

Unidad 1 – Matemáticas financieras

1. Valor del dinero en el tiempo

Sabes qué significa cuando te dicen...

No es lo mismo un millón de pesos hoy, que un millón de pesos dentro de un año.

Podemos explicar que dos cantidades iguales de dinero, no tengan el mismo valor en el tiempo, de la siguiente manera:

- Tiene que ver con la pérdida de poder adquisitivo del dinero, ocasionado por el incremento generalizado de los precios, llamado inflación.
- La capacidad del dinero para generar más dinero.
- Tiene que ver con el riesgo. No es lo mismo que tener asegurado un millón hoy, que la promesa de recibirlo en un año.

1.1. Operación financiera

Lo primero que debemos conocer es: qué es una operación financiera.

Es un intercambio de capitales en el tiempo, acordado sobre una ley financiera, a través de la cual se asegura que lo entregado, es equivalente a lo recibido.

Esa operación financiera está compuesta por los siguientes elementos:

- **Valor presente** (Capital).
- **Ley financiera** (Acuerdo de equivalencia entre los dos capitales).
- **Acreedor** (Entrega la prestación – Recibe la contraprestación).
- **Deudor** (Recibe la prestación – Entrega la contraprestación).
- **Tiempo** (Duración).
- **Valor futuro** (Monto).

Cualquier operación financiera (OF) se reduce a un conjunto de flujos de caja (ingresos – egresos) de signo opuesto, y distintas cuantías, que suceden en el tiempo.

Las operaciones financieras se clasifican según:

La cantidad de capitales que intervienen

- ✓ **Simples:** constan de una sola prestación y contraprestación.
- ✓ **Compuestos:** cuando constan de más de una prestación y/o contraprestación.

La ley que opera

- ✓ **Interés simple:** los intereses generados en el pasado no se acumulan y, por consiguiente, no generan intereses en el futuro.

- ✓ **Interés compuesto:** los intereses generados en el pasado se acumulan al capital de partida, y generan intereses en el futuro.

La duración

- ✓ **A corto plazo:** la duración de la operación no supera el año.
- ✓ **A largo plazo:** aquellas con una duración de operación, superior al año.

En el sentido que se aplique la ley financiera

- ✓ **Descuento o actualización:** cuando se calcula el valor de un capital en el presente, disponible en un momento del futuro, según una determinada ley financiera.
- ✓ **Capitalización:** cuando se calcula el valor de un capital disponible en el presente, en un momento futuro, según una determinada ley financiera.

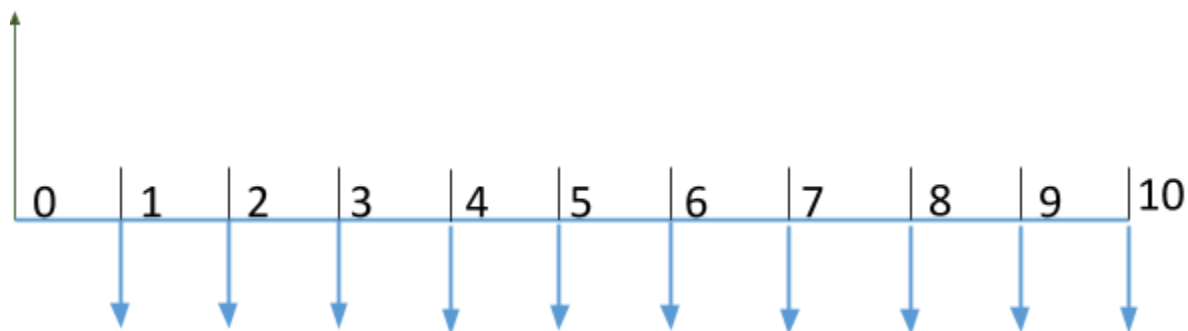
Veamos un ejemplo de una operación financiera:

El gerente de la compañía Y, solicita al banco X un préstamo por \$200.000.000 millones para el proyecto de renovación de equipos, que se llevará a cabo en los próximos meses.

El crédito se acuerda bajo las siguientes condiciones:

- Una comisión del 2% del capital, por estudio del crédito.
- 10 pagos semestrales iguales.
- Tasa del interés del 15% anual.

Flujo de caja



Análisis:

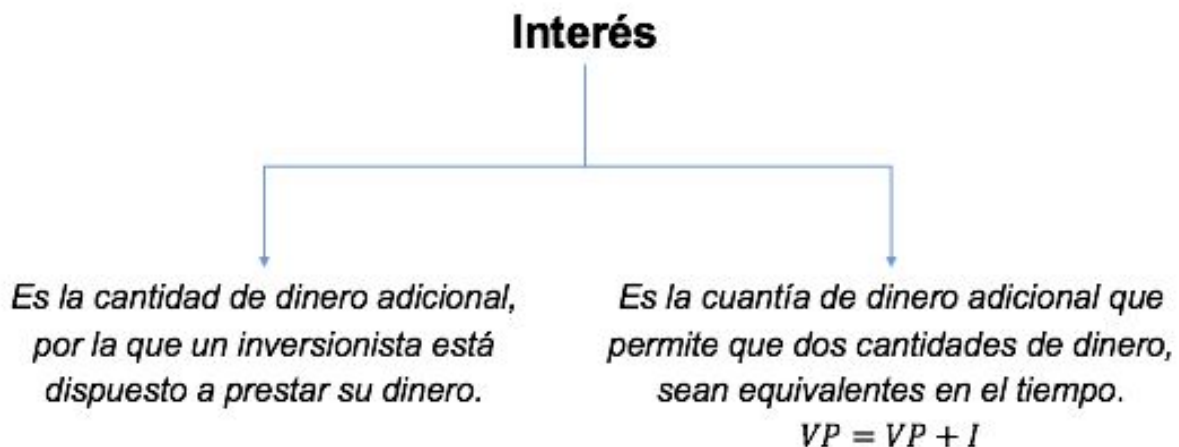
- Capital (VP): \$200.000.000
- Monto (VF): 10 pagos semestrales.
- Tiempo: 5 años.
- Deudor: Empresa Y.
- Acreedor: Banco X.

- Préstamo: \$200.000.000
- Contraprestación: 10 pagos semestrales.
- Ley financiera: 15% interés.

Clasificación:

- Largo plazo.
- Interés compuesto.
- Operación de capitalización.
- Operación compleja.

Es muy importante que tengas en cuenta el término



A lo largo de todo el curso, conocerás los diferentes tipos de interés y sus diversas aplicaciones.

2. Interés simple

En este momento, de seguro que te estarás preguntando:

¿Qué es el interés simple?

Es la cantidad de dinero que se paga por el uso del mismo dinero.

¿Cómo se calcula?

Se calcula al término de cada ciclo de tiempo convenido.

Este tipo de interés no se acumula, es decir, no se adiciona al capital inicial, para calcular el interés del siguiente período.

Para el cálculo del interés simple, se utiliza la tasa de interés. Conozcamos qué es:

Tasa de interés

Es el valor conceptual que se estipula por el uso del dinero para un período de tiempo determinado.

Ejemplos

- 20% anual, quiere decir que se pagarán 0,2 pesos por cada peso, por cada año.
- 1,5% mensual, quiere decir que se pagarán 0,015 pesos por cada peso, por cada mes.
- 6% semestral, quiere decir que se pagarán 0,06 pesos por cada peso, por cada seis meses.
- 4% bimensual, quiere decir que se pagarán 0,04 pesos por cada peso, por cada dos meses.
- 45% bianual, quiere decir que se pagarán 0,45 pesos por cada peso, por cada dos años.

Ahora, ¿cómo se realiza el cálculo del interés?

El interés se calcula como el producto del capital inicial, multiplicado por la tasa de interés, para el período de tiempo acordado.

$$I = Vp * i$$

Diagram illustrating the formula $I = Vp * i$ with labels and arrows:

- Interés** points to I .
- Valor presente** points to Vp .
- Tasa de interés** points to i .

Pero, si el préstamo del dinero se pacta durante varios períodos, a la fórmula anterior le multiplicamos el número de esos períodos:

$$I = Vp * i * n$$

Diagram illustrating the formula $I = Vp * i * n$ with labels and arrows:

- Número de períodos** points to n .

En el interés simple, en cada período se calcula el interés sobre el mismo capital inicial.

Período	Capital (V_p)	Interés	Saldo (V_f)
1	1000	$= 1000 \cdot 0.1 = 100$	$= 1000 + 100$
2	1000	$= 1000 \cdot 0.1 = 100$	$= 1000 + 200$
3	1000	$= 1000 \cdot 0.1 = 100$	$= 1000 + 300$
4	1000	$= 1000 \cdot 0.1 = 100$	$= 1000 + 400$

La aplicación del interés simple dependerá de la operación financiera o comercial, adicional, del sector económico donde se realice la operación. Dependiendo de la base de días que se utilicen para el cálculo del interés, se distinguen dos tipos de aplicaciones.



Ten en cuenta que ambos tipos de interés, pueden tener ciertas variaciones.

Ejemplo 1

María quiere saber cuál es el interés que debe pagar a un banco, por el préstamo de \$1.000.000, durante el mes de febrero del año 2016, bisiesto, si esta entidad le está cobrando una tasa de interés del 20% nominal anual.

V_p : 1.000.000

i : 20% anual, es lo que se cobra por un año.

n : el período en que se causa el interés es una fracción de año.

Calculamos el interés con base en la fórmula

La cantidad de interés que María debe pagar por el préstamo de \$1.000.000 durante el mes de febrero será de \$16.111,11.

Ejemplo 2

Jaime desea saber cuál es el interés que debe pagar por el mes de febrero del año 2016, bisiesto, por un préstamo de \$1.000.000, si se le cobra una tasa del 20% nominal anual, y el prestamista realiza el cálculo con el interés exacto-tiempo aproximado.

$V_p : 1.000.000$

$i : 20\%$ anual, es lo que se cobra por un año.

$n : el periodo en que se causa el interés es una fracción de año.$

Calculamos el interés con base en la fórmula

La cantidad de interés que Jaime debe cancelar por el préstamo de 1.000.000 durante el mes de febrero, es de \$15.342,47.

Ahora, estudiaremos el valor futuro, el valor presente, la tasa de interés nominal y el número de períodos dentro de ese interés simple.

Capital Final – Valor Futuro (V_f)

Es el capital final que recibirá el prestamista o inversionista o, por el contrario, el que deberá pagar el usuario del dinero, y corresponde al capital inicial – Valor presente (V_p) más los intereses (I).

Recuerda que:

Ahora, reemplacemos I en la primera fórmula:

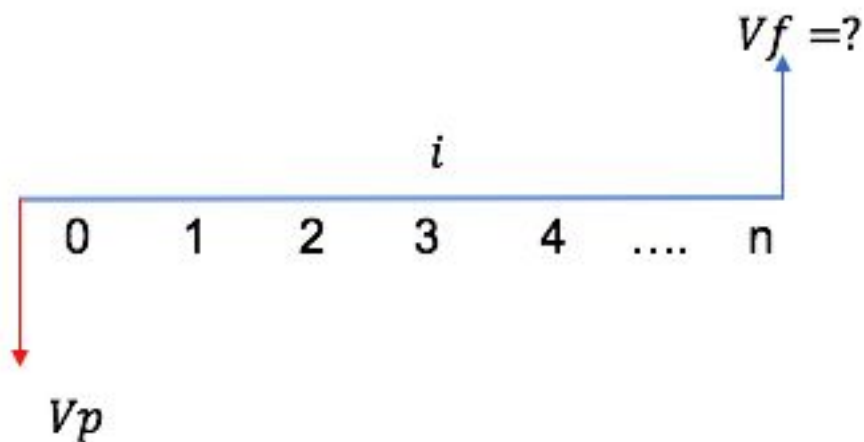
Factorizando:

$$Vf = Vp + (1 + i * n)$$

Diagram illustrating the formula $Vf = Vp + (1 + i * n)$ with labels:

- Vf : Valor futuro (Future Value)
- Vp : Valor presente (Present Value)
- i : Tasa de interés (Interest Rate)
- n : Número de períodos (Number of periods)

Gráficamente quedaría así:



Ejemplo Valor futuro

Raquel desea saber cuánto va a recibir exactamente, al final, si le presta a un amigo la suma de \$3.000.000 desde el 23 de agosto hasta el 27 de octubre de 2017, a una tasa de interés del 35% nominal anual.

$V_p : 3.000.000$

$i : 35\%$ anual, es lo que se cobra por un año.

$n : el período en que se causa el interés es una fracción de año (65 días).$

Teniendo en cuenta que Raquel desea conocer el valor exacto, hay que aplicar interés racional.

Calculamos el interés con base en la fórmula

La cantidad que Raquel recibirá al final, será de \$3.186.986,30. Esto significa que tendrá una ganancia por un interés de \$186.986,30.

Capital Presente – Valor Presente (V_p)

Cuando conoces el valor futuro, el interés y la cantidad de períodos a los cuales se pacta la transacción financiera, puedes calcular entonces el capital presente, o el valor presente.

Partiendo de la ecuación:

Despejamos V_p y nos queda:

Ejemplo Valor presente

Jorge tiene que pagar \$600.000 por su matrícula en la universidad, el día 13 de diciembre. ¿Cuánta cantidad de dinero debe depositar el 5 de agosto del mismo año, en una cuenta de ahorros, que paga el 23% nominal anual?

i : 23% anual, es lo que se cobra por un año.

n : el período en que se causa el interés es una fracción de año (130 días).

V_f : 600.000

Calculamos el valor presente con base en la fórmula:

La cantidad que Jorge tiene que depositar en la cuenta bancaria es de \$553.988,20.

Tasa de interés nominal

Cuando conoces el valor futuro, el presente y la cantidad de períodos a los cuales se pacta la transacción financiera, puedes calcular el interés nominal.

Partiendo de la ecuación:

Despejamos i y nos queda:

Ejemplo Tasa de interés nominal

Marcos, quien es el dueño de una mediana empresa, ha tenido ganancias por \$3.000.000 durante el año anterior, y quiere saber a qué tasa de interés comercial, estos excedentes se convertirán en \$3.500.000 en 6 meses.

$V_p : 3.000.000$

n : *el período en que se causa el interés
es una fracción de año (180 días).*

$V_f : 3.500.000$

Aplicando el interés comercial.

Calculamos el valor presente con base en la fórmula:

Marcos tiene que colocar su dinero a un interés nominal anual del 33,33%

Número de períodos (n)

Cuando conoces el valor futuro, el valor presente y la tasa de interés nominal, puedes calcular el número de períodos.

Partiendo de la ecuación:

Despejamos n y nos queda:

Ejemplo Número de períodos

Lucas es el dueño de un pequeño negocio y el período anterior obtuvo ganancias por \$3.000.000. Quiere saber durante cuánto tiempo debe colocar ese dinero para que ese excedente se convierta en \$4.500.000, si el banco le reconoce un interés NA del 27%.

$V_p : 3.000.000$

$i : 27\% \text{ anual.}$

$V_f : 4.500.000$

Aplicando interés bancario.

Calculamos el valor presente con base en la fórmula:

Lucas deberá colocar su dinero durante 666,66 días.

3. Interés compuesto

El interés compuesto es aquel en donde el capital va variando al sumarle el interés, y sobre ese nuevo valor, se calculan los nuevos intereses.

Periodo	Capital (V_p)	Interés	Saldo (V_f)
1	V_p	$V_p * i$	$V_f = V_p + V_p * i$ $V_{f_1} = V_p * (1 + i)$
2	$V_p (1 + i)$	$V_p (1 + i) * i$	$V_{f_2} = V_p * (1 + i) + V_p * (1 + i)$ $V_{f_2} = V_p (1 + i)^2$
3	$V_p (1 + i)^2$	$V_p (1 + i)^2 * i$	$V_{f_3} = V_p (1 + i)^2 + V_p (1 + i)^2 * i$ $V_{f_3} = V_p (1 + i)^3$
.....	
n	$V_p (1 + i)^{n-1}$	$V_p (1 + i)^{n-1} * i$	$V_{f_n} = V_p (1 + i)^n$

Por lo general, las operaciones financieras se llevan a cabo, haciendo uso de interés compuesto.

Tenemos el siguiente caso:

Si se invierte un capital de \$100 a un interés del 10% trimestral, durante un año, observemos el cálculo, utilizando tanto el interés simple, como el compuesto.

Interés simple

Tenemos los siguientes datos:

$$\begin{aligned}
 V_p &: 100 \\
 i &: 10\% \text{ trimestral} \\
 n &: 4 \text{ trimestres}
 \end{aligned}$$

Calculamos con base en la fórmula:

$$I = 100 \times 0,1 \times 4 = 40$$

Interés compuesto

Al pasar el primer trimestre, se liquidan los intereses ($100 \times 0,1 = 10$). Estos intereses se acumulan al capital, para obtener una cantidad de \$110 al cabo de este primer período.

Al final del segundo trimestre o período, los intereses se liquidarán sobre esta cantidad: $110 \times 0,1 = 11$

Como en el trimestre anterior, estos intereses se suman de nuevo al nuevo capital, para conseguir una nueva cantidad de \$121.

Y así se continúa, hasta obtener \$146,41 en el cuarto trimestre. En este caso en particular, al cabo de un año, el inversor va a recibir \$146,41; \$100 que hacen el capital inicial y \$46,41 que corresponden a los intereses.

Al igual que en interés simple, estudiaremos el valor futuro, el valor presente, la tasa de interés nominal y el número de períodos dentro de ese interés simple. Recuerda que se calcula lo mismo, pero el alcance es diferente.

Valor futuro (V_f)

Este modelo notifica el valor futuro de una inversión (V_f) en función del valor presente (V_p), cuando los intereses causados son capitalizados durante (n) períodos con una tasa de interés (i).

Ejemplo Valor futuro

Un individuo invierte \$2'000.000 en un depósito a término fijo por tres años. ¿Qué cantidad de dinero va a recibir, si se le reconoce una tasa de interés del 6,5% semestral?

$V_p : 2.000.000$

$i : 6,5\%$ *semestral*

$n : 3 \text{ años} = 6 \text{ semestres}$

Calculamos el interés con base en la fórmula:

El valor que finalmente recibirá este individuo es de \$ 2.918.284,59.

Valor presente (V_p)

Cuando conoces el valor futuro, la tasa de interés, y la cantidad de períodos, puedes calcular el valor presente.

Partiendo de la ecuación:

Despejamos V_p y nos queda:

Ejemplo Valor presente

Martín es un padre de familia que debe ahorrar desde el 1 de septiembre, para pagar la matrícula de la universidad de su hijo, el 31 de enero del siguiente año. Si el costo de la matrícula es de \$4.000.000 y la tasa de interés que se le reconoce es del 2% mensual, ¿cuánto debe ahorrar?

$V_f : 4.000.000$

$i : 2\%$ *mensual*

$n : 5 \text{ meses}$

Calculamos el interés con base en la fórmula:

El valor que Martín deberá ahorrar desde el 1 de septiembre es de \$ 3.622.923,24.

Número de períodos (n)

Conociendo los valores presentes y futuros, y la tasa de interés, el período se calcula partiendo de la fórmula:

Despejamos V_p y nos queda:

Ejemplo Número de períodos

Si la tasa de interés que se reconoce es del 1,5% mensual, ¿en cuánto tiempo se va a duplicar la inversión de un ahorrador?

$$V_p : x$$

$$i : 2\% \text{ mensual}$$

$$V_p : 2x$$

Calculamos el interés con base en la fórmula:

La persona deberá ahorrar mínimo 47 meses, para duplicar su inversión.

Tasa de interés

Conociendo los valores presentes y futuros, y el número de períodos, la tasa de interés se calcula partiendo de la fórmula:

Despejamos i y nos queda:

Ejemplo Tasa de interés

Si hace 15 años se hizo una inversión de \$2.000.000 y en la actualidad, esa inversión ha llegado a un valor de \$70.000.000, ¿Cuál fue la tasa de interés pactada? Exprésala en interés mensual, trimestral, semestral y anual.

$V_p : 2.000.000$

$VP : 70.000.000.$

$n : 15 \text{ años, } 60 \text{ trimestres, } 180 \text{ meses}$

Calculamos el interés con base en la fórmula

Tasa de interés anual

Tasa de interés semestral

Tasa de interés trimestral

Tasa de interés mensual

3.1. Tasas de interés

En el interés compuesto, nos encontramos con 3 tipos de tasas de interés.

Tasa nominal (j)

Es una tasa de referencia que indica la cantidad de capitalizaciones que se han llevado a cabo durante un período de un año; se representa por una (j), seguida por el período de capitalización (N).

Ejemplo:

- $j = 10\%$ N-a. Tasa nominal del 10%, capitalizable anualmente, una por año.
- $j = 25\%$ N-t. Tasa nominal del 25%, capitalizable trimestralmente, cuatro por año.
- $j = 30\%$ N-s. Tasa nominal del 30%, capitalizable semestralmente, dos por año.
- $j = 28\%$ N-m. Tasa nominal del 28% capitalizable mensualmente, doce por año.
- $j = 55\%$ N-d. Tasa nominal del 55% capitalizable diariamente, trescientos sesenta por año.

Tasa efectiva (E)

Establece la tasa de interés que realmente se está pagando por un capital en los períodos acordados. Debido a que la capitalización del interés se produce cierta cantidad de veces al año, la tasa efectiva es mayor que la tasa nominal.

Se representa con la letra (E) más una letra mayúscula que va a representar el período al cual se refiere.

Ejemplo:

- $i = 10\%$ EM. Indica una tasa del 10% efectiva mensual.
- $i = 25\%$ ET. Indica una tasa del 25% efectiva trimestral.
- $i = 30\%$ ES. Indica una tasa del 30% efectiva semestral.
- $i = 28\%$ EA. Indica una tasa del 28% efectiva anual.
- $i = 0,5\%$ ED. Indica una tasa del 0,5% efectiva diaria.

Tasa de interés anticipado

En contraste con el interés vencido (i), el interés anticipado se denomina i_a .

Nota: cuando no hay una referencia específica, se supone que la tasa de interés siempre será vencida.

Aquí nos vamos a detener un momento para conocer la relación que existe entre la tasa nominal y la efectiva.

La tasa nominal es igual a la tasa efectiva, multiplicada por el número de períodos de capitalización en un año.

$$j = i * m$$

Tasa de interés nominal

Tasa de interés efectiva

Frecuencia de conversión anual

Ejemplo 1

Encuentra la tasa efectiva anual, si la tasa nominal es del 42%.

En este caso, la frecuencia de capitalización es 1, porque no se indica lo contrario. Para encontrar la tasa efectiva, utilizamos la siguiente fórmula:

Despejamos i :

La tasa efectiva es de 18% EA.

Ejemplo 2

Encuentra la tasa efectiva anual, si la tasa nominal es 36% N-s.

En este caso, la frecuencia de capitalización es 2 (dos semestres por año). Para encontrar la tasa efectiva, utilizamos la siguiente fórmula:

Encuentra la tasa efectiva anual, si la tasa nominal es 36% N-s.

En este caso, la frecuencia de capitalización es 2 (dos semestres por año). Para encontrar la tasa efectiva, utilizamos la siguiente fórmula:

Despejamos i :

La tasa efectiva es de 18% ES.