Laboratorio N.1

Introduccion a Los Metodos Estadisticos
Estimadores

Diana Carolina Arias Sinisterra Cod. 1528008
Kevin Steven Chica Garcia Cod. 1533173
Cesar Andres Saavedra Vanegas Cod. 1628466

Universidad Del Valle
Facultad De Ingenieria
Estadistica
Octubre
2017

Índice

Índice de figuras

Indice de tablas

1. Situacion 1

Despliegue de una tabla que se llama “Tabla1” junto a su nï¿½mero de referencia:

Tabla 1: Titulo de la tabla

Indicador	$\mathbf{SO_2}$	**Temperatura**
Promedio	0.006	24.093
Desviaciï¿½n estï¿½ndar	0.007	2.950
Mediana	0.004	23.500
Minima	0.000	18.200
Mï¿½ximo	0.127	32
Asimetrï¿½a	5.415	0.451

Para referenciar una tabla, se utiliza el texto “ref” precedido de un *backslash*: asï¿½, se referenciarï¿½a la Tabla 1.

Despliegue de una imagen que se llama “Figura1” junto a su nï¿½mero de referencia:

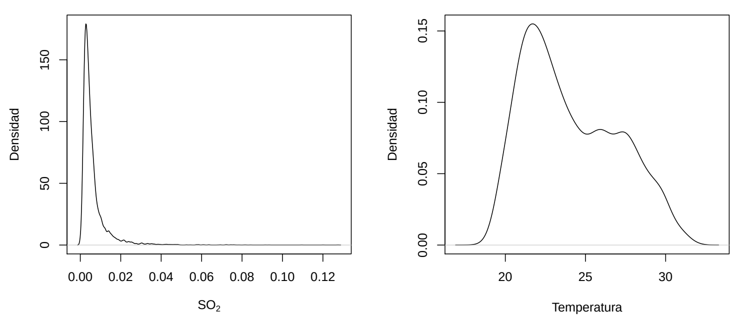

Figura 1: Titulo de la figura

Para referenciar una figura, se utiliza el texto “ref” precedido de un *backslash*: asï¿½, se referenciarï¿½a la Figura 1.

Expresiï¿½n matemï¿½tica en lï¿½nea con el texto: $f(x) := ax^2 + bx + c$.

Representaciï¿½n de una ecuaciï¿½n, sin nï¿½mero de referencia:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$$

Representaciï¿½n de una ecuaciï¿½n en una lï¿½nea nueva, con nï¿½mero de referencia:

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \tag{1}$$

Pare referenciar la ecuaciï¿½n (1). Se utiliza la etiqueta “eqref” precedido de un *backslash*

Para referenciar una cita bibliogrï¿½$\frac{1}{2}$ficas se utiliza un archivo "Bibliografia.bib". Este contiene la informaciï¿½$\frac{1}{2}$n de las referencias utilizadas. Por ejemplo para citar dentro del texto: Segï¿½$\frac{1}{2}$n **?** plantea que el modelo de regresiï¿½$\frac{1}{2}$n.....

1.1.

$\binom{365}{3} \cdot \binom{365}{4}$
Una lista:

- primer ï¿½$\frac{1}{2}$tem de la lista.
- segundo ï¿½$\frac{1}{2}$tem de la lista.

Numeraciï¿½$\frac{1}{2}$n de una lista:

1. primer ï¿½$\frac{1}{2}$tem de la lista.
2. segundo ï¿½$\frac{1}{2}$tem de la lista.

Ejemplo para construir una matriz:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2. Scripts R

El ambiente *Verbatim* permite agregar codigo de R.

```
getwd()
k=70
cumpledif=1
p=0
q=0
for (j in 1:k){
  cumpledif=cumpledif*(1-((j-1)/365))
  q[j]=cumpledif
  p[j]=1-cumpledif
  cat(cumpledif,"\n")
}

windows()
pdf("Texmaker/Graficos/Punto2.pdf")
par(mfrow=c(1,3))
plot(p,col="red", xlab = "n", ylab = "Probabilidad", main = "Probabilidad de que dos o mas
tengan el mismo cumpleaï¿½os en funcion
     de la cantidad de estudiantes n")
```

```
abline(h=0.5)
abline(v=23)

plot(q,col="blue", xlab = "n", ylab = "Probabilidad", main = "Probabilidad de que dos o mas
NO tengan el mismo cumpleaï¿½os en funcion
     de la cantidad de estudiantes n")
abline(h=0.5)
abline(v=23)

plot(p,col="red", xlab = "", ylab = "")
par(new=TRUE)
plot(q,col="blue", xlab = "", ylab = "")

title(xlab = "n", ylab = "Probabilidad",main="Probabilidades de que dos o mas estudiantes
tengan el mismo cumpleaï¿½os (rojo) y su
evento complemetario (azul) en funcion de n")
dev.off()

###########simulacion punto 3a Exponencial

U = runif(1000, 0, 1) #Generar U
l = 4 #Parï¿½ametro de la exponencial Lambda = 4
X = -(1/l) * log(U)
windows()
pdf("Texmaker/Graficos/Punto3A.pdf")
par(mfrow=c(1,2))
plot(density(U),col="blue", xlab = "X", ylab = "Densidad", main = expression(Unif(0,1)))
plot(density(X),col="red", xlab = "X", ylab = "Densidad", main = expression(Exp(lambda=4)))
dev.off()

############ Punto 3b Poisson
x=0
for(j in 1:1000){
  lambda=7
  i = 0
  p = exp(-lambda)
  f = p
  u= runif(1000,0,1)
  while(u>=f){
    p=lambda*p/(i + 1)
    f = f + p
    i = i +1
    x[j] = i
  }
}
```

1.3. Analisis Resultados

2. Situacion 2

2.1. Punto A.

Si $\hat{\theta_1}$ y $\hat{\theta_2}$ son dos estimadores insesgados tales que:

$$\hat{\theta_3} = a\hat{\theta_1} + (1-a)\hat{\theta_2}$$

Aplico Esperanza a ambos lados
$E[\hat{\theta_3}] = E[a\hat{\theta_1} + (1-a)\hat{\theta_2}]$
$E[\hat{\theta_3}] = E[a\hat{\theta_1}] + E[(1-a)\hat{\theta_2}]$
$E[\hat{\theta_3}] = aE[\hat{\theta_1}] + (1-a)E[\hat{\theta_2}]$ **Con $\hat{\theta_1}$ y $\hat{\theta_2}$ estimadores insesgados**
$E[\hat{\theta_3}] = a\theta + (1-a)\theta$
$E[\hat{\theta_3}] = a\theta + \theta - a\theta$

$$E[\hat{\theta_3}] = \theta$$

$\therefore \hat{\theta_3}$ **Es un estimador insesgado.**

2.2. Punto B.

El coeficiente de variacion de $\hat{\theta_3}$ es

$$CV[\hat{\theta_3}] = \frac{\sqrt{Var[\hat{\theta_3}]}}{E[\hat{\theta_3}]}$$

Hallamos la $Var[\hat{\theta_3}]$
$Var[\hat{\theta_3}] = Var[a\hat{\theta_1} + (1-a)\hat{\theta_2}] + 2Cov[a\hat{\theta_1}, (1-a)\hat{\theta_2}]$, ya que no sabemos si $\hat{\theta_1}$ y $\hat{\theta_2}$ son independientes
Entonces, distribuyendo la Varianza y por las propiedades de Covarianza:
$Var[\hat{\theta_3}] = Var[a\hat{\theta_1}] + Var[(1-a)\hat{\theta_2}] + 2a(1-a)Cov[\hat{\theta_1}, \hat{\theta_2}]$
$Var[\hat{\theta_3}] = a^2Var[\hat{\theta_1}] + (1-a)^2Var[\hat{\theta_2}] + (2a-2a^2)Cov[\hat{\theta_1}, \hat{\theta_2}]$

Como $Var[\hat{\theta_1}] = \sigma_1^2$ y $Var[\hat{\theta_2}] = \sigma_2^2$ entonces

$Var[\hat{\theta_3}] = a^2[\sigma_1^2] + (1-a)^2[\sigma_2^2] + (2a-2a^2)Cov[\hat{\theta_1}, \hat{\theta_2}]$
Sabemos que $Cov[\hat{\theta_1}, \hat{\theta_2}] = E[\hat{\theta_1}\hat{\theta_2}] - E[\hat{\theta_1}] * E[\hat{\theta_2}]$, entonces:
Como $E[\hat{\theta_1}] = \theta$ y $E[\hat{\theta_2}] = \theta$ tenemos:
$Cov[\hat{\theta_1}, \hat{\theta_2}] = E[\hat{\theta_1}\hat{\theta_2}] - \theta^2$, por tanto:
$Var[\hat{\theta_3}] = a^2[\sigma_1^2] + (1-2a+a^2)[\sigma_2^2] + (2a-2a^2)(E[\hat{\theta_1}\hat{\theta_2}] - \theta^2)$
Como sabemos que $E[\hat{\theta_3}] = \theta$

$\therefore$ **El coeficiente de variacion para $\hat{\theta}_3$ es:**

$$CV[\hat{\theta}_3] = \frac{\sqrt{a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2 + (2a-2a^2)(E[\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2] - \theta^2)}}{\theta}$$

2.3. Punto C.

Como en este punto sabemos que $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son independientes, entonces la $Cov[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = 0$ y por tanto:
$Var[\hat{\theta}_3] = Var[a\hat{\theta}_1 + (1-a)\hat{\theta}_2]$
Distribuyendo la varianza y aplicando sus propiedades, nos queda:
$Var[\hat{\theta}_3] = Var[a\hat{\theta}_1] + Var[(1-a)\hat{\theta}_2]$
$Var[\hat{\theta}_3] = a^2Var[\hat{\theta}_1] + (1-a)^2Var[\hat{\theta}_2]$
$Var[\hat{\theta}_3] = a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2$
Note que $Var[\hat{\theta}_3]$ se convierte en una funcion que depende de a, ya que, σ_1^2 y σ_2^2 son conocidas, entonces, debemos encontrar a, que haga minima dicha funcion, en otras palabras, todo se reduce a encontrar el minimo de la funcion. Para ello procedemos de la siguiente manera:
1. Encontramos la primera derivada de la funcion con respecto a la variable a:

$$f'(a) = 2a\sigma_1^2 - 2(1-a)\sigma_2^2$$

2. Igualamos el resultado de la primera derivada a 0 y despejamos la variable que nos interesa obtener, en este caso, despejamos a:

$$2a\sigma_1^2 - 2(1-a)\sigma_2^2 = 0$$

$$2a\sigma_1^2 - (2-2a)\sigma_2^2 = 0$$

$$2a\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2 + 2a\sigma_2^2 = 0$$

$$2a\sigma_1^2 + 2a\sigma_2^2 = 2\sigma_2^2$$

$$a(2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2) = 2\sigma_2^2$$

$$a = \frac{2\sigma_2^2}{2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2}$$

$\therefore a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$
3. Ahora, debemos encontrar la segunda derivada y ver si es positiva o negativa para saber si encontramos un minimo o un maximo:

$$f''(a) = 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 > 0$$

Como nos dio que la segunda derivada parcial es siempre positiva, concluimos que el a hallado anteriormente es un minimo. Por lo tanto, para hacer que la $Var[\hat{\theta}_3]$ sea minima, debemos escoger a como $a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

3. Situacion 3

3.1. Punto A.

Sea X una distribucion Poisson(λ) con, $n = 30$ y $E[x] = (\lambda)$

$$M_1' = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_i$$

$$\mu_1' = \lambda$$

$M_1' = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_i = \lambda = \mu_1'$
$\therefore \hat{\lambda} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_i = \overline{X}$

Ahora es necesario probrar si es insesgado:
$E[\hat{\lambda}] = E[\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_i]$ $E[\hat{\lambda}] = \frac{1}{30}E[\sum_{i=1}^{30} \lambda_i]$ $E[\hat{\lambda}] = \frac{1}{30}30\lambda$ $E[\hat{\lambda}] = \lambda$

$\therefore$ **Un estimador insesgado para λ es** $\hat{\lambda} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_i = \overline{X}$

3.2. Punto B.

Sea $C = 3X + X^2$
$E[C] = E[3X + X^2]$ $E[C] = E[3X] + E[X^2]$ $E[C] = 3E[X] + E[X^2]$

Sabiendo que:
$V[X] = E[X^2] - E^2[X]$

Entonces:
$E^2[X] = V[X] + E[X^2]$

$\therefore E^2[X] = \lambda + (\lambda)^2$

Reemplazando $E^2[X]$ en:
$E[C] = 3\lambda + E[X^2]$

Obtenemos que: $E[C] = 3\lambda + \lambda + (\lambda)^2 \therefore E[C] = 4\lambda + (\lambda)^2$