

# Mathematical Model for the Evolutionary Dynamics of Innovations in Public Transport Systems

## Implications for a Megacity Metabolism<sup>1</sup>.

Hernán Darío Toro-Zapata\*, Gerard Olivar-Tost \*\*

\* Universidad del Quindío, \*\* Universidad Nacional de Colombia - Manizales

---

<sup>1</sup>The authors thank Colciencias through the research project *Modeling and simulation of the Urban Metabolism of Bogotá D.C.* Code 111974558276

# Contenido

- 1 ¿Qué estudia la teoría de dinámicas adaptativas?
- 2 Modelo generalizado para sistemas de transporte público residentes
  - Ejemplo: un único sistema de transporte
- 3 Modelo generalizado para la innovación en sistemas de transporte público
  - Ejemplo: innovación para un único sistema de transporte
- 4 Ecuación Canónica de las Dinámicas Adaptativas (ECDA)
- 5 Resultados y Conclusiones
- 6 Referencias

# Consideraciones preliminares

- La relación entre el crecimiento poblacional, el desarrollo demográfico y la infraestructura del transporte público.
- La decisión: incorporar el Metro como uno de sus principales sistemas de transporte, en interacción con el sistema de transporte masivo actual Transmilenio.
- Es latente la necesidad de comprender bajo qué condiciones un sistema de transporte innovador puede invadir, expandirse en el mercado y coexistir, a largo plazo, con los sistemas de transporte ya establecidos en la ciudad.
- Este tipo de cuestiones guarda estrecha relación con otras estudiadas desde la biología evolutiva (especiación) y han permitido el desarrollo de las Dinámicas Adaptativas como un marco teórico matemático útil.

# Section 1

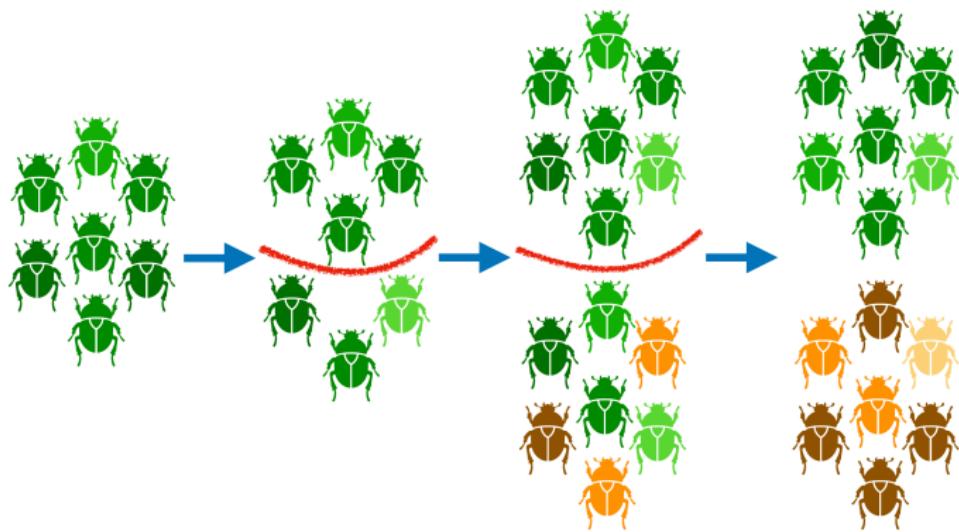
¿Qué estudia la teoría de dinámicas adaptativas?

# El origen de diversidad - Especiación I

La formación de nuevas especies, llamada **especiación**, es uno de los temas centrales de la teoría evolutiva. Ocurre a través de la **divergencia genética y fenotípica** de poblaciones de la misma especie que se adaptan a diferentes nichos ambientales en el mismo o diferentes hábitats.

- **Especiación alopátrica:** dos poblaciones se separan geográficamente por barreras naturales o artificiales.
- **Especiación parapátrica:** dos poblaciones evolucionan hacia el aislamiento geográfico mediante la explotación de diferentes nichos ambientales de hábitats contiguos.

# El origen de diversidad - Especiación II



**Figura:** Diferentes presiones de selección y diferentes derivaciones genéticas pueden actuar en diferentes entornos, las poblaciones aisladas pueden eventualmente convertirse en especies separadas.

El aislamiento geográfico, sigue siendo una causa exógena de especiación en lugar de una consecuencia evolutiva.

# El origen de diversidad - Especiación III

- **Especiación simpátrica:** considera poblaciones en la misma ubicación geográfica.

## Ingrediente clave:

**Selección disruptiva:** presión de la selección que favorece características extremas sobre características promedio.

- Puede resultar, por ejemplo, de la competencia por nichos ambientales alternativos, donde ser especialista puede resultar ventajoso con respecto a ser generalista.
- La población se divide en dos grupos residentes inicialmente similares, que luego divergen siguiendo caminos evolutivos separados (ramas), cada uno impulsado por sus propias mutaciones, experimentando lo que se denomina **ramificación evolutiva**.

# El origen de diversidad - Especiación IV

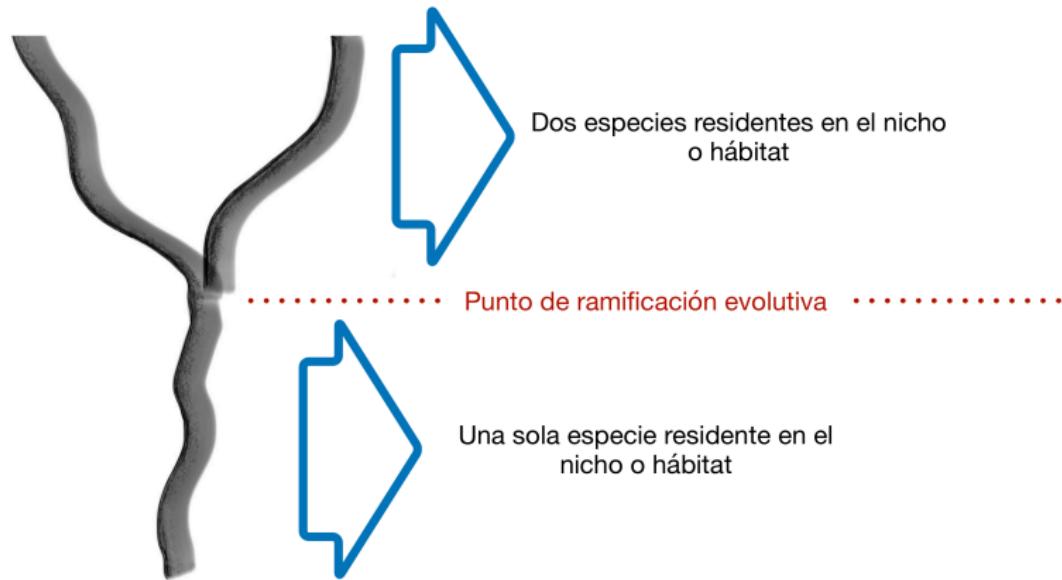


Figura: Bajo el efecto de la **selección disruptiva** una población monomórfica puede volverse dimórfica con respecto a algunos atributos relevantes

# El origen de diversidad - Especiación V

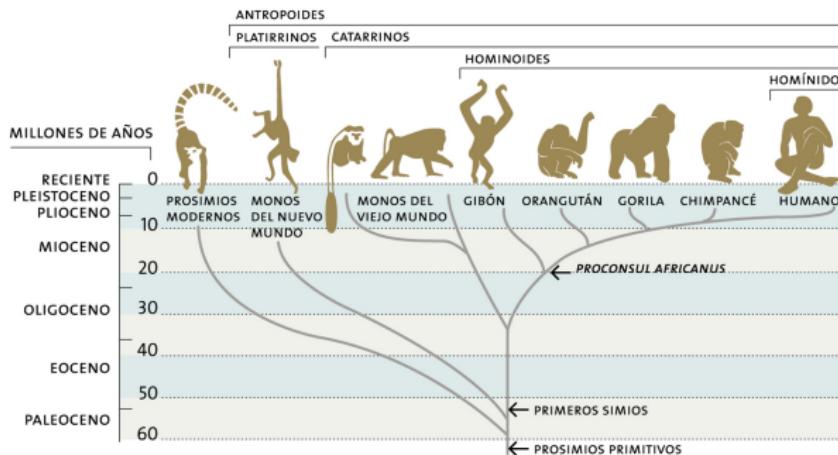


Figura: Árbol filogenético de la evolución de los homínidos en los últimos 7 millones de años

Las causas de las ramificaciones evolutivas son tema de gran discusión

- **Origen del lenguaje articulado:** control de la laringe y la boca, regulados por un gen particular [7].

# El origen de diversidad - social y tecnológica I

Los procesos de mutación y selección no necesariamente dependen de la herencia genética, sino que pueden dirigir la evolución de atributos transmitidos culturalmente:

Estrategias de comportamiento humano/animal



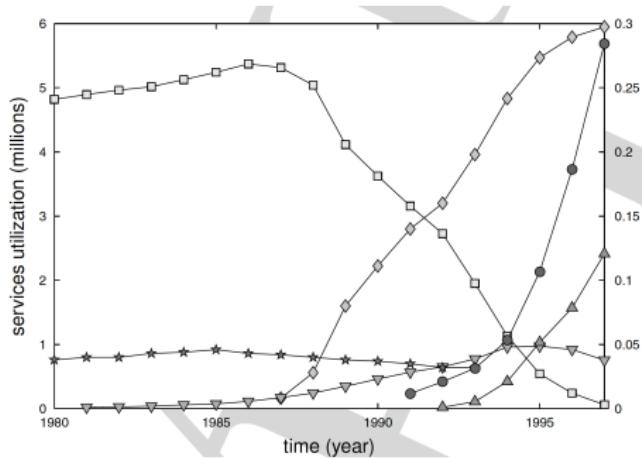
Cooperación entre individuos no relacionados

## Tema de investigación:

En sociología se estudia la evolución de la cooperación

Individuos colaboradores contribuyen a un bien común del que individuos colaboradores y trámpidos se benefician

# El origen de diversidad - social y tecnológica II



**Figura:** Utilización de los servicios de telecomunicación en Suiza. **Cuadrado:** teléfonos analógicos. **Diamantes:** teléfonos digitales. **Triángulo abajo:** subscriptores a telefonía móvil analógica, **Triángulo arriba:** subscriptores a telefonía móvil digital. **Estrellas:** teléfonos públicos de pago. **Círculos:** host de internet [1].

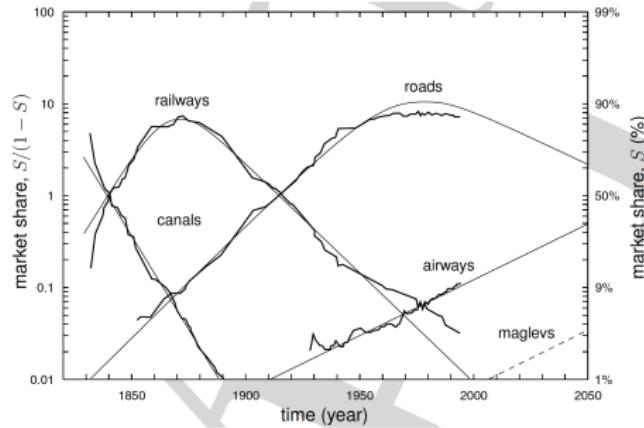
**Sustitución de atributo:** la llegada de los teléfonos digitales ha sido una **innovación** exitosa que ha llevado a la sustitución de los teléfonos analógicos.

# El origen de diversidad - social y tecnológica III

## ¿Qué estudia la teoría de dinámicas adaptativas?

- Son un trasfondo teórico que se origina en la biología evolutiva que vincula dinámicas demográficas a cambios evolutivos
- Permite describir dinámicas evolutivas a largo plazo al considerar mutaciones como eventos pequeños y raros [1, 3, 5, 6].
- Se centra en la dinámica evolutiva a largo plazo de los atributos de adaptación (cuantitativos) y pasa por alto los detalles genéticos mediante el uso de modelos demográficos asexuales.
- Considera que las interacciones son la fuerza motriz evolutiva y tiene en cuenta la retroalimentación entre el cambio evolutivo y las fuerzas de selección que los agentes experimentan [1, 2, 4]

# El origen de diversidad - social y tecnológica IV



**Figura:** Evolución de la cuota ( $S \in [0, 1]$ ) de la infraestructura de transporte de EE. UU. Por sistema de transporte **Líneas gruesas**: datos históricos. **Líneas delgadas**: estimaciones basadas en un modelo logístico de sustitución. **Línea discontinua**: un modelo de predicción [1].

¿Bajo qué condiciones puede ocurrir el origen de diversidad en un mercado de competencia entre los principales sistemas de transporte (ST) público de una ciudad?

## Section 2

# Modelo generalizado para sistemas de transporte público residentes

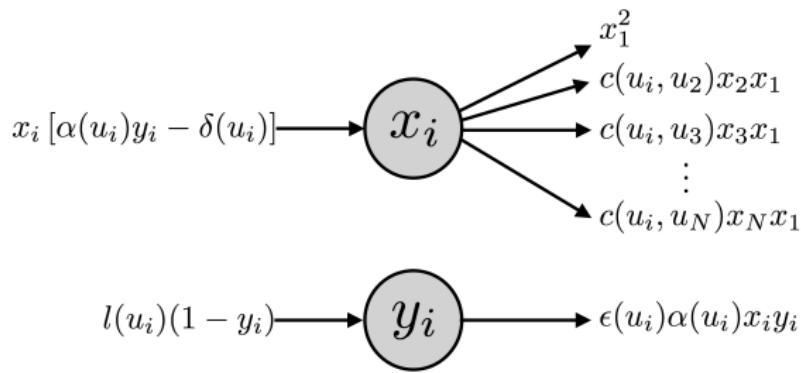
# Descripción de supuestos

- ① Cada sistema de transporte será caracterizado por un atributo cuantitativo
  - Número promedio de pasajeros transportados por unidad
- ② Se asumirán N sistemas de transporte **residentes**
- ③ Se asumirá un (1) sistema de transporte **innovador**
- ④ Cada individuo de la ciudad utiliza un ST específico
- ⑤ El presupuesto se incrementa de manera proporcional al presupuesto no invertido (recursos limitados)
- ⑥ El presupuesto se agota en la medida que es destinado a incrementar el número de usuarios

# Modelo Residente generalizado I

Reformulación y generalización del modelo propuesto en [8] para la dinámica usuario-recurso

Descripción de los estados y los parámetros	
$x_i(t)$	Proporción de personas que usa el ST $i$
$y_i(t)$	Proporción de presupuesto disponible para la expansión del ST $i$
$u_i$	Número promedio de pasajeros por unidad del ST $i$
$\alpha(u_i)$	Tasa instantánea de adopción del ST $i$
$\delta(u_i)$	Tasa a la cual el ST $i$ es abandonado por los usuarios
$l(u_i)$	Proporción a la que se invierten recursos frescos para la expansión del ST $i$
$\epsilon(u_i)$	Eficiencia del ST $i$ para «convertir» la inversión en usuarios nuevos
$c(u_i, u_k)$	Tasa de interacción entre los ST $i$ y $k$



## Modelo Residente generalizado II

- La población de la ciudad queda subdividida en  $N$  subpoblaciones.
- Considere que las  $N$  poblaciones  $x_i(t)$  interactúan mediante el sistema generalizado:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_i [\alpha(u_i)y_i - \delta(u_i)] \left( 1 - x_i - \sum_{k=1, k \neq i}^N c(u_i, u_k)x_k \right) \\ \dot{y}_i = l(u_i)(1 - y_i) - \epsilon(u_i)\alpha(u_i)x_i y_i \end{cases} \quad (1)$$

- El inversionista coloca recursos en proporción directa al presupuesto aún no colocado  $(1 - y_i)$ , con tasa de proporcionalidad  $l(u_i)$ .
- $\epsilon(u_i)$  denota la eficiencia con que los recursos  $y_i$  son «convertidos» en nuevos usuarios  $x_i$ .

El modelo (1) se denominará de ahora en adelante como el modelo **residente** definido en la región de interés:

$$\Omega = \{x_i, y_i \in \mathbb{R} : 0 \leq x_i \leq 1, 0 \leq y_i \leq 1, i = 1, \dots, N\} \quad (2)$$

# Modelo Residente generalizado III

- ① Si  $c(u_i, u_k) > 1$  se tiene que la competencia inter-sistemas predomina sobre la competencia intra-sistemas.
  - \* Si el sistema  $i$  corresponde a los taxistas de la ciudad, mientras que el sistema  $j$  corresponde al sistema de buses públicos, entonces  $c(u_i, u_k) > 1$  implica que es más fuerte la competencia de los taxistas con los buses, que la competencia entre los mismos taxistas.
- ② Si  $0 \leq c(u_i, u_k) \leq 1$  entonces la competencia intra-sistemas predomina sobre la competencia inter-sistemas.
  - \* Volviendo al ejemplo de los taxistas y los buses públicos, se tiene que es más fuerte la competencia de los taxistas entre si que la competencia de los taxistas con los buses.
- ③ Si  $c(u_i, u_k) < 0$  la interacción entre los sistemas de transporte no corresponde a competencia sino a cooperación.
  - \* Situación que puede describir la integración de sistemas, como ocurre por ejemplo entre el SITP y el Transmilenio en la ciudad de Bogotá.

En particular, cuando  $c(u_i, u_j) > 0$ , puede demostrarse que  $\Omega$  es compacto positivamente invariante para el sistema (1).

# Consideraciones importantes

- Se asume que el modelo (1) para  $N$  sistemas de transporte tendrá al menos un equilibrio de coexistencia  $E_N$  en el interior del primer ortante de  $\mathbb{R}^{2N}$ :

$$E_N = (\bar{x}_1(\mathbf{u}), \bar{y}_1(\mathbf{u}), \dots, \bar{x}_N(\mathbf{u}), \bar{y}_N(\mathbf{u})), \quad (3)$$

donde  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$  es el vector de todos los atributos característicos.

- En  $E_N$  pueden «coexistir» los  $N$  sistemas de transporte.  $E_N$  se llamará **equilibrio de invasión**.
- $E_N$  debe ser local y asintóticamente estable (LAE) en el momento de la innovación, lo que implica que la matriz Jacobiana  $J(E_N)$  tiene todos sus valores propios con parte real negativa.

El parque automotor está regulado en la práctica.

## Ejemplo: un único sistema de transporte I

Consideré el caso  $N = 1$ , en el cual solo hay un ST disponible en la ciudad. Las ecuaciones en (1), corresponden al sistema de bidimensional:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 [\alpha(u_1)y_1 - \delta(u_1)] (1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = l(u_1)(1 - y_1) - \epsilon_1(u_1)\alpha(u_1)x_1y_1 \end{cases} \quad (4)$$

Tasa instantánea de adopción:  $\alpha(u) = a \exp\left(-\frac{1}{2a_1^2} \ln^2\left(\frac{u}{a_2^2}\right)\right)$ , como en [?].

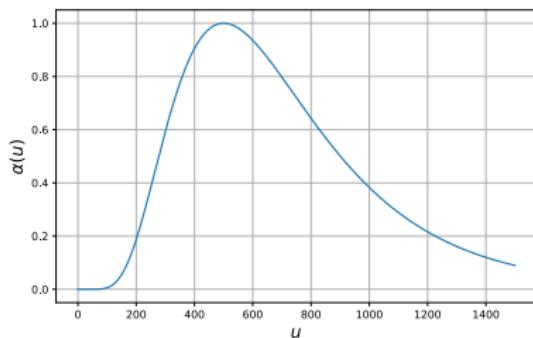
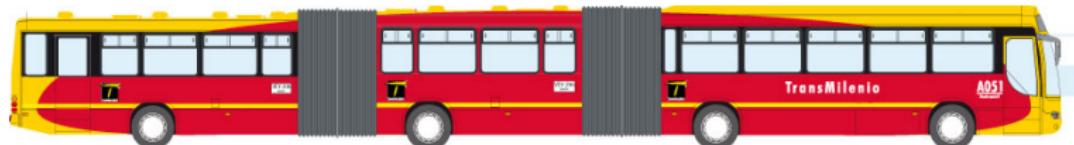


Figura: Gráfica de la función  $\alpha(u)$  para los parámetros  $a = 1$ ;  $a_1 = 0.5$ ;  $a_2 = 22.36$ .

## Ejemplo: un único sistema de transporte II

- Tiene pleno sentido cuando  $x_1$  es pequeño y no tiene competencia por otros sistemas de transporte.
- Ocurre un máximo  $a$  cuando  $u = a_2^2$ , para indicar el valor del atributo de más fácil absorción (número promedio de pasajeros por unidad).
- Para un ST con bajo contenido tecnológico o muy sofisticado,  $\alpha(u)$  tiende a anularse con una sensibilidad controlada por  $a_1$ . Se supone  $a > 0$  y  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ .



**Figura:** Representación de un biarticulado de transmilenio: cuentan con una capacidad de 250 personas, 62 sentadas y 188 de pie.

Se ha considerado que la proporción a la que se invierten recursos frescos para la expansión del ST  $l(u) = l$ , que la eficiencia del ST  $i$  para «convertir» la inversión en usuarios nuevos  $\epsilon(u) = \epsilon$  la tasa a la cual el ST  $i$  es abandonado por los usuarios  $\delta(u) = \delta$  son constantes.

# Ejemplo: resultados analíticos y numéricos I

Soluciones estacionarias, para  $u_1$  un valor fijo:

- $E_1^a = (0, 1)$ . Ausencia de sistemas de transporte en la ciudad.
- $E_1^t = \left(1, \frac{l(u_1)}{l(u_1) + \epsilon(u_1)\alpha(u_1)}\right)$ . Adopción total del sistema de transporte; es decir, de adopción máxima posible.
- $E_1^p = \left(\frac{l(u_1)(R_p(u_1) - 1)}{\epsilon(u_1)\alpha(u_1)}, \frac{1}{R_p(u_1)}\right)$ . Adopción parcial del sistema de transporte, donde  $R_p(u_1) = \frac{\alpha(u_1)}{\delta(u_1)}$ . Observe:

$$R_p(u_1) = \underbrace{\frac{\alpha(u_1)}{\delta(u_1)}}_{\text{Tasa de adopción del ST}} * \underbrace{\frac{1}{\delta(u_1)}}_{\text{Periodo durante el cual una persona usa el ST}}$$

$R_p(u_1)$  representa un **umbral de crecimiento para el número de usuarios**.

## Ejemplo: resultados analíticos y numéricos II

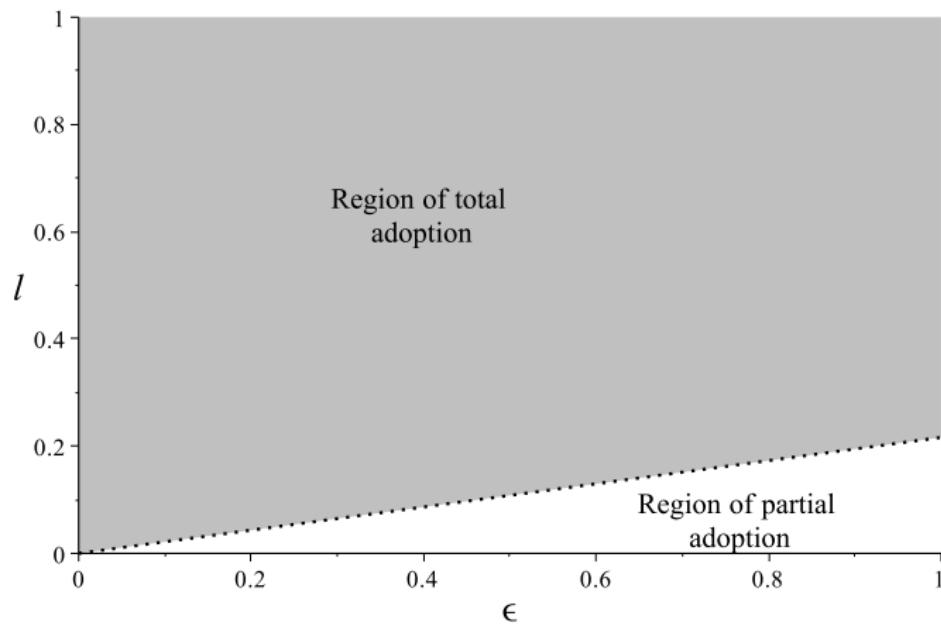
Note que  $E_1^p$  tiene sentido si y solo si  $0 < \frac{l(u_1)(R_p(u_1)-1)}{\epsilon(u_1)\alpha(u_1)} < 1$ :

$$R_p(u_1) > 1 \quad \text{y} \quad l(u_1) < l^*(u_1) := \frac{\alpha(u_1)}{R_p(u_1) - 1} \epsilon(u_1)$$

- \* Cuando  $R_p(u_1) = 1$ , se obtiene  $E_1^p = E_1^a = (0, 1)$  y es no hiperbólico.
- \* Cuando  $l(u_1) = l^*(u_1)$ , se obtiene  $E_1^p = E_1^t = \left(1, \frac{1}{R_p(u_1)}\right)$  y es no hiperbólico.

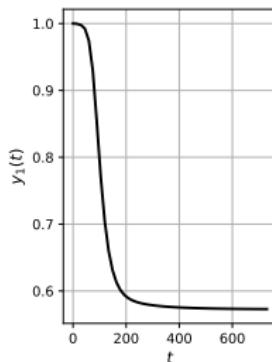
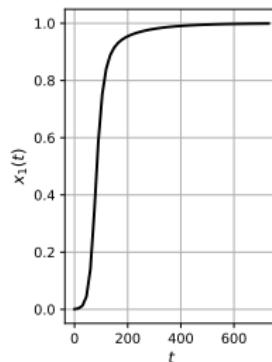
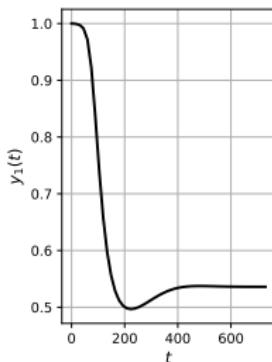
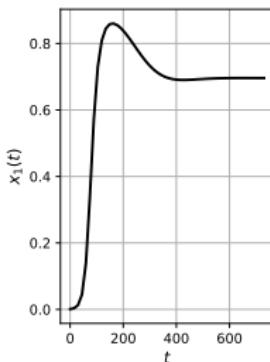
Condiciones de estabilidad local	$E_1^a$	$E_1^p$	$E_1^t$
$R_p(u_1) < 1$	LAE	$\notin \Omega$	I
$R_p(u_1) > 1, \wedge l(u_1) < l^*(u_1)$	I	LAE	I
$R_p(u_1) > 1, \wedge l(u_1) > l^*(u_1)$	I	I	LAE

## Ejemplo: resultados analíticos y numéricos III



**Figura:** Azul: región donde se garantiza el equilibrio  $E_1^t$  es LAE. Gris: puntos en los que el equilibrio  $E_1^p$  es LAE y  $E_1^t$  es inestable. Se ha usado  $a = 1$ ;  $a_1 = 0.5$ ;  $a_2 = 22.36$ ;  $d = 0.1$  y  $u_1 = 200$ , con lo que se obtiene  $R_p(u_1) = 1.8653$ .

## Ejemplo: resultados analíticos y numéricos IV



**Figura:** Se muestran dos escenarios de simulación del sistema (10) para  $a = 1$ ;  $a_1 = 0.5$ ;  $a_2 = 22.36$ ;  $d = 0.1$  y  $u_1 = 200$ , por lo tanto  $l^*(u_1) = 0.0215$  y  $R_p(u_1) = 1.8653$ . **Izquierda:** se muestran las soluciones de  $x_1$  y  $y_1$  con respecto al tiempo  $t$  para  $l = 0.015$ , por lo tanto el equilibrio de adopción parcial  $E_1^p = (0.70, 0.54)$  en LAE. **Derecha:** se utilizan los mismos valores de los parámetros, pero con  $l = 0.025$ , en este caso, es el equilibrio de adopción total  $E_1^t = (1, 0.57)$  el que es LAE, mientras que  $E_1^p \notin \Omega$ .

En cualquiera de los casos, provisto que  $\alpha(u_1) > \delta(u_1)$ , el sistema cuenta con un equilibrio no trivial  $E_1^p$  ó  $E_1^t$  donde se estabiliza

## Section 3

# Modelo generalizado para la innovación en sistemas de transporte público

# Modelo Innovador-Residente generalizado I

Retome ahora el sistema generalizado:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_i [\alpha(u_i)y_i - \delta(u_i)] \left( 1 - x_i - \sum_{k=1, k \neq i}^N c(u_i, u_k)x_k \right) \\ \dot{y}_i = l(u_i)(1 - y_i) - \epsilon(u_i)\alpha(u_i)x_i y_i \end{cases}$$

Y que alcanza la estabilidad en el equilibrio de invasión  $E_N$ :

$$E_N = (\bar{x}_1(\mathbf{u}), \bar{y}_1(\mathbf{u}), \dots, \bar{x}_N(\mathbf{u}), \bar{y}_N(\mathbf{u})),$$

donde coexisten los  $N$  sistemas de transporte **residentes**.

- Suponga que ocurre una **innovación tecnológica** que modifica el ST residente y da origen un ST innovador.
- La innovación afecta el  **$j$ -ésimo atributo  $u_j$** , para «algún»  $j = 1, \dots, N$ ; cambiando el valor de  $u_j$  por  $\tilde{u}_j$ .

# Modelo Innovador-Residente generalizado II

- La interacción entre los  $N + 1$  sistemas de transporte se lleva acabo bajo la misma **plataforma de mercado**.
- Surge una pequeña proporción de usuarios  $\tilde{x}_j(t)$  y se cuenta con un presupuesto  $\tilde{y}_j(t)$ .

El éxito o el fracaso de la innovación puede ser estudiada extendiendo el sistema (1) en dos ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = x_i [\alpha(u_i)y_i - \delta(u_i)] \left( 1 - x_i - c(u_i, \tilde{u}_j)\tilde{x}_j - \sum_{k=1, k \neq i, j}^N c(u_i, u_k)x_k \right) \\ \dot{y}_i = l(u_i)(1 - y_i) - \epsilon(u_i)\alpha(u_i)x_i y_i \\ \\ \dot{\tilde{x}}_j = \tilde{x}_j [\alpha(\tilde{u}_j)\tilde{y}_j - \delta(\tilde{u}_j)] \left( 1 - \tilde{x}_j - c(\tilde{u}_j, u_i)x_i - \sum_{k=1, k \neq i, j}^N c(\tilde{u}_j, u_k)x_k \right) \\ \dot{\tilde{y}}_j = l(\tilde{u}_j)(1 - \tilde{y}_j) - \epsilon(\tilde{u}_j)\alpha(\tilde{u}_j)\tilde{x}_j \tilde{y}_j, \end{array} \right.$$

# Modelo Innovador-Residente generalizado III

Se querrá determinar condiciones para que el ST innovador pueda «invadir» en el mercado. Para ello se deben estudiar condiciones de estabilidad del equilibrio (**valores propios**):

$$E_{N+1} = (\bar{x}_1(\mathbf{u}), \bar{y}_1(\mathbf{u}), \dots, \bar{x}_j(\mathbf{u}), \bar{y}_j(\mathbf{u}), \dots, \bar{x}_N(\mathbf{u}), \bar{y}_N(\mathbf{u}), 0, 1). \quad (6)$$

La matriz Jacobiana evaluada en  $E_{N+1}$  es una **matriz diagonal por bloques**:

$$\left[ \begin{array}{c|cc} J(E_N)_{N \times N} & A_{N \times 2} \\ \hline \mathbf{0}_{2 \times N} & \begin{pmatrix} [\alpha(\tilde{u}_j) - \delta(\tilde{u}_j)] \left( 1 - c(\tilde{u}_j, u_i) \bar{x}_i - \sum_{k=1, k \neq i, j}^N c(\tilde{u}_j, u_k) \bar{x}_k \right) & 0 \\ -\epsilon(\tilde{u}_j) \alpha(\tilde{u}_j) & -l(\tilde{u}_j) \end{pmatrix} \end{array} \right] \quad (7)$$

- El bloque superior izquierdo coincide con la matriz jacobiana del modelo residente, y por lo tanto aporta  $2N$  valores propios con parte real negativa.

## Modelo Innovador-Residente generalizado IV

- El bloque inferior derecho, asociado a las ecuaciones del sistema de transporte innovador, es un bloque diagonal con un valor propio dado por  $\lambda_1 = -l(\tilde{u}_j) < 0$  y se define el otro valor propio dado explícitamente por:

$$\lambda_2 = [\alpha(\tilde{u}_j) - \delta(\tilde{u}_j)] \left( 1 - c(\tilde{u}_j, u_i)\bar{x}_i - \sum_{k=1, k \neq i, j}^N c(\tilde{u}_j, u_k)\bar{x}_k \right) \quad (8)$$

La función de fitness se define de la forma:

$$\lambda_j(u_1, \dots, u_N, \tilde{u}_j) = [\alpha(\tilde{u}_j) - \delta(\tilde{u}_j)] \left( 1 - \sum_{k=1, k \neq j}^N c(\tilde{u}_j, u_k)\bar{x}_k \right) \quad (9)$$

La función de fitness corresponde a la tasa de variación relativa de una baja densidad usuarios  $\tilde{x}_j$  del ST innovador caracterizado por el valor del atributo  $\tilde{u}_j$ .

Estudiando el signo de esa función para valores específicos de los atributos se puede establecer la posibilidad de invasión que tiene el sistema de transporte innovador

## Ejemplo: innovación para un único ST I

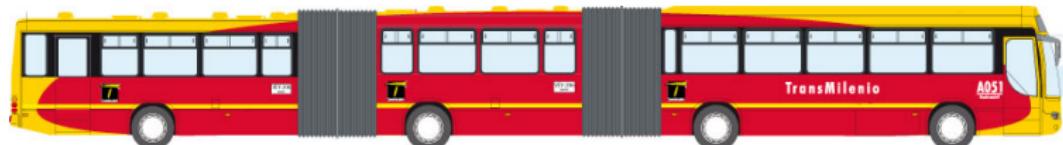
Cuando solo hay un sistema de transporte disponible en la ciudad, se obtuvo el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 [\alpha(u_1)y_1 - \delta(u_1)] (1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = l(u_1)(1 - y_1) - \epsilon_1(u_1)\alpha(u_1)x_1y_1 \end{cases} \quad (10)$$

Una innovación en el atributo  $u_1$ , cambia su valor por  $\tilde{u}_1$ , que denotaremos por comodidad  $u_2$ , dando origen a un nuevo sistema de transporte innovador.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 [\alpha(u_1)y_1 - \delta(u_1)] (1 - x_1 - c(u_1, u_2)x_2) \\ \dot{y}_1 = l(u_1)(1 - y_1) - \epsilon_1(u_1)\alpha(u_1)x_1y_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 [\alpha(u_2)y_2 - \delta(u_2)] (1 - x_2 - c(u_2, u_1)x_1) \\ \dot{y}_2 = l(u_2)(1 - y_2) - \epsilon_1(u_2)\alpha(u_2)x_2y_2 \end{cases} \quad (11)$$

## Ejemplo: innovación para un único ST II



**Figura:** Representación de un biarticulado de transmilenio: cuentan con una capacidad de 250 personas, 62 sentadas y 188 de pie.



**Figura:** Representación de un tren de Metromed: tienen capacidad para 1220 pasajeros (8 pasajeros por metro cuadrado), con 148 asientos

**Tasa de interacción entre los sistemas de transporte:** se toma como en [?]:

$$c(u_1, u_2) = \exp\left(\frac{\ln^2 f_1}{2f_2^2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2f_2^2} \ln^2\left(\frac{f_1 u_1}{u_2}\right)\right)$$

## Ejemplo: innovación para un único ST III

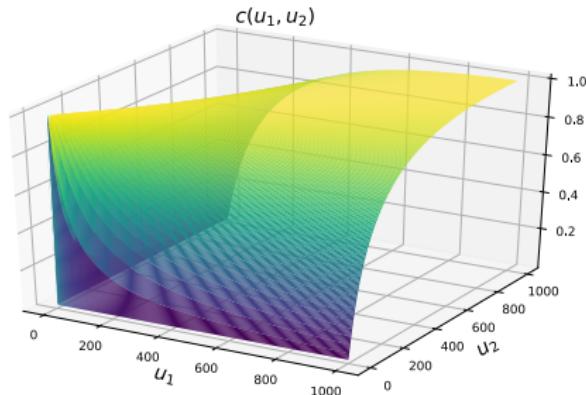


Figura: Gráfica de la función  $c(u_1, u_2)$ , para los parámetros  $f_1 = 0.96$  y  $f_2 = 2$ .

- La tasa de interacción entre los ST  $c(u_1, u_2)$  depende de la relación  $u_1/u_2$  y tiende a cero cuando dicho radio tiende a cero o cuando tiende al infinito, lo que refleja que los ST muy diferentes compiten débilmente.

## Ejemplo: innovación para un único ST IV

- Si  $f_1 > 1$ , los ST que movilizan un mayor promedio de pasajeros tienden a tener una ventaja competitiva. Por otro lado, si  $0 < f_1 < 1$ , los ST que movilizan un menor promedio de pasajeros son mejores competidores.
- Un valor grande de  $f_2$  implica que ST muy diferentes también compiten fuertemente.
- Cuando  $f_1 = 1$  la competencia entre los ST es simétrica

¿Bajo qué condiciones el ST innovador puede «invadir»? Para ello se deben estudiar condiciones de estabilidad del equilibrio de invasión:

$$E_2 = (\bar{x}_1(u_1), \bar{y}_1(u_1), 0, 1). \quad (12)$$

Los valores  $\bar{x}_2 = 0$  y  $\bar{y}_2 = 1$  indican que el ST innovador no ha entrado aún en el mercado y todo el presupuesto está disponible para inversión.

## Ejemplo: innovación para un único ST V

La matriz Jacobiana correspondiente evaluada en  $E_2$  toma la forma:

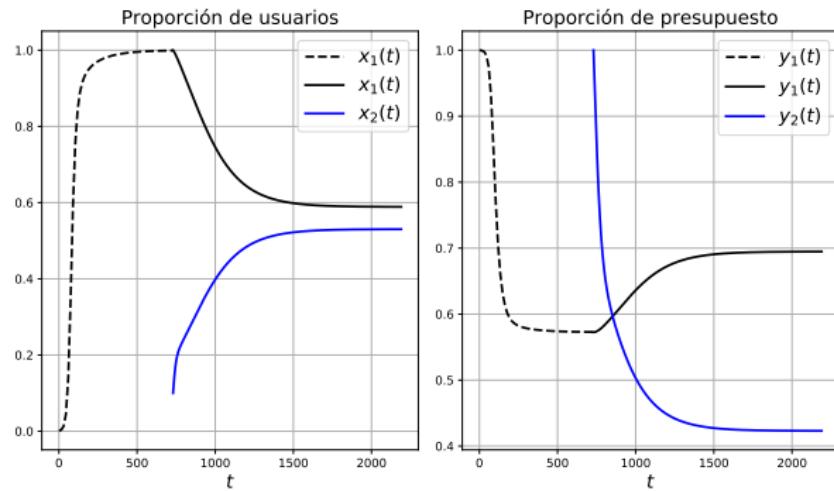
$$\left[ \begin{array}{cc|cc} (1 - 2\bar{x}_1)[\alpha(u_1)\bar{y}_1 - \delta(u_1)] & \bar{x}_1\alpha(u_1)(1 - \bar{x}_1) & -\bar{x}_1(\alpha(u_1)\bar{y}_1 - \delta(u_1))c(u_1, u_2) & 0 \\ -\epsilon(u_1)\alpha(u_1)\bar{y}_1 & -l(u_1) - \epsilon(u_1)\alpha(u_1)\bar{x}_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \delta(u_2)(R_p(u_2) - 1)[1 - c(u_2, u_1)\bar{x}_1] & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon(u_2)\alpha(u_2) & -l(u_2) \end{array} \right] \quad (13)$$

La función de fitness se define explícitamente por:

$$\lambda(u_1, u_2) = \delta(u_2)(R_p(u_2) - 1)[1 - c(u_2, u_1)\bar{x}_1] \quad (14)$$

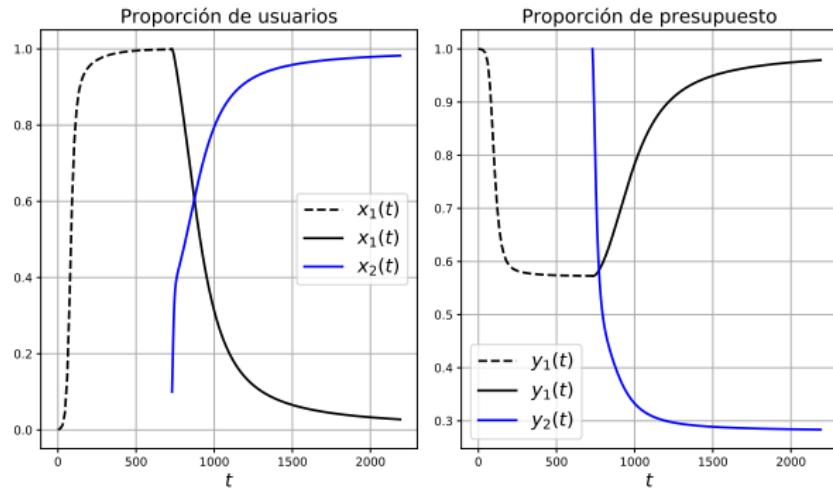
Estudiando el signo de esa función para  $u_1, u_2$  específicos se puede establecer la posibilidad de invasión que tiene el sistema de transporte innovador

# Ejemplo: simulaciones antes y después de la innovación I



**Figura: Diversificación.** Simulación del sistema (10). **Izquierda:** soluciones de  $x_1$  antes de la innovación (línea discontinua negra) y después de la innovación (línea continua negra) y de  $x_2$  (línea azul). **Derecha:** soluciones de  $y_1$  antes de la innovación (línea discontinua negra) y después de la innovación (línea continua negra) y de  $y_2$  (línea azul).  $a = 1$ ;  $a_1 = 0.5$ ;  $a_2 = 22.36$ ;  $\delta = 0.1$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $l = 0.025$   $f_1 = 0.96$  y  $f_2 = 2$ . Los atributos son  $u_1 = 200$  y  $u_2 = 800$ , por lo tanto,  $l^*(u_1) = 0.0215$ ,  $l^*(u_2) = 0.01184$ ,  $R_p(u_1) = 1.8653$  y  $R_p(u_2) = 6.4287$ .

# Ejemplo: simulaciones antes y después de la innovación II



**Figura: Sustitución.** Simulación del sistema (10). **Izquierda:** soluciones de  $x_1$  antes de la innovación (línea discontinua negra) y después de la innovación (línea continua negra) y de  $x_2$  (línea azul). **Derecha:** se muestran la soluciones de  $y_1$  antes de la innovación (línea discontinua negra) y después de la innovación (línea continua negra) y de  $y_2$  (línea azul).  $a = 1$ ;  $a_1 = 0.5$ ;  $a_2 = 22.36$ ;  $\delta = 0.1$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $l = 0.025$   $f_1 = 2$  y  $f_2 = 2$ . Los atributos son  $u_1 = 200$  y  $u_2 = 800$ , por lo tanto,  $l^*(u_1) = 0.0215$ ,  $l^*(u_2) = 0.01184$ ,  $R_p(u_1) = 1.8653$  y  $R_p(u_2) = 6.4287$ .

## Section 4

# Ecuación Canónica de las Dinámicas Adaptativas (ECDA)

# Dinámica evolutiva del atributo cuantitativo $u$ I

Dercole, F. (2008) en [1], describe de manera suscinta los procesos que deben tenerse en cuenta para la formulación rigurosa de la **ecuación canónica** que describe el comportamiento evolutivo del atributo  $u$ , que toma la forma general,

$$\dot{u} = \frac{1}{2}\mu\sigma^2\bar{x}_1(u)\frac{\partial\lambda}{\partial u_2}(u, u), \quad (15)$$

donde

- $\mu$  es la frecuencia de innovaciones,  $\sigma^2$  la varianza.
- $\frac{\partial\lambda}{\partial u_2}(u, u)$  se llama gradiente de selección.

# Dinámica evolutiva del atributo cuantitativo $u$ II

Específicamente para el ejemplo acá:

$$\dot{u}_1 = -\frac{1}{2} \frac{\mu\sigma^2 \ln f_1}{a_1^2 u_1^2 f_2^2} \left( e^{-\frac{1}{2a_1^2} \ln^2 \left( \frac{u_1}{a_2^2} \right)} a a_1^2 + a \ln \left( \frac{u_1}{a_2^2} \right) e^{-\frac{1}{2a_1^2} \ln^2 \left( \frac{u_1}{a_2^2} \right)} - a_1^2 d \right) \quad (16)$$

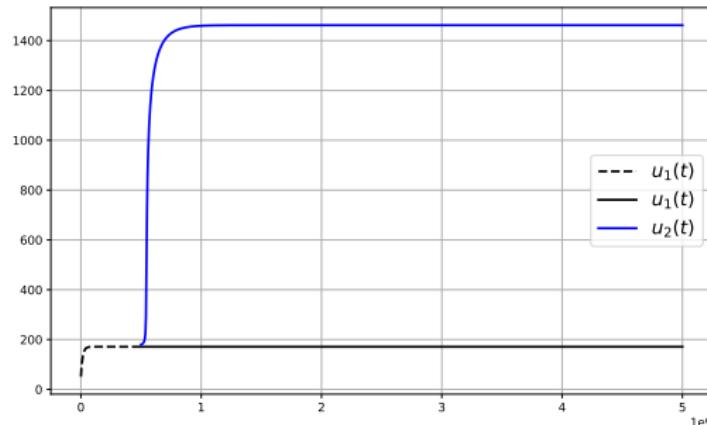
Cuyas soluciones estacionarias (que satisfacen  $\dot{u}_1 = 0$ ) son:

$$\bar{u}_1 = a_2^2 \exp \left( \sqrt{-2 \ln(d/a)} a_1 \right), \quad (17)$$

$$\bar{u}_2 = a_2^2 \exp \left( -\sqrt{-2 \ln(d/a)} a_1 \right), \quad (18)$$

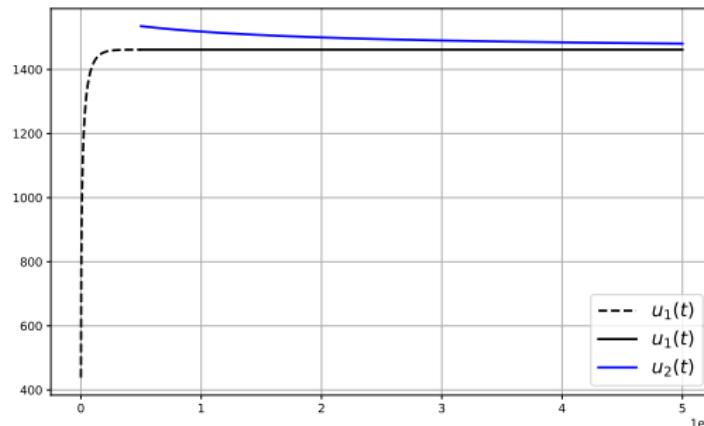
Cuando una solución de equilibrio evolutivo  $\bar{u}_i$  para  $i = 1$  ó  $2$  es LAE; significa que sucesivas innovaciones, que reemplazan a las anteriores, dirigen el atributo  $u$  hacia el valor de equilibrio  $\bar{u}_i$ .

# Dinámica evolutiva del atributo cuantitativo $u$ III



**Figura:** Ramificación. Se muestran la soluciones de (16) antes de la innovación (línea discontinua negra) y después de la innovación (línea continua negra) y de  $u_2$  (línea azul).  $a = 1$ ;  $a_1 = 0.5$ ;  $a_2 = 22.36$ ;  $\delta = 0.1$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $l = 0.025$   $f_1 = 0.96$  y  $f_2 = 2$ . Los atributos son  $u_1 = 200$  y  $u_2 = 800$ , por lo tanto,  $l^*(u_1) = 0.0215$ ,  $l^*(u_2) = 0.01184$ ,  $R_p(u_1) = 1.8653$  y  $R_p(u_2) = 6.4287$ .

# Dinámica evolutiva del atributo cuantitativo $u$ IV



**Figura: Punto terminal.** Se muestran la soluciones de (16) antes de la innovación (línea discontinua negra) y después de la innovación (línea continua negra) y de  $u_2$  (línea azul).  $a = 1$ ;  $a_1 = 0.5$ ;  $a_2 = 22.36$ ;  $\delta = 0.1$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $l = 0.025$   $f_1 = 2$  y  $f_2 = 2$ . Los atributos son  $u_1 = 200$  y  $u_2 = 800$ , por lo tanto,  $l^*(u_1) = 0.0215$ ,  $l^*(u_2) = 0.01184$ ,  $R_p(u_1) = 1.8653$  y  $R_p(u_2) = 6.4287$ .

# Section 5

## Resultados y Conclusiones

# Resultados I

- El modelo residente generalizado permite estudiar, bajo diferentes escenarios, la dinámica de competencia entre ST de una ciudad.
- El modelo innovador-residente generalizado permite establecer bajo qué condiciones un ST innovador puede invadir y expandirse en el mercado.
- El enfoque mediante dinámicas adaptativas permite establecer la dinámica a largo plazo del atributo cuantitativo (Nro promedio de pasajeros por unidad).
- La dinámica evolutiva permite clasificar los equilibrios evolutivos en puntos de ramificación (diversificación) o puntos terminales (aquellos donde la evolución se detiene definitivamente).

# Conclusiones I

- En el caso de diversificación:

- El ST residente, se deberá mantener en un número bajo de usuarios transportados (< 200 pasajeros por unidad)
- El ST innovador, deberá alcanzar un elevado número de usuarios transportados (> 1400 pasajeros por unidad)

Ambos ST abordan estrategias diferentes y por lo tanto cada uno absorberá parte del mercado.

- En el caso de sustitución:

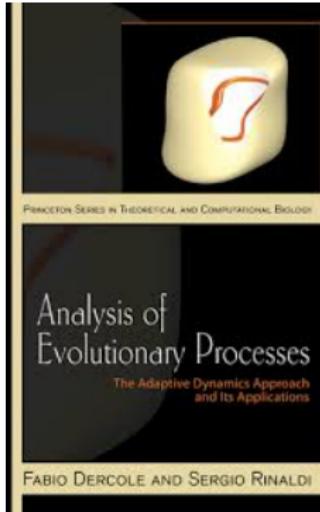
- El ST residente, se deberá aumentar el número de usuarios transportados (> 1400 pasajeros por unidad)
- El ST innovador, deberá alcanzar un elevado número de usuarios transportados (> 1400 pasajeros por unidad)

Dado que ambos ST abordarán la misma estrategia (> 1400 pasajeros por unidad), finalmente el ST innovador absorberá todos los usuarios y sustituirá al ST residente.

# Section 6

## Referencias

# Referencias destacadas I



## Chapter Four

### Evolutionary Branching and the Origin of Diversity

In this chapter we show how continuous marginal innovations subject to severe competition may give rise to increasing diversity in evolving systems. The analysis is performed by pointing out that the AD canonical equations describing the evolution of a family of systems with increasing number of adaptive traits always lead to a branching point. The application that has motivated this study comes from economics, where the emergence of technological variety arising from market interaction and technological innovation has been ascertained. Existing products in the market compete with innovative ones, resulting in a slow and continuous evolution of the underlying technological characteristics of successful products. When technological evolution reaches an equilibrium, it can either be an evolutionary terminal point, where marginal innovations are not able to bring new technological advancement in the market, or a branching point, where new products coexist along with established ones and diversify from them through further innovations. Thus, technological branching can explain product variety without requiring exogenous major breakthroughs. The limitations of the AD approach to economics, as well as

They show how continuous marginal innovations subject to severe competition may give rise to increasing diversity in evolving systems [1].

# Referencias destacadas II

DISCRETE AND CONTINUOUS  
DYNAMICAL SYSTEMS SERIES B  
Volume 19, Number 10, December 2014

doi:10.3934/dcdsb.2014.19.3299  
pp. 3299–3317

## THE DYNAMICS OF TECHNOLOGICAL CHANGE UNDER CONSTRAINTS: ADOPTERS AND RESOURCES

M. NÚÑEZ-LÓPEZ

Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas, DMAS  
Universidad Autónoma Metropolitana, Cuajimalpa  
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa  
Cuajimalpa de Morelos, 05300, México, D.F., México

J. X. VELASCO-HERNÁNDEZ

Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México  
Boulevard Juriquilla No. 3001, Juriquilla, 76230, México

"We make use of the adaptive dynamics framework to explain the persistence of closely related technologies as opposed to the usual competitive exclusion of all but one dominant technology [...] The paper illustrates the persistence of closely related technologies and the competitive exclusion in renewable energy technologies and TV sets respectively." [8]





Fabio Dercole and Sergio Rinaldi.

*Analysis of evolutionary processes: the adaptive dynamics approach and its applications: the adaptive dynamics approach and its applications.*

Princeton University Press, 2008.



Fabio Dercole and Sergio Rinaldi.

Evolutionary dynamics can be chaotic: A first example.

*International journal of bifurcation and chaos*, 20(11):3473–3485, 2010.



Ulf Dieckmann and Richard Law.

The dynamical theory of coevolution: a derivation from stochastic ecological processes.

*Journal of mathematical biology*, 34(5-6):579–612, 1996.



M Doebeli and U Dieckmann.

Evolutionary branching and sympatric speciation caused by different types of ecological interactions [revised 18 september 2000].  
2000.



Stefan AH Geritz, Géza Mesze, Johan AJ Metz, et al.

Evolutionarily singular strategies and the adaptive growth and branching of the evolutionary tree.

*Evolutionary ecology*, 12(1):35–57, 1998.



Stefan AH Geritz, Johan AJ Metz, Éva Kisdi, and Géza Meszéna.  
Dynamics of adaptation and evolutionary branching.  
*Physical Review Letters*, 78(10):2024, 1997.



Cecilia SL Lai, Simon E Fisher, Jane A Hurst, Faraneh Vargha-Khadem, and Anthony P Monaco.  
A forkhead-domain gene is mutated in a severe speech and language disorder.  
*Nature*, 413(6855):519, 2001.



M Núñez-López.

The dynamics of technological change under constraints: adopters and resources.

2014.

# Agradecimientos I

G. Olivar y H.D Toro agradecen la financiación parcial de Colciencias a través del proyecto de investigación *Modelado y simulación del Metabolismo Urbano de Bogotá D.C. Código 111974558276.*

# Mathematical Model for the Evolutionary Dynamics of Innovations in Public Transport Systems

## Implications for a Megacity Metabolism<sup>2</sup>.

Hernán Darío Toro-Zapata\*, Gerard Olivar-Tost \*\*

\* Universidad del Quindío, \*\* Universidad Nacional de Colombia - Manizales

---

<sup>2</sup>The authors thank Colciencias through the research project *Modeling and simulation of the Urban Metabolism of Bogotá D.C.* Code 111974558276