# Estructures Algebraiques: Tema 1

December 11, 2017

## Contents

# 1 TODO Grup

# 2 TODO Interseccio, unio, producte i generacio

# 3 TODO Ordre d'un element, grup ciclic

# 4 TODO Morfismes de grups

# 5 Classes laterals

## 5.1 Definicio

Sigui G un grup i H in subgrup de G. $a, b \in G$.
Definim $a \sim b(esquerra) \iff a^{-1}b \in H$

## 5.2 Definicio de la classe d'equivalencia

$\bar{a} := \{\ b \in G \mid a \sim b\}$
$aH := \{\ ax \mid x \in H\}$
Observem que aH = $\bar{a}$
A més H i aH tenen el mateix cardinal.

## 5.3 Definicio Classe Lateral:

Anomenem $G/H = \{aH | a \in G\}$ el conjunt de les classes laterals per l'esquerra (conjunt quocient).
Diem també que l'índex de H en G es $[G : H] = |G/H|$ = nombre d' elements de G modul H

### 5.3.1 Observacio:

1. El nombre de classes laterals per l'esquerra es el mateix que el nombre de classes laterals per la dreta.

2. L'índex és multiplicatiu. K $\subset$ H $\subset$ G. Llavors [G:K] = [G:H] * [H:K]

## 5.4 Teorema de Lagrange

Sigui G un grup i H un subgrup, G finit.
Aleshores $|G| = |G/H| * |H| \iff |G/H| = \frac{|G|}{|H|}$, i a més |H| divideix |G|.

#### 5.4.1 TODO Demo

# 6 Subgrup normal, Grup quocient

## 6.1 Definicio: Subgrup Normal

Sigui G un grup, H un subgrup de G. H és subgrup normal de G si aH = Ha $\forall$ a $\in$ G.

## 6.2 Lema

f: $G_1 \to G_2$ morfime de grups. Aleshores,

1. Si $H_1 \lhd G1 \implies f(H_1) \lhd f(G_1)$.
2. Si $H_2 \lhd G2 \implies f^{-1}(H_2) \lhd G_1$.

#### 6.2.1 TODO Demo

## 6.3 Observacio

$H \subseteq K \subseteq G$, H,K subgrups de G. Aleshores.
Si $H \lhd G \implies H \lhd K$. El reciproc es fals.

## 6.4 Observacio

si $H \lhd G$, aleshores (aH)*(bH) = (ab)H

## 6.5 Definicio: Operacio interna

Sigui $H \lhd G$ i sigui G/H = {aH | a $\in$ G} el conjunt de classes laterals per l'esquerra modul H. En G/H definim l'operacio interna:

$$\begin{aligned} G/H \times G/H &\to G/H \\ aH \times bH &\mapsto (ab)H \end{aligned}$$

## 6.6 Corol.lari

$G/H$ es un grup i s'anomena el grup quocient de G per H.

## 6.7 Exercici: La aplicacio quocient es un morfisme

# 7 Primer teorema d'isomorfisme

## 7.1 TODO Teorema:

Sigui $f : G_1 \to G_2$ morfisme de grups, Sigui $H \lhd G_1$, i sigui l'aplicació

$$\begin{aligned} \tilde{f} : G_1/H &\to G_2 \\ aH &\mapsto \tilde{f}(aH) := f(a) \end{aligned}$$

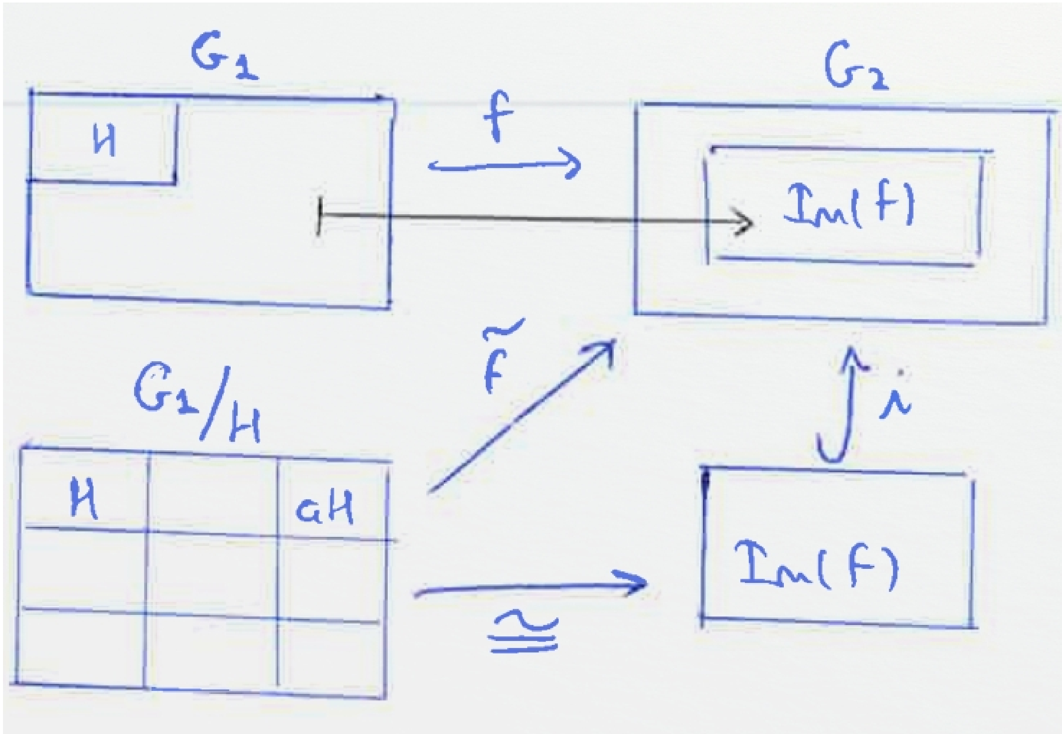


Figure 1: Primer teorema d'isomorfisme

# 8 El grup multiplicatiu d'un cos finit

## 8.1 Definicio

Sigui $\mathbb{K}$ un cos. El grup multiplicatiu de $\mathbb{K}$ és

$$\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{K} \mid x \neq 0\}$$

## 8.2 Teorema

Sigui $\mathbb{K}$ un cos. Sigui G un subgrup finit de $\mathbb{K}^*$. Aleshores G és cíclic

### 8.2.1 TODO demo

# 9 Grup simples

## 9.1 Definicio

Sigui G un grup no trivial. Direm que G es simple si els unics subgrups normals de G son $\{1\}$ i G.

## 9.2 Proposicio

Sigui G un grup no trivial. Son equivalents

1. G es simple i abelia
2. |G| = p, on p es primer
3. $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

### 9.2.1 TODO Demo

## 9.3 Teorema de Feit-Thompspn

Sigui G grup simple, Suposem |G| es senar. Aleshores G es ciclic i $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

## 9.4 Teorema

Sigui n $\geq$ 5, Aleshores $\mathcal{A}_n$ es simple

### 9.4.1 TODO Demo

## 9.5 Proposicio

Sigui G un grup, $H \lhd G$. Aleshores,
G/H es grup simple $\iff$ H es un element maximal en el conjunt {K | $K \lhd G$, $K \neq G$}

### 9.5.1 TODO Demo

# 10 Grup resolubles

## 10.1 Definicio torre normal

Una torre normal de G es $G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \ldots \rhd G_n = \{1\}$ on G es un grup i $G_i \lhd G_{i+1}$.
Anomenem n la *longitud de la torre*
$G_{i-1}/G_i$ s'anomenen els *quocients de la torre*

A mes definim:

- **Torre normal abeliana**: Torre normal amb quocients abelians.
- **Torre normal simple/serie de composicio**: Torre normal amb quocients abelians

## 10.2 Definicio Grup Resoluble

Direm que G es resoluble si te una torre normal abeliana.

## 10.3 Teorema: Segon Teorema d'isomorfisme

Sigui G grup i H,K dos subgrups de G. Suposem $H \lhd G$. Aleshores:

1. $H \cap K \lhd K$
2. $H \cdot K$ es subgrup de G
3. $H \lhd H \cdot K$
4. A mes a mes, ${}^{K}/_{H \cap K} \cong {}^{H \cdot K}/_{H}$

#### 10.3.1 TODO Demo

### 10.4 Teorema: Jordan-Holder

Sigui G un grup i $\left\{\begin{array}{l} G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \ldots \rhd G_n = \{1\} \\ G = H_0 \rhd H_1 \rhd H_2 \rhd \ldots \rhd H_m = \{1\} \end{array}\right\}$ Dues series de composicio de G

Aleshores n = m, i $\exists \sigma \in \mathcal{S}_n$ tal que ${}^{H_i}/_{H_{i+1}} \cong {}^{G_{\sigma(i)}}/_{G_{\sigma(i)+1}}$.

#### 10.4.1 TODO Demo

### 10.5 Proposicio

Sigui G un grup, H un subgrup de G. Aleshores

1. Si G es resoluble $\implies$ H es resoluble
2. Si $H \lhd G$ i G es resoluble $\implies$ ${}^{G}/_{H}$ es resoluble
3. Si $H \lhd G$ i H i ${}^{G}/_{H}$ son resolubles $\implies$ G es resoluble

## 11 Accio d'un grup en un conjunt

### 11.1 Definicio: Accio d'un grup en un conjunt

Sigui G un grup. SIgui X un conjunt. Una accio de G en X es una aplicacio

$$\begin{aligned} \varphi : G \times X \to X \\ (a, x) \mapsto \varphi(a, x) = ax \end{aligned}$$

tal que:

1. $a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x \quad \forall a, b \in G, \forall x \in X$
2. $1 \cdot x = x \quad \forall x \in X$

### 11.2 Observacio

Hi ha una bijeccio entre
$\{\varphi : G \times X \to X \mid \varphi$ accio de G en X$\} \leftrightarrow \{\phi : G \to Perm(X) \mid \phi$ morfisme de grups$\}$

### 11.3 Definicio: Orbita d'un element

L'orbita de $x \in X$ es el subconjunt $G \cdot x = \{ax \mid a \in G\} \subseteq X$

### 11.4 Definicio: L'estabilitzador/grup d'isotropia d'x $\in$ X

Gx := $\{a \in G \mid ax = x\} \subseteq G$, es un subgrup de G.

### 11.5 Lema:

Si x,y estan en la mateixa orbita, els seus estabilitzadors son conjugats.
Concretament, si y = ax $\implies$ $G_y = aG_xa^{-1}$

#### 11.5.1 TODO DEMO

### 11.6 Proposicio

L'aplicacio

$$\begin{aligned} G \cdot x &\to {}^{G}/_{G_x} \\ ax &\mapsto a \cdot G_x \end{aligned}$$

esta ben definida i es bijectiva. En particular,

1. $|G \cdot x| = |{}^{G}/_{G_x}| = [G : G_x]$
2. Si G es finit, $|G \cdot x|$ divideix $|G|$
3. Si X es finit, $|X| = \sum_{i=1}^{n} |G \cdot x_i| = \sum_{i=1}^{n} [G : G_{x_i}]$

#### 11.6.1 TODO DEMO

### 11.7 Definicio: punt fix

$x \in X$ es un punt fix per l'accio si ax = x $\forall a \in G$. En particular
$G \cdot x = \{ax \mid a \in G\} = \{x\}$, $G_x = \{a \in G \mid ax = x\} = G$

### 11.8 Definicio: Accio Transitiva

$G \times X \to X$ es accio transitiva si ∀ x,y ∈ X, ∃ a ∈ G tal que y = ax.
En aquest cas. G · y = X ∀ y ∈ X.

### 11.9 Definicio: Accio Fidel

$G \times X \to X$ es accio fidel si ∀ a ≠ b, a,b ∈ G. Aleshores $\mathrm{m_a} \neq \mathrm{m_b}$, on

$$\begin{aligned} m_a :& X \to X \\ & x \mapsto ax \end{aligned}$$

$\mathrm{m_a} \in$ Perm(x)

#### 11.9.1 Observacio:

Si be $G \times X \to X \cong m : G \to Perm(x)$ es morfisme de grups, si imposem que es fidel, el morfisme es injectiu. A mes si X es finit l'accio es isomorf a un subgrup del grup simetric.

### 11.10 Accio per translacio en X, quan X = G

Sigui G un grup, definim

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ a \quad x &\mapsto a \cdot x = ax \end{aligned}$$

I es efectivament una accio.

## 11.11 Teorema de Cayley

Sigui G un grup finit, n = |G|. Aleshores G es isomorf a un subgrup del grup simetric $\mathcal{S}_n$

#### 11.11.1 TODO Demo

## 11.12 Definicio: Accio per conjugacio de G en X = G

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ a \quad x &\mapsto a \cdot x = axa^{-1} \end{aligned}$$

#### 11.12.1 Proposicio:

$x \in G$ es punt fix $\iff a \cdot x = x \quad \forall a \in G \iff axa^{-1} = x \forall a \in G \iff ax = xa \quad \forall a \in G \iff x \in \mathcal{Z}(G) = \{x \in G \mid ax = xa \quad \forall a \in G\} =$ centre de G. El centre de G es subgrup.

#### 11.12.2 Proposicio:

L'estabilitzador de y ∈ G es $G_y = \{a \in G \mid a \cdot y = y\} = \{a \in G \mid aya^{-1} = y\} = \{a \in G \mid ay = ya\} = \mathcal{Z}_G(y)$, centralitzador de G. El centralitzador tambe es un subgrup de G.

## 11.13 Definicio: Accio per translacio en les classes laterals

Sigui G grup, H subgrup de G i X = ${}^{G}/_{H}$ = { aH | $a \in$ G}

$$\begin{aligned} G \times {}^{G}/_{H} &\to {}^{G}/_{H} \\ a \quad bH &\mapsto abH \end{aligned}$$

- Es una accio transitiva.
- si $aH \in X = {}^{G}/_{H}$: L'estabilitzador de aH es $G_{aH} = \{b \in G \mid b(aH) = aH\} = aHa^{-1}$

## 11.14 Definicio: Accio per conjugacio en els subgrups

Sigui G grup i $X = \{H \mid$ H subgrup de G}.

$$\begin{aligned} G \times \{\text{sg. de yG}\} &\to \{\text{sg. de G}\}, \text{ conjugat de H} \\ a \qquad H &\mapsto aHa^{-1} \end{aligned}$$

Si H es subgrup de G, l'orbita d'H es:
$G \cdot H = \{a \cdot H \mid a \in G\} = \{aHa^{-1} \mid a \in G\}$: els conjugats de H
H es punt fix per l'accio si $a = H \iff aHa^{-1} = H \quad \forall a \in G \iff$ H es subgrup normal de G
L'estabilitzador de H es: $G_H = \{a \in G \mid a \cdot H\} = \{a \in \mid aHa^{-1} = H\} = N_G(H)$: Normalitzador de H en G
Sabem que $|G \cdot H| = [G : G_H]$. Per tant.
$H \lhd G \iff$ H es punt fix per l'accio $\iff$ L'orbita de H te un sol punt $\iff |G \cdot H| = 1 \iff [G : G_H] = 1 \iff G_H = G \iff N_G(H) = G$

### 11.15 Teorema de Cauchy

Sigui G un grup finit, $|G| = n$. Sigui p primer tal que $p|n$.
ALeshores, $\exists$ x $\in$ G tal que ord(x) = p

#### 11.15.1 TODO Demo

## 12 Subgrups de Sylow

### 12.1 Definicio: p-grups: Subgrups de Sylow

Sigui G un grup i p un nombre primer. Aleshores, G es un p-grup $\iff$ $| G | = p^r$ per a algun $r \geq 0$.

### 12.2 Teorema:

Sigui G un p-grup. Aleshores, $|G| = p^r$, $r \geq 0$, i:

1. G no trivial $\iff$ $\mathcal{Z}(G)$ no trivial.
2. G es resoluble
3. si G es simple, aleshores $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

## 13 Teoremas de Sylow