Universidad del Valle - Facultad de Ingeniería
Programa Académico de Estadística
Introducción a los Métodos Estadísticos
Fecha asignación: 05 de Octubre de 2017
Fecha entrega: 26 de Octubre de 2017

Puntos a Entregar: 1,2 ,4,5, 7

Laboratorio 2
(Generación de estimadores)

Antes de Empezar: Para resolver algunos de los puntos que componen este taller es necesario conocer un propiedad de alta importancia en la construcción de estimadores, a través de procedimientos de máxima verosimilitud. Esta propiedad se denomina el principio de invarianza cuyo enunciado teórico es el siguiente:

Sean $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_{3,}, \ldots\ldots, \hat{\theta}_k$ *, los Estimadores Máximo Verosímiles del Conjunto de parámetros* $\theta_1, \theta_2, \theta_{3,}, \ldots\ldots, \theta_k$ *y siendo* $h(\theta_1, \theta_2, \theta_{3,}, \ldots\ldots, \theta_k)$ *una función de los parámetros* $\theta_1, \theta_2, \theta_{3,}, \ldots\ldots, \theta_k$ *, la estimación máximo verosímil de esta función se podrá obtener evaluando las función en los estimadores resultantes* $h(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_{3,}, \ldots\ldots, \hat{\theta}_k)$

1. Suponga que el número de quejas que se reciben diariamente en un call center de atención al cliente es una variable aleatoria con distribución de Poisson con parámetro λ.

   a) Encuentre el estimador máximo verosímil de λ .
   b) Es este un estimador insesgado?, Cual es su varianza?
   c) Suponga que en la muestra aleatoria usted obtuvo los siguientes resultados:

   3 , 4 , 3 , 2 , 5 , 6 , 4 , 2 , 1, 0.

   Según estos resultados, estime la probabilidad de que en un día particular se reciban como máximo 2 quejas.

2. El tiempo de funcionamiento en dias para un componente electronico (Y) es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(y; \lambda, \gamma) = \lambda e^{-\lambda(y-\gamma)} \qquad 0 < \gamma < y < \infty;$$

   a. Construya los estimadores de θ y γ por el método de máxima verosimilitud.
   b. Encuentre las expresiones, por máxima verosimilitud, que le permita estimar el promedio, la mediana y la varianza de la distribución.
   c. La competencia de este componente en el mercado ha venido ganando volumen de ventas, dado su ofrecimiento de un periodo de garantía durante 2 años, tiempo en el cual repondría el producto si este fallase. El fabricante ha venido pensando en igualar este periodo de garantía, mas tiene ciertas dudas respecto al volumen de elementos que tendría que reponer. Para darse una idea ha tomado una muestra aleatoria de 10 componentes sobre los cuales obtuvo, mediante pruebas aceleradas, los siguientes tiempos de duración en días:

   730, 780, 740, 650, 670, 800, 1000, 1110, 900, 450

Estime mediante máxima verosimilitud, el porcentaje de componentes que el fabricante tendría que reponer.

3. Supóngase que una población se distribuye de acuerdo con la siguiente función de densidad

$$f(x;\theta) = \theta X^{\theta+1} \qquad 0 \leq X \leq 1;\ \theta > 0.$$

   a. encuentre un estimador para el parámetro θ a partir de una muestra aleatoria ($X_1, X_2, \ldots, X_n$) utilizando tanto el método de los momentos, como el método de máxima verosimilitud.

4. Suponga que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ constituyen una muestra aleatoria de la función de densidad:

$$f(y;\theta) = e^{-(y-\theta)} \quad ; \quad y > \theta$$

   a. Encuentre un estimador para el parámetro θ por el método de los momentos y de máxima verosimilitud.
   b. Son $\hat{\theta}_{MM}$ y $\hat{\theta}_{MV}$ estimadores insesgados? De no serlos, proponga ajustes para obtener estimadores insesgados.
   c. Evalué las demás propiedades para los estimadores ajustados.

5. Una población está definida por una variable aleatoria X, que tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x;\theta) = \frac{2\theta^2}{x^3} \quad ; \quad \theta < x < \infty$$

   a. Estime θ por el método de los momentos.

6. Una población está definida por una variable aleatoria Y, que tiene la siguiente función de densidad:

$$f(y;\theta,r) = \left(\frac{1}{\theta}\right) r y^{r-1} e^{-y^r/\theta} \quad ; \quad \theta > 0,\ \mathrm{r} > 0\ ,\ y > 0$$

   a. Estime θ por el método de máxima verosimilitud.

7. Sea $Y_1, Y_2, Y_3 \ldots Y_n$ una muestra aleatoria extraída desde una población con función de densidad:

$$f(y) = \frac{1}{2\theta + 2} \qquad -1 < y < 2\theta + 1;$$

   a) Encuentre un estimador máximo verosímil para θ y para σ_y^2
   b) Encuentre un estimador por el métodos de los momentos para θ,