Mapa vial

Este capítulo final cubre el análisis de imágenes pixeladas a través de modelos de campo aleatorio de Markov, hacia la detección de patrones y la corrección de imágenes. Comenzamos con el análisis estadístico de los campos aleatorios de Markov, que son extensiones de las cadenas de Markov al dominio espacial, ya que son fundamentales en este capítulo. Esta es también la oportunidad perfecta para cubrir el método ABC, ya que estos modelos no permiten una probabilidad de forma cerrada. El análisis de imágenes ha sido un área muy activa tanto para las estadísticas bayesianas como para los métodos computacionales en los últimos 30 años, por lo que creemos que merece un capítulo propio por sus características específicas.

8.1 El análisis de imágenes como problema estadístico

Si pensamos en una imagen de computadora como una colección (grande) de píxeles de colores dispuestos en una cuadrícula, ¡no parece haber ninguna aleatoriedad involucrada ni necesidad de análisis estadístico! No obstante, el análisis de imágenes visto como un análisis estadístico es un campo próspero que vio el surgimiento de varios avances estadísticos importantes, incluido, por ejemplo, el muestreador de Gibbs. (Además, este campo ha adoptado predominantemente una perspectiva bayesiana tanto porque esto era algo natural de hacer como porque el poder analítico de este enfoque era mayor que con otros métodos). La razón de esta aparente paradoja es que, mientras que los píxeles suelen ser deterministas objetos, la complejidad y el tamaño de las imágenes requieren que uno represente esos píxeles como la salida aleatoria de una distribución gobernada por un objeto de dimensión mucho más pequeña. Por ejemplo, este es el caso de la visión por computadora, donde los objetos específicos deben extraerse de un fondo mucho más rico (o más ruidoso).

En este espíritu de extraer información de una enorme estructura dimensional, construimos en la Secta. 8.2 una familia específica de distribuciones inspiradas en la física de partículas, el modelo de Potts, para estructurar imágenes y otras estructuras espaciales en términos de homogeneidad local. Desafortunadamente, esta es una sección principalmente teórica con muy pocas ilustraciones. En la secc. 8.3, abordamos el problema fundamental de manejar la constante de normalización faltante en estos modelos mediante la introducción de una nueva técnica computacional llamada ABC que opera sobre verosimilitudes intratables (con la penalidad de producir una respuesta aproximada). En la secc. 8.4, imponemos una fuerte dimensión espacial al prior asociado a una imagen con el fin de reunir estructuras homogéneas a partir de una imagen compleja o borrosa.

8.2 Dependencia espacial

8.2.1 Rejillas y celosías

Una imagen (en el sentido de una imagen generada por computadora) es un caso especial de una celosía, en el sentido de que es un objeto aleatorio cuyos elementos están indexados por la ubicación de los píxeles y, por lo tanto, están relacionados por la proximidad geográfica de esas ubicaciones. . En general, una celosía es un objeto matemático multidimensional en el que se puede definir una relación de vecindad.

A pesar de que el análisis original de modelos de celosía de Besag (1974) se centró en la ecología vegetal y los experimentos agrícolas, la relación de vecindad solo se limita a ser una relación simétrica y no necesariamente tiene una conexión con una proximidad geográfica, ni con una imagen. Por ejemplo, la relación puede describir interacciones sociales entre tribus amazónicas o palabras en un manuscrito que comparten una raíz lingüística. (La relación de vecindad entre dos puntos de la celosía generalmente se traduce en términos estadísticos en una dependencia probabilística entre esos puntos.) La celosía asociada con una imagen es una matriz regular n × m hecha de (i, j) 's (1 ≤ i ≤ n, 1 ≤ j ≤ m), cuyos vecinos más cercanos (pero no necesariamente solo) están formados por las cuatro entradas (i, j - 1), (i, j + 1), (i - 1, j) y (i + 1, j). Para describir adecuadamente una estructura de dependencia en imágenes o en otros objetos espaciales indexados por una celosía, necesitamos expandir la noción de cadena de Markov en esas estructuras. Dado que una celosía es un objeto multidimensional —a diferencia de la línea unidimensional correspondiente a los tiempos de observación de la cadena de Markov—, un primer requisito para la generalización es definir una estructura de vecindad adecuada.

Para ilustrar esta noción, consideramos un pequeño conjunto de datos que muestra la presencia de juncos copetudos en una parte de un humedal. Este conjunto de datos, llamado Laichedata, es simplemente una matriz de ceros y unos de 25 × 25. La celosía correspondiente es la matriz de 25 × 25 (Fig. 8.1).

Dada una red I de sitios i ∈ I en un mapa o de píxeles en una imagen, 3 una relación de vecindad en I se denota por ∼, i ∼ j significa que i y j son vecinos. Si asociamos una distribución de probabilidad en un vector x indexado por la red, x = (xi) i∈I, con esta relación, lo que significa que dos componentes xi y xj están correlacionados si los sitios iyj son vecinos, un requisito fundamental para la existencia de esta distribución es que la relación de vecindad es simétrica (Cressie, 1993): si i es un vecino de j (escrito como i ∼ j), entonces j es un vecino de i. (Por convención, i no es vecino de sí mismo.) La figura 8.2 ilustra esta noción para tres tipos de vecindarios en una cuadrícula regular. Por ejemplo, Laichedata podría asociarse con un vecindario noroeste-sureste para tener en cuenta los vientos dominantes: una entrada (i, j) tendría como vecinos (i - 1, j - 1) y (i + 1, j + 1).

8.2.4 El modelo de Potts

La generalización del modelo de Ising a los casos en que la imagen tiene más de dos colores, dice G, es sencilla. Si ni, g denota el número de vecinos de i ∈ I con color g (1 ≤ g ≤ G), es decir,

la distribución condicional completa de xi se elige como

Esta elección corresponde a un modelo de probabilidad conjunta (verdadero), el modelo de Potts, cuya densidad viene dada por (Ejercicio 8.6)

Este modelo es una generalización clara del modelo de Ising y tiene el mismo inconveniente, a saber, que la constante de normalización de esta densidad, que es una función de β, no está disponible en forma cerrada y, por lo tanto, dificulta la inferencia y el cálculo de la verosimilitud. función.

Una vez más, nos enfrentamos al obstáculo de que, al simular x de un modelo de Potts con un β grande, el muestreador de Gibbs de un solo sitio puede ser bastante lento. Hay alternativas más eficientes disponibles, incluido el algoritmo de Swendsen-Wang (ejercicio 8.7). Por ejemplo, el algoritmo 8.17 a continuación es nuevamente un algoritmo de Metropolis-Hastings que fuerza los movimientos en los valores actuales. Tenga en cuenta la característica especial de que, si bien esta propuesta de Metropolis-Hastings no es una caminata aleatoria, usar en su lugar una propuesta uniforme sobre los otros valores posibles G− 1 aún conduce a una probabilidad de aceptación que es igual a la relación de las densidades objetivo.

La figura 8.4 ilustra el resultado de una simulación usando el algoritmo 8.17 en una situación donde hay G = 4 colores, usando la siguiente función R para la simulación. (El uso de un solo vector de índices para filas y columnas es un truco de programación que elimina un bucle en el código y, por lo tanto, ahorra una cantidad considerable de tiempo de cálculo. Esto también permite una verdadera distribución uniforme en la muestra. Tenga en cuenta la llamada a la congruencia operadores %% para módulo y% /% para división de enteros) Señalamos la influencia reforzada de los β grandes en la Fig. 8.4: no solo es mayor la homogeneidad, sino que también hay una mayor diferenciación en los colores.10 Destacamos que, mientras que β en la figura 8.4 varía sobre los mismos valores que en la figura 8.3, las β no son directamente comparables ya que el mayor número de clases en el modelo de Potts induce un valor menor de las ni, g para la estructura de vecindad.