César Isaí García Cornejo
cesar.cornejo@cimat.mx
Estadística Bayesiana

Tarea 2

Semestre 4

CIMAT

Ejercicio 1
Suponga que $X_i \sim U(0,\theta)$ independientes. ¿Cómo haría inferencia bayesiana (conjugada) sobre θ para analizar la Hipótesis $H_0 : \theta < 20$ vs $H_1 : \theta \geq 20$? Ejemplo: Tenemos un equipo electrónico cuya confiabilidad se puede describir con una distribución uniforme. Los tiempos de falla en meses de 30 de estos aparatos son: 7.7, 1.2, 5.5, 5.5, 13.0, 12.0, 9.7, 11.0, 18.0, 19.0, 16.0, 9.3, 6.8, 3.7, 4.8, 6.1, 2.2, 3.6, 9.9, 8.0, 19.0, 11.0, 15.0, 8.1, 15.0, 5.1, 12.0, 7.3, 2.1, 14.0. ¿Qué se puede concluir entonces del contraste de hipótesis anterior?

Solución:
Dado que se nos pide hacer una análisis conjugado para un modelo donde $X_i \sim U(0,\theta)$ entonces es que se tiene que proponer una distribución a priori $\theta \sim Pareto(\alpha_0, \beta_0)$. Mostraremos que en efecto estamos ante un análisis conjugado. Primeramente, recordemos que la densidad de una distribución $Pareto(\alpha, \beta)$ es

$$f(x) = \alpha\beta^{\alpha} x^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{[\beta,\infty)}(x). \tag{1}$$

Notemos que el soporte de la distribución Pareto depende del parámetro β.

Por otro lado, la distribución posterior del parámetro θ es

$$f(\theta|X^n) \propto f(\theta)\mathcal{L}(\theta) \tag{2}$$

con la distribución a priori $\theta \sim Pareto(\alpha_0, \beta_0)$ se sigue que

$$f(\theta|X^n) \propto \alpha_0\beta_0^{\alpha_0}\theta^{-(\alpha_0+1)}\mathbb{1}_{[\beta_0,\infty)}(\theta)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(X_i).$$

Observemos que la verosimilitud se anula si existe un i tal que $X_i > \theta$. Entonces, para tener verosimilitud no nula se requiere que para todo i se cumpla $\theta \geq X_i$. Dicho de otra forma, basta con que se cumpla que $\theta \geq X_{(n)}$ donde $X_{(n)} = max_i\{X_i\}$ también conocida como la estadística de orden superior. Por tanto,

$$f(\theta|X^n) \propto \theta^{-(\alpha_0+n+1)}\mathbb{1}_{[\beta_0,\infty)}(\theta)\mathbb{1}_{[X_{(n)},\infty)}(\theta)$$

Recordemos que el producto de dos funciones indicadores sobre dos conjuntos es la función indicadora de la intersección. Así

$$f(\theta|X^n) \propto \theta^{-(\alpha_0+n+1)}\mathbb{1}_{[\text{máx}\{X_{(n)},\beta_0\},\infty)}(\theta) \tag{3}$$

Contrastando (3) con (1) que es el kernel de una distribución Pareto, lo que muestra que en efecto son familias conjugadas.

Por tanto, la distribución posterior es también una distribución Pareto

$$\theta|X^n \sim Pareto(\alpha_p, \beta_p) \tag{4}$$

donde $\alpha_p = \alpha_0 + n$ y $\beta_p = \text{máx}\{\beta_0, X_{(n)}\}$

Previo a ver los datos, no tenemos conocimiento sobre θ. Como se propondrá un distribución a priori Pareto, y el parámetro β controla el soporte de forma que $\theta \in [\beta, \infty)$. Conviene proponer una distribución cuyo soporte sean los reales no negativos, esto pasaría con la distribución Pareto solo si β es cercano a cero. Por tanto elegimos $\beta = 1$. Para el parámetro α, tenemos distribuciones más *delgadas* para mayores valores de α. Luego, elegimos un valor pequeño, sin embargo, para $\alpha \leq 1$ no tiene media y para $\alpha \leq 2$ no tiene varianza. Por ello seleccionamos para la distribución a prior $\alpha = 5$.

Así, la distribución a priori es

$$\theta \sim Pareto(\alpha_0 = 5, \beta_0 = 1)$$

Como $\alpha_p = \alpha_0 + n = 35$ y $\beta_p = \text{máx}\{\beta_0, X_{(n)}\} = \text{máx}\{1, 19\} = 19$, la distribución posterior es

$$\theta | X^n \sim Pareto(\alpha_p = 35, \beta_p = 19) \tag{5}$$

Notemos que el soporte de la distribución posterior decreció y ademas se tiene una distribución más *concentrada*.

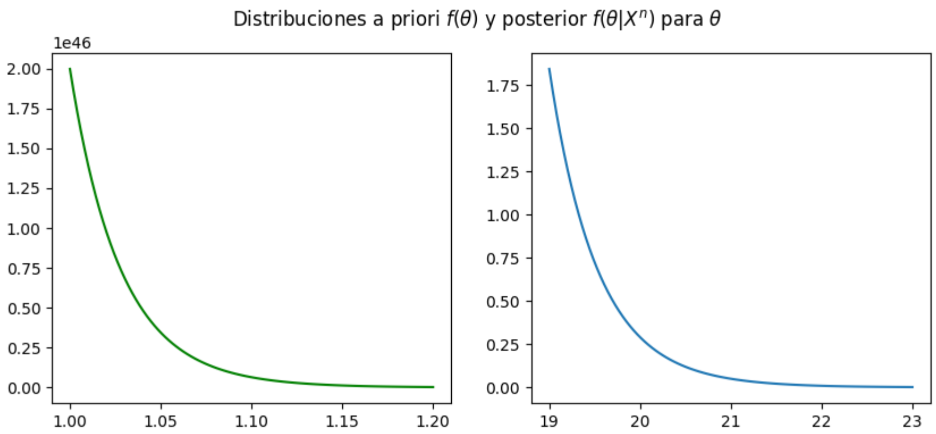

Figura 1: Distribución a priori y distribución posterior para θ.

Ejercicio 2
Si $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\theta, \Sigma)$ y Σ, la matriz de varianzas y covarianzas, conocida (definida positiva); $\mathbf{X}$, la matriz de diseño en la regresión, conocida. Encuentre la posterior θ usando una $N_p(\mu_0, \Sigma_0)$ como *a priori*. Encuentre la distribución predictiva de un dato futuro Y_{n+1}.

Solución:

Ejercicio 3

Sea el modelo de crecimiento logístico $\frac{dX}{dt} = \theta_1 X(\theta_2 - X)$ con $X(0) = X_0$. Suponga que tenemos observaciones y_i para $X(t_i), t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, con ruido gaussiano aditivo independiente, esto es

$$y_i = X(t_i) + \epsilon_i; \quad \epsilon_i \sim N(0, \sigma), \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Simule datos con $X(0) = 100$, $\theta_1 = 0.001$, $\theta_2 = 1000$, $\sigma = 30$, $n = 26$ equiespaciados en $t \in [0, 10]$. Haga inferencia bayesiana para los parámetro θ_1, θ_2. Utilice a priories Gamma, centradas en los valores verdaderos. ¿Qué puede decir de la tasa de crecimiento que es $\lambda = \theta_1 \theta_2$?