

## **Laboratorio N.2**

### Introduccion a Los Metodos Estadisticos Generacion de Estimadores

Diana Carolina Arias Sinisterra Cod. 1528008

Kevin Steven Garcia Chica Cod. 1533173

Cesar Andres Saavedra Vanegas Cod. 1628466

**Universidad Del Valle**

Facultad De Ingenieria

Estadistica

Octubre

2017

# Índice

<b>1. Situación 1</b>	<b>3</b>
1.1. Punto a. . . . .	3
1.2. Punto b. . . . .	3
1.3. Punto c. . . . .	4
<b>2. Situación 2</b>	<b>5</b>
2.1. Punto a. . . . .	5
2.2. Punto b. . . . .	5
2.3. Punto c. . . . .	7
<b>3. Situación 4</b>	<b>9</b>
3.1. Punto a. . . . .	9
3.2. Punto b. . . . .	9
3.3. Punto c. . . . .	9
<b>4. Situación 5</b>	<b>10</b>
4.1. Punto a. . . . .	10
<b>5. Situación 7</b>	<b>11</b>
5.1. Punto a. . . . .	11
5.2. Punto b. . . . .	11

# 1. Situación 1

## 1.1. Punto a.

Un estimador máximo verosímil de  $\lambda$  para una función Poisson( $\lambda$ ) está dado por.

$$f_{(x)}(x) = \frac{\exp^{-\lambda} \lambda^x}{X!}$$

$$L(x, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\exp^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$$L(x, \lambda) = \frac{\exp^{-\lambda n} \lambda^{\sum_{i=1}^N x_i}}{X!}$$

$$\ln(L(x, \lambda)) = \ln\left(\frac{\exp^{-\lambda n} \lambda^{\sum_{i=1}^N x_i}}{X!}\right)$$

$$\ln(L(x, \lambda)) = (-\lambda n) + \ln(\lambda^{\sum_{i=1}^N x_i}) - (\ln \sum_{i=1}^N x_i)$$

$$\ln(L(x, \lambda)) = -(\lambda n) + \sum_{i=1}^N x_i \ln(\lambda) - (\ln \sum_{i=1}^N x_i)$$

$$\frac{dL(x; \lambda)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} (-\lambda n + \sum_{i=1}^N x_i \ln(\lambda) - (\ln \sum_{i=1}^N x_i))$$

$$L(x, \lambda) = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{\lambda} - n$$

$$\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{\lambda} - n = 0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{\lambda} = n$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{n}$$

Donde  $\hat{\lambda}$  es un estimador máximo verosímil e insesgado para la función de distribución poisson.

$$\therefore \hat{\lambda} = \bar{x}$$

## 1.2. Punto b.

En un estimador insesgado puesto que la esperanza es igual al parámetro;

$$E[\hat{\lambda}] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{n}\right]$$

$$E[\hat{\lambda}] = \frac{1}{n} E[\sum_{i=1}^N x_i]$$

$$E[\hat{\lambda}] = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^N) E[x]$$

$$E[\hat{\lambda}] = E[x]$$

$$\hat{\lambda} = \bar{x}$$

Donde  $\hat{\lambda}$  es un estimador insesgado para la función poisson de parámetro ( $\lambda$ ).

La varianza esta dada por:

$$\begin{aligned} Var[\hat{\lambda}] &= var\left[\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{n}\right] \\ Var[\hat{\lambda}] &= \frac{1}{n^2} var\left[\sum_{i=1}^N x_i\right] \\ Var[\hat{\lambda}] &= \frac{1}{n} var[x_i] \end{aligned}$$

$$Var[x_i] = \frac{\lambda}{n}$$

### 1.3. Punto c.

Para calcular la probabilidad de que en un día particular se reciban máximo 2 quejas, es decir  $P[x < 2 | \hat{y} = 3]$  a partir de la muestra que cuenta con una media de  $\hat{y} = 3$  se usa la función de densidad de la distribución de poisson con parámetro  $\lambda = 3$ .

$$P[x \leq 2] = \frac{\exp^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$P[x \leq 2] = \frac{\exp^{-3} 3^0}{0!} + \frac{\exp^{-3} 3^1}{1!} + \frac{\exp^{-3} 3^2}{2!}$$

$$P[x \leq 2] = 0.4231$$

Por lo cual la probabilidad que la tiene oficina de recibir como máximo dos quejas en un día es del 42.31 %

## 2. Situación 2

$$f(y, \lambda, \gamma) = \lambda e^{-\lambda(y-\gamma)}$$

### 2.1. Punto a.

Estimación de  $\lambda$  y  $\gamma$  por máxima verosimilitud:

Empezamos con la estimación de  $\lambda$ :

$$L(\lambda, \gamma | y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n (\lambda e^{-\lambda(y_i - \gamma)}) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n (y_i - \gamma)} = \lambda^n e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n y_i - n\gamma)} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n y_i + n\lambda\gamma}$$

$$\ln(L(\lambda, \gamma | y_1, \dots, y_n)) = n \ln(\lambda) + n\lambda\gamma - \lambda \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\frac{\partial(\ln(L(\lambda, \gamma | y_1, \dots, y_n)))}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} + n\gamma - \sum_{i=1}^n y_i$$

Entonces:

$$\frac{n}{\lambda} + n\gamma - \sum_{i=1}^n y_i = 0$$

$$\frac{n}{\lambda} = \sum_{i=1}^n y_i - n\gamma$$

$$\frac{1}{\lambda} = \bar{y} - \gamma$$

En conclusión:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{y} - \gamma}$$

Ahora, la estimación para  $\gamma$  será:

$$\frac{\partial(\ln(L(\lambda, \gamma | y_1, \dots, y_n)))}{\partial \gamma} = n$$

Podemos ver que en la derivada parcial se nos desaparece el parámetro de interés  $\gamma$ , sabemos que lo que se quiere con este método es maximizar la función de verosimilitud. Entonces, observando nuestra función de verosimilitud, tenemos:

$$L(\lambda, \gamma | y_1, \dots, y_n) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n y_i + n\lambda\gamma}$$

Tomando todas las variables en la anterior expresión como constantes excepto  $\gamma$ , para maximizar dicha función,  $\gamma$  debe ser lo más pequeño posible, ya que con ello, el exponente  $-\lambda \sum_{i=1}^n y_i + n\lambda\gamma$  es más pequeño y por tanto la exponencial va a ser mayor, haciendo máxima toda la expresión.

En conclusión:

$$\hat{\gamma} = y(1) = \min[y_1, y_2, y_3, \dots, y_n]$$

### 2.2. Punto b.

Si observamos detalladamente la función de densidad, vemos que es una función de una distribución

exponencial con  $x = y - \gamma$

Haciendo la sustitución anterior tenemos:

$$f(y, \lambda, \gamma) = \lambda e^{-\lambda(y-\gamma)} = \lambda e^{-\lambda x}$$

Como denotamos  $x = y - \gamma$ , despejando  $y$ , nos queda  $y = x + \gamma$

**Estimación para el promedio:**

$E[y] = E[x + \gamma] = E[x] + E[\gamma]$  ; como  $x$  es exponencial  $E[x] = \frac{1}{\lambda}$  y como  $\gamma$  es constante,  $E[\gamma] = \gamma$   
Entonces:

$$E[y] = \frac{1}{\lambda} + \gamma$$

Por la propiedad de la invarianza, reemplazando nuestro estimador para  $\lambda$ :

$$E[\hat{y}] = \frac{1}{\frac{1}{\bar{y}-\gamma}} + \gamma = \bar{y} - \gamma + \gamma = \bar{y}$$

En conclusión:

$$E[\hat{y}] = \bar{y}$$

**Estimación para la varianza:**

$V[y] = V[x + \gamma] = V[x] + V[\gamma]$  ; como  $x$  es exponencial  $V[x] = \frac{1}{\lambda^2}$  y como  $\gamma$  es constante,  $V[\gamma] = 0$   
Entonces:

$$V[y] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Teniendo en cuenta la propiedad de la invarianza, reemplazando nuestro estimador para  $\lambda$  tenemos:

$V[\hat{y}] = \frac{1}{(\frac{1}{\bar{y}-\gamma})^2}$ , observamos que depende de  $\gamma$ , como el estimador para  $\gamma$  es máximo verosímil, también se puede aplicar la propiedad de la invarianza, entonces, reemplazando tenemos:

$$V[\hat{y}] = \frac{1}{(\frac{1}{\bar{y}-y_{(1)}})^2} = (\bar{y} - y_{(1)})^2$$

En conclusión:

$$V[\hat{y}] = (\bar{y} - y_{(1)})^2$$

**Estimación para la mediana:**

$Me[y] = Me[x + \gamma] = Me[x] + Me[\gamma]$  ; como  $\gamma$  es constante,  $Me[\gamma] = \gamma$ . Por otra parte, la mediana de  $x$  debemos hallarla.

Sabemos que la mediana esta definida como el punto que nos acumula una probabilidad de 0.5, entonces para hallarla se hace el siguiente procedimiento:

$Me[x] = \int_{?}^M \lambda e^{-\lambda x} dx = 0.5$  Podemos ver que el limite superior lo denotamos como  $M$ , el cual es la mediana. y el limite inferior debemos hallarlo.

como  $x = y - \gamma$  y  $0 < \gamma < y < \infty$  por lo tanto  $0 < x < \infty$

La integral quedaría:

$$Me[x] = \int_0^M \lambda e^{-\lambda x} dx = 0.5$$

$$= \lambda \int_0^M e^{-\lambda x} dx = 0.5$$

Sea  $u = -\lambda x$ ,  $du = -\lambda dx$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\lambda}{\lambda} \int_0^M e^u du = 0.5 \\ &= -[e^{-\lambda x} - 1] = 0.5 \\ &= 1 - e^{-\lambda x} = 0.5 \\ &= e^{-\lambda M} = 0.5 \\ &= -\lambda M = \text{Ln}(0.5) \\ &M = -\frac{\text{Ln}(0.5)}{\lambda} \end{aligned}$$

Entonces:

$$Me[x] = -\frac{\text{Ln}(0.5)}{\lambda}$$

Por tanto:

$$Me[y] = Me[x] + \gamma = -\frac{\text{Ln}(0.5)}{\lambda} + \gamma$$

Ahora, aplicando la propiedad de la invarianza. Reemplazando nuestros estimadores, nos queda:

$$Me[y] = -\frac{\text{Ln}(0.5)}{\frac{1}{\bar{y} - y_{(1)}}} + y_{(1)} = y_{(1)} - (\bar{y} - y_{(1)})\text{Ln}(0.5)$$

En conclusión:

$$\hat{Me}[y] = y_{(1)} - (\bar{y} - y_{(1)})\text{Ln}(0.5)$$

### 2.3. Punto c.

Como el fabricante piensa igualar la garantía a la de su competencia que es de 2 años (730 días), es decir, si el componente se daña en menos de 2 años, este tendrá que reponerlo. Queremos saber que porcentaje de componentes debería reponer al igualar su garantía con la de la competencia. En símbolos matemáticos, tendríamos que hallar  $P[y < 730]$  ya que la variable  $y$  esta dada en días.

la muestra obtenida sobre 10 componentes fue: 730, 780, 740, 650, 670, 800, 1000, 1110, 900, 450. Por tanto  $\bar{y} = 783$

Como la función de distribución de  $y$  depende de  $\lambda$  y  $\gamma$ , tendremos que utilizar nuestros estimadores para calcular estos parámetros.

Hallaremos primero  $\gamma$ :

$$\hat{\gamma} = y_{(1)} = 450$$

Ahora, hallaremos  $\lambda$ :

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{y} - \gamma} = \frac{1}{783 - 450} = 0.003$$

Entonces:

Como  $f(y)$  es exponencial con  $x = y - \gamma$ , entonces  $P[y < c] = 1 - e^{-\lambda(y-\gamma)}$

En nuestro caso:

$$P[y < 730 | \bar{y} = 783] = 1 - e^{-0.003(730-450)} = 1 - e^{-0.8408} = 0.5686$$

**El fabricante tendrá que reponer aproximadamente el 56.86 % de los componentes.**



### 3. Situación 4

#### 3.1. Punto a.

$$f(y; \theta) = e^{-(y-\theta)}; y > \theta$$

**ESTIMACIÓN POR MOMENTOS:**  $M'_1 = \mu'_1$

$$M'_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \bar{y}$$

$$\mu'_1 = E[Y] = \int_{\theta}^{\infty} y f(y) \cdot dy$$

$$= \int_{\theta}^{\infty} y e^{-(y-\theta)} \cdot dy = \int_{\theta}^{\infty} y e^{-y} e^{\theta} \cdot dy = e^{\theta} \int_{\theta}^{\infty} y e^{-y} \cdot dy$$

Aplicando integración por partes:  $u = y$ ,  $dv = e^{-y}$ ,  $du = dy$  y  $v = -e^{-y}$  Nos queda:

$$E[Y] = e^{\theta} [-y e^{-y} + \int_{\theta}^{\infty} e^{-y} \cdot dy] = e^{\theta} [-y e^{-y} - e^{-y} |_{\theta}^{\infty}]$$

$$= e^{\theta} (\theta e^{-\theta} + e^{-\theta}) = \theta e^{\theta} e^{-\theta} + e^{\theta} e^{-\theta} = \theta + 1$$

Entonces, por el método de los momentos obtenemos el siguiente estimador:

$$\mu'_1 = \theta + 1 = \bar{y} = M'_1$$

$$\hat{\theta} = \bar{y} - 1$$

**ESTIMACIÓN POR EL MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD:**

#### 3.2. Punto b.

#### 3.3. Punto c.

## 4. Situación 5

### 4.1. Punto a.

$$f(x; \theta) = \frac{2\theta^2}{x^3}; \theta < x < \infty$$

$$M1' = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\mu'_1 = ?$$

$$\mu'_1 = E[X] = \int_{\theta}^{\infty} x f(x) \cdot dx$$

$$E[X] = \int_{\theta}^{\infty} x \frac{2\theta^2}{x^3} \cdot dx = \int_{\theta}^{\infty} \frac{2\theta^2}{x^2} \cdot dx$$

$$E[X] = 2\theta^2 \int_{\theta}^{\infty} \frac{1}{x^2} \cdot dx = 2\theta^2 \left[ -\frac{1}{x} \right]_{\theta}^{\infty} = 2\theta^2 \left( \frac{1}{\theta} \right) = 2\theta$$

$$\mu'_1 = E[X] = 2\theta = \bar{X} = M1'$$

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{2}$$

En conclusión, el estimador por el método de los momentos para  $\theta$  de la función de densidad  $f(x; \theta) = \frac{2\theta^2}{x^3}; \theta < x < \infty$  es  $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{2}$

## 5. Situación 7

Sean  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$  una muestra aleatoria extraída de una población con función de densidad:

$$f(y) = \frac{1}{2\theta + 2}; -1 < Y < 2\theta + 1$$

Donde;  $f(y)$  Uniforme( $a = -1, b = 2\theta + 1$ )

### 5.1. Punto a.

Un estimador máximo verosímil para  $\theta$  y  $\sigma^2$  son:

**Para  $\theta$  :**

$$\begin{aligned} L(y; \theta) &= \prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{2\theta+2} \right) \\ L(y; \theta) &= \left( \frac{1}{2\theta+2} \right)^n \\ \ln(L(y; \theta)) &= \ln\left(\left(\frac{1}{2\theta+2}\right)^n\right) \\ L(y; \theta) &= n[\ln\left(\frac{1}{2\theta+2}\right)] \\ L(y; \theta) &= n[\ln(1) - \ln(2\theta + 2)] \\ L(y; \theta) &= n[-\ln(2\theta + 2)] \\ \frac{dL(y; \theta)}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}(n[-\ln(2\theta + 2)]) \end{aligned}$$

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\theta+1}$$

Donde el parámetro es el límite superior de la variación de la función de distribución.

$$\therefore \hat{\theta} = \text{Maximo} = [Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n]$$

**Para  $\sigma^2$  :**

Como sabemos que  $f(y)$  es uniforme con  $a = -1$  y  $b = 2\theta + 1$ , tenemos que la varianza es:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \text{Var}(Y) = \frac{(b-a)^2}{12} \\ \text{Var}(Y) &= \frac{(2\theta+1-(-1))^2}{12} \\ \text{Var}(Y) &= \frac{(2\theta+2)^2}{12} \\ \text{Var}(Y) &= \frac{4\theta^2+8\theta+4}{12} = \frac{4(\theta^2+2\theta+1)}{12} = \frac{\theta^2+2\theta+1}{3} \\ \text{Var}(Y) &= \frac{(\theta+1)^2}{3} \end{aligned}$$

Por la propiedad de la invarianza de los estimadores máximo verosímiles, tenemos que una estimación para  $\sigma^2$  sera:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(Y_{(n)}+1)^2}{3}$$

### 5.2. Punto b.

La estimación por momentos para  $\theta$  sera:

$$M'_1 = \bar{Y}$$

$$\mu'_1 = E[Y] = ?$$

$$E[Y] = \frac{(a+b)}{2}, \text{ ya que } f(y) \text{ tiene distribución uniforme}$$

$$E[Y] = \frac{(-1+(2\theta+1))}{2}$$

$$E[Y] = \frac{(2\theta)}{2}$$

$$E[Y] = \theta$$

$$\text{Entonces: } M'_1 = \bar{Y} = \theta = \mu'_1$$

$$\text{Por tanto: } \hat{\theta} = \bar{Y}$$