César Isaí García Cornejo
cesar.cornejo@cimat.mx
Ciencia de Datos

Tarea 3

Semestre 3

CIMAT

Ejercicio 1
Sea ab^T tal que a, b son vectores n-dimensionales.

1. Dar una descomposición SVD de esa matriz en la forma $A = UDV^T$ y en la forma $A = \sum \lambda_i u_i v_i^T$. Se expresará los λ_i en función de a y b.
2. En estas dos mismas formas dar la descomposición de la matriz $A^2 - A$.
3. Mostrar que cuando $<$ a, b $>=$ 1, A es una matriz de proyección sobre un espacio que se describirá.

Solución:
Las columnas de la matriz U son los vectores propios de AA^T, y las columnas de la matriz V son los vectores propios de A^TA. Así, para calcular las columnas de U,

$$AA^T = (ab^T)(ab^T)^T = (ab^T)(ba^T) = (b^Tb)aa^T,$$

sustituyendo $\beta = b^Tb$ y haciendo un cambio de variable, se obtiene $c = \sqrt{\beta}a$. Por lo tanto, se tiene que calcular los eigenvectores de la matriz $S = cc^T$. El rango de la matriz S es uno porque todas las columnas son múltiplos de una columna c, por lo tanto, el determinante es cero. Así, un eigenvalor de S es cero; y otro eigenvalor es $||c||^2$, ya que:

$$(cc^T)c = c(c^Tc) = c\left\|c\right\|^2 = \left\|c\right\|^2 c = \lambda c.$$

Cualquier vector u que sea ortogonal a c es un eigenvector con eigenvalor 0, y para el otro eigenvalor, c es un eigenvector (ya no hay otros eigenvalores por la multiplicidad). Para el caso de V se tiene,

$$A^TA = (ab^T)^T(ab^T) = (ba^T)(ab^T) = (a^Ta)bb^T,$$

y aplicando el mismo argumento, se encuentran los dos mismos eigenvalores. Los eigenvalores de A para construir la matriz D son 0 y b^Ta. Por lo tanto,

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ x & \sqrt{b^Tb}a \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b^Ta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & y & \cdots \\ \cdots & \sqrt{a^Ta}b & \cdots \end{pmatrix},$$

donde x y y son vectores ortogonales a $\sqrt{b^Tb}a$ y $\sqrt{a^Ta}b$ respectivamente. Otra forma de expresar A sería,

$$A = (b^Ta)(y_n + \sqrt{a^Ta}b_n)(x_n + \sqrt{b^Tb}a_n).$$

2. Sustituyendo B = $A^2 - A = (b^Ta - 1)A$. Para obtener las columnas de U y V,

$$B^TB = (b^Ta - 1)^2(b^Tb)aa^T,$$
$$BB^T = (b^Ta - 1)^2(a^Ta)bb^T.$$

Aplicando el mismo procedimiento de arriba se obtiene,

$$B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ x & (b^Ta - 1)\sqrt{a^Ta}b \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (b^Ta - 1)(b^Ta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & y & \cdots \\ \cdots & (b^Ta - 1)\sqrt{b^Tb}a & \cdots \end{pmatrix},$$
$$= (b^Ta - 1)(b^Ta)(x_n + (b^Ta - 1)\sqrt{a^Ta}b_n)(y_n + (b^Ta - 1)\sqrt{b^Tb}a_n).$$

3. Una matriz se considera una matriz de proyección si los eigenvalores de esta son cero o uno. Se encontró que uno de los eigenvalores era cero, y el otro era igual a $b^T a = a^T b =< a, b >= 1$, por lo tanto, es una matriz de proyección.

Ejercicio 2
Sea A una matriz $n \times m$ de rango r. Consideramos su descomposición SVD, $A = UDV^T$ con

$$D = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y Λ una matriz diagonal de valores propios positivos. Definamos $A^- = VD^{-1}U^T$ donde

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda^- & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Mostrar que A^- es tal que $AA^-A = A$ y $A^-AA^- = A^-$ y que las matrices AA^- y A^-A son simétricas.
2. Para un $b \in \mathbb{R}^m$, consideramos el problema de regresión lineal siguiente

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \|Ax - b\|^2$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidanea. Supongamos que no existe un $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$. Mostrar que el problema se resuelve con la solución $x^* = A^-b$. (Pista : Usar la descomposición $x = x^* + h$ y descomponer $\|Ax - b\|^2$).

Solución:
Para la primer relación

$$\begin{aligned} AA^-A &= (UDV^T)(VD^{-1}U^T)(UDV^T), \\ &= UD(V^TV)D^{-1}(U^TU)DV^T, \\ &= U(DD^{-1})DV^T, \\ &= UDV^T, \\ &= A. \end{aligned}$$

Para la segunda relación

$$\begin{aligned} A^-AA^- &= (VD^{-1}U^T)(UDV^T)(VD^{-1}U^T), \\ &= VD^{-1}(U^TU)D(V^TV)D^{-1}U^T, \\ &= V(D^{-1}D)D^{-1}U^T, \\ &= VD^{-1}U^T, \\ &= A^-. \end{aligned}$$

Una matriz es simétrica si es igual a su transpuesta, entonces:

$$\begin{aligned} AA^- &= (UDV^T)(VD^{-1}U^T), \\ &= UDD^{-1}U^T, \\ &= U \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T, \\ &= U \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T, \\ &= U_1U_1^T, \\ &= I_k, \end{aligned}$$

y como $I_k = I_k^T$, el producto de estas matrices es una matriz simétrica. Lo mismo podemos argumentar para

$$\begin{aligned}
A^- A &= (VD^{-1}U^T)(UDV^T), \\
&= VD^{-1}DV^T, \\
&= V \begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T, \\
&= V \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T, \\
&= V_1 V_1^T, \\
&= I_k,
\end{aligned}$$

2. Simplificando el problema de regresión, se obtiene: $\|Ax - b\|^2 = x^T A^T Ax - 2b^T Ax + b^T b$ y calculando el gradiente para poder minimizar e igualando a cero $\nabla_x \|Ax - b\|^2 = 2A^T Ax - 2A^T b = 0$, sustituyendo:

$$\begin{aligned}
A^T A(x^* + h) &= A^T b, \\
A^T Ax^* &= A^T b - A^T Ah, \\
(VDU^T)(UDV^T)x^* &= (VDU^T)(b - Ah), \\
VD^2V^T x^* &= (VDU^T)(b - Ah), \\
V^T(VD^2V^T x^*) &= V^T(VDU^T)(b - Ah), \\
D^2V^T x^* &= DU^T(b - Ah), \\
x^* &= VD^- U^T b - h, \\
x^* + h &= A^- b, \\
x &= A^- b.
\end{aligned}$$