César Isaí García Cornejo
cesar.cornejo@cimat.mx
Computo Científico

Tarea 7

Semestre 3

Con el algoritmo de Metropolis-Hastings (MH), simular lo siguiente:

Ejercicio 1
Sean $x_i \sim Ga(\alpha, \beta)$ $i = 1, 2, \cdots, n$. Simular datos x_i con $\alpha = 3$ y $\beta = 100$ considerando los casos $n = 4$ y 30.

Con $\alpha \sim U(1,4)$, $\beta \sim exp(1)$ distribuciones a priori, se tiene la posterior

$$f(\alpha, \beta|\bar{x}) \propto \frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma(\alpha)}^{n} r_1^{\alpha-1} e^{-\beta(r_2+1)} \mathbb{1}_{1\leq\alpha\leq 4} \mathbb{1}_{b>1}$$

con $r_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i$ y $r_1 = \prod_{i=1}^{n} x_i$. En ambos casos, grafica los contornos para visualizar dónde está concentrada la posterior. Utilizar la propuesta

$$q\left(\begin{pmatrix}\alpha_p\\ \beta_p\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & 0\\ 0 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right)$$

Solución:
Se implementa el algoritmo de Metropolis- Hastings con caminatas aleatorias para la posterior mostrada en el enunciado para cada caso, es decir, $n = 4$ y $n = 30$

Se procede definiendo una función que calcule la distribución posterior según ciertos valores de α, β. Como es una función bivariada, y con objetivo de visualizar la distribución posterior, es que se grafican las curvas de nivel. Notemos que el soporte está en $1 \leq \alpha \leq 4$ y $\beta > 0$. Tenemos las siguientes gráficas

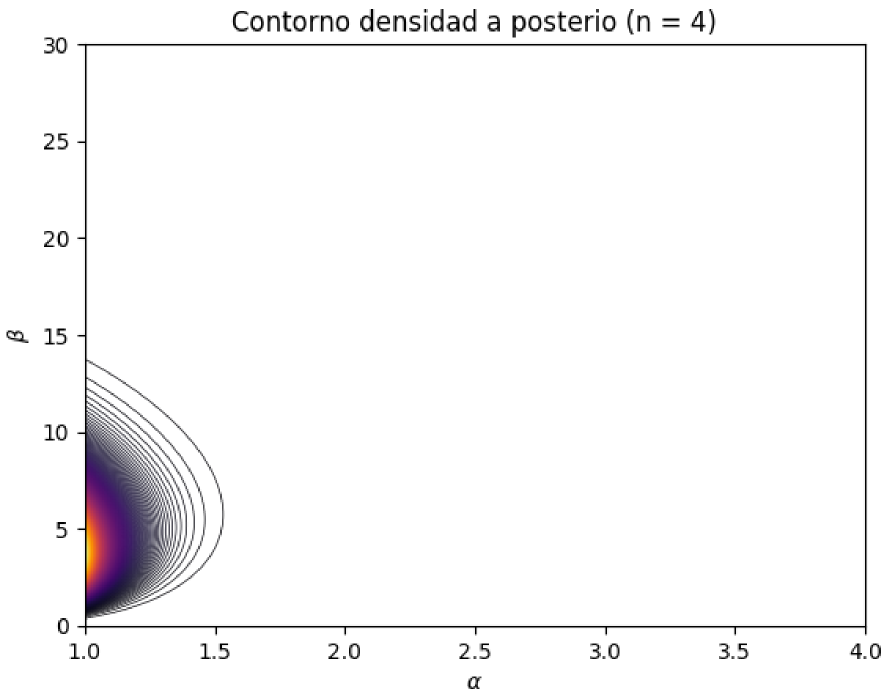

Figura 1: Grafica de contornos para $n = 4$

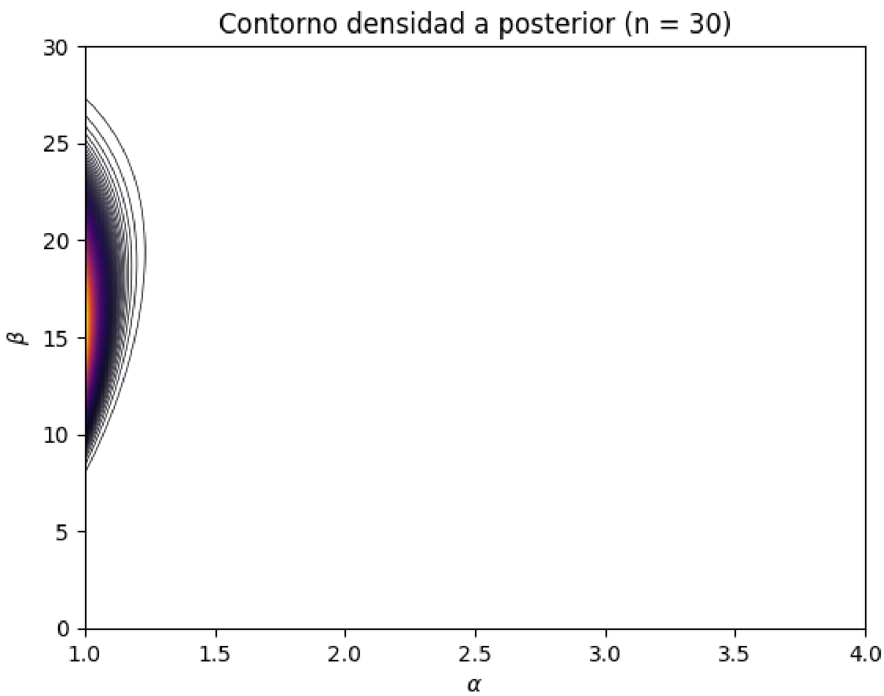

Figura 2: Grafica de contornos para $n = 30$

Notemos que tenemos una concentración para α pegados al extremos izquierdo del soporte, mientras que para β se aglomeran por 5 o 15 dependiendo de n.

Aplicando el método de Metropolis-Hastings con caminata aleatoria y punto inicial en $\alpha = 3, \beta = 40$ y propuesta como es indicada en el enunciado

$$\varepsilon_1 \sim N(0, \sigma_1^2) \quad \varepsilon_2 \sim N(0, \sigma_2^2)$$

con $\sigma_1 = 0.05$ y $\sigma_2^2 = 0.5$

Ejercicio 2
Simular de la distribución Gamma(α,1) con la propuesta Gamma($[\alpha]$, 1), donde $[a]$ denota la parte entera de $[a]$.

Además, realizar el siguiente experimento: poner como punto inicial $x_0 = 900$ y graficar la evolución de la cadena, es decir, $f(X_t)$ vs t.

Solución:

Ejercicio 3
Implementar Random Walk Metropolis Hasting (RWMH) donde la distribución objetivo es $\mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$, con

$$\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}9 \\ 0{,}9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizar como propuesta $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}_2(0, \sigma^2 I)$ ¿ Cómo elegir σ para que la cadena sea eficiente ? ¿ Qué consecuencias tiene la elección de σ ?

Como experimento, elige como punto inicial $x_0 = \binom{1000}{1}$ y comenta los resultados.

Para todos los incisos del ejercicio anterior:

1. Establece cual es tu distribución inicial .
2. Grafica la evolución de la cadena.
3. Indica cuál es el Burn-in.
4. Comenta qué tan eficiente es la cadena.
5. Implementa el algoritmo MH considerando una propuesta diferente.

Solución:

Referencias

[1] Robert, C. P., Casella, G., and Casella, G. (1999). Monte Carlo statistical methods (Vol. 2). New York: Springer.

[2] Wasserman, L. (2004). All of statistics: a concise course in statistical inference (p. 413). New York: Springer.