\alpha_{00}|^2$  es la probabilidad de observar el estado  $|00\rangle$  tras una medición.

Un ejemplo destacado de estado de dos qubits es el *estado de Bell*, también conocido como *par EPR* (Einstein-Podolsky-Rosen), dado por:

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (1.3)$$

estado responsable de conceptos tan intrigantes como la teleportación cuántica [véase 11, página 26].

La construcción de estados de múltiples qubits se generaliza de forma natural a partir de la noción de producto tensorial. En particular, el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  asociado a un sistema compuesto se define como el producto tensorial de los espacios de Hilbert individuales  $\mathcal{H}_i$  correspondientes a cada componente del sistema:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N. \quad (1.4)$$

En el caso de dos qubits, por ejemplo, el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es simplemente  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ , siendo  $\mathcal{H}_i$  el respectivo espacio de Hilbert para un qubit. La base del espacio compuesto surge naturalmente de considerar las respectivas bases en los respectivos espacios de Hilbert de cada componente del sistema. Esto es, si

$$\{|0\rangle_1, |1\rangle_1\}, \quad \{|0\rangle_2, |1\rangle_2\}, \quad (1.5)$$

son las bases de  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$ , respectivamente, entonces, la base del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es simplemente

$$\{|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2, |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2, |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2, |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2\}. \quad (1.6)$$

Los subíndices que acompañan a los elementos de la base hacen referencia al qubit  $i$  del sistema. Sin embargo, es habitual omitir el símbolo  $\otimes$  y se escribe, por simplicidad,  $|0\rangle_1|0\rangle_2 = |00\rangle$ , aunque en este apartado es conveniente conservar la notación para enfatizar la estructura del espacio de Hilbert compuesto.

### 1.1.2 Estados y operadores

La notación que hasta ahora estamos empleando, representada por el símbolo  $|\cdot\rangle$ , es conocida como notación *bra-ket*, introducida por Paul Dirac. Esta notación permite expresar de forma compacta los vectores del espacio de Hilbert asociado al sistema cuántico. Un estado vectorial se denota mediante un ket, por ejemplo  $|\psi\rangle$ , mientras que su dual —el funcional lineal correspondiente— se denota mediante un bra, escrito como  $\langle\psi|$ .

Recordemos, en este orden de los acontecimientos, la noción de *funcional lineal*, o *forma lineal*, definida sobre los kets  $|\psi\rangle$  de  $\mathcal{H}_S$ . Una forma lineal  $\chi$  es una operación lineal que asocia un número complejo a cada ket de modo que

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\xrightarrow{\chi} \chi(|\psi\rangle), \\ \chi(\lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle) &= \lambda_1\chi(|\psi_1\rangle) + \lambda_2\chi(|\psi_2\rangle). \end{aligned} \quad (1.7)$$

A estas formas son las que hemos llamado vector bra,  $\langle\chi|$ , y, a la aplicación de  $\chi$  sobre el ket  $|\psi\rangle$  se denota como

$$\chi(|\psi\rangle) = \langle\chi|\psi\rangle. \quad (1.8)$$

Con esta notación, el producto interno entre dos vectores  $|\psi\rangle, |\phi\rangle$  se escribe como  $\langle\psi|\phi\rangle$ , y se corresponde con un número complejo. Si los vectores son ortogonales, entonces  $\langle\psi|\phi\rangle = 0$ . Además, la norma de un estado  $|\psi\rangle$  se calcula como  $\langle\psi|\psi\rangle$ , y para que el estado esté normalizado debe cumplirse que  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ .

Los estados evolucionan y se manipulan mediante operadores lineales definidos sobre el espacio de Hilbert. Un operador lineal  $A$  asocia un ket  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_S$  con otro ket  $|\psi'\rangle \in \mathcal{H}_S$ , de forma que:

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= A|\psi\rangle, \\ A(\lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle) &= \lambda_1A|\psi_1\rangle + \lambda_2A|\psi_2\rangle. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Asimismo, se puede hablar del producto de dos operadores  $A$  y  $B$ ,  $AB$ , definido mediante

$$(AB)|\psi\rangle = A(B|\psi\rangle), \quad (1.10)$$

donde, en primer lugar,  $B$  actúa sobre  $|\psi\rangle$ , y luego,  $A$  actúa sobre  $B|\psi\rangle$ . Además, en general, se tiene que  $AB \neq BA$ . Esto nos enlaza con el concepto de conmutador  $[A, B]$  de  $A$  y  $B$ , definido por  $[A, B] = AB - BA$ .

Por otra parte, si tenemos dos kets  $|\psi\rangle$  y  $|\phi\rangle$ , podemos definir el elemento de matriz de  $A$  entre  $|\phi\rangle$  y  $|\psi\rangle$  como  $\langle\phi|A|\psi\rangle$ .

## 1. Marco teórico

### Proyectores

Asumamos ahora que en vez de escribir  $\langle\phi|$  y  $|\psi\rangle$ , en ese específico orden, lo escribimos del revés,  $|\psi\rangle\langle\phi|$ . Teniendo en cuenta este orden, esta expresión representa un operador. Escogemos un ket  $|\varphi\rangle$  y consideramos:

$$|\psi\rangle\langle\phi|\varphi\rangle \implies \langle\phi|\varphi\rangle|\psi\rangle. \quad (1.11)$$

Como  $\langle\phi|\varphi\rangle$  es un número complejo, la expresión anterior representa un ket. Esto nos hace ver que el *orden de los símbolos es de suma importancia*. Esto nos permite introducir el operador *proyector*. Sea  $|\psi\rangle$  un ket normalizado. Consideremos el operador  $P_\psi$  dado por:

$$P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (1.12)$$

Si ahora aplicamos este sobre un ket cualquiera  $|\phi\rangle$ :

$$P_\psi|\phi\rangle = |\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle, \quad (1.13)$$

donde se puede ver que nos devuelve un ket proporcional a  $|\psi\rangle$ . El valor  $\langle\psi|\phi\rangle$  es el producto escalar de  $|\phi\rangle$  por  $|\psi\rangle$ .

Esto nos permite ver a  $P_\psi$  como el operador *proyección ortogonal* sobre el ket  $|\psi\rangle$ . Además, esto se refuerza al comprobarse que  $P_\psi^2 = P_\psi$ , es decir, proyectar dos veces seguidas sobre un vector es equivalente a hacerlo una sola vez:

$$P_\psi^2 = P_\psi P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = P_\psi. \quad (1.14)$$

Por ejemplo, sea  $|\psi\rangle = |0\rangle$ , y sea  $|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ , con  $a, b \in \mathbb{C}$  tales que  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . En este caso, el proyector, siguiendo la notación, sería  $P_0 = |\psi\rangle\langle\psi| = |0\rangle\langle 0|$ . Aplicando  $P_0$  a  $|\phi\rangle$ :

$$P_0|\phi\rangle = |0\rangle\langle 0|\phi\rangle = |0\rangle(a\langle 0|0\rangle + b\langle 0|1\rangle) = a|0\rangle. \quad (1.15)$$

Este ejemplo se corresponde a la proyección de  $|\phi\rangle$  sobre la dirección  $|0\rangle$ .

Esta noción de proyección se puede generalizar hacia la proyección sobre un subespacio. Veamos esto brevemente, pues resulta realmente elegante.

Sean  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_m\rangle$ ,  $m$  vectores normalizados y ortogonales entre sí, es decir:

$$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.16)$$

Sea  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}_m}$  el subespacio de  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$  generado por estos vectores. Consideremos entonces el operador  $P_m$  definido como

### 1. Marco teórico

$$P_m = \sum_{i=1}^m |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (1.17)$$

Este operador,  $P_m$ , es un proyector y proyecta cualquier vector de  $\mathcal{H}_S$  en  $\mathcal{H}_{S_m}$ .

### Operador adjunto $A^\dagger$ del operador lineal $A$

Para cada operador lineal  $A$  definido sobre un espacio de Hilbert, existe un operador llamado adjunto, denotado  $A^\dagger$ , que satisface la siguiente propiedad fundamental:

$$\langle\psi|A^\dagger|\phi\rangle = \langle\phi|A|\psi\rangle^*, \quad (1.18)$$

para todos los kets  $|\psi\rangle, |\phi\rangle$  del espacio. Esta relación dice que el adjunto  $A^\dagger$  es el operador que, al *desplazar*  $A$  de un ket a un bra en un producto escalar, introduce una conjugación compleja. En otras palabras, si  $A$  actúa sobre el ket  $|\phi\rangle$ , entonces  $A^\dagger$  actúa sobre el bra correspondiente  $\langle\psi|$ , de forma que:

$$|\psi\rangle = A|\phi\rangle \implies \langle\psi| = \langle\phi|A^\dagger. \quad (1.19)$$

Este operador adjunto permite definir conceptos importantes, como el de operador hermítico (cuando  $A = A^\dagger$ ), que tendrá un papel central más adelante. Veamos un ejemplo. Consideremos el operador lineal  $A = |0\rangle\langle 1|$ , que actúa sobre un estado  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ . Al aplicar  $A$  obtenemos:

$$A|\psi\rangle = |0\rangle\langle 1|(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle\langle 1|0\rangle + \beta|0\rangle\langle 1|1\rangle = \beta|0\rangle. \quad (1.20)$$

El operador adjunto de  $A$  es  $A^\dagger = (|0\rangle\langle 1|)^\dagger = |1\rangle\langle 0|$ , y su acción sobre  $|\psi\rangle$  es

$$A^\dagger|\psi\rangle = |1\rangle\langle 0|(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|1\rangle\langle 0|0\rangle + \beta|1\rangle\langle 0|1\rangle = \alpha|1\rangle. \quad (1.21)$$

### Observables. El operador Hamiltoniano

En mecánica cuántica, cualquier cantidad física observable  $A$  está asociada con un operador autoadjunto  $A$  en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_S$ <sup>1</sup>. Los posibles resultados de una medición del observable  $A$  corresponden a los autovalores del operador asociado. Esta correspondencia se expresa mediante una ecuación de autovalores:

---

<sup>1</sup>Es conveniente indicar aquí que se ha denotado a observable y operador mediante  $A$ , pero que hay que tener presente a qué tipo de objeto nos referimos en cada caso. Normalmente se denota por  $\hat{A}$  al operador del observable  $A$

## 1. Marco teórico

$$A|i\rangle = a_i|i\rangle, \quad (1.22)$$

donde  $|i\rangle$  es un autovector del operador  $A$  y  $a_i$  es el resultado posible de una medición. Es necesario que el operador  $A$  sea autoadjunto para que represente a un observable. En estas condiciones, los autoestados  $|i\rangle$  forman una base ortogonal, y los autovalores  $a_i$  son reales.

Lo interesante es que, si el sistema se encuentra en un estado general  $|\psi\rangle$ , este puede descomponerse en la base ortonormal de autovectores de  $A$ :

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |i\rangle. \quad (1.23)$$

suponiendo que el espectro no es degenerado.

Entonces, la probabilidad de obtener el valor  $a_i$  al medir  $A$  sobre el estado  $|\psi\rangle$  es:

$$p_i = |\langle i|\psi\rangle|^2 = |c_i|^2. \quad (1.24)$$

El hecho de que los operadores asociados a observables sean hermíticos garantiza que sus autovalores sean reales, una condición esencial, pues estos representan los posibles resultados físicos de una medición.

El *Hamiltoniano*  $H$  es el observable asociado a la energía total del sistema. Cuando se mide la energía de un sistema en el estado  $|\psi\rangle$ , el resultado será, como ya hemos indicado, uno de los autovalores  $E_n$  del operador  $H$ , asociado al autovector  $|\phi_n\rangle$ :

$$H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle, \quad (1.25)$$

donde se ha supuesto que el espectro es no degenerado.

## 1.2 Matriz densidad y entrelazamiento

Hasta ahora solo hemos considerado casos en los que el estado de un sistema cuántico estaba completamente descrito por un solo estado  $|\psi\rangle$  en el correspondiente espacio de Hilbert. En la práctica, el estado  $|\psi\rangle$  no suele estar perfectamente determinado. Un ejemplo que podemos dar es el de un haz de átomos emitidos por fuente térmica: no sabemos exactamente la energía cinética de cada átomo, pero sí que sabemos la distribución que siguen estas. Solo sabemos que el sistema se encuentra en un estado al azar de un conjunto de estados puros

$$\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_m\rangle\}, \quad (1.26)$$

## 1. Marco teórico

con probabilidades  $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ , teniendo en cuenta que la suma de probabilidades debe ser la unidad. Esto que estamos escribiendo se llama *estado mezcla* de los estados  $|\psi_k\rangle$  con probabilidades  $p_k$ . Hacemos hincapié en que los estados de la colección no son necesariamente ortogonales.

Aquí conviene aclarar algunos conceptos respecto a lo expuesto. En primer lugar, un estado mezcla describe una situación en la que no se conoce con certeza el estado del sistema, sino que se sabe que se encuentra en uno de varios estados puros  $|\psi_k\rangle$ , cada uno con cierta probabilidad  $p_k$ . Esto no corresponde a una superposición cuántica, sino a una mezcla estadística de posibilidades.

Por ejemplo, pensemos en el estado de una moneda después de ser lanzada. Si asumimos que la moneda no está trucada, entonces hay un 50% de probabilidad de que muestre cara y un 50% de que muestre cruz. Esto no significa que la moneda esté en una superposición  $|\text{cara}\rangle + |\text{cruz}\rangle$ <sup>2</sup>, sino que no sabemos qué resultado ha salido, aunque conocemos la distribución de probabilidad sobre los posibles estados.

Por tanto, es importante no confundir un estado mezcla con una superposición de estados. Una superposición del tipo

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |\psi_k\rangle, \quad |c_k|^2 = p_k, \quad (1.27)$$

implica que el sistema está en un estado cuántico bien definido  $|\psi\rangle$ , aunque sea una combinación lineal de estados con su interpretación probabilística. En cambio, decir que el sistema está con probabilidad  $p_k$  en el estado  $|\psi_k\rangle$  corresponde a una descripción probabilística clásica, una distribución de probabilidad.

Por último, recordamos que un estado puro es aquel que está completamente descrito por un único vector del espacio de Hilbert, es decir, por un ket  $|\psi\rangle$ . Un ejemplo de esto puede ser un qubit de estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle). \quad (1.28)$$

Esta diferencia entre un estado puro y un estado mezcla nos deja con una pregunta bastante natural: si no podemos describir el sistema con un único ket, ¿cómo lo hacemos? ¿Existe alguna herramienta matemática que nos permita representar este tipo de situaciones probabilísticas dentro del formalismo de la cuántica?

La respuesta a esta pregunta viene dada por la *matriz densidad* (u *operador densidad*), y es justo lo que necesitamos para describir de forma general tanto estados puros como estados mezcla. Se trata de un objeto que encapsula toda la información estadística del

---

<sup>2</sup>Suponiendo estados normalizados y coeficientes de igual módulo.

### 1. Marco teórico

sistema y que, además, resulta ser tremendamente útil cuando tratamos con subsistemas, por ejemplo. Con este fin introducimos la matriz densidad  $\rho$  definida por

$$\rho \equiv \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|. \quad (1.29)$$

Vayamos antes con un ejemplo para ilustrar esta. Recordemos el ejemplo de la moneda lanzada que mencionamos unos párrafos atrás. Sabemos que, tras el lanzamiento, la moneda puede caer en dos posibles estados: cara o cruz.

Si como base ortonormal  $\{|+\rangle, |\times\rangle\}$ , donde  $|+\rangle$  representa a “cara” y  $|\times\rangle$  representa “cruz”, la matriz densidad del sistema será:

$$\rho = \frac{1}{2}|+\rangle\langle+| + \frac{1}{2}|\times\rangle\langle\times| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

El operador matriz densidad presenta unas propiedades que son convenientes nombrar:

- $\rho$  es hermítico. Esto se puede ver rápidamente teniendo en cuenta que la expresión de  $\rho$  es una combinación lineal convexa de proyectores.
- $\rho$  tiene traza unidad. Esto se debe a las propiedades de la distribución de probabilidad:

$$\text{Tr } \rho = \text{Tr } \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| = \sum_k p_k \text{Tr } |\psi_k\rangle\langle\psi_k| = \sum_k p_k = 1, \quad (1.31)$$

donde  $\text{Tr } |\psi_k\rangle\langle\psi_k| = \langle\psi_k|\psi_k\rangle = 1$ .

- $\rho$  es un operador no-negativo. Esto es, que para cualquier  $|\phi\rangle$  en  $\mathcal{H}_S$ ,  $\langle\phi|\rho|\phi\rangle \geq 0$ :

$$\langle\phi|\rho|\phi\rangle = \left\langle\phi\left|\left(\sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|\right)\right|\phi\right\rangle = \sum_k p_k |\langle\phi|\psi_k\rangle|^2 \geq 0. \quad (1.32)$$

Por último, a cada estado puro,  $|\psi\rangle$ , se le puede asociar una matriz densidad,  $\rho_\psi$ , dada por  $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ , que es el proyector del mismo estado. Con esto en mente, ¿cómo sabemos si, dado un estado a través de una matriz densidad  $\rho$ , este es un estado mezcla o estado puro? La respuesta está en  $\rho^2$ . Para un estado puro se cumplirá que  $\text{Tr } \rho^2 = 1$ , mientras que para un estado mezcla,  $\text{Tr } \rho^2 < 1$ .



## 1. Marco teórico

### 1.2.1 Sistemas compuestos. Matriz densidad reducida

El formalismo de la matriz densidad resulta dar un comportamiento natural cuando tratamos de describir partes de un sistema compuesto. Consideremos un estado puro de un sistema bipartito. Este estado vive en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ , que es el producto tensorial de los espacios de Hilbert asociados a los subsistemas 1 y 2. Si  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , entonces

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |i\rangle_1 |j\rangle_2, \quad \sum_{i,j} |c_{ij}|^2 = 1, \quad (1.33)$$

donde  $|i\rangle_1$  es el vector  $i$ -ésimo de una base ortonormal correspondiente al subsistema 1, mientras que  $|j\rangle_2$  es el vector  $j$ -ésimo de una base ortonormal correspondiente al subsistema 2. El operador densidad correspondiente es

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{i,j} \sum_{i',j'} c_{ij} c_{i'j'}^* |i\rangle_1 |j\rangle_2 {}_1\langle i'| {}_2\langle j'| = \sum_{i,j} \sum_{i',j'} \rho_{ij;i'j'} |i\rangle_1 |j\rangle_2 {}_1\langle i'| {}_2\langle j'|, \quad (1.34)$$

donde

$$\rho_{ij;i'j'} \equiv {}_1\langle i| {}_2\langle j| \rho |i'\rangle_1 |j'\rangle_2. \quad (1.35)$$

Cuando tenemos sistemas compuestos, los operadores que actúan sobre cada parte se extienden al sistema completo. Sea  $A_1$  el operador que actúa sobre  $\mathcal{H}_1$  y sea  $A$  la extensión de este al sistema completo  $\mathcal{H}$ . Definimos  $A \equiv A_1 \otimes I_2$  de forma que, dada la base del sistema compuesto  $\{|i\rangle \otimes |j\rangle\}$ , este operador actúa como

$$A(|i\rangle \otimes |j\rangle) = (A_1 \otimes I_2)(|i\rangle \otimes |j\rangle) = (A_1|i\rangle) \otimes (I_2|j\rangle) = (A_1|i\rangle) \otimes |j\rangle. \quad (1.36)$$

Podemos introducir ahora la matriz densidad reducida

$$\rho_1 \equiv \text{Tr}_2 \rho, \quad (1.37)$$

donde  $\text{Tr}_2$  denota la traza parcial sobre el subsistema 2:

$$\text{Tr}_2 \rho \equiv \sum_j {}_2\langle j| \rho |j\rangle_2. \quad (1.38)$$

Los elementos de  $\rho$  en la base  $\{|i\rangle_1\}$  vienen por

$$(\rho_1)_{ii'} = {}_1\langle i| \rho_1 |i'\rangle_1 = \sum_j \rho_{ij;i'j}. \quad (1.39)$$

### 1. Marco teórico

Veamos un ejemplo de esto, retomemos el estado de Bell dado en (1.3)

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (1.40)$$

La matriz densidad de este es

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} (|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|), \quad (1.41)$$

que, en forma matricial, en la base  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ , tiene la forma

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

La matriz densidad reducida del primer qubit,  $\rho_1$ , resulta ser

$$\rho_1 = \text{Tr}_2 \rho = \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2} I_1, \quad (1.43)$$

donde

$$\begin{aligned} (\rho_1)_{00} &= \rho_{00;00} + \rho_{01;01} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}, \\ (\rho_1)_{01} &= \rho_{00;10} + \rho_{01;11} = 0 + 0 = 0, \\ (\rho_1)_{10} &= \rho_{10;00} + \rho_{11;01} = 0 + 0 = 0, \\ (\rho_1)_{11} &= \rho_{10;10} + \rho_{11;11} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Del mismo modo, se obtiene que  $\rho_2 = \frac{1}{2} I_2$ . Con este ejemplo hemos visto que, partiendo de un estado puro como es el estado de Bell ( $\text{Tr} \rho^2 = 1$ ), la matriz densidad reducida de una de las partes resulta ser un estado mezcla ( $\text{Tr} \rho_1^2 = \text{Tr} \rho_2^2 = 1/2 < 1$ ).

#### 1.2.2 Entrelazamiento

Hemos visto que, incluso si un sistema compuesto se encuentra en un estado puro, al observar solo una de sus partes el estado que obtenemos puede ser un estado mezcla. Esta es una de las manifestaciones más sorprendentes de la mecánica cuántica y está relacionada con el fenómeno del *entrelazamiento cuántico*. Se trata de una correlación no clásica entre las partes de un sistema, que no puede explicarse simplemente a partir de las propiedades individuales de cada subsistema.

Formalmente, un estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  se dice *entrelazado* si no puede escribirse como un producto de la forma

### 1. Marco teórico

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle, \quad (1.45)$$

donde  $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$  y  $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$  son estados de cada subsistema por separado. Si tal factorización es posible, el estado se llama separable o no entrelazado. En este caso, cada subsistema se puede describir mediante su propio estado puro y, al tomar la traza parcial, se conserva la pureza:  $\text{Tr}\rho_1^2 = \text{Tr}\rho_2^2 = 1$ .

Sin embargo, la mayoría de los estados no pueden expresarse como un producto de este tipo. Aunque el sistema completo se encuentre en un estado puro, los subsistemas se comportan como si estuvieran en un estado mezcla cuando se consideran por separado:

$$\text{Tr}(\rho^2) = 1, \quad \text{pero} \quad \text{Tr}(\rho_1^2) < 1, \quad \text{Tr}(\rho_2^2) < 1. \quad (1.46)$$

El estado de Bell es un ejemplo: no puede escribirse como un producto de estados individuales y, al hacer la traza parcial sobre uno de los subsistemas, se obtiene un estado completamente mezclado.

## 1.3 Medidas de entrelazamiento

Una vez introducido el concepto de entrelazamiento, surge la necesidad de cuantificarlo. En el caso de estados puros bipartitos, una de las formas más habituales y útiles de medir el grado de entrelazamiento es a través de la entropía de von Neumann de las matrices densidad reducidas.

### 1.3.1 Entropía de von Neumann

La entropía introducida por von Neumann permite, de manera directa, distinguir entre estados puros y estados mezcla. Sea  $\rho$  una matriz densidad, se define la entropía  $S$  mediante la expresión:

$$S = -k_B \text{Tr}(\rho \ln \rho), \quad (1.47)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann. Como  $\rho$  es un operador hermítico, puede ser diagonalizado: si  $\lambda_k$  son sus autovalores, entonces la expresión anterior se escribe como:

$$S = -k_B \sum_k \lambda_k \ln \lambda_k. \quad (1.48)$$

Dado que todos los autovalores de  $\rho$  se encuentran en el intervalo  $[0, 1]$ , se cumple que  $S \geq 0$ , con igualdad si y solo si  $\rho$  tiene un único autovalor igual a 1 y el resto nulos. En

### 1. Marco teórico

ese caso,  $\rho$  es un proyector y representa un estado puro. En caso contrario,  $\rho$  describe un estado mezcla, y la entropía será estrictamente positiva.

Esta entropía de von Neumann se convierte en una herramienta clave para cuantificar el entrelazamiento cuántico cuando se aplica a la matriz densidad reducida de un subsistema. En ese contexto, se conoce como entropía de entrelazamiento, y permite medir cuán correlacionado está dicho subsistema con el resto del sistema. Un valor nulo de esta entropía indica que el subsistema no está entrelazado con el resto (estado producto), mientras que un valor positivo refleja la presencia de correlaciones cuánticas no locales.

Una extensión útil de esta idea es la información mutua, que permite cuantificar todas las correlaciones entre dos subsistemas  $A$  y  $B$ . Se define como:

$$\mathcal{I}(\mathcal{A} : \mathcal{B}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}), \quad (1.49)$$

donde  $\rho_A$  y  $\rho_B$  son las matrices densidad reducidas de cada subsistema, y  $\rho_{AB}$  es la del sistema conjunto. Esta cantidad es no negativa y, en el caso en el que el sistema total sea puro, la información mutua se reduce al doble de la entropía de entrelazamiento.

#### 1.3.2 Monogamia de entrelazamiento

Una propiedad fundamental del entrelazamiento cuántico es su carácter monógamo: si un sistema cuántico  $A$  está máximamente entrelazado con un sistema  $B$ , no puede estar entrelazado con un tercer sistema  $C$ . Esta restricción contrasta fuertemente con las correlaciones clásicas, que pueden compartirse libremente entre múltiples sistemas.

Para ver esto, necesitamos introducir una magnitud nueva, el *tangle*  $\tau_{AB}$ , siendo  $A$  y  $B$  un par de qubits. Sea  $\rho_{AB}$  la matriz densidad del par y sea  $\tilde{\rho}_{AB}$  la matriz *spin-flipped* definida por

$$\tilde{\rho}_{AB} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho_{AB}^* (\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad \text{con } \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

donde el asterisco denota la conjugación compleja en la base  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  y  $\sigma_y$ , una de las matrices de Pauli, expresada en la misma base. Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\lambda_4$  las raíces cuadradas de los autovalores, en orden decreciente, de la matriz  $\rho_{AB}\tilde{\rho}_{AB}$ , entonces

$$\tau_{AB} = [\max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}]^2. \quad (1.51)$$

La definición de *tangle* es una medida del entrelazamiento para estados mezcla, de manera que un valor de  $\tau = 0$  se corresponde con un estado no entrelazado, mientras que un valor de  $\tau = 1$  se corresponde con un estado maximamente entrelazado.

## 1. Marco teórico

El carácter monógamo que mencionábamos es, en realidad, una propiedad general: cuando dos sistemas físicos están máximamente entrelazados, un principio de exclusión mutua hace imposible entrelazarlos con un tercer sistema. Matemáticamente, esta propiedad se expresa con la desigualdad de Coffman-Kundu-Wooters [6]:

$$\tau_{AB} + \tau_{AC} \leq \tau_{A(BC)}. \quad (1.52)$$

Esta desigualdad puede interpretarse así: el qubit  $A$  tiene cierta cantidad total de entrelazamiento con el sistema compuesto  $BC$ . Esta cantidad limita la suma del entrelazamiento que  $A$  puede compartir con  $B$  y con  $C$  individualmente, de modo que el entrelazamiento que  $A$  tiene con  $B$  no está disponible para  $C$ .

## 1.4 Entropía y Área<sup>3</sup>

Hasta ahora, los conceptos desarrollados pertenecen al ámbito teórico habitual de cualquier curso de mecánica cuántica: operadores densidad, estados entrelazados, medidas de entrelazamiento, etc. Sin embargo, a partir de este punto se abren nuevas perspectivas que conectan el entrelazamiento con aspectos más profundos de la física contemporánea. Uno de los resultados más sorprendentes y relevantes en este sentido es la *Ley del Área del Entrelazamiento*, que establece una relación directa entre la entropía de entrelazamiento de un sistema y la superficie que separa sus subsistemas.

Contrariamente a la expectativa de que la entropía, al ser una cantidad extensiva, debería crecer con el volumen de una región, en muchos sistemas físicos, particularmente en los estados fundamentales de sistemas cuánticos de muchos cuerpos con interacciones locales, la entropía de una subregión a menudo crece proporcionalmente al área de su frontera. La ley del área se basa en observar cómo la entropía de entrelazamiento en estados de baja energía de Hamiltonianos locales (en concreto, el estado fundamental) escala con el tamaño de una región.

Esta idea cobró gran relevancia debido a una sugerente conexión con la entropía de los agujeros negros ([1]), que también es proporcional al área del horizonte de sucesos. Esta similitud formal ha sido una motivación para estudiar las leyes de área en la entropía de entrelazamiento en campos cuánticos y sistemas de materia condensada, [3].

La ley del área implica que la geometría del entrelazamiento coincide con la geometría de la interacción. Sin embargo, existen excepciones a esta ley de área, como el estado arcoíris (*rainbow state*) [16]. En estos casos, la geometría definida por el entrelazamiento puede diferir de la geometría sugerida por la conectividad definida por las interacciones locales

---

<sup>3</sup>Véanse [10] y [15] para un mayor desarrollo.

## 1. Marco teórico

del hamiltoniano. Esto lleva a una pregunta clave: dado un estado cuántico, ¿cuál es la geometría sugerida por su estructura de entrelazamiento?

### 1.5 *Entanglement Adjacency Matrix*

Una posible forma de responder a esta pregunta es construyendo una geometría emergente basada exclusivamente en los patrones de entrelazamiento presentes en el sistema. Con este objetivo se presenta la matriz de adyacencia de entrelazamiento (EAM), una herramienta que formaliza esta idea de conexión entre geometría y entrelazamiento, introducida en [12], [13] y [14]. El objetivo es definir una geometría a través de una matriz de adyacencia  $J$ , donde los elementos  $J_{ij}$  son positivos ( $J_{ij} > 0$ ) si los sitios  $i$  y  $j$  están conectados de alguna manera, y cero en caso contrario. Con esta matriz pretendemos establecer una relación con la entropía de von Neumann, de modo que, si  $A$  es un subconjunto del sistema que estamos considerando, su entropía venga dada por

$$S_A \approx \sum_{i \in A} \sum_{j \in \bar{A}} J_{ij}. \quad (1.53)$$

Cuando esta relación se cumple, la matriz  $J$  se denomina matriz de adyacencia de entrelazamiento del estado. Los elementos  $J_{ij}$  de esta matriz son conocidos como enlaces de entrelazamiento.

La EAM y los EL presentan una serie de propiedades relevantes:

- Interpretación física: Los elementos  $J_{ab}$  son aproximadamente la mitad de la información mutua entre un par de sitios  $a$  y  $b$ . Esto puede verse así: si  $S_a$  es la entropía de entrelazamiento del sitio  $a$ ,  $S_a = \sum_{j \neq a} J_{aj}$ . Si  $S_{ab}$  es la entropía de un bloque formado por los sitios  $a$  y  $b$ , se tiene:

$$S_{ab} = \sum_{j \neq a, b} (J_{aj} + J_{bj}) = S_a + S_b - 2J_{ab}, \quad (1.54)$$

por lo que la información mutua entre  $a$  y  $b$  resulta ser:

$$\mathcal{I}(a : b) = S_a + S_b - S_{ab} = 2J_{ab}. \quad (1.55)$$

- Si la relación de la EAM es exacta, el conocimiento sobre el entrelazamiento entre los sitios individuales y pares de sitios es suficiente para determinar el entrelazamiento de cualquier bloque.

## 1. Marco teórico

- Las entropías obtenidas mediante los elementos de la EAM satisfacen la desigualdad de subaditividad:

$$S_{AB} + S_{BC} \geq S_{ABC} + S_B, \quad (1.56)$$

siendo  $A$ ,  $B$  y  $C$  subconjuntos del sistema.

- La EAM es simétrica, puesto que  $J_{ij} = J_{ji}$ .

En resumen, la EAM y los EL constituyen una herramienta eficaz para representar la estructura del entrelazamiento de un estado cuántico. Al interpretar los elementos de la matriz como conexiones entre los distintos sitios del sistema, se obtiene una noción emergente de geometría basada únicamente en patrones de correlación cuántica.

De forma notable, en muchos casos esta geometría coincide con la que impone el propio hamiltoniano, es decir, los enlaces de entrelazamiento reflejan la misma estructura local que las interacciones físicas del sistema. Cuando esto ocurre, la ley del área se recupera de forma natural. A lo largo de este trabajo, nos centraremos en estudiar cómo se relacionan ambas geometrías en distintas configuraciones, identificando cuándo se respeta esta equivalencia y, especialmente, analizando los casos en los que se rompe para intentar comprender las razones detrás de dicha discrepancia.

# 2

## Metodología

### Contenidos

---

<b>2.1</b>	<b>Definición del modelo físico . . . . .</b>	<b>20</b>
2.1.1	Forma del Hamiltoniano . . . . .	22
2.1.2	Casos de prueba para la Ley del Área . . . . .	23
<b>2.2</b>	<b>Implementación computacional . . . . .</b>	<b>24</b>
2.2.1	Contrucción de la base . . . . .	25
2.2.2	Construcción del Hamiltoniano . . . . .	25
2.2.3	Diagonalización y obtención del estado fundamental . . . . .	27
2.2.4	Cálculo de la matriz densidad y cálculo de la EAM . . . . .	27
2.2.5	Limitaciones actuales . . . . .	29

---

En el capítulo anterior se han introducido los conceptos fundamentales para el estudio del entrelazamiento cuántico y su representación mediante la *Entanglement Adjacency Matrix*. En este capítulo se describe la metodología seguida para analizar en qué medida la geometría del entrelazamiento refleja la estructura de interacción del sistema, y para identificar y estudiar los casos en los que esta correspondencia falla.

El modelo considerado se basa en bosones duros, un tipo de sistema cuántico en el que las partículas obedecen estadísticas bosónicas, pero que están sujetas a una restricción de ocupación: solo se permite un bosón por sitio. Esta restricción hace que el sistema sea formalmente equivalente a una cadena de espines  $1/2$  o, de forma más general, a un sistema de qubits. Este tipo de modelos no solo es útil desde el punto de vista teórico, sino que aparece en contextos experimentales como gases de átomos ultrafríos en redes ópticas, [3]. La restricción de ocupación impuesta reduce drásticamente la dimensión del espacio



## 2. Metodología

de Hilbert, pasando de un crecimiento exponencial en la ocupación total permitida a uno restringido por la combinación de ocupaciones binarias (vacío/ocupado), lo que facilita el tratamiento numérico sin perder la riqueza estructural del entrelazamiento.

El procedimiento seguido en este trabajo consta de las siguientes etapas: En primer lugar, se construye un Hamiltoniano que describe la dinámica de bosones duros en diferentes geometrías, representadas mediante matrices de adyacencia. Posteriormente, se obtiene el estado fundamental del sistema mediante diagonalización numérica. A partir de este estado, se calcula la matriz de densidad y, con ella, la *Entanglement Adjacency Matrix*, que cuantifica el entrelazamiento entre pares de sitios.

Finalmente, se compara la estructura de la EAM con la de la red de conexiones físicas impuesta por el Hamiltoniano. El objetivo es identificar hasta qué punto el patrón de entrelazamiento refleja —o no— la geometría de interacción. Este análisis se enmarca en el contexto de la ley del área, una conjetura central en física cuántica que sugiere que el entrelazamiento en muchos sistemas físicos está fuertemente condicionado por la topología y la conectividad del sistema. Por tanto, este trabajo puede entenderse como una exploración de los límites y las condiciones en las que esta relación entre geometría y entrelazamiento se mantiene.

### 2.1 Definición del modelo físico

El modelo utilizado en este trabajo no es únicamente una construcción teórica, sino que aparece en contextos físicos concretos. En particular, sistemas de bosones duros como el considerado aquí se emplean para describir, como se ha comentado antes, gases de átomos ultrafríos en redes ópticas, donde es posible ajustar tanto la geometría de la red como las interacciones entre partículas. Esto permite estudiar de forma controlada la aparición de entrelazamiento en función de la conectividad del sistema, lo que justifica el uso de este modelo para explorar cómo la geometría influye en las correlaciones cuánticas.

El sistema estudiado está compuesto por  $N$  sitios, que corresponden a los nodos de una red de interacción. En cada sitio puede encontrarse, como máximo, una partícula: se trata de bosones duros, un tipo de partícula bosónica sometida a una restricción de ocupación que impide la presencia de más de un bosón por sitio. Esta condición hace que el sistema sea formalmente equivalente a una cadena de espines  $1/2$ , o a una red de qubits<sup>1</sup>, en la que cada sitio puede estar en uno de dos estados: ocupado,  $|1\rangle$ , o no ocupado,  $|0\rangle$ .

Trabajaremos en el régimen de *half-filling*, en el que exactamente la mitad de los sitios están ocupados por bosones. Es decir, para un sistema de  $N$  sitios, se trabaja únicamente con

---

<sup>1</sup>De aquí en adelante intercambiaremos sitios por qubits y qubits por sitios, indiferentemente.

## 2. Metodología

los estados que contienen exactamente  $N/2$  sitios ocupados, es decir,  $N/2$  bosones en nuestro sistema. Esta restricción reduce significativamente el tamaño del espacio de Hilbert. Sin embargo, aún no hemos contemplado qué dimensión tiene el espacio de Hilbert considerado.

El espacio de Hilbert completo del sistema es de dimensión  $2^N$ . Esto es porque cada qubit vive en un espacio de Hilbert de dimensión 2, con una base ortonormal que ya conocemos,  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ . Al tenerse  $N$  qubits, el sistema completo se describe mediante el producto tensorial de  $N$  espacios de dimensión 2, es decir,

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2 = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}, \quad (2.1)$$

por lo que, teniendo en cuenta la dimensión de  $\mathbb{C}^2$ , el espacio de Hilbert completo tiene dimensión  $2^N$ , con vectores  $|x_1 x_2 \cdots x_N\rangle$  y  $x_i \in \{0, 1\}$ . Sin embargo, cuando restringimos a *half-filling*, estamos considerando un subespacio dentro de este espacio total, formado solamente por los vectores que tienen exactamente  $N/2$  unos, o  $N/2$  sitios ocupados, o con un sistema de  $N$  sitios con  $N/2$  bosones duros en él.

La restricción de  $\mathcal{H}$  a los estados *half-filling* la denotaremos por  $\mathcal{H}_r$  y la dimensión de esta se puede ver mediante combinatoria. Ya que en este solamente se consideran los estados en los que exactamente la mitad de los qubits están en el estado  $|1\rangle$ , esto equivale a contar cuántas formas hay de distribuir  $N/2$  unos entre  $N$  posiciones. Este número viene dado por el coeficiente binomial:

$$\dim(\mathcal{H}_{\text{restr}}) = \binom{N}{N/2}. \quad (2.2)$$

A modo de ejemplo, para un sistema de  $N = 4$ , el subespacio *half-filling* del espacio de Hilbert completo se encuentra formado por 6 estados base. En la Figura 2.1 se pueden ver estos 6 estados.

Visto esto, lo siguiente es cómo estudiar los EL y la EAM en este espacio. Lo primero que haremos será construir nuestro Hamiltoniano.

## 2. Metodología

	1	2	3	4
$ 1100\rangle$	●	●	○	○
$ 1010\rangle$	●	○	●	○
$ 1001\rangle$	●	○	○	●
$ 0110\rangle$	○	●	●	○
$ 0101\rangle$	○	●	○	●
$ 0011\rangle$	○	○	●	●

**Figura 2.1:** Configuraciones *half-filling* para el caso  $N = 4$ .

### 2.1.1 Forma del Hamiltoniano

El Hamiltoniano considerado describe un sistema de bosones duros en el que las partículas pueden desplazarse entre sitios adyacentes, es decir, entre aquellos conectados por una arista en la red definida por la geometría del sistema. La dinámica está gobernada exclusivamente por estos procesos de *hopping*, sin interacciones adicionales entre partículas, más allá de la exclusión de múltiple ocupación impuesta por la condición de bosón duro.

La forma general del Hamiltoniano es

$$H = -\sum_{\langle i,j \rangle} C_{i,j} (a_i^\dagger a_j + a_j^\dagger a_i), \quad (2.3)$$

donde  $a_i^\dagger$  y  $a_i$  los operadores de creación y aniquilación sobre el qubit  $i$ , respectivamente. La suma recorre los pares de sitios  $\langle i, j \rangle$  que están conectados físicamente, es decir, aquellos para los cuales  $C_{i,j} \neq 0$  en la matriz de adyacencia del grafo que define la geometría del sistema. El coeficiente  $C_{i,j}$  representa la amplitud de *hopping* que tiene lugar entre los sitios  $i$  y  $j$ .

En la base que estamos utilizando, los operadores de creación y aniquilación locales tienen la forma:

$$a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

A partir de estos, los operadores  $a_i^{(\dagger)}$  sobre el sistema completo se construyen mediante productos de Kronecker:

$$a_i^{(\dagger)} = I_2 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes a_i^{(\dagger)} \otimes \cdots \otimes I_2 \otimes I_2. \quad (2.5)$$

## 2. Metodología

donde el operador  $a^{(\dagger)}$  actúa en la posición  $i$  y el resto son identidades.

Cada entrada no nula del Hamiltoniano conecta dos estados base que difieren únicamente en la posición de un único bosón, es decir, estados entre los que se ha producido un salto de una partícula entre dos sitios adyacentes.

Aunque en principio el Hamiltoniano se define en todo el espacio de Hilbert de dimensión  $2^N$ , en este trabajo se restringe su acción al subespacio de *half – filling*, formado por los estados con exactamente  $N/2$  partículas. En esta base restringida, el Hamiltoniano queda representado por una matriz de dimensión:

$$\binom{N}{N/2} \times \binom{N}{N/2}, \quad (2.6)$$

cuyas filas y columnas corresponden a configuraciones con ocupación total fija.

### 2.1.2 Casos de prueba para la Ley del Área

Para estudiar la relación entre la estructura de las interacciones físicas y el patrón de entrelazamiento cuántico, se han considerado distintas geometrías de interacción entre qubits. La selección de estas geometrías no es arbitraria: responde al objetivo de analizar el grado de cumplimiento de la Ley del Área del Entrelazamiento, que establece que las correlaciones cuánticas entre regiones de un sistema están determinadas por la frontera entre ellas, es decir, por la conectividad directa.

Con este objetivo, se han escogido configuraciones que presentan una diversidad de propiedades estructurales, tales como:

- Variación en la conectividad de los nodos (desde interacciones locales a globales),
- Presencia o ausencia de nodos centrales, que puedan concentrar el entrelazamiento,
- Ramificaciones o jerarquías estructurales, que afecten la distribución de entrelazamiento,
- Grado de simetría o desorden en la red.

Estos criterios permiten evaluar cómo se refleja la geometría de interacción en la *Entanglement Adjacency Matrix*, y explorar en qué condiciones se cumple —o se viola— la correspondencia esperada entre red física y estructura de entrelazamiento. El análisis concreto de cada una de estas geometrías se presenta en el capítulo siguiente, junto con los resultados obtenidos.

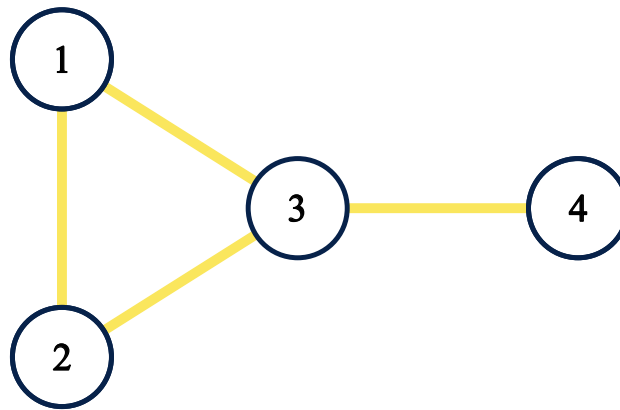
## 2.2 Implementación computacional

Para reproducir los resultados obtenidos en este trabajo, se ha desarrollado un código en Python, disponible públicamente a través de la plataforma [GitHub](#). En este apartado se describen los pasos necesarios para ejecutar simulaciones sobre diferentes geometrías (dentro de las capacidades del código), acompañados de un ejemplo ilustrativo –Figura 2.2– que servirá de guía para seguir el proceso paso a paso.

El proyecto está organizado en varios archivos `.py`, cada uno de los cuales se encarga de una parte concreta del análisis. Esta estructura facilita la claridad, el mantenimiento y la extensión del código. A continuación se describen brevemente los módulos principales:

- `qState.py`: contiene las funciones necesarias para generar la base de estados del sistema en estudio,
- `qOperator.py`: define los operadores de creación y aniquilación, así como el Hamiltoniano del sistema,
- `qFunctions.py`: módulo general que agrupa funciones de utilidad como el cálculo de autovalores, autoestados, entropía de von Neumann, entre otras,
- `qDensity.py`: se encarga del cálculo de matrices densidad,
- `qEAM.py`: implementa el cálculo de la *Entanglement Adjacency Matrix*,
- `plot.py`: incluye funciones de visualización utilizadas para representar gráficamente las estructuras de entrelazamiento.

El repositorio incluye también algunos archivos auxiliares empleados durante el desarrollo y la exploración de resultados, que, si bien no forman parte del núcleo del código, se mantienen por razones de transparencia y trazabilidad.



**Figura 2.2:** Grafo de conexión para seguir el ejemplo.

## 2. Metodología

### 2.2.1 Contrucción de la base

El primer paso en la implementación consiste en generar la base de estados del sistema en el régimen de half-filling. Para un sistema de  $N$  qubits, se consideran únicamente aquellos estados de ocupación que contienen exactamente  $N/2$  partículas, es decir, las configuraciones binarias con  $N/2$  unos y  $N/2$  ceros.

Estos estados se representan como cadenas binarias de longitud  $N$ , donde cada qubit indica si el sitio correspondiente está ocupado, 1, o vacío, 0. La construcción de esta base se realiza generando todas las combinaciones posibles con esa restricción de ocupación, lo que da lugar a una base de dimensión  $\binom{N}{N/2}$ .

Vayamos con el ejemplo de  $N = 4$ , Figura 2.1. Para obtener los estados con el código se ha de ejecutar el siguiente comando, que se encuentra en `qState.py`,

```
hf_states = nStates(n_qubits: 4, how_many: 2)
hf_names = generateNQubitsStates(n_qubits: 4, how_many: 2)
```

Resultado:

```
hf_states: [3, 5, 6, 9, 10, 12]
hf_names: ['0011', '0101', '0110', '1001', '1010', '1100']
```

Los parámetros de la función `n_qubits` y `how_many` hacen referencia al número de sitios y al número de bosones, respectivamente. Como en el ejemplo tenemos que  $N = 4$  sitios, y tendremos  $N/2$  bosones, estos son los valores que incluimos al ejecutar el comando. Aquí, los valores de `hf_states` y `hf_names` cobrarán sentido una vez construimos el hamiltoniano.

### 2.2.2 Construcción del Hamiltoniano

Una vez generada la base restringida al subespacio de *half-filling*, se construye el hamiltoniano del sistema teniendo en cuenta la geometría de interacción especificada en forma de matriz de adyacencia.

El procedimiento seguido es el siguiente:

1. Se identifican los pares de qubits  $(i, j)$  conectados físicamente,
2. Para cada par  $(i, j)$ , se recorre la base y se identifican los estados en los que un bosón puede saltar del sitio  $i$  al sitio  $j$ , o viceversa. Se construyen los términos  $a_i^\dagger a_j$  y  $a_j^\dagger a_i$  aplicados a cada estado base y se añade su contribución al hamiltoniano,
3. Se construye la matriz del espacio completo que, posteriormente, se reducirá debido a la restricción que estamos imponiendo.

## 2. Metodología

En nuestro ejemplo, Figura 2.1, se ve que los qubits 1, 2 y 3 están conectados entre sí formando un triángulo y, además, el 3 se conecta con el 4. Para poder escribir el hamiltoniano correspondiente al sistema, siguiendo la expresión (2.3), tenemos que ejecutar el siguiente comando

```
sparseConnectOp(n_qubits: 4, ls1: [1,2], ls2: [3]) +  
    sparseConnectOp(n_qubits: 4, ls1: [1], ls2: [2]) +  
    sparseConnectOp(n_qubits: 4, ls1: [3], ls2: [4])
```

Resultado:

Coords	Values
(1, 2)	1.0
(2, 1)	1.0
(2, 4)	1.0 ...

El comando `sparseConnectOp` se encuentra en `qOperator.py` y me permite conectar los qubits que hay en los parámetros:

- `ls1`: primera lista de qubits,
- `ls2`: segunda lista de qubits,

de forma que se enlazan todos los qubits de `ls1` con todos los de `ls2`. Por esa razón escribimos `sparseConnectOp(4, [1,2], [3])`, ya que los qubits 1 y 2 están conectados con el qubit 3. Además, como en nuestro caso, cada enlace tiene la misma intensidad, no hay que cuantificar ninguno de estos enlaces. En el caso en el que haya una conexión entre qubits que sea más intensa, habría que cuantificarlo multiplicando por un escalar, es decir, ajustar el respectivo coeficiente  $C_{ij}$ . Es importante aclarar que no hay direccionalidad en las conexiones, por lo que el orden entre `ls1` y `ls2` es indiferente.

El resultado de este comando es la matriz del hamiltoniano del espacio completo, pero no del subespacio *half-filling*. Además, los valores son positivos, y el hamiltoniano tiene claramente un signo negativo en la expresión (2.3). Teniendo esto en cuenta, hay que restringir este hamiltoniano recién calculado al subespacio de interés. Esto se realiza mediante el siguiente comando:

```
H_hf = -H[hf_states, :].tocsc()[:, hf_states].tocsr()
```

Resultado:

Coords	Values
(0, 1)	-1.0
(0, 3)	-1.0
(1, 0)	-1.0 ...

## 2. Metodología

donde  $H$  es el hamiltoniano construido previamente, y `hf_states` son las filas y columnas que hacen referencia a los estados en los que estamos interesados. De esta forma obtenemos la matriz en el subespacio *half-filling*. Esta matriz tiene la forma siguiente:

	0011	0101	0110	1001	1010	1100
0011	0.0	-1.0	0.0	-1.0	0.0	0.0
0101	-1.0	0.0	-1.0	-1.0	0.0	0.0
0110	0.0	-1.0	0.0	0.0	-1.0	-1.0
1001	-1.0	-1.0	0.0	0.0	-1.0	0.0
1010	0.0	0.0	-1.0	-1.0	0.0	-1.0
1100	0.0	0.0	-1.0	0.0	-1.0	0.0

### 2.2.3 Diagonalización y obtención del estado fundamental

Una vez ya tenemos nuestro hamiltoniano, el siguiente paso es obtener el estado fundamental de este. Para ello necesitamos obtener el autovalor más pequeño de la matriz y su correspondiente autoestado. Esto se podrá hacer de la siguiente forma:

```
hf_val, hf_vec = sparseEigen(H_hf)
```

Resultado:

```
hf_val: [-2.73205081]
hf_vec: [[-0.32505758]
         [-0.44403692]
         [-0.44403692]
         [-0.44403692]
         [-0.44403692]
         [-0.32505758]]
```

El comando `sparseEigen()` se encuentra en `qFunctions.py` y recibe como argumento la matriz del hamiltoniano. Este comando hace referencia a la función `eigsh` de la librería `scipy` y nos devuelve el autovalor más pequeño, junto a su autovector, normalizado, correspondiente.

El estado fundamental así obtenido se utilizará para construir la matriz densidad de este y, posteriormente, para el cálculo de la EAM.

### 2.2.4 Cálculo de la matriz densidad y cálculo de la EAM

Una vez obtenido el estado fundamental, se procede al análisis del entrelazamiento entre pares de qubits, la EAM. Para ello calculamos previamente la matriz densidad y, a partir de esta, la EAM. Computacionalmente esto se realiza en unos simples pasos:



## 2. Metodología

```
hf_density = pandas.DataFrame(numpy.outer(hf_vec, hf_vec),  
                                index=hf_names, columns=hf_names)  
hf_EAM = EAM(hf_density)
```

Resultado:

hf_EAM:	1	2	3	4
1	0.000000	0.362054	0.187575	0.187575
2	0.362054	0.000000	0.187575	0.187575
3	0.187575	0.187575	0.000000	0.362054
4	0.187575	0.187575	0.362054	0.000000

El primer paso se trata de calcular la matriz densidad asociada al estado fundamental, y queda registrada bajo el nombre `hf_density`. Esto lo realizamos multiplicando el vector del estado fundamental consigo mismo en un producto tensorial. La EAM se calcula con el comando `EAM()`, que se encuentra en `qEAM.py`, y toma como argumento la matriz densidad previamente calculada. Este comando calcula todas las matrices densidad reducidas con respecto a cada qubit y a cada par de qubits y obtiene las entropías correspondientes para construir la EAM.

La matriz densidad la podemos visualizar con el comando `eam_plot()`, que se encuentra en `plot.py`. De esta forma, la EAM la podemos ver como una matriz de adyacencia dada por la Figura 2.3.

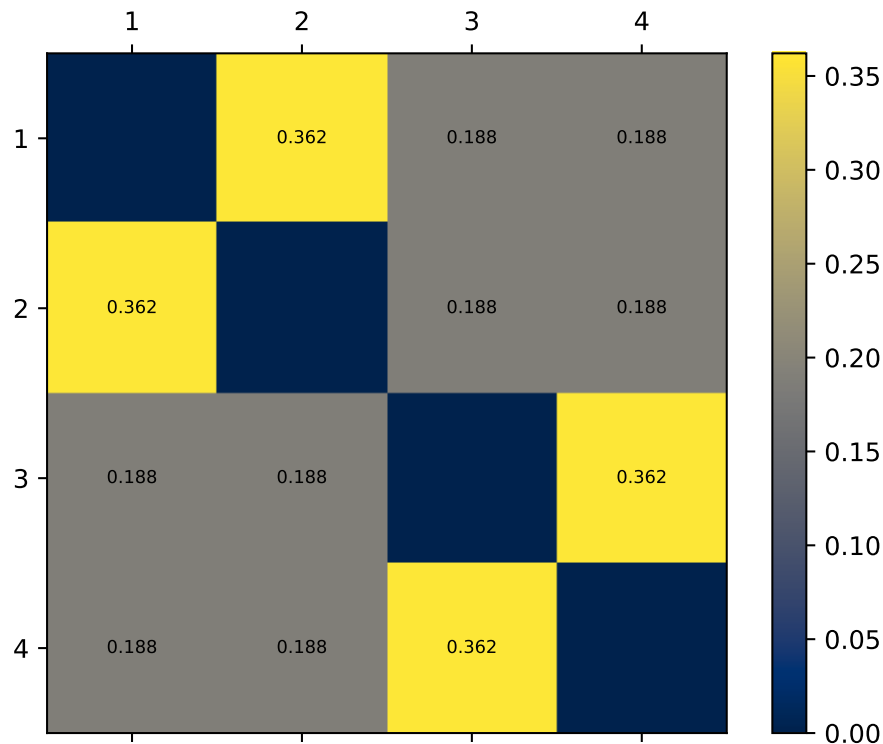


Figura 2.3: EAM obtenida con el ejemplo de  $N = 4$ .

### 2.2.5 Limitaciones actuales

A pesar de haber implementado el modelo utilizando matrices dispersas para optimizar la eficiencia computacional, el crecimiento del espacio de estados en el régimen de *half-filling* impone una limitación práctica en el número de qubits que pueden simularse. En particular, la dimensión de la base crece de forma exponencial con el número total de qubits  $N$ , ya que está dada por el coeficiente binomial  $d = \binom{N}{N/2}$ . Por ejemplo, para  $N = 12$ , ya se tienen 924 estados; para  $N = 14$ , la dimensión asciende a 3432.

Este crecimiento afecta tanto al almacenamiento en memoria como al tiempo de cómputo requerido para construir el Hamiltoniano, diagonalizarlo y calcular las matrices de densidad parciales. Aunque el uso de estructuras dispersas permite reducir significativamente el uso de memoria en comparación con matrices densas, el proceso de diagonalización sigue siendo costoso a partir de cierto umbral. Por ejemplo, hagamos una estimación de la complejidad computacional al calcular la EAM: La matriz densidad que usamos en el cálculo de la EAM tiene dimensión  $d \times d$ .

Al calcular las matrices densidad reducidas,  $\rho_i$  y  $\rho_{ij}$ , la atención está puesta en calcular  $\rho_{ij}$ , porque hay que realizarlo para cada par de qubits. Es bueno comentar, que en todo el proceso aprovechamos la simetría de las matrices. Entonces, reducir  $\rho \in \mathbb{C}^{d \times d}$  a una  $\rho_{ij} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  requiere recorrer todas las filas y columnas de  $\rho$ , por lo tanto la complejidad al calcular  $\rho_{ij}$  se puede estimar en  $\mathcal{O}(d^2)$ . Como este proceso se realiza  $N(N - 1)/2$ , la complejidad del proceso podría estimarse a

$$\mathcal{O}\left(\frac{N(N-1)}{2} \binom{N}{N/2}^2\right) \approx \mathcal{O}\left(\frac{N^2}{2} \binom{N}{N/2}^2\right). \quad (2.7)$$

Se ha comentado previamente que se parte desde el cálculo de la EAM, sin haber tenido en consideración los procesos previos, que también son costosos, aunque se ha conseguido optimizar al máximo. La estimación hecha no es nada rigurosa, sino que es una aproximación, con alguna que otra simplificación, para dar cuenta de la complejidad computacional de los cálculos. Por lo que es posible que la complejidad sea mayor a la que aquí se ha expuesto, por las simples razones que hemos indicado.

Con la implementación actual, el límite práctico se sitúa en torno a  $N \approx 13$  qubits, dependiendo de la máquina y del número de geometrías evaluadas, tardando unos 2 – 3 minutos en el proceso. Este tamaño,  $N = 13$  es, no obstante, suficiente para observar los patrones de entrelazamiento y estudiar el efecto de la geometría en sistemas de tamaño moderado, que es el objetivo principal de este trabajo.

Además, el proyecto incluye algunas funciones que aún se encuentran en desarrollo y que podrían ayudar a superar estas limitaciones en el futuro. Entre ellas, se están explorando

## *2. Metodología*

alternativas para construir directamente el Hamiltoniano restringido al subespacio de half-filling, así como métodos más eficientes para el cálculo de las trazas parciales. Estas mejoras tienen el potencial de ampliar la escala de simulaciones abordables y reducir significativamente los tiempos de ejecución.

El código está disponible públicamente y se agradecen tanto sugerencias como contribuciones que puedan mejorar o extender la funcionalidad del proyecto.

# 3

## Geometrías y resultados

### Contenidos

---

<b>3.1 Geometrías estudiadas</b>	<b>32</b>
Geometría puente	35
Geometría de las dos torres	36
Geometría túnel	38
Geometría estrella	39
Geometría del benceno	40
Geometría árbol	42
<b>3.2 Comparación de los resultados</b>	<b>43</b>
<b>3.3 Más allá de la Ley del Área</b>	<b>44</b>
Distribución global del entrelazamiento	44
Emergencia de enlaces nuevos	45

---

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a partir de la metodología descrita en el capítulo anterior. Se han estudiado distintas geometrías de interacción entre sitios en un sistema de bosones duros, con el objetivo de analizar cómo estas afectan a la distribución del entrelazamiento en el estado fundamental.

Para cada geometría considerada se ha calculado la matriz de adyacencia de entrelazamiento. Estas matrices se comparan visual y estructuralmente con las correspondientes matrices de adyacencia físicas, que describen la topología de interacciones del sistema.

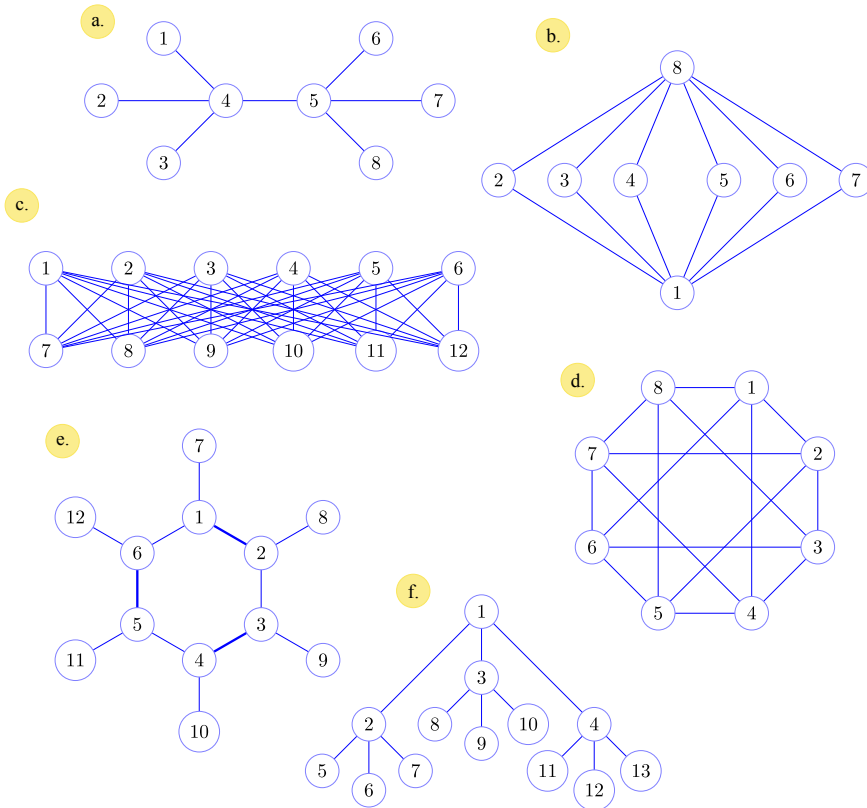
Se analizan diferentes aspectos como la aparición o ausencia de correlaciones entre sitios no conectados físicamente, la distribución global del entrelazamiento, y el papel de la monogamia del entrelazamiento como principio limitante en la formación de estructuras altamente correlacionadas, con el objetivo de ver los límites de la ley del área.

### 3.1 Geometrías estudiadas

En esta sección se presentan los diferentes casos de estudio analizados, cada uno correspondiente a una geometría específica de interacción entre sitios. Las geometrías que aquí se muestran han sido seleccionadas a partir de un conjunto más amplio de configuraciones exploradas, por resultar especialmente representativas o interesantes en relación con la estructura del entrelazamiento cuántico.

Para cada caso, se describe la topología de interacciones mediante su matriz de adyacencia y el grafo correspondiente. A continuación, se calcula el estado fundamental del sistema y se obtiene la matriz de adyacencia de entrelazamiento asociada. La comparación entre ambas matrices permite estudiar en qué medida la geometría del entrelazamiento refleja la geometría física del sistema.

Algunos ejemplos exhiben una concordancia notable entre ambas estructuras, de acuerdo con la ley del área del entrelazamiento, mientras que otros presentan discrepancias que motivan un análisis más detallado, que se señala en la sección siguiente.



**Figura 3.1:** Algunas de las geometrías de estudio: a. Geometría puente; b. Geometría de las dos torres; c. Geometría túnel; d. Geometría estrella; e. Geometría del benceno; f. Geometría árbol.

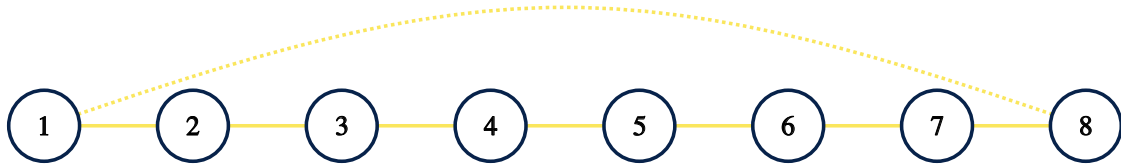
### 3. Resultados

En la Figura 3.1 podemos ver las geometrías mediante grafos de conexión que hemos considerado en el estudio. Empecemos, entonces, con el análisis de las geometrías.

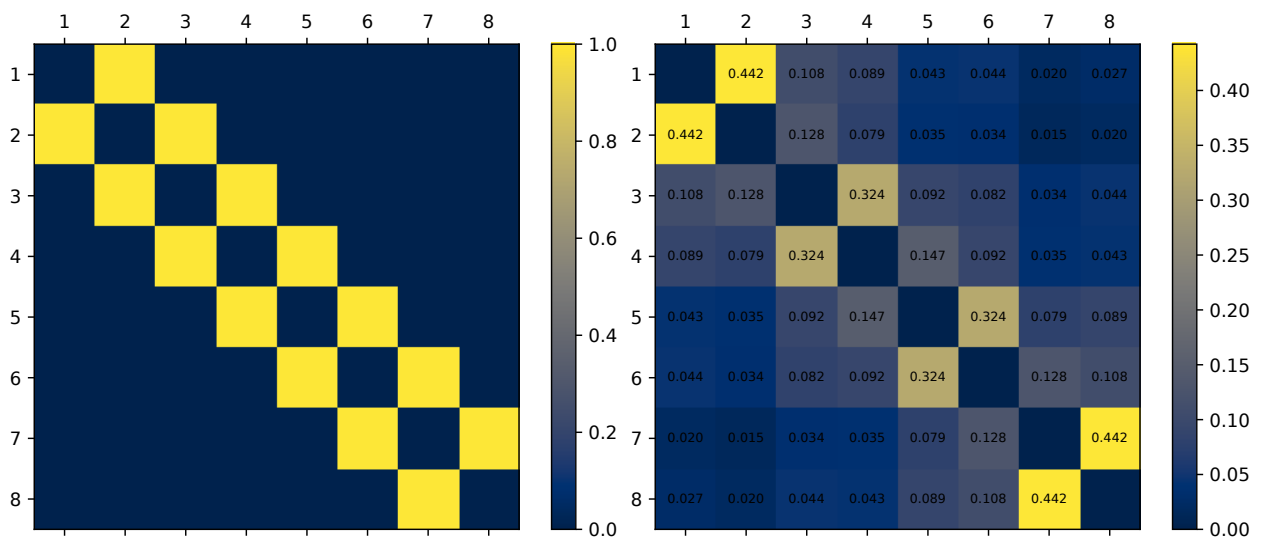
Comencemos el estudio con unas geometrías sencillas que puedan ilustrar la Ley del Área. Sea un conjunto de 8 qubits dispuestos en una cadena lineal, en el que cada qubit está relacionado con sus vecinos próximos. Consideremos también el caso en el que la cadena es periódica. Podemos ver el grafo de la situación en la Figura 3.2.

Veamos los casos en los que la cadena es o no es periódica. En el caso en el que la cadena no sea periódica, podemos observar los resultados de la Figura 3.3. En esta, la EAM se asemeja a lo que muestra la matriz de adyacencia de las conexiones entre los qubits, confirmando así que la ley del área implica la semejanza entre la matriz de adyacencia y la EAM.

Por su parte, cuando la cadena es periódica, encontramos aún más concordancia entre la EAM y la matriz de adyacencia, como se puede ver en la Figura 3.4. En este caso la distribución del entrelazamiento en la EAM tiene mayor simetría que en el caso de la cadena no periódica, resultando en una mayor semejanza con el grafo de conexión.

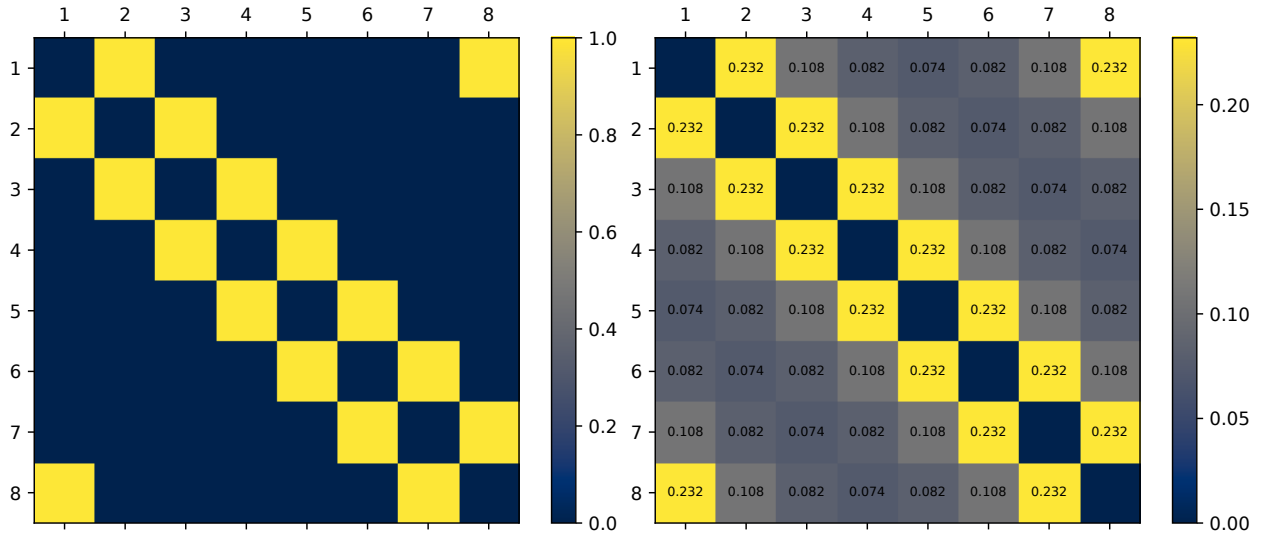


**Figura 3.2:** Grafo de la cadena lineal. La línea discontinua cierra la cadena.



**Figura 3.3:** Matriz de adyacencia y EAM de la cadena lineal simple.

### 3. Resultados

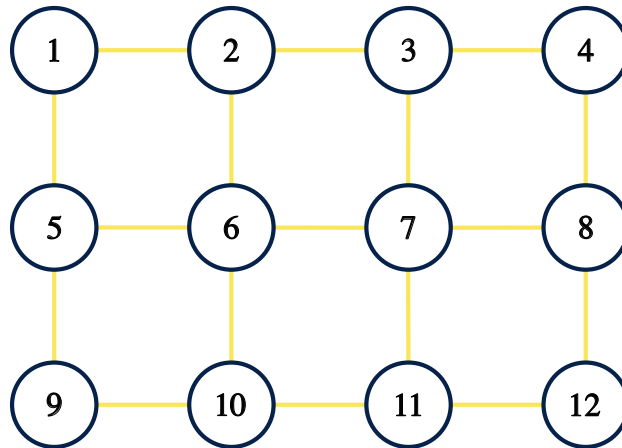


**Figura 3.4:** Matriz de adyacencia y EAM de la cadena lineal periódica.

Las semejanzas que hay entre las EAM y las matrices de adyacencia en los casos de la cadena simple apoyan la ley del área del entrelazamiento: ambas matrices son similares. Vayamos con otro caso que nos permita ver también esta concordancia. Tratamos ahora con una disposición de  $3 \times 4$  qubits en un plano distribuidos como se muestra en la Figura 3.5. En este caso, la distribución de qubits forma una especie de red con conexiones de qubits que son vecinos próximos.

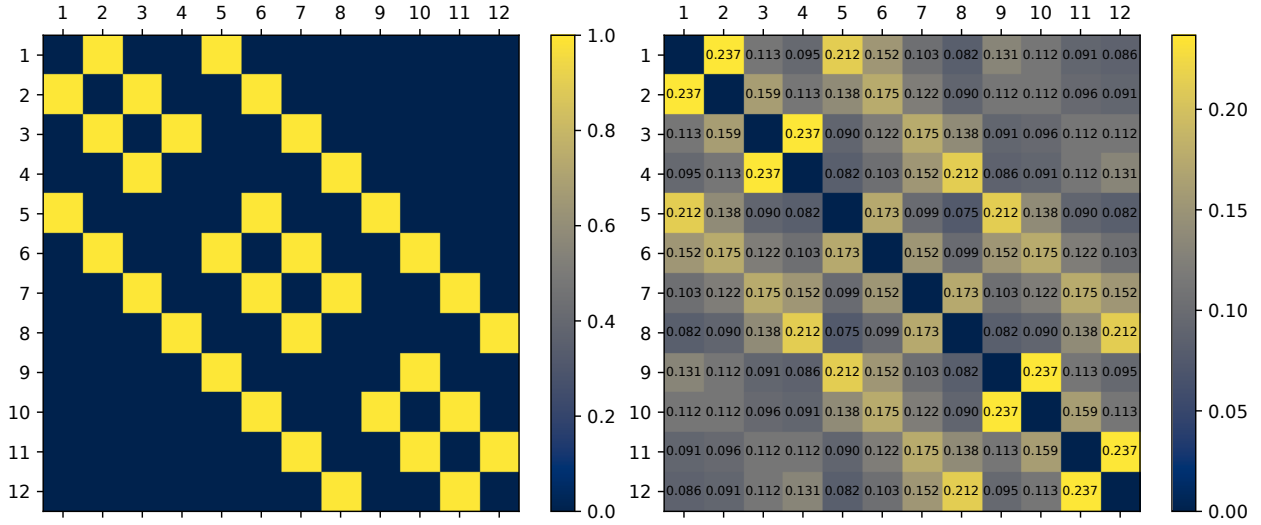
La EAM resultante, Figura 3.6, refleja bastante bien la matriz de adyacencia, por lo que en este caso, también, podemos observar que se cumple la ley del área.

Con estos ejemplos sencillos, damos lugar a geometrías que exponen los límites de la ley del área. En estos casos, además de añadir el grafo correspondiente, que se puede encontrar en la Figura 3.1, incluiremos un grafo extra que muestre los *nuevos* enlaces que se muestran en la EAM, con la intentación de ilustrar cómo se conectan los qubits a través de la EAM.



**Figura 3.5:** Matriz de adyacencia y EAM de una distribución de  $3 \times 4$  qubits.

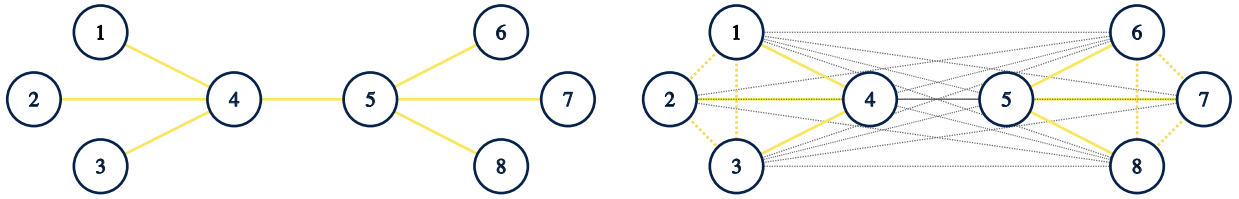
### 3. Resultados



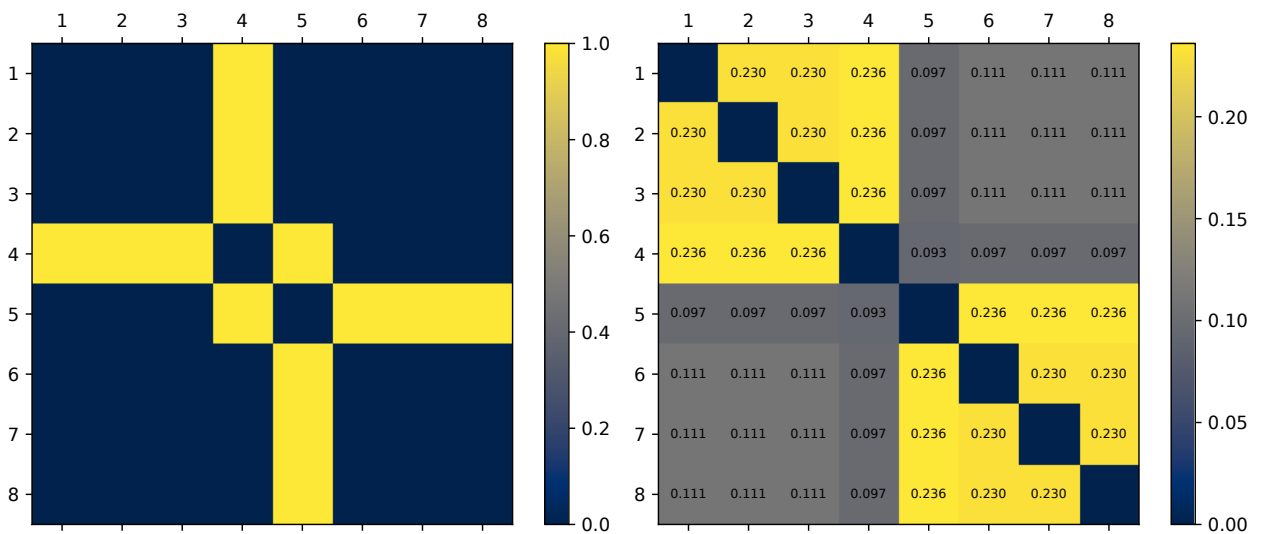
**Figura 3.6:** Matriz de adyacencia y EAM de una distribución de  $3 \times 4$  qubits.

### Geometría puente

La geometría puente presenta dos regiones acopladas mediante un enlace entre los qubits 4 y 5, funcionando como un puente entre ambas mitades. A la izquierda de la Figura 3.7 podemos ver esta geometría.



**Figura 3.7:** Comparación de los grafos de conexión de la geometría puente.



**Figura 3.8:** Matriz de adyacencia y EAM de la geometría puente.



### 3. Resultados

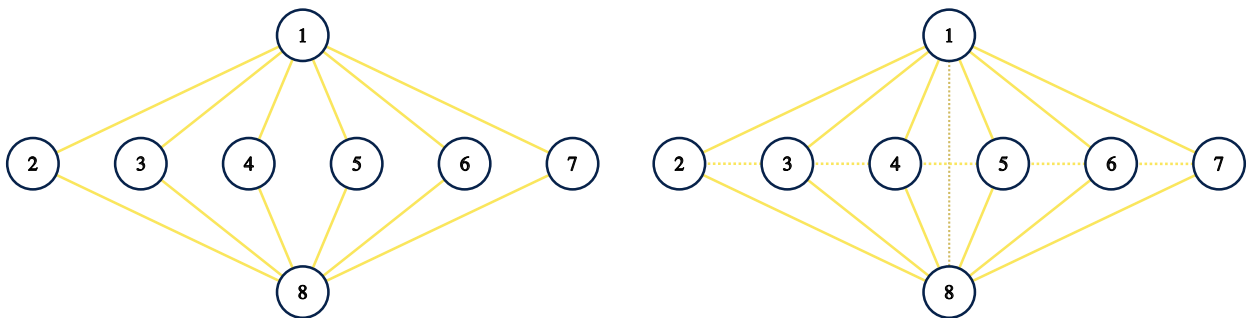
Los resultados sobre la EAM (ver Figura 3.8) muestran aspectos bastante interesantes a la hora de estudiar esta geometría. Entre ellos podemos comentar lo siguiente:

- El enlace físico entre los qubits 4 y 5, que actúa como conexión central, se debilita en la EAM, siendo el más débil de todos los presentes. Esto sugiere un posible efecto de desentrelazamiento.
- En contraste, los enlaces entre el qubit 4 y los qubits 1, 2 y 3 (y análogamente entre el 5 y 6, 7, 8) aparecen fuertemente entrelazados, en concordancia con la conectividad física.
- Se observa, además, entrelazamiento entre qubits que no están directamente conectados, como entre los del grupo  $\{1, 2, 3\}$  y entre  $\{6, 7, 8\}$ .
- Incluso aparecen enlaces entre qubits separados, como 1 y 6, indicando la propagación del entrelazamiento más allá de las conexiones directas.

En la Figura 3.7, a la derecha, se presenta un grafo que describe los resultados de la EAM. Este grafo se compone de las relaciones físicas, líneas continuas, y las conexiones que surgen de la EAM, líneas discontinuas. Este ejemplo ilustra cómo la EAM puede reflejar parcialmente la estructura de interacción, pero también resalta efectos como la correlación entre qubits que no están relacionados en un principio.

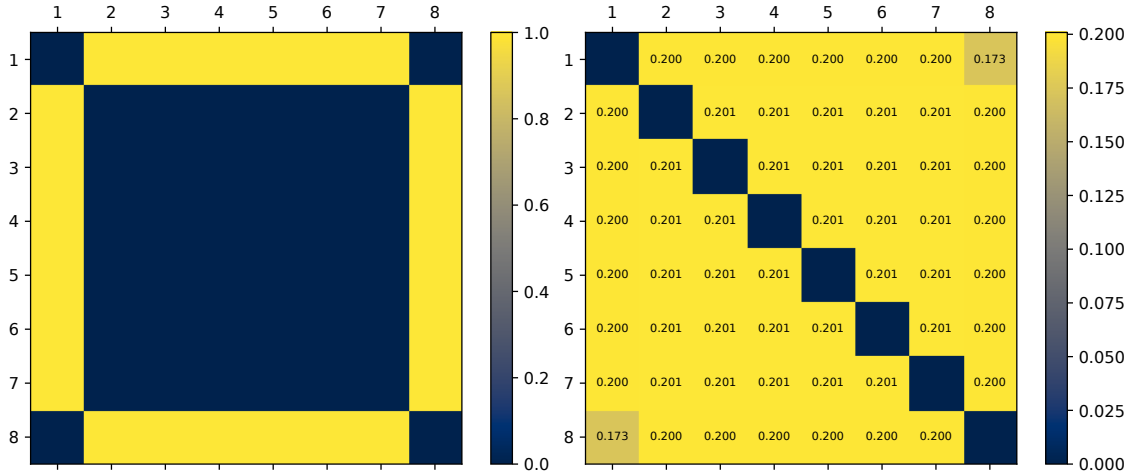
### Geometría de las dos torres

En primer lugar, esta geometría genera una estructura de doble estrella centrada en los qubits 1 y 8, con qubits intermedios (2 a 7) conectados a ambos extremos. Esta disposición recuerda a una estructura espejo, en la que los nodos intermedios actúan como una red compartida entre dos centros de correlación. Esta geometría se puede ver en la Figura 3.9, a la izquierda.



**Figura 3.9:** Comparación de los grafos de conexión de la geometría de las dos torres.

### 3. Resultados



**Figura 3.10:** Matriz de adyacencia y EAM de la geometría de las dos torres.

Se puede apreciar que la EAM muestra una uniformidad en los valores de todas las entradas, salvo para las esquinas. Se pueden comentar los siguientes puntos:

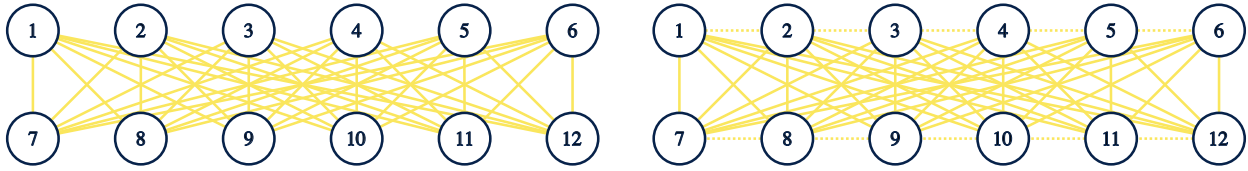
- El resultado es una distribución del entrelazamiento fuertemente mediada por la simetría del sistema: los qubits 2 a 7 están todos en una posición indistinguible desde el punto de vista de las conexiones. Por tanto, en el estado fundamental, todos ellos tienden a entrelazarse de forma similar con 1 y 8, y entre sí.
- Aunque en la matriz de adyacencia no existe conexión directa entre 1 y 8, la EAM sugiere una correlación significativa entre ellos. Esto puede interpretarse como una correlación emergente, generada por la mediación de los nodos intermedios, que actúan como un canal de comunicación.

La presencia de enlaces virtuales en la EAM entre qubits que no están directamente conectados en la topología física puede ser un ejemplo de cómo el entrelazamiento puede revelar propiedades del estado fundamental. Aquí, 1 y 8 parecen *entrelazarse* gracias a su relación común con los nodos intermedios, aunque no exista un enlace físico directo entre ellos. El resultado de la EAM se puede ver como grafo en la Figura 3.9, a la derecha.

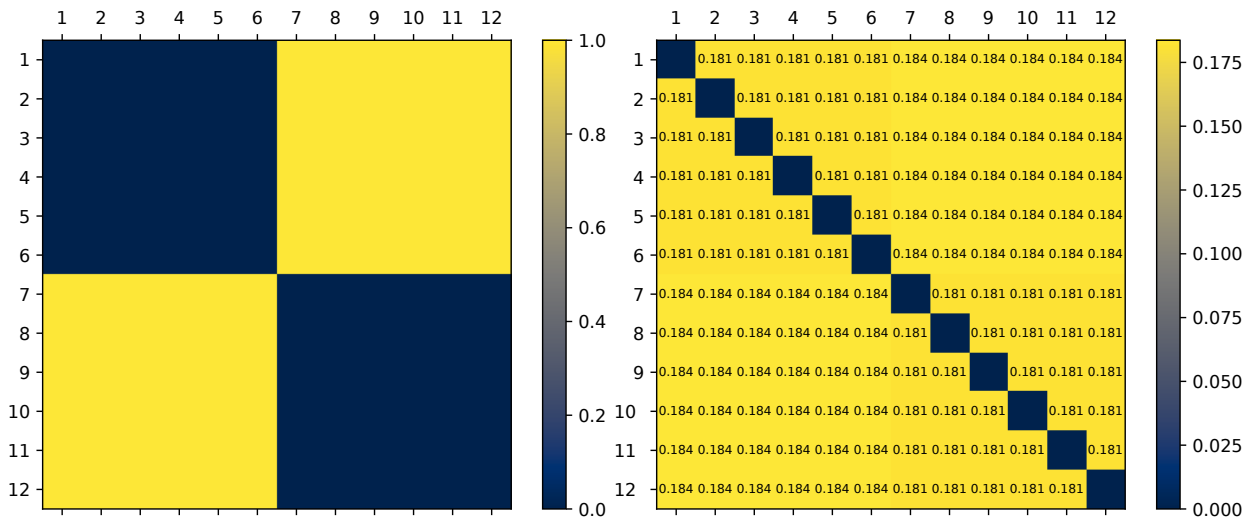
Notemos, nuevamente que las líneas continuas hacen referencia a las conexiones físicas del sistema, mientras que las líneas discontinuas son las que emergen de la EAM. En este caso, todas las conexiones en el grafo de la EAM tienen la misma importancia, salvo el enlace, ya comentado, entre 1 y 8.

## Geometría túnel

Esta geometría extiende la idea anterior con una mayor cantidad de qubits en cada grupo (de 1 a 6 y de 7 a 12), todos conectados entre sí en una geometría tipo túnel (Figura 3.11, izquierda).



**Figura 3.11:** Comparación de los grafos de conexión de la geometría túnel.



**Figura 3.12:** Matriz de adyacencia y EAM de la geometría túnel.

- La geometría túnel genera una *bipartición* clara del sistema: un grupo de qubits por una parte, los qubits 1 a 6, y otro, qubits 7 a 12, por otra.
- En este tipo de conexión completamente bipartita, cada qubit del primer grupo tiene el mismo tipo de conexión con el segundo grupo. Esto sugiere que no existen preferencias en el entrelazamiento, lo que lleva a una distribución equilibrada.
- De nuevo, la EAM pierde correspondencia con la matriz de adyacencia: las conexiones no se reflejan de forma directa. Se observa un patrón global de entrelazamiento homogéneo dentro de cada grupo, pero para cada grupo, los valores son distintos.
- Es interesante observar que, a pesar de haber múltiples enlaces cruzados, la EAM no se densifica en exceso: los enlaces se atenúan globalmente. Esto es consecuencia directa de la monogamia del entrelazamiento, que impide que un mismo qubit mantenga correlaciones fuertes con muchos otros de forma simultánea.

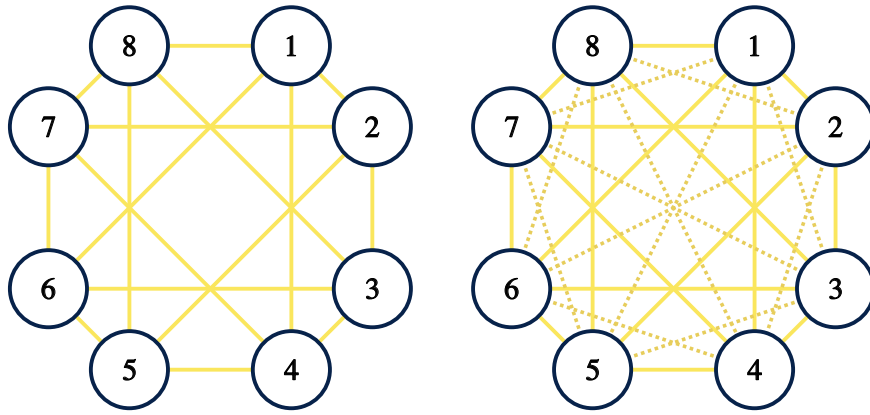
### 3. Resultados

Esta geometría ilustra cómo la presencia de una conectividad completa entre dos subconjuntos puede anular la huella estructural en la EAM, provocando una reorganización casi puramente simétrica del entrelazamiento.

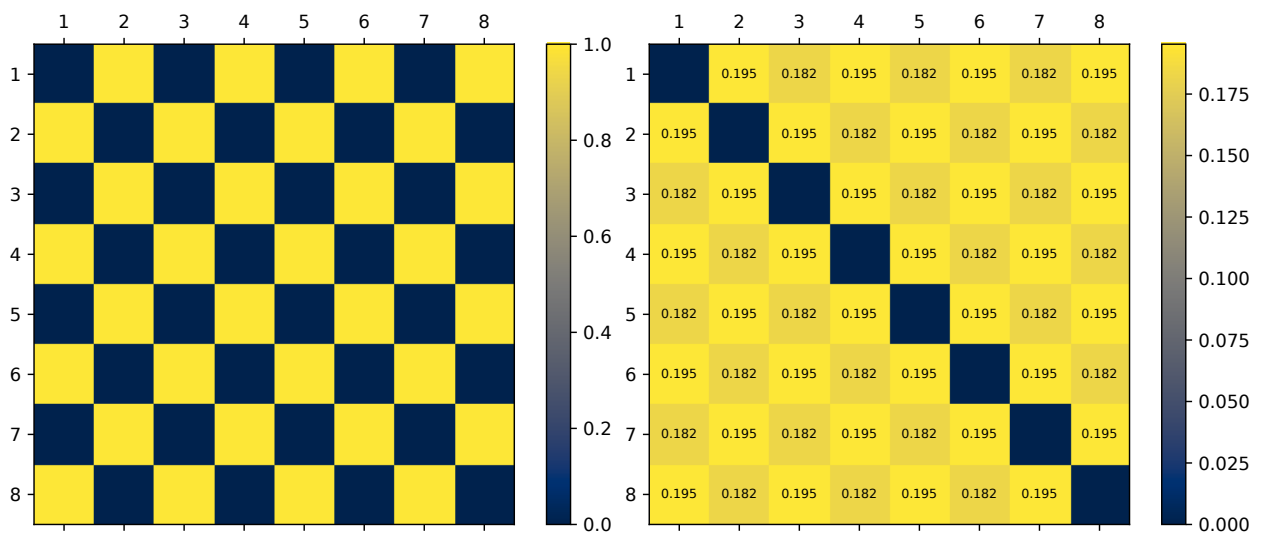
Sin embargo, el grafo de la EAM (Figura 3.11, derecha), apenas se diferencia del grafo original, salvo que aquellas líneas discontinuas que conectan los qubits que están en una u otra zona (inferior o superior).

### Geometría estrella

La geometría estrella está caracterizada por una alta simetría y conectividad cíclica. Su representación está dada en la Figura 3.13, a la izquierda. Notemos que, en casos anteriores, la alta conectividad introducía un efecto de suavizado en los entrelazamientos. En este caso, ocurre también lo mismo, hay uniformidad en los valores.



**Figura 3.13:** Comparación de los grafos de conexión de la geometría estrella.



**Figura 3.14:** Matriz de adyacencia y EAM de la geometría estrella.

### 3. Resultados

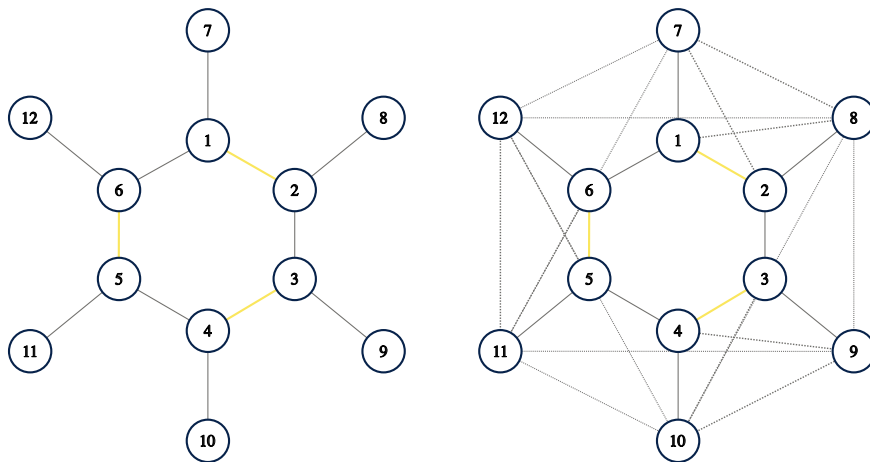
Con respecto a los resultados obtenidos con la EAM, podemos decir que:

- La estrella presenta una topología con simetrías rotacionales y reflejadas, lo que se traduce en una EAM con muchas entradas casi iguales. Esto sugiere que el estado fundamental no distingue entre qubits que, desde el punto de vista físico, sí tienen posiciones diferenciadas.
- La EAM se vuelve casi uniforme, reflejando una distribución global del entrelazamiento, más allá de la conectividad inmediata. Aunque conserva correlaciones más altas para qubits físicamente conectados.
- Puede observarse también que, aunque físicamente algunos enlaces son más largos (en términos de distancia gráfica), el entrelazamiento no se atenúa según la distancia. Esto es una señal clara de que la topología física no determina localmente la intensidad del entrelazamiento.

Esta geometría revela la incapacidad de la EAM para retener información de la estructura física cuando la simetría es lo bastante fuerte como para hacer indistinguibles a los qubits. En la Figura 3.13, derecha, podemos ver el grafo deducido de la EAM. En esta se ve que todos los qubits acaban conectados entre sí.

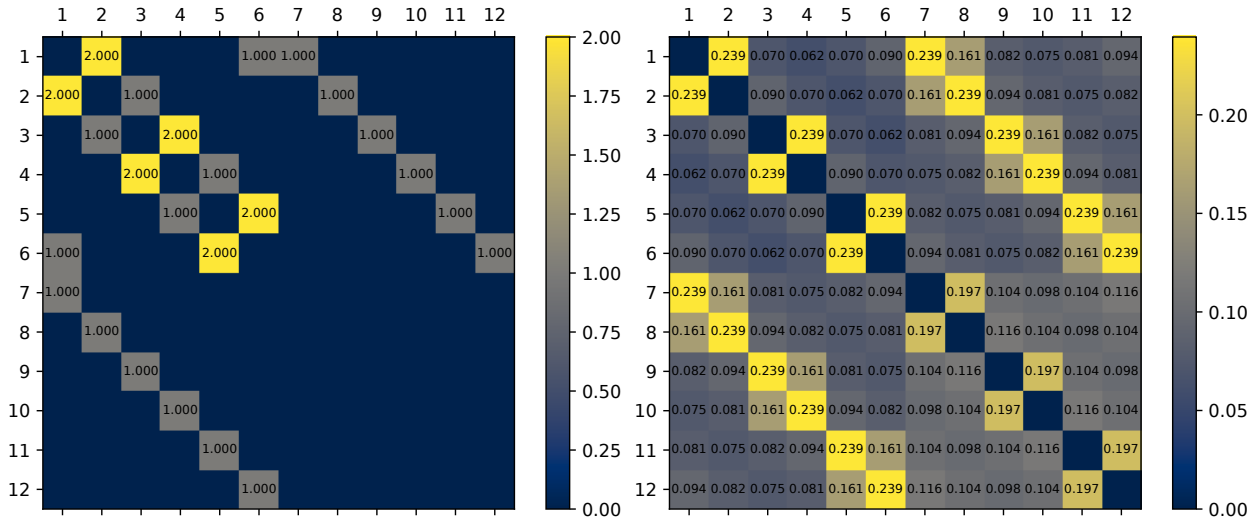
En estos tres últimos ejemplos de geometría se han podido apreciar que la EAM no refleja las conexiones físicas de la geometría a la que hace referencia. Sin embargo, sí que podemos ver ciertos matices y comportamientos relacionados con la estructura física.

### Geometría del benceno



**Figura 3.15:** Comparación de los grafos de conexión de la geometría del benceno.

### 3. Resultados



**Figura 3.16:** Matriz de adyacencia y EAM del benceno.

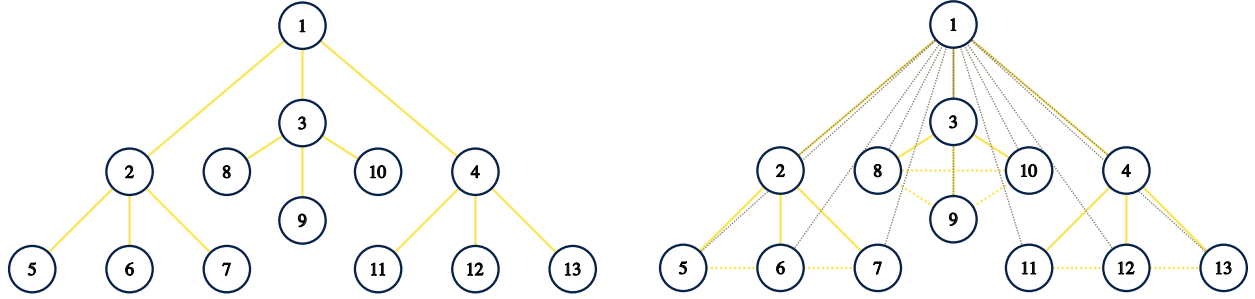
Este caso representa una estructura cíclica con enlaces alternos dobles y sencillos, similar a la molécula de benceno. Se puede interpretar como una red con simetría rotacional parcial y qubits *externos* añadidos. En este caso podemos resaltar lo siguiente:

- La EAM reproduce en buena medida la matriz de adyacencia, especialmente en los enlaces dobles como 1 – 2, 3 – 4 y 5 – 6, que aparecen reforzados.
- La conexión de cada nodo del anillo a un nodo externo hace que esos externos también hereden parte del entrelazamiento de su nodo interno. Sin embargo, los enlaces entre nodos externos no son todos equivalentes: los externos conectados a nodos internos más entrelazados (por ejemplo, 7 y 8, conectados a 1 y 2) acaban entrelazándose más intensamente entre sí que otros pares externos.
- Es decir, la EAM sugiere que el entrelazamiento se propaga desde los nodos más correlacionados del anillo hacia los externos, generando correlaciones indirectas que dependen de la intensidad del nodo raíz.

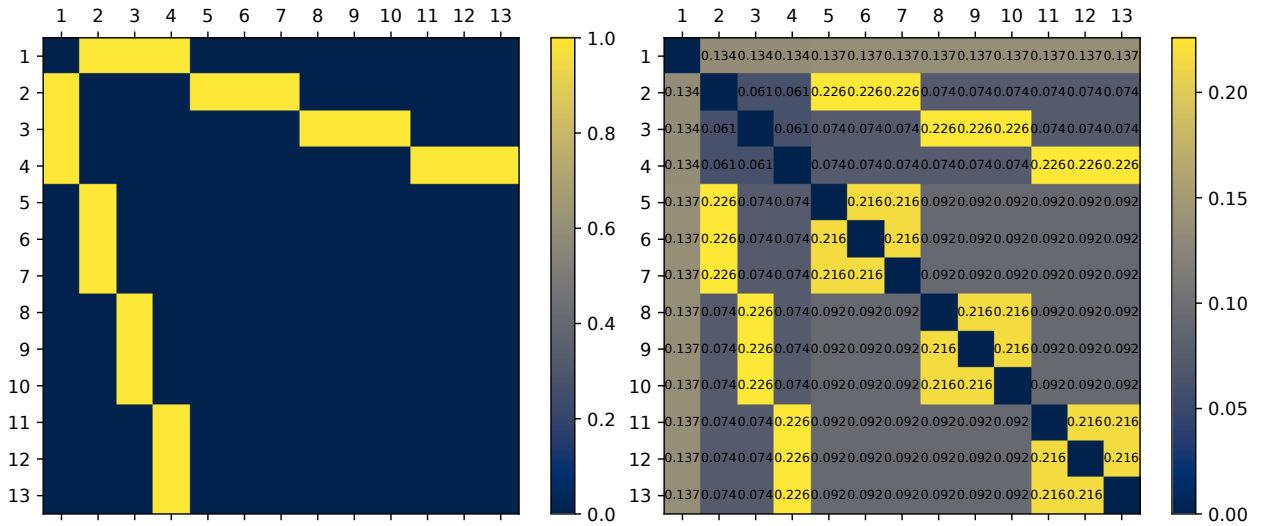
Este ejemplo constituye un caso más positivo hacia la ley del área, con algunos matices derivados de los enlaces reforzados. Se puede apreciar que, en contraste con geometrías anteriores, esta no tiene un grado alto de conectividad y, como resultado, no se aprecia una uniformidad en los valores de la EAM.

En la Figura 3.15, derecha, se puede observar el grafo derivado de la EAM. En este caso no se han representado todos los enlaces, sino los considerados más intensos. Podemos ver entonces que los enlaces dobles atraen considerablemente a los qubits externos correspondientes.

## Geometría árbol



**Figura 3.17:** Comparación de los grafos de conexión de la geometría árbol.



**Figura 3.18:** Matriz de adyacencia y EAM de la geometría árbol.

Esta geometría, jerárquica y con una estructura de ramificación clara, introduce una topología muy distinta de las anteriores, con niveles bien definidos. A través del estudio de la EAM, podemos comentar lo siguiente:

- El nodo raíz (qubit 1) adquiere relevancia en la EAM, pese a estar conectado a tres nodos en la matriz de adyacencia. La razón es que su entrelazamiento se distribuye entre muchos nodos, especialmente al llegar a niveles más profundos. Es como si llegase a conectar con todos.
- La estructura hace que la distribución del entrelazamiento favorezca las hojas (nodos terminales), que acumulan más correlación que los nodos intermedios. Esta tendencia es consistente con lo observado en la geometría puente. Esto es, los qubits más externos (como 5, 6, 7) muestran entrelazamientos fuertes entre sí, a pesar de no estar directamente conectados.

### 3. Resultados

La geometría árbol muestra una tendencia a empujar el entrelazamiento hacia los extremos del sistema, en línea con lo observado en estructuras similares como la geometría puente, donde los enlaces más internos se debilitan y los extremos tienden a entrelazarse más intensamente. Esto puede interpretarse como una forma en que el sistema busca optimizar el entrelazamiento entre zonas poco conectadas, al no poder concentrarlo en los nodos centrales debido a restricciones de monogamia.

Por último, el grafo obtenido por la EAM (Figura 3.17, derecha), refleja todo esto que comentamos: los nodos exteriores se hablan entre sí, mientras que el nodo 1 se habla con todos los demás.

## 3.2 Comparación de los resultados

Tras haber visto todos estos casos en los que se discuten distintos aspectos sobre los que la ley del área no se cumple, vamos cuantificar en cuánto ocurre esto. Es decir, definamos una magnitud que nos indique qué tan parecida es la EAM al grafo de conexión y comparemos las distintas geometrías al respecto.

Para ello necesitamos tener las matrices de forma que se puedan comparar: en este sentido, cada matriz la dividimos por el máximo valor que tenga en esta. Así, los valores de cada una estarán en el intervalo  $[0, 1]$ . Con esto, usaremos la norma siguiente para comparar:

$$||A|| = \sqrt{\sum_{ij} |a_{ij}|^2}. \quad (3.1)$$

Teniendo en cuenta esta norma, con el fin de considerar las conexiones más fuertes del entrelazamiento en la EAM, tomaremos los valores de EAM que sean igual o superiores al valor máximo de esta dividido entre 2, para así no introducir mucho error en la comparación.

**Tabla 3.1:** Geometrías y errores.

	Error $\varepsilon$
Cadena abierta	2.507
Cadena cerrada	0.000
3x4 qubits	3.313
Puente	7.834
Dos torres	5.612
Túnel	7.619
Estrella	4.558
Benceno	3.744
Árbol	4.906



### 3. Resultados

De esta forma, el error quedará definido por

$$\varepsilon = ||A - \text{EAM}_{1/2}||, \quad (3.2)$$

siendo  $A$  la matriz de adyacencia de las conexiones físicas.

Atendiendo a la Tabla 3.1, los valores de *Error* más pequeños son los tres primeros: los dos calculados para la cadena lineal y el valor calculado para el error de la distribución  $3 \times 4$  qubits, en concordancia con la ley del área, seguidos del error de la geometría del benceno.

Por simple inspección de los valores podemos conjeturar que a partir de un valor  $\varepsilon = 4$ , la ley del área no se cumple. Sin embargo, esta regla debe tomarse con pinzas, puesto que los valores obtenidos no proporcionan una distinción completa entre las geometrías.

## 3.3 Más allá de la Ley del Área

En los ejemplos analizados anteriormente, hemos visto que la *Entanglement Adjacency Matrix* no siempre reproduce en su totalidad la matriz de adyacencia física del sistema. Aunque en ciertos casos existe una muy buena correspondencia (como en las geometrías puente o benceno que hemos visto), en otros, la EAM refleja una reorganización profunda del entrelazamiento, lo que sugiere que hay más factores en juego que la simple conectividad topológica. A continuación, se presentan y discuten algunos de estos factores.

### Distribución global del entrelazamiento

La monogamia del entrelazamiento impone restricciones sobre cuán intensamente puede entrelazarse un qubit con varios otros simultáneamente. En geometrías con alta conectividad o fuerte simetría, como las dos torres, el túnel o la estrella, esta propiedad obliga al sistema a distribuir el entrelazamiento de forma más uniforme.

Esto provoca que la EAM pierda estructura aparente: aunque todos los qubits estén físicamente conectados a un mismo nodo central o grupo, la EAM refleja correlaciones más homogéneas y, a veces, incluso entre pares que no están directamente conectados en la topología inicial.

En este sentido, la EAM actúa como un *suavizador* de las estructuras físicas, difuminando patrones de la geometría.

## Emergencia de enlaces nuevos

Otro fenómeno observado es la aparición de correlaciones intensas entre pares de qubits que no están directamente conectados en la red física. Estos enlaces emergentes en la EAM pueden explicarse como consecuencia de procesos de entrelazamiento indirecto, en los que la presencia de un nodo altamente correlacionado actúa como mediador.

Esto se aprecia, por ejemplo, en la geometría árbol, donde las hojas terminales (no conectadas entre sí) presentan fuertes enlaces en la EAM. De esta forma, el entrelazamiento se *empuja* hacia estas zonas periféricas.

# Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo ha sido explorar los límites de validez de la ley del área del entrelazamiento en sistemas cuánticos de qubits conectados mediante distintas geometrías. Para ello, se ha utilizado como herramienta principal la *Entanglement Adjacency Matrix* (EAM), que permite visualizar cómo se distribuye el entrelazamiento entre las distintas partes del sistema. Esta matriz se ha construido a partir de las entropías de entrelazamiento de qubits individuales y pares, y se ha comparado con la matriz de adyacencia física que describe la conectividad local del Hamiltoniano.

## Conclusiones generales

El enfoque adoptado ha consistido en comparar la EAM con la matriz de adyacencia física del sistema para diversas configuraciones geométricas. A partir de esta comparación se han extraído las siguientes conclusiones.

En primer lugar, los resultados muestran que, en ciertas geometrías simples, la EAM reproduce bien la estructura física del sistema, lo que es consistente con la ley del área. Por otra parte, en geometrías como el puente, el benceno o el árbol, la EAM reproduce, en parte, la topología física.

Sin embargo, a medida que se introducen simetrías globales o una alta conectividad (como en las geometrías de tipo estrella, túnel o las dos torres), la EAM se desvía significativamente de la matriz de adyacencia. En estos casos, el entrelazamiento se distribuye de forma más homogénea o aparece en zonas no conectadas directamente, lo que refleja una reorganización interna del estado cuántico que no puede explicarse únicamente por la topología local. Esto puede explicarse, al menos en parte, por la monogamia del entrelazamiento, que impide que un qubit se entrelace fuertemente con muchos otros a la vez, forzando un reparto más equitativo.

Por último, la aparición de enlaces intensos entre nodos físicamente lejanos sugiere que la ley del área no siempre se cumple estrictamente en estos sistemas. No obstante, las desviaciones observadas no invalidan la ley, sino que la matizan, mostrando que en ciertas condiciones el entrelazamiento puede reorganizarse para minimizar la energía total sin seguir exactamente la topología de la red.

## Utilidad de la EAM

La EAM no puede considerarse una simple copia de la matriz de adyacencia física. Su utilidad radica en ofrecer una perspectiva estructural rica y accesible sobre el sistema. Esto permite detectar cuándo y cómo se aparta el sistema del comportamiento esperado según la Ley del Área, observar patrones emergentes de correlación, estudiar el impacto de la topología en la distribución del entrelazamiento.

En este sentido, la EAM actúa como una herramienta valiosa para el estudio de la estructura interna del entrelazamiento, aunque requiere ser interpretada con cuidado.

## Líneas futuras

A partir de este trabajo, surgen posibles líneas de investigación:

- Investigar la relación entre los autovalores de la matriz de *hopping* y la estructura de la EAM.
- Ampliar el estudio a sistemas con geometrías más aleatorias o no regulares, para explorar la robustez de los resultados observados.
- Extender la metodología a otros modelos de partículas cuánticas o a sistemas más grandes.
- Estudiar el efecto de introducir interacciones dirigidas, es decir, analizar sistemas en los que los enlaces físicos poseen cierta direccionalidad. Esto podría revelar nuevas formas de distribución del entrelazamiento.

## DECLARACIÓN JURADA DE AUTORÍA DEL TRABAJO CIENTÍFICO, PARA LA DEFENSA DEL TRABAJO FIN DE GRADO

Fecha: .....23/06/2025.....

Quien se suscribe:

Autor: César Antonio Carvajal de la Haza  
D.N.I.: 45995205N

Hace constar que es la autor(a) del trabajo:

Titulo completo del trabajo.

Geometría subyacente del entrelazamiento en sistemas de bosones duros

En tal sentido, manifiesto la originalidad de la conceptualización del trabajo, interpretación de datos y la elaboración de las conclusiones, dejando establecido que aquellos aportes intelectuales de otros autores, se han referenciado debidamente en el texto de dicho trabajo.

### DECLARACIÓN:

- ✓ Garantizo que el trabajo que remito es un documento original y no ha sido publicado, total ni parcialmente.
- ✓ Certifico que he contribuido directamente al contenido intelectual de este manuscrito, a la génesis y análisis de sus datos, por lo cual estoy en condiciones de hacerme públicamente responsable de él.
- ✓ No he incurrido en fraude científico, plagio o vicios de autoría; en caso contrario, aceptaré las medidas disciplinarias sancionadoras que correspondan.

Fdo.

# Referencias

- [1] J. D. Bekenstein. 1972. [Black holes and the second law](#). *Lett. Nuovo Cim.* 4, (1972), 737–740.
- [2] Giuliano Benenti, Giulio Casati, Davide Rossini, and Giuliano Strini. 2019. *Principles of quantum computation and information: A comprehensive textbook*. World Scientific.
- [3] Immanuel Bloch. 2005. [Ultracold quantum gases in optical lattices](#). *Nature Physics* 1, 1 (2005), 23–30.
- [4] Jeffrey Bub. 2023. [Quantum entanglement and information](#). In *The Stanford encyclopedia of philosophy* (Summer 2023), Edward N. Zalta and Uri Nodelman (eds.). Metaphysics Research Lab, Stanford University.
- [5] Carlton M. Caves and Christopher A. Fuchs. 1996. [Quantum information: How much information in a state vector?](#)
- [6] Valerie Coffman, Joydip Kundu, and William K. Wootters. 2000. [Distributed entanglement](#). *Physical Review A* 61, 5 (2000).
- [7] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. 2019. *Quantum mechanics, volume 1: Basic concepts, tools, and applications*. John Wiley & Sons.
- [8] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. 2019. *Quantum mechanics, volume 2: Angular momentum, spin, and approximation methods*. John Wiley & Sons.
- [9] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. 2019. *Quantum mechanics, volume 3: Fermions, bosons, photons, correlations, and entanglement*. John Wiley & Sons.
- [10] J. Eisert, M. Cramer, and M. B. Plenio. 2010. [Colloquium: Area laws for the entanglement entropy](#). *Reviews of Modern Physics* 82, 1 (2010), 277–306.
- [11] Michael A Nielsen and Isaac L Chuang. 2010. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press.
- [12] Sudipto Singha Roy, Javier Rodríguez-Laguna, and Germán Sierra. 2021. [Emergent geometry from entanglement structure](#). (2021).
- [13] Sudipto Singha Roy, Silvia N Santalla, Javier Rodríguez-Laguna, and Germán Sierra. 2020. [Entanglement as geometry and flow](#). (2020).
- [14] Sudipto Singha Roy, Silvia N Santalla, Germán Sierra, and Javier Rodríguez-Laguna. 2021. [Link representation of the entanglement entropies for all bipartitions](#). *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* (2021).
- [15] Mark Srednicki. 1993. [Entropy and area](#). *Physical Review Letters* 71, 5 (August 1993), 666–669.
- [16] G Vitagliano, A Riera, and J I Latorre. 2010. [Volume-law scaling for the entanglement entropy in spin-1/2 chains](#). *New Journal of Physics* 12, 11 (November 2010), 113049.