

## **Laboratorio N.2**

### Introduccion a Los Metodos Estadisticos Generacion de Estimadores

Diana Carolina Arias Sinisterra Cod. 1528008

Kevin Steven Garcia Chica Cod. 1533173

Cesar Andres Saavedra Vanegas Cod. 1628466

**Universidad Del Valle**

Facultad De Ingenieria

Estadistica

Octubre

2017

# Índice

<b>1. Situación 1</b>	<b>3</b>
1.1. Punto a. . . . .	3
1.2. Punto b. . . . .	3
1.3. Punto c. . . . .	4
<b>2. Situación 2</b>	<b>5</b>
2.1. Punto a. . . . .	5
2.2. Punto b. . . . .	5
2.3. Punto c. . . . .	5
<b>3. Situación 4</b>	<b>6</b>
3.1. Punto a. . . . .	6
3.2. Punto b. . . . .	6
3.3. Punto c. . . . .	6
<b>4. Situación 5</b>	<b>7</b>
4.1. Punto a. . . . .	7
<b>5. Situación 7</b>	<b>8</b>
5.1. Punto a. . . . .	8
5.2. Punto b. . . . .	9

# 1. Situación 1

## 1.1. Punto a.

Un estimador maximo verosimil de  $\lambda$  para una funcion Poisson( $\lambda$ ) esta dado por.

$$f_{(x)}(x) = \frac{\exp^{-\lambda} \lambda^X}{X!}$$

$$L(x, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\exp^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$$L(x, \lambda) = \frac{\exp^{-\lambda n} \lambda^{\sum x_i}}{X!}$$

$$Ln(L(x, \lambda)) = Ln\left(\frac{\exp^{-\lambda n} \lambda^{\sum x_i}}{X!}\right)$$

$$L(x, \lambda) = (-\lambda n) + Ln(\lambda \sum x_i) - (Ln \sum x_i)$$

$$L(x, \lambda) = -(\lambda n) + \sum x_i Ln(\lambda) - (Ln \sum x_i)$$

$$\frac{dL(x; \lambda)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}(-\lambda n + \sum x_i Ln(\lambda) - (Ln \sum x_i))$$

$$L(x, \lambda) = \frac{\sum x_i}{\lambda} - n$$

$$\frac{\sum x_i}{\lambda} - n = 0$$

$$\frac{\sum x_i}{\lambda} = n$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Donde  $\hat{\lambda}$  es un estimador maximo verosimil e insesgado para la funcion de distribucion poisson.

$$\therefore \hat{\lambda} = \bar{x}$$

## 1.2. Punto b.

En un estimador insesgado puesto que la esperanza es igual al parametro;

$$E[\hat{\lambda}] = E\left[\frac{\sum x_i}{n}\right]$$

$$E[\hat{\lambda}] = \frac{1}{n} E[\sum x_i]$$

$$E[\hat{\lambda}] = \frac{1}{n} (\sum) E[x]$$

$$E[\hat{\lambda}] = E[x]$$

$$\hat{\lambda} = \bar{x}$$

Donde  $\hat{\lambda}$  es un estimador insesgado para la funnccion poisson de parametro ( $\lambda$ ).

La varianza esta dada por:

$$\begin{aligned} Var[\hat{\lambda}] &= var\left[\frac{\sum x_i}{n}\right] \\ Var[\hat{\lambda}] &= \frac{1}{n^2} var\left[\sum x_i\right] \\ Var[\hat{\lambda}] &= \frac{1}{n} var[x_i] \end{aligned}$$

$$Var[x_i] = \frac{\lambda}{n}$$

### 1.3. Punto c.

Para clacular la probabilidad de que en un dia particular se reciban maximo 2 quejas, es decir  $P[x < 2 | \hat{y} = 3]$  a partir de la muestra que que cuenta con una media de  $\hat{y} = 3$  se usa la funcion de densidad de la distribucion de poisson con parametro  $\lambda = 3$ .

$$P[x \leq 2] = \frac{\exp^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$P[x \leq 2] = \frac{\exp^{-3} 3^0}{0!} + \frac{\exp^{-3} 3^1}{1!} + \frac{\exp^{-3} 3^2}{2!}$$

$$P[x \leq 2] = 0.4231$$

Por lo cual la probabilidad que la tiene oficina de recibir como maximo dos quejas en un dia es del 42.31 %

## **2. Situación 2**

**2.1. Punto a.**

**2.2. Punto b.**

**2.3. Punto c.**

### **3. Situación 4**

**3.1. Punto a.**

**3.2. Punto b.**

**3.3. Punto c.**

## 4. Situación 5

### 4.1. Punto a.

$$f(x; \theta) = \frac{2\theta^2}{x^3}; \theta < x < \infty$$

$$M1' = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\mu'_1 = ?$$

$$\mu'_1 = E[X] = \int_{\theta}^{\infty} x f(x) \cdot dx$$

$$E[X] = \int_{\theta}^{\infty} x \frac{2\theta^2}{x^3} \cdot dx = \int_{\theta}^{\infty} \frac{2\theta^2}{x^2} \cdot dx$$

$$E[X] = 2\theta^2 \int_{\theta}^{\infty} \frac{1}{x^2} \cdot dx = 2\theta^2 \left[ -\frac{1}{x} \right]_{\theta}^{\infty} = 2\theta^2 \left( \frac{1}{\theta} \right) = 2\theta$$

$$\mu'_1 = E[X] = 2\theta = \bar{X} = M1'$$

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{2}$$

En conclusión, el estimador por el método de los momentos para  $\theta$  de la función de densidad  $f(x; \theta) = \frac{2\theta^2}{x^3}; \theta < x < \infty$  es  $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{2}$

## 5. Situación 7

Sean  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$  una muestra aleatoria extraida de una poblacion con funcion de densidad:

$$f(y) = \frac{1}{2\theta + 2}; -1 < Y < 2\theta + 1$$

Donde;  $f(y)$  *Uniforme*( $a = -1, b = 2\theta + 1$ )

### 5.1. Punto a.

Un estimador maximo verosimil para  $\theta$  y  $\sigma^2$  son:

**Para  $\theta$  :**

$$\begin{aligned} L(y; \theta) &= \prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{2\theta+2} \right) \\ L(y; \theta) &= \left( \frac{1}{2\theta+2} \right)^n \\ \ln(L(y; \theta)) &= \ln\left(\left(\frac{1}{2\theta+2}\right)^n\right) \\ L(y; \theta) &= n[\ln\left(\frac{1}{2\theta+2}\right)] \\ L(y; \theta) &= n[\ln(1) - \ln(2\theta + 2)] \\ L(y; \theta) &= n[-\ln(2\theta + 2)] \\ \frac{dL(y; \theta)}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}(n[-\ln(2\theta + 2)]) \end{aligned}$$

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\theta+1}$$

Donde el parametro es el limite superior de la variacion de la funcion de distribucion.

$$\therefore \hat{\theta} = \text{Maximo} = [Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n]$$

**Para  $\sigma^2$  :**

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \text{Var}(Y) = \frac{(b-a)^2}{12} \\ \text{Var}(Y) &= \frac{(2\theta+1-(-1))^2}{12} \\ \text{Var}(Y) &= \frac{(2\theta+2)^2}{12} \\ L(y; \sigma^2) &= \prod_{i=1}^n \frac{(2\theta+2)^2}{12} \\ L(y; \sigma^2) &= \left( \frac{(2\theta+2)^2}{12} \right)^n \\ \ln(L(y; \sigma^2)) &= \ln\left(\frac{(2\theta+2)^2}{12}\right)^n \\ L(y; \sigma^2) &= n\left(\frac{(2\theta+2)^2}{12}\right) \end{aligned}$$

Segun lo anterior podemos concluir que  $n\left(\frac{(2\theta+2)^2}{12}\right)$  Maximizaria la funcion de L.

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \frac{(2\theta+1-(-1))^2}{12} \\ \text{Var}(Y) &= 4\frac{(\theta+2)^2}{12} \\ \text{Var}(Y) &= \frac{(\theta+2)^2}{3} \end{aligned}$$



Sin embargo no es posible medir sus varianzas puesto que  $\theta$  es la  $Y_n$  muestra de  $[Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n]$  por lo cual.

$$Var(Y) = \frac{(Y_{(n)}+2)^2}{3}$$

## 5.2. Punto b.

Un estimador por el metodo de los momentos para  $\theta$  esta dado por:

$$E[Y] = E\left[\frac{(a+b)}{2}\right]$$

$$E[Y] = E\left[\frac{(-1+(2\theta+1))}{2}\right]$$

$$E[Y] = E\left[\frac{(2\theta)}{2}\right]$$

$$E[Y] = E[\theta]$$

$$\theta = \frac{\sum(Y_i)}{n}$$

$$\hat{\theta} = \hat{Y}$$