Estructures Algebraiques: Tema 2

Dean

December 14, 2017

Contents

1 Anell

1.1 Definicio Anell

Un **anell** es un conjunt A amb dues operacions internes, la suma $(+)$ i el producte $(\cdot)$, tals que:

1. (A, $+$) es grup abelia
2. (A, $\cdot$) verifica la propietat associativa.
3. Propietat distributiva del producte respecte la suma.

L'anell es commutatiu si $ab = ba \quad \forall a, b \in A$
L'anell es unitari si existeix neutre pel producte.

1.2 Propietats:

1. a $\cdot$ 0 $=$ 0
2. 1 $=$ 0 $\iff$ A $=$ 0
3. (-1) $\cdot$ x $=$ -x
4. Suposem (A,$+$, $\cdot$) anell commutatiu amb unitat aleshores la suma es commutativa. (S'imposa a la definicio per si l'anell no es unitari)

1.3 Definicio A*

$A^* = \{a \in A \mid \exists b \in A \text{ tal que } ab = 1\}$, elements invertibles de A.
Llavors A* es el grup multiplicatiu i es un grup abelia.

1.4 Definicio Cos

Un **cos** es un anell A commutatiu amb unitat tal que A* $=$ A $\setminus$ $\{0\}$.

1.5 Definicio Subanell

Un **Subanell** de A es un subconjunt B $\subseteq$ A tal que amb la suma, el producte i el deutre de A 1_{A}, es un anell.

2 Ideals

2.1 Definicio ideals

Sigui A un anell commutatiu amb unitat. Un **ideal de A** es un subconjunt I de A tal que cumpleix:

1. 0 $\in$ I
2. $\forall x, y \in I, \quad x + y \in I$
3. $\forall x \in I, \forall a \in A, ax \in I$

2.1.1 Observacio

La condicio 1 equival a que I $\neq \varnothing$.

2.1.2 Ideal impropi

Direm que un Ideal I es impropi si$I = \varnothing$.

2.1.3 Ideal principal

Sigui A anell i x $\in$ A. El conjunt de multiples de x = $\{ax \mid a \in A\}$ es un ideal de A. Se l'anomena **ideal principal**

1. Observacio Tot ideal de $\mathcal{Z}$ es principal.

2.1.4 Proposicio

$I = A \iff 1 \in I \iff I \cap A^* \neq \varnothing.$

2.1.5 Proposicio

Sigui A anell commutatiu amb unitat. Aleshores, A es cos $\iff$ {ideals de A} $= \{0, A\}$

2.2 Operacions amb ideals

2.2.1 Interseccio

Sigui A anell, I, J ideals de A. La interseccio de I i J es I $\cap$ J = $\{x \in A \mid x \in I, x \in J\}$
Si I, J son ideals de A $\implies$ I $\cap$ J es ideal de A.

2.2.2 Unio

Sigui A anell, I, J ideals de A. La unio de I i J es I $\cup$ J $= \{x \in A \mid x \in I \text{ o } x \in J\}$
En general l'unio de ideals no es ideal.

2.2.3 Suma

Sigui A anell, I, J ideals de A. La suma de I i J es I + J $= \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$
Si I, J son ideals de A $\implies$ I + J es ideal de A. \ A mes a mes es el menor ideal que conte $I \cup J$.

2.2.4 Generador

Sigui A un anell, $x_1, \ldots, x_r \in$ A. Aleshores <x1,...,x_r> $= \{a_1x_1 + \cdots + a_rx_r \mid a_i \in A\}$ es el menor ideal de A que conte $x_1, \ldots, x_r$