Càlcul Numèric

Victor Martín, Eric Valls, Dean Zhu

October 2017

Exercici 1

Plantejament del Problema

Volem determinar l'angle amb que s'ha de disparar un projectil perquè, fixada la celeritat inicial, arribi a una distància concreta. Això ens porta a plantejar un sistema d' EDOs.

Tenim la funció f a *distancia.m* que, donat un angle i una velocitat inicial del tir (que està fixada al problema), resol el sistema i retorna la distància horitzontal a la que arriba el projectil.

En aquest problema en concret, volem que el projectil arribi a una distància de 500 metres. Per trobar l'angle de llançament adecuat, podríem igualar f a 500, però com f és la solució d'unes equacions diferencials, aquest càlcul exacte resultaria molt complicat.

Per tant, enlloc de trobar solucions de forma analítica, ho farem de forma numèrica. És per això que definim una funció auxiliar $g(x) = f(x) - 500$, on veiem que θ és solució de $f(\theta) = 500$ si i només si θ és un zero de la funció g.

Pels punts proposats:
$f(0.25) = 451.263m$
$f(0.5) = 626.0806m$
$f(0.75) = 653.4704m$
$f(1) = 564.6122m$

Plantejament de la solució

Considerem només les solucions amb $\theta \in [0, \pi/2]$ és a dir, un angle del primer quadrant, doncs cap altre angle de tir té sentit en aquest context.

Veient els resultats anteriors i entenent que g és contínua al ser solució d'un sistema d'EDO's on tot es continu, podem afirmar pel teorema de Bolzano-Weierstrass que en el interval $[0.25, 0.5]$ existeix com a mínim una solució. A més a més sabem que un tir de angle $\pi/2$ arribara a una distància propera al 0, llavors sembla raonable pensar que existeix una altra solució en l'interval $[1, \pi/2]$. De moment amb aquesta informació no podem afirmar sobre l'existència d'altres solucions.

Per comprovar que només existeixen dues solucions, avaluem la funció en l'interval $[0, \pi/2]$ i així tenim una idea de la gràfica de la funció.

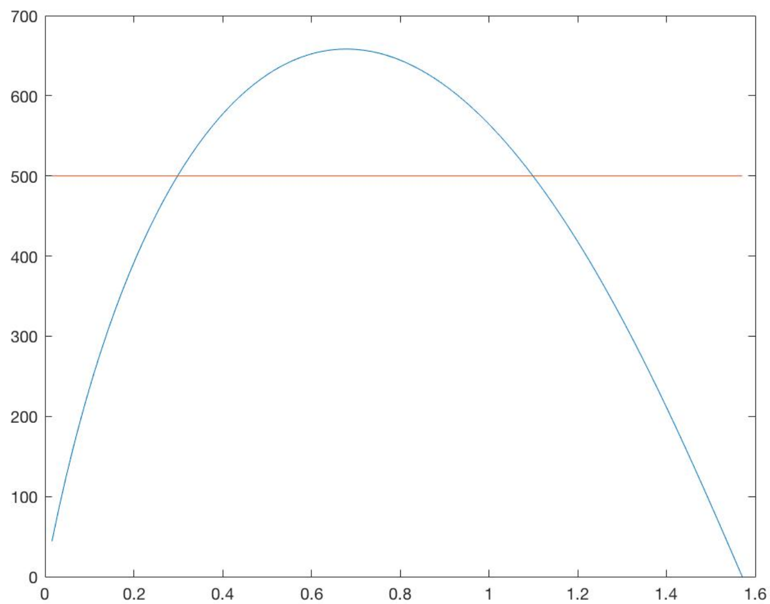


Figure 1: Avaluació de f en l'interval $[0, \pi/2]$

I, en efecte, veiem que g té dues solucions als intervals esmentats.

Per trobar les solucions amb precisió tenim diversos mètodes: bisecció, Newton i secant.

Métode de Bisecció

Aquest mètode té una clara avantatge, sabem que convergirà. A més a més és relativament fàcil de programar. No obstant, la seva convergència és linial, essent massa lenta en molts casos. En el nostre cas, prenent x_0, x_1 com a 0.2 i 0.6 convergeix en 19 iteracions al punt 0.2986618 amb un error relatiu de 10^{-6}. Prenent x_0, x_1 com 1 i 1.2, convergeix en 18 iteracions al punt 1.0991440.

Métode de Newton

Comparat amb el mètode de bisecció, el mètode de Newton convergirà bastant més ràpid en general. Peró aquest mètode té un problema, que es que no coneixem la funció derivada. Per tant el que farem serà aproximar-la.

Aproximació de la derivada

La definició de derivada és:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

Llavors per poder aproximar la derivada només cal pendre un ϵ prou petit tal que

$$g'(\theta) \simeq \frac{g(\theta + \epsilon) - g(\theta)}{\epsilon}$$

Prenent $\epsilon = 10^{-7}$, error relatiu 10^{-6} i punt inicial 0.2, el mètode convergeix en 5 iteracions al punt 0.2986615, i prenent el punt inicial 1.2 convergeix en 4 iteracions al punt 1.0991443.

Métode de la Secant

Donat el problema del mètode de Newton respecte a la obtenció de la derivada, la secant sembla ser la solució més raonable per aquest problema.

Observant la gràfica i els punts avaluat al apartat A, prenem els punts 0.2 i 0.6 com a aproximacions inicials i en aquest cas el mètode convergeix en 7 iteracions al punt 0.2986615 amb un error relatiu de 10^{-6}. Si prenem els punts 1, 1.2 el métode convergeix en 5 iteracions al punt 1.0991443 i el mateix error relatiu que el cas anterior.

Exercici 2

Donat un sistema de quatre barres connectats pels extrems formant un quadrilàter, amb una barra fixada sobre l'eix X, volem conèixer quin angle α formen, si numerem les barres de l'1 al 4 en ordre, amb la barra 1 fixa a l'eix X, les barres 1 i 2, tot coneixent el complementari β de l'angle que formen les barres 1 i 4.

L'equació de Freudenstein $\frac{a_1}{a_2}\cos\beta - \frac{a_1}{a_2}\cos\alpha - \cos(\beta-\alpha) = -\frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2+a_4^2}{2a_2 2a_4}$ ens relaciona α amb β, tot i que no garanteix que hi hagi solució real de α, ni que sigui única, ni que la solució impliqui que el quadrilàter que formen les barres no tingui autointerseccions i no sigui degenerat.

Per tant, fixat el valor de β, Considerem la funció $f(x) = \frac{a_1}{a_2}\cos\beta - \frac{a_1}{a_2}\cos x - \cos(\beta - x) + \frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2+a_4^2}{2a_2 2a_4}$. Tenim també $f'(x) = \frac{a_1}{a_2}\sin x - \sin(\beta - x)$.

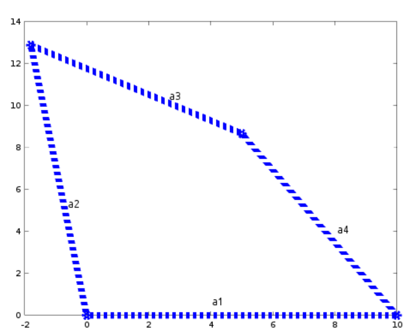
Qualsevol configuració possible complirà $f(x) = 0$. Volem resoldre el problema mitjançant el mètode de Newton considerant les configuracions inicials $\beta = -0.1$ i $\beta = 2\pi/3$. A partir de les logituds, en centímetres, a_1, a_2, a_3, a_4 de les barres, β i un real x, les funcions `P2avalua(x, a1, a2, a3, a4, beta)` i `P2derivada(x, a1, a4, beta)` ens donen, respectivament, els valors $f(x)$ i $f'(x)$. La funció `P2newton(x0, a1, a2, a3, a4, beta, tol)`, ens dóna un valor de α amb el mètode de Newton a partir de l'aproximació inicial x_0, i `P2(x0, a1, a2, a3, a4, beta, tol)` ens dibuixa la configuració obtinguda a partir d'aquest mètode. Les funcions estan situades als arxius amb el mateix nom i extensió .m.

Les solucions obtingudes amb aproximacions $x_1^0 = 2\pi/3rad$ i $x_2^0 = -0.1rad$, amb precisió $tol = 10^{-15}$, són:

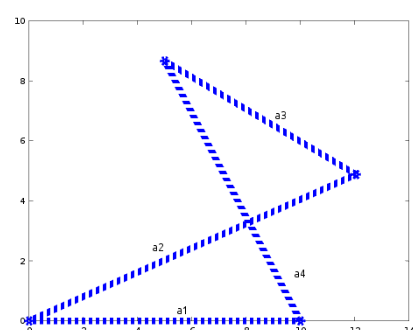
$\alpha_1 = 1.70969012749560\ rad = 97.9580285806814\deg$

$\alpha_2 = 0.38470497489760\ rad = 22.0419714193186\deg$

Les configuracions obtingudes, respectivament, són les següents:

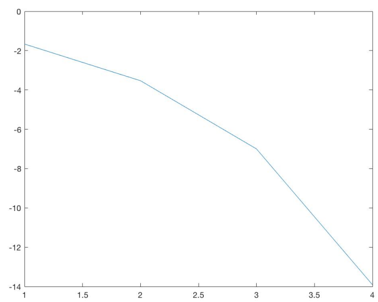


(a) Configuaració de les barres amb $x_1^0 = 2\pi/3rad$

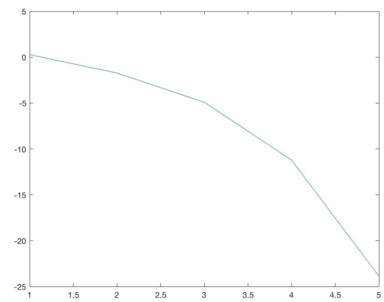


(b) Configuaració de les barres amb $x_2^0 = -0.1rad$

Les dues gràfiques de convergència són molt semblans i de caire quadràtic ja que podem veure com el logartime de l'error relatiu es multiplica per 2 cada iteració.



(a) Convergència en x_1^0



(b) Convergència en x_2^0

Exercici 3

Plantejament del Problema

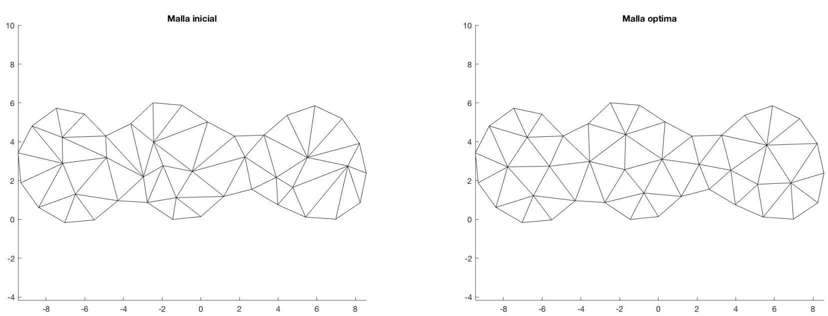
Donada una malla inicial, i una funció objectiu definida sobre una malla que anomanem distorsió, volem trobar un mínim d'aquesta funció fixats els punts exteriors de la malla inicial.
Inicialment, la distorsió de la malla és 9.2269469.

Plantejament del Solució

Com és un problema de minimitzaci'o volem trobar un punt tal que el Jacobià de la funció objectiu valgui 0. Per tant, reduim el problema és a trobar un zero del jacobiá de la distorsió. Per fer això utilitzarem el mètode de Newton el qual utilitzarà el Jacobià i la Hessiana de la funció objectiu enlloc de la funció en sí.

Utilitzant el método de Newton i prenent un error relatiu de 10^{-6} trobem una solució en 6 iteracions amb distorisió 7.8946112.

En canvi, utilitzant el método de Broyden i prenent el mateix error relatiu que el cas anterior, trobem la solució en X iteracions amb una distorisió de Y. Tot i que el método de Broyden fa moltes més iteracions que Newton, cada iteració es significativament més ràpida, doncs el càlcul de derivades té un cost bastant alt.



(a) Malla inicial

(b) Malla final

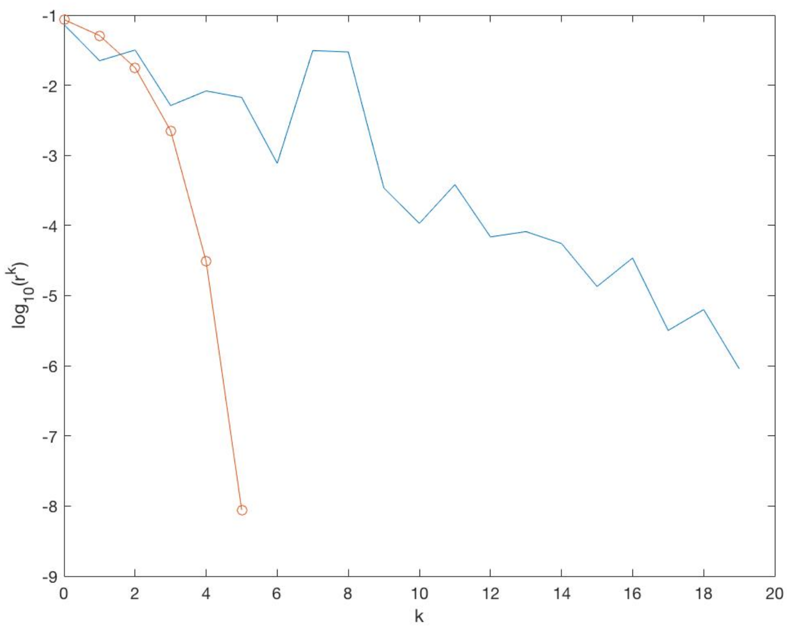


Figure 5: Convergència del mètode de Newton i Broyden

Observem com la convergència del mètode de Newton és quadràtica mentre que la del mètode de Broyden és molt erràtica i sembla que s'aproxima més a la lineal.

Exercici 4

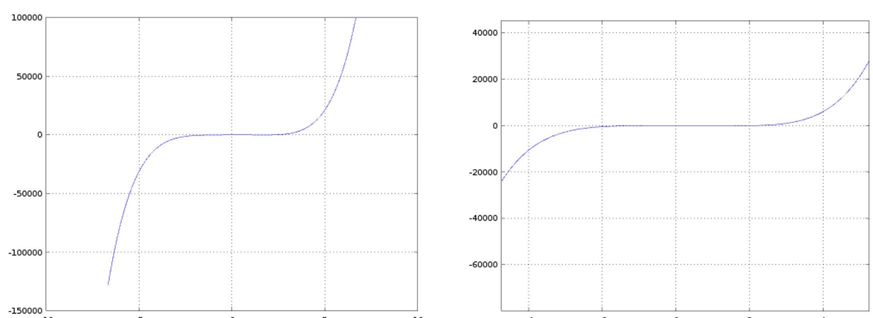
La regla de signes de Descartes diu que, donat un polinomi $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, el nombre d'arrels reals positives de $p(x)$ és igual al nombre de parells (a_k, a_{k-1}) amb $k \in \{1, \ldots, n\}$ tals que a_k i a_{k-1} tinguin signes diferents, o és menor en un nombre parell. Anem a demostrar l'anàleg per a arrels reals negatives: El nombre d'arrels reals negatives d'un polinomi és igual al nombre de parells consecutius de coeficients amb igual signe o bé es menor que aquest en un nombre parell. Veiem-ho:

Com que el nombre d'arrels reals negatives de $p(x)$ és el nombre d'arrels reals positives de $p(-x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = (-1)^n a_n x^n + (-1)^{n-1} a_{n-1} x^{n-1} + \ldots - a_1 x + a_0$, el màxim nombre d'arrels reals negatives de $p(x)$ serà el nombre de parells (b_k, b_{k-1}) tals que b_k i b_{k-1} tenen diferent signe, és a dir, el nombre de parells (a_k, a_{k-1}) tals que a_k i a_{k-1} tenen igual signe, o serà menor en un nombre parell.

Considerem el polinomi $p(x) = x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 8x - 8$. Aquest polinomi té 6 arrels complexes i 6 arrels diferents, per tant totes són simples. Per la regla de signes de Descartes, tenim que $p(x)$ té com a molt 5 arrels positives, i una de negativa. Només té 1 arrel positiva, $x = 1$ (menor en un nombre parell que 5) i una de negativa $x = -1$. Per tant, es verifica la regla de signes de Descartes en aquest polinomi, tant per a arrels reals positives, com per a negatives.

Agafem ara el polinomi $p(x) = 9x^5 - 6x^4 - 17x^3 - 51x^2 + 40x - 7$. Utilitzarem el Teorema de Cauchy. Prenem $\eta = max_{0\leq\ k\leq n-1}\left|\frac{a_k}{a_n}\right| = \frac{51}{9} = \frac{17}{3}$. Per tant, $1 + \eta = \frac{20}{3}$, el cercle $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : \frac{20}{3}\}$ conté totes les arrels, i en particular, l'interval $\left[-\frac{20}{3}, \frac{20}{3}\right]$ en conté totes les reals.

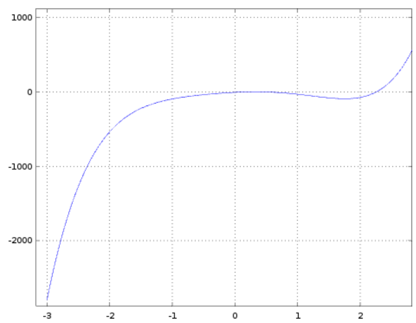
Usarem la funció `P4dibuixa(l,r)`, que dibuixa la gràfica de $p(x)$ en l'interval $[l, r]$. De $P4(-20/3, 20/3)$, veiem que tots els zeros estan a l'interval $(-3, 3)$.



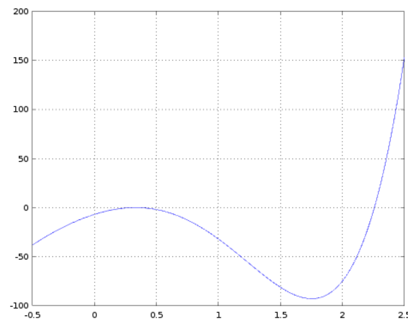
(a) El polinomi avaluat en l'interval $[-20/3, 20/3]$

(b) El polinomi avaluat en l'interval $[-4.5, 4.5]$

De $P4(-3, 3)$ veiem que els zeros estan a $(-0.5, 2.5)$ i de $P4(-0.5, 2.5)$, veiem que la funció té dos arrels diferents, una d'elles múltiple.

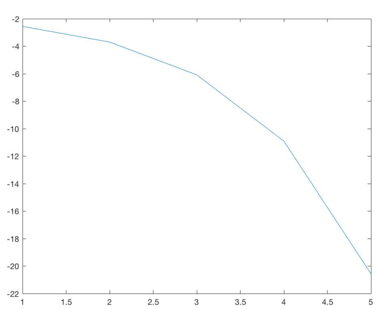


(a) El polinomi avaluat en l'interval $[-3, 3]$

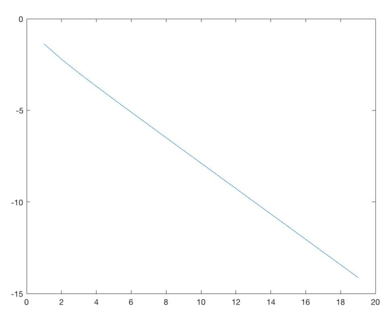


(b) El polinomi avaluat en l'interval $[-0.5, 2.5]$

Aplicarem la funció `P4newton(x0, tol)` per a trobar les arrels mitjançant el mètode de Newton. Ens ajudarem de les funcions `P4avalua(x)` i `P4derivada(x)` que calculen $p(x)$ i $p'(x)$, respectivament. Amb aproximació $x_0 = 2.5$, veiem que $p(x)$ té una arrel a $x = 2.2582588834$. De la mateixa manera, amb $x_0 = 0$, trobem una arrel a $x = 0.3333321719$. Aquesta arrel no té les 10 xifres de precisió que volem ja que l'arrel és múltiple i la precisió de la màquina no es suficient per a aproximar-s'hi bé amb major posició a l'arrel, que és $x = 1/3$.



(a) Converència arrel simple



(b) Convergència arrel multiple

En l'arrel simple el mètode de Newton ha convergit en 5 iteracions. Podem veure clarament a la gràfica de convergència com el logaritme de l'error és duplica a cada iteració i, per tant, hem obtingut convergència quadràtica. En canvi en l'arrel multiple el mètode de Newton ha requerit de moltes més iteracions, en concret, 20. Això és degut a la multiplicitat de l'arrel (doble) que fa que no és pugui garantir una convergència quadràtica, cosa que també s'observa a la gràfica de convergència que on sembla que es tracti d'una convergència més aviat linial.