Series de Tiempo

Tarea 3

30/09/2023

Debido a que el curso de Series de Tiempo tiene estudiantes de tres programas, cada uno de los cuales hace énfasis en aspectos distintos, algunos ejercicios solo tiene que ser resueltos por estudiantes de un programa particular. Los ejercicios especiales para un programa están indicados al inicio del ejercicio: **MCE**=Maestría en Cómputo Estadístico; **MPyE**=Maestría en Probabilidad y Estadística. Cuando el ejercicio no este marcado, tiene que ser resulto por todos los estudiantes. Para los problemas aplicados, las respuestas tienen que darse en el contexto del problema.

1. (**MPyE**) Considera una serie de tiempo estacionaria e invertible X_t dada por

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} w_j e_{t-j} + e_t, \quad \sum_{j=1}^{\infty} w_j^2 < \infty, \quad e_t \sim \text{no-correlacionadas}(0, \sigma^2)$$
$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + e_t, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\pi_j| < \infty.$$

   Muestra que $E[(\hat{X}_{t,n} - \sum_{j=1}^{n} \pi_j X_{t-j})^2] \to 0$ cuando $n \to \infty$, donde $\hat{X}_{t,n}$ es el mejor predictor lineal insesgado de X_t basado en $X_{t-1}, \ldots, X_{t-n}$.

2. Muestra que si una serie de tiempo estacionaria satisface la ecuación en diferencias

$$Y_t - Y_{t-1} = e_t,$$

   entonces $E\{e_t^2\} = 0$.

3. Sea Y_t un proceso estacionario con media μ (desconocida) y función de autocovarianza $\gamma(h)$ conocida. Dado $(Y_1, \ldots, Y_n)' = \tilde{Y}$ con $var(\tilde{Y}) = V$ no-singular.

   a) Muestra que el mejor predictor lineal insesgado de μ is $\hat{\mu} = (\mathbf{1}'V^{-1}\mathbf{1})^{-1}\mathbf{1}'V^{-1}\tilde{Y}$, con $\mathbf{1}$ vector columna de n unos.

   b) Sea $\tilde{c} = cov(\tilde{Y}, Y_{n+1})$ y $b = V^{-1}\tilde{c}$. Sea $\tilde{Y}_{n+1} = \tilde{b}'\tilde{Y}$ (que es el mejor estimador lineal insesgado (BLUP) para $\tilde{Y}$ cuando $\mu = 0$). Muestra que el BLUP para Y_{n+1} es $\hat{Y}_{n+1} = a_1\tilde{Y}_{n+1} + a_2\hat{\mu}$, donde $a_1 = 1$ y $a_2 = (1 - \mathbf{1}'V^{-1}\tilde{c})$.

   c) Calcula $E[(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1})^2]$.

   d) Supón que $Y_t = \mu + e_t + e_{t-1}$, μ desconocida. Dado Y_1, Y_2, Y_3, predice Y_4.

4. Simula un modelo ARMA(1,1) de longitud $n = 100$, con coeficiente autorregresivo $\phi = 0.8$ y $\theta = 0.4$. Fija la semilla en 910. Para este ejercicio puedes usar `R` o `Python`.

   a) Calcula y grafica la función de autocorrelación (ACF) teórica. Grafica suficientes lags (retraso) hasta que las correlaciones se desvanezcan. Calcula y grafica la ACF muestral de la muestra simulada. ¿Qué tan bien ajustan los valores y patrones de las ACFs teórica y muestral?

b) Lee sobre la función de autocorrelación extendida (EACF) en el libro "Time Series Analysis with Applications in R" de Jonathan D. Cryer y Kung-Sik Chan (disponible en el SpringerLink). Calcula e interpreta la EACF muestral para la serie simulada. ¿La EACF te permite identificar los órdenes correctos para el modelo?

c) Repite las partes (a) y (b) con una nueva simulación usando los mismos parámetros y tamaño de muestra.

d) Repite las partes (a) y (b) con una nueva simulación usando los mismos parámetros y un tamaño de muestra $n = 48$. Vuelve a repetir la simulación pero ahora con un tamaño de muestra $n = 200$. Comenta al respecto.

5. (**MCE**) Simula una serie de tiempo AR(2) de longitud $n = 72$ y parámetros $\alpha_1 = 0.7$ y $\alpha_2 = -0.4$. Fija la semilla en 910. Para este ejercicio puedes usar `R` o `Python`.

a) Calcula y grafica la ACF teórica para el modelo. Grafica suficientes lags hasta que las correlaciones se desvanezcan. Calcula y grafica la ACF muestral para tu serie simulada. ¿Qué tan bien ajustan los valores de las ACFs teórica y muestral? ¿El software que empleas genera intervalos de confianza basados en la regla vista en clase? Comenta.

b) Determina la PACF teórica del modelo. Calcula y grafica la PACF muestral para la serie simulada. ¿Qué tan bien ajustan los valores de la PACF teórica y muestral? ¿El software que empleas genera intervalos de confianza basados en la regla vista en clase? Comenta.

c) Realiza las pruebas de hipótesis: $H_0 : y_t \sim$AR(1) vs $H_a : y_t \sim$AR(2); $H_0 : y_t \sim$AR(1) vs $H_a : y_t \sim$AR(3); $H_0 : y_t \sim$AR(1) vs $H_a : y_t \sim$AR(4); $H_0 : y_t \sim$AR(2) vs $H_a : y_t \sim$AR(3). $H_0 : y_t \sim$AR(2) vs $H_a : y_t \sim$AR(4). ¿Puedes concluir algo sobre el orden del modelo solo usando estas pruebas de hipótesis? Comenta.

d) Repite los incisos anteriores para un modelo MA(2) con parámetros análogos a los del AR(2). En este caso, no es necesario determinar la PACF teórica, solo la muestral. Además, para comparar, simula otra trayectoria del modelo MA(2) con $n = 1000$ observaciones, genera el PACF muestral de esta muestra grande y compara con la PACF muestral de la simulación de la MA(2) original.

6. (**MPyE**) Sea $\{X_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ definida como

$$X_t + \alpha X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} = e_t \quad e_t \sim \text{no-correlacionados}(0, \sigma^2).$$

Sean r_1, r_2 las raíces (reales) con $|r_i| < 1$, $i = 1, 2$. Muestra que

$$X_t - r_1 X_{t-1} = Y_t$$

es un AR(1) con parámetro r_2.

7. Define el proceso $\{X_t\}$ como $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j e_{t-j} (= \rho X_{t-1} + e_t)$, donde $e_t \sim$no-correlacionadas$(0, \sigma_e^2)$ y $|\rho| < 1$. Sea u_t una sucesión de v.a. no-correlacionadas $(0, \sigma_u^2)$ independientes de $\{e_t\}$. Sea $Y_t = X_t + u_t$ (i.e. Y_t es X_t medida con un error u_t).

a) Encuentra la función de autocovarianza de Y_t.

b) Encuentra un proceso ARMA(1,1) $Z_t = \alpha_1 Z_{t-1} + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t$, donde $\epsilon_t \sim$no-correlacionadas$(0, \sigma_\epsilon^2)$ tal que $\gamma_Z(h) = \gamma_Y(h)$ para todo h.

c) Si X_t fuera un ARMA(p, q) estacionario e invertible, ¿qué puedes decir de $Y_t = X_t + u_t$? donde u_t es WN$(0, \sigma_u^2)$ independiente de X_t.

8. (**MCE**) El conjunto de datos `deere3` contiene 57 mediciones consecutivas registradas en una máquina de la compañía Deere & Co. Los valores están dados en desviaciones de un valor ideal en diezmillonésimas de una pulgada. El proceso emplea un mecanismo de control que reinicia algunos parámetros de la máquina dependiendo de la magnitud de la desviación del valor ideal del último ítem producido. Los datos están disponibles en el paquete `TSA` de `R`.

   a) Grafica la ST y comenta al respecto. ¿Un modelo estacionario es apropiado?

   b) Grafica la ACF y PACF para esta serie y selecciona los órdenes tentativos de un modelo ARMA para la serie.

   c) Selecciona el orden empleando un criterio distinto o alguno que complemente el inciso anterior.

Entrega: 12/Oct/2023.