César Isaí García Cornejo
cesar.cornejo@cimat.mx
Computo Científico

Tarea 8

Semestre 3

Ejercicio 1

Aplique el algoritmo de Metropolis-Hastings considerando como función objetivo la distribución normal bivariada:

$$f_{X_1,X_2}(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi}|\Sigma|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\bar{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu)\right\}$$

donde,

$$\mu = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$$

Así se tienen las siguientes distribuciones condicionales:

$$X_1|X_2 = x_2 \sim N\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-\mu_2)\, , \, \sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$$
$$X_2|X_1 = x_1 \sim N\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-\mu_1)\, , \, \sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$

Considere las siguientes propuestas:

$$q_1((x_1', x_2')|(x_1, x_2)) = f_{X_1|X_2}(x_1'|x_2)I(x_2' = x_2)$$
$$q_2((x_1', x_2')|(x_1, x_2)) = f_{X_2|X_1}(x_2'|x_1)I(x_1' = x_1)$$

A partir del algoritmo MH usando Kerneles híbridos simule valores de la distribución normal bivariada, fijando $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, considere los casos $\rho = 0.8$ y $\rho = 0.95$.

Solución:

Ejercicio 2
Considere los tiempos de falla $t_1, ..., t_n$ con distribución $Weibull(\alpha, \lambda)$:

$$f(t_i|\alpha, \lambda) = \alpha\lambda t_i^{\alpha-1} e^{-t_i^{\alpha}\lambda}$$

Se asumen como a priori $\alpha \sim exp(c)$ y $\lambda|\alpha \sim Gama(\alpha, b)$, por tanto, $f(\alpha, \lambda) = f(\lambda|\alpha)f(\alpha)$. Así, para la distribución posterior se tiene:

$$f(\alpha, \lambda|\bar{t}) \propto f(\bar{t}|\alpha, \lambda) f(\alpha, \lambda)$$

A partir del algoritmo MH usando Kerneles híbridos simule valores de la distribución posterior $f(\alpha, \lambda|\bar{t})$, considerando la siguientes propuestas:

a) Propuesta:

$$\lambda_p|\alpha, \bar{t} \sim Gama\left(\alpha + n, b + \sum_{i=1}^{n} t_i^{\alpha}\right) \quad \text{y dejando } \alpha \text{ fijo.}$$

b) Propuesta:

$$\alpha_p|\lambda, \bar{t} \sim Gama(n+1, -\log(b) - \log(r_1) + c), \text{ con } r_1 = \prod_{i=1}^{n} t_i \text{ y dejando } \lambda \text{ fijo.}$$

c) Propuesta:

$$\alpha_p \sim exp(c) \text{ y } \lambda_p|\alpha_p \sim Gama(\alpha_p, b).$$

d) Propuesta:

$$\alpha_p = \alpha + \varepsilon \sim N(0, \sigma) \text{ y dejando } \lambda \text{ fijo.}$$

Simular datos usando $\alpha = 1$ y $\lambda = 1$ con $n = 20$. Para la priori usar $c = 1$ y $b = 1$.

Solución:

Ejercicio 3

Considera el ejemplo referente al número de fallas en bombas de agua en una central nuclear, donde p_i representa el número de fallas en el tiempo de operación t_i, con $i = 1, ..., n$.

Considera el modelo $p_i \sim Poisson(\lambda_i t_i)$, (las λ_i son independientes entre si), con distribuciones a priori $\lambda_i|\beta \sim Gama(\alpha, \beta)$ y $\beta \sim Gama(\gamma, \delta)$, por tanto:

$$f(\lambda_1, ..., \lambda_n, \beta) = f(\lambda_1, \beta) f(\lambda_2, \beta) \cdots f(\lambda_n, \beta) f(\beta)$$

Para la distribución posterior se tiene:

$$f(\lambda_1, ..., \lambda_n, \beta|\bar{p}) \propto L(\bar{p}, \bar{\lambda}, \beta) f(\lambda_1, ..., \lambda_n, \beta)$$

Simule valores de la distribución posterior $f(\lambda_1, ..., \lambda_n, \beta|\bar{p})$, usando un kernel híbrido, considerando las propuestas:

$$\lambda_i|\bar{\lambda_{-i}}, \beta, \bar{t} \sim Gama(p_i + \alpha, \beta + t_i)$$
$$\beta|\bar{\lambda}, \bar{t} \sim Gama\left(n\alpha + \gamma, \delta + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right).$$

Verifique que estas son propuestas Gibbs. Use los datos del cuadro 1 con los parámetros a priori $\alpha = 1.8$, $\gamma = 0.01$ y $\delta = 1$.

Referencias

[1] Robert, C. P., Casella, G., and Casella, G. (1999). Monte Carlo statistical methods (Vol. 2). New York: Springer.

[2] Wasserman, L. (2004). All of statistics: a concise course in statistical inference (p. 413). New York: Springer.