

### Ejercicio 1

Aplique el algoritmo de Metropolis-Hastings considerando como función objetivo la distribución normal bivariada:

$$f_{X_1, X_2}(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\bar{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu) \right\}$$

donde,

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Así se tienen las siguientes distribuciones condicionales:

$$X_1|X_2 = x_2 \sim N \left( \mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (x_2 - \mu_2), \sigma_1^2 (1 - \rho^2) \right)$$

$$X_2|X_1 = x_1 \sim N \left( \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - \mu_1), \sigma_2^2 (1 - \rho^2) \right)$$

Considere las siguientes propuestas:

$$q_1((x'_1, x'_2)|(x_1, x_2)) = f_{X_1|X_2}(x'_1|x_2)I(x'_2 = x_2)$$

$$q_2((x'_1, x'_2)|(x_1, x_2)) = f_{X_2|X_1}(x'_2|x_1)I(x'_1 = x_1)$$

A partir del algoritmo MH usando Kernels híbridos simule valores de la distribución normal bivariada, fijando  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ , considere los casos  $\rho = 0.8$  y  $\rho = 0.95$ .

### Solución:

Observemos que tenemos como distribuciones propuestas justamente las distribuciones condicionales de la distribución objetivo que es la normal bivariada. Ya hemos probado, en el caso general que estas son propuestas de Gibbs. Por tanto, tenemos que la cadena de Markov acepta con probabilidad uno cada propuesta. Luego, el método de Metropolis-Hastings se reduce a tomar realizaciones de las densidades condicionales según un kernel híbrido. Dicho kernel se diseñó para que con probabilidad de un medio simule de la primera coordenada (eje x) mientras que con el resto de probabilidad simula de la condicional para la segunda coordenada (eje y).

Además, con el fin de tener una cadena fuertemente aperiódica, en la implementación se creó un paso extra que ocurre con probabilidad de  $10^{-5}$  de quedarse en el mismo punto de la cadena.

Los resultados de dichas implementaciones se muestran a continuación. Para el caso con correlación  $\rho = 0.80$

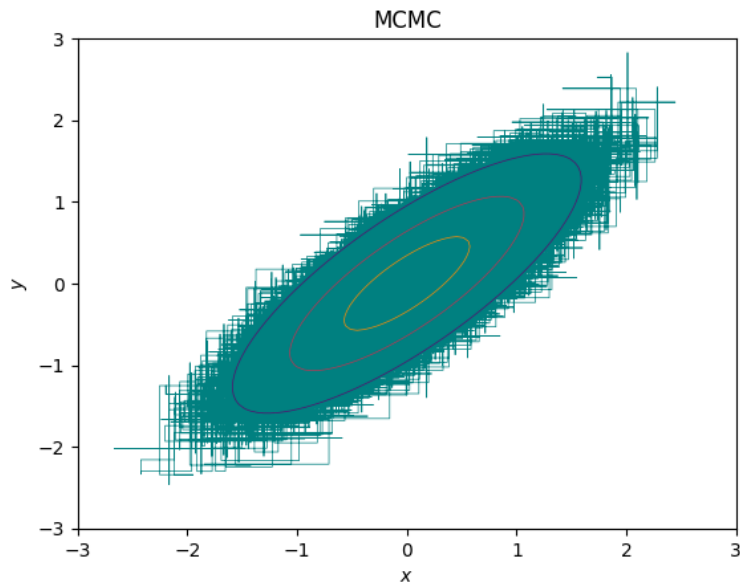


Figura 1: Trayectoria de la simulación de la normal bivariada con correlación 0.8

Para la simulación de la normal bivariada con  $\rho = 0.95$

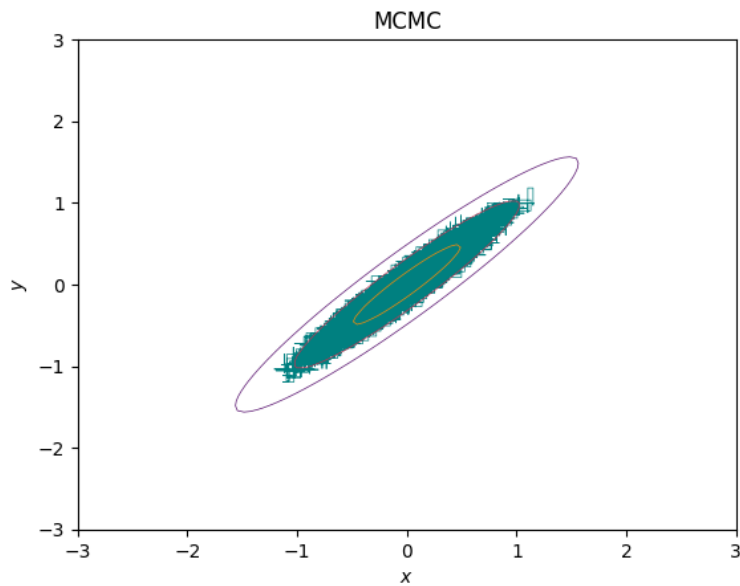


Figura 2: Trayectoria de la simulación de la normal bivariada con correlación 0.95

Nótese que tenemos el comportamiento esperado en cada caso, primero vemos que al aumentar la correlación tenemos un adelgazamiento de la elipse. Luego, la trayectoria cubre satisfactoriamente las curvas de nivel de la gráfica de la normal bivariada.

### Ejercicio 2

Considere los tiempos de falla  $t_1, \dots, t_n$  con distribución  $Weibull(\alpha, \lambda)$ :

$$f(t_i|\alpha, \lambda) = \alpha \lambda t_i^{\alpha-1} e^{-t_i^\alpha \lambda}$$

Se asumen como a priori  $\alpha \sim \exp(c)$  y  $\lambda|\alpha \sim Gama(\alpha, b)$ , por tanto,  $f(\alpha, \lambda) = f(\lambda|\alpha)f(\alpha)$ . Así, para

la distribución posterior se tiene:

$$f(\alpha, \lambda | \bar{t}) \propto f(\bar{t} | \alpha, \lambda) f(\alpha, \lambda)$$

A partir del algoritmo MH usando Kernels híbridos simule valores de la distribución posterior  $f(\alpha, \lambda | \bar{t})$ , considerando la siguientes propuestas:

a) Propuesta:

$$\lambda_p | \alpha, \bar{t} \sim \text{Gama} \left( \alpha + n, b + \sum_{i=1}^n t_i^\alpha \right) \text{ y dejando } \alpha \text{ fijo.}$$

b) Propuesta:

$$\alpha_p | \lambda, \bar{t} \sim \text{Gama}(n + 1, -\log(b) - \log(r_1) + c), \text{ con } r_1 = \prod_{i=1}^n t_i \text{ y dejando } \lambda \text{ fijo.}$$

c) Propuesta:

$$\alpha_p \sim \exp(c) \text{ y } \lambda_p | \alpha_p \sim \text{Gama}(\alpha_p, b).$$

d) Propuesta:

$$\alpha_p = \alpha + \varepsilon \sim N(0, \sigma) \text{ y dejando } \lambda \text{ fijo.}$$

Simular datos usando  $\alpha = 1$  y  $\lambda = 1$  con  $n = 20$ . Para la priori usar  $c = 1$  y  $b = 1$ .

### Solución:

La distribución objetivo es la distribución posterior que se obtiene directamente con el cálculo:

$$f(\alpha, \lambda | \bar{t}) \propto \prod_{i=1}^n \left( \alpha \lambda t_i - i^{\alpha-1} e^{t_i^\alpha \lambda} \right) \cdot \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda b} \cdot c e^{-\alpha c}$$

para  $\alpha > 0$  y  $\lambda > 0$ . Simplificando

$$f(\alpha, \lambda, \bar{t}) \propto \lambda^{n+\alpha-1} e^{-\lambda(b+\sum t_i^\alpha)} \cdot \frac{(b \prod_{i=1}^n t_i)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \alpha^n e^{-\alpha c}$$

De aquí es claro que la marginal de  $\lambda$  sigue una distribución gama, es decir

$$\lambda_p | \alpha \sim \text{Ga}(n + \alpha, b + \sum_{i=1}^n t_i^\alpha)$$

que coincide con la primer propuesta dada por en enunciado del ejercicio. Por tanto, dicha propuesta es propuesta de Gibbs.

Nuevamente, implementamos el método de Metropolis-Hastings para kernel híbrido. El primer kernel, como vimos, es un kernel de Gibbs. Luego, cada propuesta se acepta siempre. Sin embargo, el segundo kernel tiene un problema, pues al tomar  $b = 1, c = 1$ , tenemos que es necesario que  $\sum_{i=1}^n \log t_i < 1$  para tener parámetro positivo. Luego, dicha condición no es frecuente, por lo que se decidió por descartar o rechazar cada propuesta donde no se satisfaga. La siguiente propuesta tiene *actualizaciones* en ambos parámetros y se basa en una Metropolis-Hastings convencional, con propuesta no simétrica. El último kernel es una camina aleatoria solo en el parámetro  $\alpha$

### Ejercicio 3

Considera el ejemplo referente al número de fallas en bombas de agua en una central nuclear, donde  $p_i$  representa el número de fallas en el tiempo de operación  $t_i$ , con  $i = 1, \dots, n$ .

Considera el modelo  $p_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i t_i)$ , (las  $\lambda_i$  son independientes entre si), con distribuciones a priori  $\lambda_i | \beta \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$  y  $\beta \sim \text{Gama}(\gamma, \delta)$ , por tanto:

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \beta) = f(\lambda_1, \beta) f(\lambda_2, \beta) \cdots f(\lambda_n, \beta) f(\beta)$$

Para la distribución posterior se tiene:

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \beta | \bar{p}) \propto L(\bar{p}, \bar{\lambda}, \beta) f(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \beta)$$

Simule valores de la distribución posterior  $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \beta | \bar{p})$ , usando un kernel híbrido, considerando las propuestas:

$$\begin{aligned} \lambda_i | \lambda_{-i}, \beta, \bar{t} &\sim \text{Gama}(p_i + \alpha, \beta + t_i) \\ \beta | \bar{\lambda}, \bar{t} &\sim \text{Gama}\left(n\alpha + \gamma, \delta + \sum_{i=1}^n \lambda_i\right). \end{aligned}$$

Verifique que estas son propuestas Gibbs. Use los datos del cuadro 1 con los parámetros a priori  $\alpha = 1.8$ ,  $\gamma = 0.01$  y  $\delta = 1$ .

## Referencias

- [1] Robert, C. P., Casella, G., and Casella, G. (1999). Monte Carlo statistical methods (Vol. 2). New York: Springer.
- [2] Wasserman, L. (2004). All of statistics: a concise course in statistical inference (p. 413). New York: Springer.