César Isaí García Cornejo
cesar.cornejo@cimat.mx
Computo Científico

Tarea 4

Semestre 3

Ejercicio 1
Dado el siguiente

Teorema (Gerschgorin):

Dada una matriz $A = a_{ij}$ de $m \times m$, cada eigenvalor de A está en al menos uno de los discos en el plano complejo con centro en a_{ii} y radio $\sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Además, si n de estos discos forman un dominio conexo, disjunto de los otros $m - n$ discos, entonces hay exactamente n eignevalores en ese dominio.

Deduce estimaciones de los eigenvalores de

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

con $|\varepsilon| < 1$.

Solución:
Veamos que por el Teorema de Gershgorin tenemos tres regiones disjuntas con centros dados por $8, 4, 1$, respectivamente. Para la primer región $i = 1$, tenemos un circulo en los complejos de centro 8 y radio 1. Para la segunda, región tenemos un circulo de centro 4 y radio $1 + \varepsilon$. Por último, para $i = 3$ tenemos un circulo de radio ε y centro en 1.

Con fines ilustrativos, la siguiente figura nos muestran las tres regiones en los complejos con un ε arbitrario.

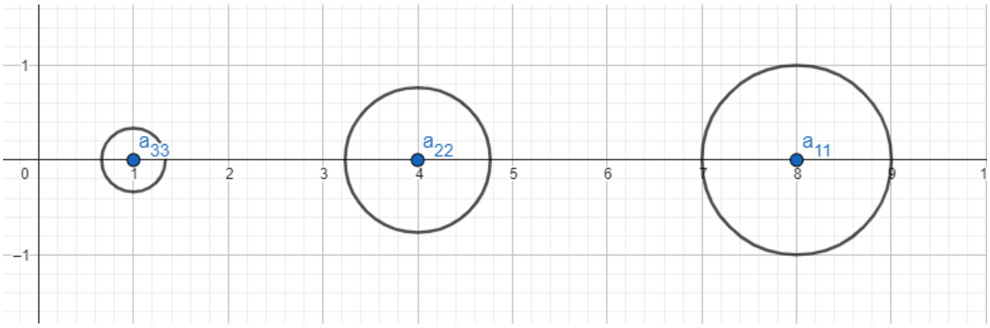

Figura 1: Regiones en el plano complejo donde cada región contiene un eigenvalor dado por el Teorema de Gerschgorin

Se puede observar además que la matriz A es hermitiana. Por tanto, los eigenvalores de A son reales. Luego, se puede acotar la estimación de los eigenvalores a la recta real, donde el eigenvalor máximo esta acotado superiormente por 9.

Ejercicio 2
Implementa la iteración QR con shift. Aplícala a la matriz A del Ejercicio 1 con $\varepsilon = 10^{-N}$ para $N = 1, 3, 4, 5$.

Solución:

Sabemos que el de iteración QR es un algoritmos que converge lentamente, en caso de que la matriz sea diagonalizable. Se puede mejorar la eficiencia en velocidad de convergencia implementando un *shift* σ en cada iteración. Hemos visto en clase que la convergencia del mencionado algoritmo depende del cociente $|\lambda_2/\lambda_1|$. Luego, se puede elegir un shift tal que

$$\frac{|\lambda_2 - \sigma|}{|\lambda_1 - \sigma|} < \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$$

Así, ajustando a cada iteración cierto *shift* podemos mejorar la velocidad de convergencia.

El construimos una función para el algoritmo de iteración QR para una matriz A

```
def diagonal(A,n):

    m = len(A)
    # Shift inicial
    sigma = A[m-1,m-1]

    T = A.copy()

    # n = 100           # Número de iteraciones
    for i in range(n):

        T = A - sigma*np.identity(m)
        Q, R = GramSchmidtModified(T)

        T = R@Q + sigma*np.identity(m)
        sigma =T[m-1,m-1]
    return T
```

La función retorna la matriz T *pseudo-diagonal*, que es la matriz A tras n iteraciones QR con *shift.*

Construimos la matriz del problema 1, y en un ciclo buscamos la pseudo-diagonal para cada matriz simétrica.

Para la matriz

$$\begin{bmatrix} 8. & 1. & 0. \\ 1. & 4. & 1/10^N \\ 0. & 1/10^N & 1. \end{bmatrix}$$

con 100 iteraciones QR se obtiene:

Caso $N = 1$

$$\begin{bmatrix} 8{,}19994408e+00 & 4{,}00556947e-01 & 2{,}55849957e-01 \\ 4{,}00556947e-01 & 3{,}80355156e+00 & 9{,}89997955e-02 \\ 0{,}00000000e+00 & 1{,}79162876e-18 & 9{,}96504364e-01 \end{bmatrix}$$

Caso $N = 3$

$$\begin{bmatrix} 8{,}19999999e+00 & 4{,}00000056e-01 & -4{,}76384063e-02 \\ 4{,}00000056e-01 & 3{,}80000036e+00 & -5{,}94476093e-02 \\ 0{,}00000000e+00 & 3{,}70934517e-21 & 9{,}99999650e-01 \end{bmatrix}$$

Caso $N = 4$

$$\begin{bmatrix} 8{,}20000000e+00 & 4{,}00000001e-01 & 1{,}57892847e-03 \\ 4{,}00000001e-01 & 3{,}80000000e+00 & 1{,}86170736e-03 \\ 0{,}00000000e+00 & 1{,}38241560e-21 & 9{,}99999997e-01 \end{bmatrix}$$

Caso $N = 5$

$$\begin{bmatrix} 8{,}20000000e+00 & 4{,}00000000e-01 & -5{,}15566331e-04 \\ 4{,}00000000e-01 & 3{,}80000000e+00 & 9{,}89949491e-06 \\ 0{,}00000000e+00 & 1{,}02401453e-23 & 1{,}00000000e+00 \end{bmatrix}$$

Nótese que los elementos fuera de la diagonal son muy cercanos a cero. Véase que los elementos en la diagonal, que son los eigenvalores, son aproximadamente de 8.2, 3.8, 1.

Ejercicio 3
Determina todos los eigenvalores y eigenvectores de una matriz de Householder.

Solución:
Empecemos por definir la matriz de Householder.

Definición

Sea v un vector columna de tamaño k. Se dice que la matriz de Householder asociada a v es la matriz de dimensión $k \times k$ dada por

$$H = I - 2\frac{vv^*}{\|v\|^2}$$

donde I es la $k \times k$ matriz diagonal.

Dado esto, procederemos a mostrar que H es hermitiana y unitaria.

Teorema

La matriz de Householder es hermitiana.

Prueba

Tomemos el transpuesto conjudado de H

$$\begin{aligned} H^* &= I^* - 2\frac{(vv^*)^*}{\|v\|^2}, \\ &= I - 2\frac{(v^*)^* v^*}{\|v\|^2}, \\ &= I - 2\frac{vv^*}{\|v\|^2} = H. \end{aligned}$$

Teorema

La matriz de Householder es unitaria.

Prueba

$$
\begin{aligned}
HH^* &= H^2, \\
&= \left(I - 2\frac{vv^*}{\|v\|^2} \right)^2, \\
&= I - 4\frac{vv^*}{\|v\|^2} + 4\frac{vv^*}{\|v\|^2}\frac{vv^*}{\|v\|^2}, \\
&= I - 4\frac{vv^*}{\|v\|^2} + 4\frac{vv^*}{\|v\|^2}, \\
&= I.
\end{aligned}
$$

donde se usó que $vv^* = \|v\|^2$.

Del hecho de que la matriz de Householder sea hermitiana se sigue que su valores propios existen y son reales. Por el hecho de que H sea unitaria significa que la transformación generada en una rotación y/o reflexión. Entonces, los vectores propios deben estar en el circulo unitario. Por tanto, sus valores propios son ± 1.

Para ver con formalidad el hecho previo. Tomemos

$$
\begin{aligned}
Hv &= \left(I - 2\frac{vv^*}{\|v\|^2} \right) v, \\
&= v - 2\frac{v(v^*v)}{\|v\|^2}, \\
&= v - 2v, \\
&= -v
\end{aligned}
$$

por lo que v es vector propio con valor propio -1.

Ahora, consideremos un vector u ortogonal al vector inicial u, es decir $v^*u = 0$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
Hu &= \left(I - 2\frac{vv^*}{\|v\|^2} \right) u, \\
&= u - 2\frac{v(v^*u)}{\|v\|^2}, \\
&= u.
\end{aligned}
$$

como hay $k - 1$ vectores ortogonales a v, se sigue que 1 es valor propio con multiplicidad $k - 1$.

Ejercicio 4
Demuestra que no es posible construir la transformación de similaridad del Teorema de Schur con un número finito de transformaciones de similaridad de Householder.

Solución:

Primeramente, consideremos el caso de la matriz

$$
A = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{m-2} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{m-1}
\end{pmatrix}
$$

Es preciso notar que el problema de valores propios es equivalente a un problema de solución de raíces de un polinomio. Para ver esto, con la metodología usual, el polinomio característico es

$$det(A - zI) = det \begin{pmatrix} -z & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -z & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -z & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -z & -a_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -z - a_{m-1} \end{pmatrix}$$

por cofactores

$$\begin{aligned} 0 &= det(A - zI) \\ &= -a_0 \begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} -z & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} - \cdots - (a_{m-1} + z) \begin{vmatrix} -z & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -z \end{vmatrix} \\ &= -a_0 - a_1 z - \cdots - (-1)^m a_{m-1} z^{m-1} - (-1)^m z^m. \end{aligned}$$

Así

$$z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0. \tag{1}$$

Es decir, conocer los valores propios de la matriz A es equivalente a conocer las raíces del polinomio (1).

Procedamos por contradicción. Supongamos que es posible construir la transformación de similaridad del Teorema de Schur con un número finito de transformaciones de similaridad de Householder. Entonces existe H_1 matriz de Householder tal que

$$H_1 A H_1^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b^T \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

donde B es una matriz de $m - 1xm - 1$. Por este resultado hemos visto que aplicar una transformación de similaridad de Householder nos da el primer valor propio. Aplicando $m - 2$ transformaciones de similaridad de Householder se obtendrá que una forma triangular superior.

$$H_m \cdots H_2 H_1 A H_1^{-1} H_2^{-1} \cdots H_m^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & b_1^T \\ 0 & \lambda_2 & & & b_2^T \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & b_3^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b_m^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Entonces con a lo sumo m transformaciones de Householder se puede resolver para cada valor propio. Es decir resuelve el problema de las raíces de un polinomio con una cantidad finita de pasos. Lo que entra en contradicción con el Teorema de Abel-Ruffini que establece que no se puede resolver un polinomio de grado mayor o igual a cinco con coeficientes arbitrarios en términos de radicales. Es decir, no hay forma cerrada para resolver en una cantidad finita de pasos para el polinomio que se planteo. Se concluye el enunciado del ejercicio.

Ejercicio 5

¿ Qué pasa si aplicas la iteración QR sin shift a una matriz ortogonal? o **hagan lo que quieran**. Sea A una matriz de Hessenberg superior y sea $QR = A$ la factorización QR de A. Muestra que RQ es una matriz superior de Hessenberg.

Solución:

Como el método de iteración QR sin shift simplemente aplica la factorización QR a la matriz A. Sin embargo, sabemos que la factorización QR es única salvo un signo. Luego, si A es ortogonal entonces es su propia factorización QR ya que $A = AI$ donde I es la matriz identidad. Entonces la operación inversa RQ deja sin alterar el producto ya que $R = I$ por lo que no importa la cantidad de iteraciones que se apliquen, este método no converge a la matriz diagonal en estos casos. De igual forma, se hicieron unos experimentos en el código correspondiente donde se muestra que la matriz no cambia bajo estas iteraciones.