César Isaí García Cornejo
cesar.cornejo@cimat.mx
Series de Tiempo

Examen Parcial

Semestre 3

CIMAT

Ejercicio 1
Considera la ST

$$Y_t = 0.4Y_{t-1} + 0.45Y_{t-2} + Z_t + Z_{t-1} + 0.25Z_{t-2}$$

donde $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

1. Expresa esta ecuación en términos del operador "backshift" B; es decir, escríbela como una ecuación en B, y determina el orden (p, d, q) de este modelo.
2. ¿ Puedes simplificar esta ecuación? ¿ Cuál es el orden después de la simplificación?
3. determina si este modelo es causal y/o invertible.
4. Si el modelo es causal, encuentra la forma general de los coeficientes ψ_j's tal que
$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$$
.
5. Si el modelo es invertible, encuentra la forma general de los coeficientes π_j tal que
$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j Y_{t-j}$$
.

Solución:

1. Expresamos la serie de tiempo en la forma de un ARIMA(p,d,q)
$$\begin{aligned} Y_t - 0.4Y_{t-1} - 0.45Y_{t-2} &= Z_t + Z_{t-1} + 0.25Z_{t-2}, \\ \left(1 - 0.4B - 0.45B^2\right) Y_t &= \left(1 + B + 0.25B^2\right) Z_t, \\ \left(1 + (0.9 - 0.5)B + (0.5)(-0.9)B^2\right) Y_t &= \left(1 + 2(0.5)B + (0.5)^2B^2\right) Z_t, \\ (1 - 0.9B)(1 + 0.5B)Y_t &= (1 + 0.5B)^2 Z_t, \\ \phi'(B)Y_t &= \theta'(B)Z_t. \end{aligned}$$
donde $\phi'(B) = (1 - 0.9B)(1 + 0.5B)$ y $\theta'(B) = (1 + 0.5B)^2$ como no hay raíces unitarias, el valor de $d = 0$. Entonces, esta serie de tiempo es un ARIMA(2,0,2).

2. Recordemos que para evitar tener problemas de identificabilidad es necesario simplificar los factores, de ser posible. En este caso tenemos que la simplificación es
$$\begin{aligned} (1 - 0.9B)Y_t &= (1 + 0.5B)Z_t, \\ \phi(B)Y_t &= \theta(B)Z_t. \end{aligned}$$
donde $\phi(B) = 1 - 0.9B$ y $\theta(B) = 1 + 0.5B$ y el orden de esta serie de tiempo es (1,0,1).

3. Recordemos que un modelo es causal si y solo si todas las raíces de $\phi(z)$ son mayores que uno en norma. Un modelo es invertible si y solo si las raíces de $\theta(z)$ son mayores que uno en norma. Así para $\phi(z)$

$$0 = \phi(z) = 1 - 0.9z \quad \Rightarrow \quad z_1 = 10/9$$

como $|z_1| > 1$ entonces la ST es causal. Luego,

$$0 = \theta(z) = 1 + 0.5z \quad \Rightarrow \quad z_2 = -2$$

como $|z_2| > 1$ entonces la ST es invertible.

4. Ahora que ya probamos que la ST es causal e invertible, para obtener la expresión solicitada hacemos la siguiente manipulación

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{\theta(B)}{\phi(B)} Z_t, \\ Y_t &= (1 + 0.5B) \frac{1}{1 - 0.9B} Z_t \end{aligned}$$

por expansión en serie geométrica

$$\begin{aligned} Y_t &= (1 + 0.5B) \left(1 + 0.9B + 0.9^2 B^2 + 0.9^3 B^3 + \cdots\right) Z_t, \\ &= \left(1 + (0.9)^0 (0.9 + 0.5)B + (0.9^2 + 0.9 \cdot 0.5)B^2 + (0.9^3 + 0.9^2 \cdot 0.5)B^3 + \cdots\right) Z_t, \\ &= \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} 1.4 \cdot (0.9)^{j-1} B_j\right) Z_t, \\ &= Z_t + \sum_{j=1}^{\infty} 1.4 (0.9)^{j-1} Z_{t-j} \end{aligned}$$

Comparando con la expansión causal del enunciado, $\psi_0 = 1$ y $\psi_j = 1.4(0.9)^{j-1}$ para $j = 1, 2, \cdots$.

5. Semejante al anterior tomamos la representación

$$Z_t = \frac{\phi(B)}{\theta(B)} Y_t$$

con la expansión de la serie geométrica y simplificando

$$\begin{aligned} Z_t &= \frac{1 - 0.9B}{1 + 0.5B} Y_t, \\ &= (1 - 0.9B)(1 - 0.5B + 0.5^2 B^2 - 0.5^3 B^3 + \cdots) Y_t, \\ &= \left(1 + (-0.5 - 0.9)B + (0.5^2 + (\text{-}0.5)(-0.9))B^2 + (-0.5^3 - (0.9)(\text{-}0.5^2))B^3 + \cdots\right) Y_t, \\ &= \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left((-0.5)^i - 0.9(-0.5)^{i-1}\right)\right) Y_t, \\ &= \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-0.5)^{i-1} (-0.5 - 0.9)\right) Y_t, \\ &= \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-0.5)^{i-1} (-1.4)\right) Y_t, \end{aligned}$$

Comparando con la expresión invertible dada por el enunciado. Tenemos, $\pi_0 = 1$ y $\pi_j = -1.4(-0.5)^{j-1}$ para $j = 1, 2, \cdots$

Ejercicio 2
Asume que una ST satisface la ecuación en diferencias

$$Y_t = \begin{cases} 1 & t = 0,1 \\ 0.4Y_{t-1} + 0.77Y_{t-2} + e_t & t = 2,3,\cdots \end{cases}$$

donde las e_t's son v.a. no-correlacionadas(0,1). Sea $(Y_2, Y_4, Y_5) =$ (2,3,2.9).

1. Predice Y_6 y Y_7. Calcula la matriz de covarianzas de tu predicción. *Hint: Usa el mejor predictor general*
2. ¿Cuál es el límite $\lim_{s\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(Y_{5+s} - \hat{Y}_{5+s}\right)^2\right]$?

Solución:

1. Buscamos el mejor predictor general, es decir buscamos $g(X)$ tal que el error cuadrático sea mínimo. Tenemos el problema

$$MSE(g(X)) = \text{argmin}_{g(X)}\mathbb{E}\left[(Y_{t+1} - g(X))^2\right]$$

donde $X = (Y_n, Y_{n-1}, ..., Y_1)$. Nótese que si $g(X) = c$ es constante entonces $g(X) = \mathbb{E}[Y]$ ya que se trata de mínimizar

$$\mathbb{E}\left[(Y_{n+1} - c)^2\right].$$

Ahora, usemos propiedad de torre para la expresión

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} - g(X)] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(Y_{n+1} - g(X))^2 | X\right]\right]$$

Para una observación x la esperanza condicional del evento $X = x$ es

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} - g(x)] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(Y_{n+1} - g(x))^2 | X = x\right]\right]$$

Como $g(x)$ es constante para la esperanza interna entonces se minimiza tomando $g(x) = \mathbb{E}[Y|X = x]$. Como esto pasa para toda x entonces podemos tomar

$$g(X) = \mathbb{E}[Y_{n+1}|X]$$

Desde luego, el estimador para Y_{n+1} es $\hat{Y}_{n+1} = \mathbb{E}[Y_{n+1}|X]$.

Queremos predecir Y_6, entonces de la relación de recurrencia

$$\begin{aligned}\hat{Y}_6 &= \mathbb{E}[0.4Y_5 + 0.77Y_4 + e_6 | X = (Y_5, Y_4)], \\ &= 0.4\mathbb{E}[Y_5|Y_5, Y_4] + 0.77\mathbb{E}[Y_4|Y_5, Y_4] + \mathbb{E}[e_6|Y_5, Y_6], \\ &= 0.4 \cdot 2.9 + 0.77 \cdot 3, \\ &= 3.47\end{aligned}$$

Nótese que por la naturaleza de la serie, los valores de Y_3, Y_2, Y_1 no aportan información a la predicción por lo que se omitió en los cálculos.

Para hacer la predicción de Y_7 notemos que podemos usar la recursion que define Y_t. Denotemos por

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + e_t \tag{1}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
Y_{t+1} &= \phi_1 Y_t + \phi_2 Y_{t-1} + e_{t+1},\\
&= \phi_1\left(\phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + e_t\right) + \phi_2 Y_{t-1} + e_{t+1},\\
&= \phi_1^2 Y_{t-1} + \phi_1\phi_2 Y_{t-2} + \phi_2 Y_{t-1} + \phi_1 e_t + e_{t+1}
\end{aligned}
$$

Es decir, podemos predecir a dos pasos usando (t=6)

$$
Y_{t+1} = (\phi_1^2 + \phi_2) Y_{t-1} + \phi_1\phi_2 Y_{t-2} + \phi_1 e_t + e_{t+1}. \tag{2}
$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
\hat{Y}_7 &= \mathbb{E}\left[Y_7 | Y_5, Y_4\right],\\
&= (\phi_1^2 + \phi_2) Y_5 + \phi_1\phi_2 Y_4,\\
&= \left(0.4^2 + 0.77\right) 2.9 + 0.4 \cdot 0.77 \cdot 3,\\
&= 3.621
\end{aligned}
$$

Observese que lo anterior es equivalente a predecir Y_7 dado como observaciones Y_6, Y_5 donde el Y_6 es la predicción dado Y_5, Y_4. Entonces, en general si se desea predecir para Y_{n+s} es necesario calcular las predicciones previas partiendo de las observaciones Y_n. Es decir, calcular $\hat{Y}_{n+1}, \hat{Y}_{n+2}, \cdots, \hat{Y}_{n+s}$ recursivamente.

Para obtener la matriz de covarianza de la predicción, definamos el vector

$$
Y = \begin{pmatrix} Y_6 \\ Y_7 \end{pmatrix}
$$

y el vector de predicciones

$$
\hat{Y} = \begin{pmatrix} \hat{Y}_6 \\ \hat{Y}_7 \end{pmatrix}
$$

La matriz de covarianza de la predicción es

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \mathbb{E}\left[(Y - \hat{Y})(Y - \hat{Y})'\right],\\
&= \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} Y_6 - \hat{Y}_6 \\ Y_7 - \hat{Y}_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_6 - \hat{Y}_6 & Y_7 - \hat{Y}_7 \end{pmatrix}\right],\\
&= \begin{pmatrix} \mathbb{E}\left[(Y_6 - \hat{Y}_6)(Y_6 - \hat{Y}_6)\right] & \mathbb{E}\left[(Y_6 - \hat{Y}_6)(Y_7 - \hat{Y}_7)\right] \\ \mathbb{E}\left[(Y_7 - \hat{Y}_7)(Y_6 - \hat{Y}_6)\right] & \mathbb{E}\left[(Y_7 - \hat{Y}_7)(Y_7 - \hat{Y}_7)\right] \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

como $Y_6 = 0.4Y_5 + 0.77Y_4 + e_6$ y $\hat{Y}_6 = 0.4Y_5 + 0.77Y_4$ entonces $Y_6 - \hat{Y}_6 = e_6$. De igual forma, con (2) obtenemos $Y_7 - \hat{Y}_7 = \phi_1 e_6 + e_7 = 0.4e_6 + e_7$. Así,

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \begin{pmatrix} \mathbb{E}\left[e_6^2\right] & \mathbb{E}\left[e_6(0.4e_6 + e_7)\right] \\ \mathbb{E}\left[e_6(0.4e_6 + e_7)\right] & \mathbb{E}\left[e_7^2\right] \end{pmatrix},\\
&= \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0.4\sigma^2 \\ 0.4\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix},\\
&= \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(con $\sigma = 1$).

2. Consideremos iterar la ecuación (1) recursivamente

$$\begin{aligned} Y_{5+1} &= \phi_1 Y_5 + \phi_2 Y_4 + e_6, \\ \hat{Y}_{5+1} &= \phi_1 Y_5 + \phi_2 Y_4 \end{aligned}$$

Entonces la diferencia es

$$\mathbb{E}\left[\left(Y_{5+1} - \widehat{Y_{5+1}}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[e_6^2\right] = \sigma^2 = 1$$

Para dos pasos vimos en (2)

$$\begin{aligned} Y_{5+2} &= (\phi_1^2 + \phi_2)Y_5 + \phi_1\phi_2 Y_4 + \phi_1 e_6 + e_7, \\ \hat{Y}_{5+2} &= (\phi_1^2 + \phi_2)Y_5 + \phi_1\phi_2 Y_4 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(Y_{5+2} - \hat{Y}_{5+2}\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[(\phi_1 e_6 + e_7)^2\right], \\ &= \phi_1^2 + 1 \end{aligned}$$

Haciendo esta iteración un par de veces más. Para tres pasos

$$Y_{5+3} = \left(\phi_1^3 + 2\phi_1\phi_2\right) Y_5 + \left(\phi_1^2\phi_2 + \phi_2^2\right) Y_4 + \left(\phi_1^2 + \phi_2\right) e_6 + \phi_1 e_7 + e_8$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(Y_{5+3} - \hat{Y}_{5+3}\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\left(\phi_1^2 + \phi_2\right) e_6 + \phi_1 e_7 + e_8\right)^2\right], \\ &= \left(\phi_1^2 + \phi_2\right)^2 + \phi_1^2 + 1 \end{aligned}$$

Para 4 pasos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(Y_{5+4} - \hat{Y}_{5+4}\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\left(\phi_1^3 + 2\phi_1\phi_2\right) e_6 + (\phi_1^2 + \phi_2)e_7 + \phi_1 e_8 + e_9\right)^2\right], \\ &= \left(\phi_1^3 + 2\phi_1\phi_2\right)^2 + (\phi_1^2 + \phi_2)^2 + \phi_1^2 + 1 \end{aligned}$$

Para poder concluir se requiere encontrar la formula recursiva explicita y así poder hacer la suma infinita de los ϕ_1 y ϕ_2 (límite). Notemos que $|\phi_1| < 1$ y $|\phi_2| < 1$ por lo que la suma es convergente.

Nota: No encontré la forma explícita.

Ejercicio 3
Sea $Y_t = Z_t - \theta Z_{t-1}$, $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

1. Calcula la función de correlación $\rho(k)$ de Y_t.
2. Supón que $\rho(1) = 0.4$. ¿ Cuál preferirías? Proporciona una explicación corta.
3. En lugar de un modelo MA(1), asume que Y_t es un modelo MA(∞) dado por
$$Y_t = Z_t + C(Z_{t-1} + Z_{t-2} + \cdots),$$
4. Si $\{Y_t\}$ en la ecuación anterior se diferencía (i.e.,$X_t = Y_t - Y_{t-1}$), muestra que X_t es un modelo estacionario MA(1).
5. Encuentra la función de autocorrelación de $\{X_t\}$.

Solución:

1. Calculemos primeramente la función de autocovarianza
$$\gamma(k) = Cov(Y_t, Y_{t+k}).$$
Para $k = 0$
$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \mathbb{V}ar[Y_t], \\ &= \mathbb{V}ar[Z_t - \theta Z_{t-1}], \\ &= \mathbb{V}ar[Z_t] + \theta^2 \mathbb{V}ar[Z_{t-1}] \end{aligned}$$
donde se usó la no-correlación del ruido blanco Z_t. Luego,
$$\gamma(0) = (1 + \theta^2)\sigma^2$$
Para $k = 1$
$$\begin{aligned} \gamma(1) &= Cov(Y_t, Y_{t+1}), \\ &= Cov(Z_t - \theta Z_{t-1}, Z_{t+1} - \theta Z_t), \\ &= -\theta\sigma^2 \end{aligned}$$
Lo mismo es para $k = -1$. Para $|k| \geq 2$ no hay términos con covarianza no nula, es decir su covarianza es nula. Resumiendo
$$\gamma(k) = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma^2 & ,k = 0 \\ -\theta\sigma^2 & ,|k| = 1 \\ 0 & ,|k| \geq 2 \end{cases}$$
Se sigue que
$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 1 & ,k = 0 \\ \frac{-\theta}{1+\theta^2} & ,|k| = 1 \\ 0 & ,|k| \geq 2 \end{cases} \tag{3}$$
es la función de autocorrelación.

2. Supongamos que $\rho_1 = \rho(1) = 0.4$. De (3)

$$\begin{aligned}\rho_1 &= -\frac{\theta}{1+\theta^2},\\ \rho_1 + \rho_1\theta^2 + \theta &= -\theta,\\ \rho_1\theta^2 + \theta + \rho_1 &= 0.\end{aligned}$$

   Resolviendo la ecuación cuadrática

$$\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\rho_1^2}}{2\rho_1} = \frac{-1 \pm 0.6}{0.8}$$

   obteniendo las raíces

$$\begin{aligned}\theta_+ &= -0{,}5,\\ \theta_- &= -2.\end{aligned}$$

   Nos quedamos con θ =-0.5 porque con está tenemos las raíces del polinomio característico mayores que uno en norma. Lo que implica que la ST es invertible.

3. Sabemos que una serie de tiempo es estacionario si tanto su media como su función de covarianza no dependen del tiempo t (si la función de covarianza es finita). Analicemos dichas características. Para la esperanza

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Y_t\right] &= \mathbb{E}\left[Z_t + C(Z_{t-1} + Z_{t-2} + \cdots)\right],\\ &= 0\end{aligned}$$

   por linealidad de la esperanza.

   Consideremos la varianza de la ST

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar[Y_t] &= \mathbb{V}ar[Z_t + C(Z_{t-1} + Z_{t-2} + \cdots)],\\ &= \sigma^2 + C^2(\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots)\end{aligned}$$

   donde se usó la no-correlación del ruido blanco. Si $C \neq 0$ entonces la varianza es infinita lo que implica que no puede ser estacionaria ya que la definición tiene como hipótesis varianza finita.

4. Haciendo el calculo explícito

$$\begin{aligned}X_t &= Y_t - Y_{t-1},\\ &= Z_t + C(Z_{t-1} + Z_{t-2} + Z_{t-3} + \cdots) +\\ &\quad - Z_{t-1} - C(Z_{t-2} + Z_{t-3} + Z_{t-3} + \cdots)\\ &= Z_t - Z_{t-1} + C(Z_{t-1})\end{aligned}$$

   lo que se simplifica al MA(1)

$$X_t = Z_t + (C-1)Z_{t-1}$$

   que sabemos que es estacionario.

5. Como es un MA(1) y ya calculamos la correlación en (3) con $\theta = C - 1$. Tenemos que la función de autocorrelación es

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & ,k=0 \\ -\frac{(C-1)}{1+(C-1)^2} & ,|k|=1 \\ 0 & ,|k| \geq 2 \end{cases}$$

   lo que concluye el ejercicio.