Funcions de variable complexa FME
Curs 2017/18

Jordi Quer

7 de gener de 2018

Índex

1 Nombres complexos

Els nombres reals es poden introduir axiomàticament ($\mathbb{R}$ és l'únic cos ordenat Arquimedià i complet, llevat d'un únic isomorfisme) o es poden construir a partir dels nombres racionals, bé per *talladures de Dedekind*, bé per compleció mètrica com les classes de successions de Cauchy per la relació d'equivalència que identifica dues successions si la seva diferència tendeix a zero.

El cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos també es podria introduir axiomàticament (per exemple, com un cos localment compacte Arquimedià i algebraicament tancat) però el més senzill i pràctic és construir-los a partir dels nombres reals: els *nombres complexos* són el conjunt dels parells ordenats de nombres reals

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

amb les operacions i la mètrica que es definiran a continuació.

1.1 El cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos

Al conjunt $\mathbb{C}$ es defineixen dues operacions, *suma* i *producte*, de la manera següent: donats $z_1 = (x_1, y_1)$ i $z_2 = (x_2, y_2)$, es defineixen

- $z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
- $z_1 z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$.

Amb aquestes operacions $\mathbb{C}$ té estructura de cos: se satisfan les propietats següents:

- la suma és associativa, commutativa, té element neutre, que és el nombre complex $(0, 0)$ i cada $z = (x, y)$ té invers $-z = (-x, -y)$;
- el producte és associatiu, commutatiu, té element neutre, que és el nombre complex $(1, 0)$ i cada $z = (x, y) \neq (0, 0)$ té invers $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$;
- la suma és distributiva respecte del producte: $z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2$.

La notació habitual per als nombres complexos, més còmoda i pràctica que la de parells ordenats, és la següent: es pensen els nombres reals $\mathbb{R}$ a dins dels nombres complexos $\mathbb{C}$ identificant cada nombre real x amb el complex $(x, 0)$; aquesta identificació respecta les operacions entre nombres reals i permet veure $\mathbb{R}$ com a subcos de $\mathbb{C}$; es denota amb la lletra i el complex $(0, 1)$; llavors els nombres complexos s'escriuen de la forma:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi.$$

El complex $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$ es coneix com a *unitat imaginària* i té quadrat $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

És a dir, la unitat imaginària és *una arrel quadrada de* -1 a $\mathbb{C}$.

Sempre que es té una inclusió de cossos $K \subseteq L$ el cos gran L té una estructura natural d'espai vectorial sobre el cos petit K. En el cas $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ el cos $\mathbb{C}$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió 2 i admet com a base els dos elements 1 i i.

Les components x i y de $z = (x, y) = x + iy$ s'anomenen *part real* i *part imaginària*, respectivament, del nombre complex z, i es denoten $x = \mathrm{Re}(z)$ i $y = \mathrm{Im}(z)$. Són les coordenades de z en la base $1, i$ de $\mathbb{C}$ com a $\mathbb{R}$-espai vectorial.

Amb aquesta notació les operacions amb nombres complexos es fan seguint les regles habituals de sumar i multiplicar, i tota l'estona s'opera només amb nombres reals i amb la unitat imaginària i, de la qual només cal saber que té quadrat -1: donats dos nombres complexos $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$,

- la seva suma i resta són:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i,$$

- el seu producte és:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) &= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i, \end{aligned}$$

- i, si $z_2 \neq 0$, el seu quocient és:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (y_1 x_2 - x_1 y_2)i}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + \left(\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) i. \end{aligned}$$

Grup multiplicatiu. En àlgebra s'anomena *grup multiplicatiu* d'un anell A al conjunt dels elements que tenen invers pel producte, i es denota A^*; amb l'operació producte aquest conjunt és un grup, i d'això li ve el nom. En el cas d'un cos K el grup multiplicatiu K^* està format per tots els elements diferents de zero.

Es denotarà $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ el grup multiplicatiu del cos dels nombres complexos.

Notació per a la unitat imaginària. En algunes branques de les ciències aplicades o l'enginyeria, com per exemple l'electromagnetisme o l'enginyeria elèctrica, s'acostuma a fer servir la lletra j per denotar la unitat imaginària en comptes de la i, ja que aquest símbol es reserva per a la intensitat del corrent elèctric.

El pla complex. Tal com s'han definit, els nombres complexos s'identifiquen amb els punts del pla $\mathbb{R}^2$. Els nombres reals $x = x + 0i$ queden identificats amb l'eix d'abscises i els complexos $0 + yi$ amb part real zero, que es coneixen com a *imaginaris purs*, queden identificats amb l'eix d'ordenades.

Conjugació. El nombre complex $x - yi$ s'anomena *conjugat* del complex $z = x + yi$ i es denota $\overline{z}$. L'aplicació $z \mapsto \overline{z} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s'anomena *conjugació complexa* i és un automorfisme de cossos: és bijectiva, envia sumes a sumes, productes a productes i la unitat a la unitat. A més és una involució: en fer-la dues vegades dóna la identitat.

Conjugar una expressió on apareixen sumes, restes, productes i quocients de nombres complexos equival a conjugar cadascun d'aquests nombres. Per exemple, si $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ és un polinomi a coeficients complexos, i es defineix el polinomi conjugat $\overline{P}$ com el que té els coeficients conjugats $\overline{P}(X) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 X + \cdots + \overline{a}_n X^n$ aleshores per a tot nombre complex z es té

$$\overline{P(z)} = \overline{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n} = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 \overline{z} + \cdots + \overline{a}_n \overline{z}^n = \overline{P}(\overline{z}).$$

Geomètricament la conjugació complexa és la simetria respecte la recta real. En particular $z \mapsto \overline{z}$ és $\mathbb{R}$-lineal i és una isometria indirecta (canvia la orientació).

Les parts real i imaginària d'un complex s'escriuen usant la conjugació de la forma

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Això permet escriure expressions en x i y en funció de z i $\overline{z}$.

Els nombres reals es caracteritzen pel fet que la conjugació complexa no els modifica: donat $z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$. Els nombres reals són els punts fixos de la conjugació complexa.

Un fet important ben conegut és que les arrels imaginàries dels polinomis a coeficients reals van per parelles. Sigui $f(X) \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$; si $z \in \mathbb{C}$ és una arrel de f aleshores el conjugat $\overline{z} \in \mathbb{C}$ també és una arrel de f. En el cas que $z \notin \mathbb{R}$ es dedueix que $f(X)$ és divisible, com a polinomi de l'anell $\mathbb{R}[X]$, pel polinomi de segon grau:

$$(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(z) X + z\overline{z} \in \mathbb{R}[X].$$

Problemes

1.1. Calculeu les coordenades cartesianes de les dues arrels quadrades d'un nombre complex $z = x + yi$ en funció de x i y. Més en general, expresseu les coordenades cartesianes de les arrels complexes d'un polinomi de segon grau $X^2 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$ en funció de les coordenades cartesianes dels coeficients a i b.

1.2. Comproveu que, donats $z, w \in \mathbb{C}^*$, es compleix $zw \in \mathbb{R} \Leftrightarrow w = \lambda \overline{z}$ per a un $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.3. Comproveu que, si es pensen dos nombres complexos z, w com dos vectors del pla $\mathbb{R}^2$, el seu producte escalar i el seu determinant satisfan $\overline{z}w = \langle z, w\rangle + i \det(z, w)$.

1.4. *Identitat de Lagrange* Demostreu que per a complexos z_i i w_i se satisfà la igualtat:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i w_i\right|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^2\right) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |z_i\overline{w}_j - z_j\overline{w}_i|^2.$$

1.2 Mòdul i argument

Definició 1.1 (Valor absolut) *El* valor absolut *(o* mòdul*, o* norma*) d'un nombre complex $z = x + iy$ és la seva distància euclidiana a l'origen en el pla complex. Es denota $|z|$ i val:*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}.$$

En particular, per a un nombre real $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, el valor absolut complex $|x|_{\mathbb{C}} = \sqrt{x^2}$ coincideix amb el valor absolut real $|x|_{\mathbb{R}}$, que es defineix com a x o $-x$ segons que $x \geqslant 0$ o bé $x < 0$. Si el nombre complex $z = x + iy$ s'identifica amb el vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$ el valor absolut complex és la norma euclidiana d'aquest vector: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$. Una propietat òbvia però que es farà servir molt sovint és la relació següent entre el valor absolut d'un nombre complex i els de les seves parts real i imaginària:

$$|x|, |y| \leqslant |z| \leqslant |x| + |y| \qquad \text{si} \quad z = x + iy.$$

La circumferència unitat. Es denota $\mathbb{S}^1$ la circumferència unitat: el conjunt dels nombres complexos de mòdul 1:

$$\mathbb{S}^1 = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| = 1\}.$$

La multiplicativitat del valor absolut assegura que aquest conjunt és tancat per la multiplicació de nombres complexos: és un subgrup del grup multiplicatiu $\mathbb{C}^*$.

Els elements de $\mathbb{S}^1$ estan en bijecció amb els *angles*: cada punt $\omega \in \mathbb{S}^1$ correspon a l'angle amb vèrtex en el punt 0 determinat per la semirecta que passa per 1 (la semirecta real positiva) i la que passa per ω, agafades en aquest ordre. El punt ω és de la forma $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ amb α el nombre real que dóna la longitud de l'arc de la circumferència unitat determinat per les dues semirectes, o qualsevol altre nombre que difereixi d'aquest en un múltiple enter de 2π.

Els complexos de $\mathbb{S}^1$ es caracteritzen també per la propietat que l'invers coincideix amb el conjugat:

$$\omega \in \mathbb{S}^1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\omega} = \omega^{-1}.$$

Definició 1.2 (Argument) *L'*argument *d'un nombre complex no nul $z = x + yi \neq 0$ és un nombre real α tal que*

$$(x, y) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha) \qquad \textit{on} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

determinat només llevat de sumar-li múltiples enters de 2π. Es denota $\arg(z)$.

L'argument és doncs l'angle amb vèrtex al punt 0 determinat per la semirecta real positiva i la semirecta que passa per z. Un dels seus valors, el positiu mínim, és la longitud de l'arc de circumferència unitat limitat per aquestes dues semirectes. En general s'entén que $\arg(z)$ és un conjunt de la forma $\{\alpha + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ per a algun nombre real α.

Els angles es mesuren habitualment en radians: la longitud de l'arc de la circumferència corresponent, amb el conveni que els angles positius i negatius corresponen a girar en sentit anti-horari i horari, respectivament. De vegades els angles es mesuren en graus, amb el conveni que 2π radians equivalen a 360 graus.

En treballar amb angles sorgeix de manera natural la necessitat de sumar-los, restar-los o multiplicar-los i dividir-los per un nombre enter. Per això no és convenient fixar un valor numèric concret a l'argument ja que, es faci com es faci, mai es comportarà bé respecte les operacions. Així, l'argument és una *funció multivaluada*, en el sentit que $\arg(z)$ no és un nombre sinó un conjunt de nombres reals la forma $\{\alpha + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Una *determinació de l'argument* a un subconjunt $S \subseteq \mathbb{C}^*$ és una aplicació $\mathrm{Arg}\colon S \to \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Arg}(z) \in \arg(z)$ per a tot $z \in S$. Consisteix a triar, per a cada nombre complex $z \in S$, un dels nombres reals del conjunt $\arg(z) = \{\alpha + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ que representen l'angle corresponent.

S'anomena *valor principal* o *determinació principal* de l'argument la determinació $\mathrm{Arg}\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ que pren valors a l'interval $(-\pi, \pi]$. Noti's que aquesta determinació no és contínua a la semirecta real negativa. Hi ha altres determinacions de l'argument a tot $\mathbb{C}^*$; per exemple, es pot considerar la determinació que pren valors a l'interval $[0, 2\pi)$, que no és contínua a la semirecta real positiva. No hi ha cap determinació que sigui contínua a tot $\mathbb{C}^*$ però sí que n'hi ha a molts subconjunts propis: per exemple als semiplans $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$, etc. o als conjunts $\mathbb{C}^*_{\arg\neq\alpha}$ obtinguts eliminant la semirecta formada pels complexos d'argument α fixat.

L'argument d'un nombre complex es pot calcular a partir de les inverses de les funcions trigonomètriques però s'ha d'anar amb compte perquè els valors d'aquestes funcions no determinen unívocament l'angle: hi ha dos angles que en general són diferents amb el mateix cosinus (els angles α i $-\alpha$), o amb el mateix sinus (els angles α i $\pi - \alpha$), o amb la mateixa tangent (els angles α i $\pi + \alpha$).

Usant la inversa de la funció tangent $\mathrm{Arctan}\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, la inversa del sinus $\mathrm{Arcsin}\colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ o la inversa del cosinus $\mathrm{Arccos}\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$, que donen el valor de l'angle dins dels intervals especificats, el valor principal de l'argument d'un complex no nul $z = x + iy$ ve donat per les fórmules següents:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Arg}(z) &= \begin{cases} \operatorname{Arctan}(\frac{y}{x}), & \text{si} \quad x > 0, \\ \operatorname{Arctan}(\frac{y}{x}) + \pi, & \text{si} \quad x < 0, y \geqslant 0, \\ \operatorname{Arctan}(\frac{y}{x}) - \pi, & \text{si} \quad x < 0, y < 0, \\ \pi/2, & \text{si} \quad x = 0, y > 0, \\ -\pi/2, & \text{si} \quad x = 0, y < 0; \end{cases} \\
\operatorname{Arg}(z) &= \begin{cases} \operatorname{Arcsin} \frac{y}{|z|}, & \text{si} \quad x \geqslant 0, \\ \pi - \operatorname{Arcsin} \frac{y}{|z|}, & \text{si} \quad x < 0,\ y \geqslant 0, \\ -\pi - \operatorname{Arcsin} \frac{y}{|z|}, & \text{si} \quad x < 0,\ y < 0; \end{cases} \\
\operatorname{Arg}(z) &= \begin{cases} \operatorname{Arccos} \frac{x}{|z|}, & \text{si} \quad y \geqslant 0, \\ -\operatorname{Arccos} \frac{x}{|z|}, & \text{si} \quad y < 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{1}
$$

Coordenades cartesianes i polars. Un nombre complex $z = x + yi$ es diu en *forma cartesiana*, i les seves parts real i imaginària x i y són les seves *coordenades cartesianes*.

El mòdul $r = |z|$ i l'argument $\alpha = \arg(z)$ s'anomenen *coordenades polars* del complex $z \neq 0$. En algunes branques de la ciència o l'enginyeria que usen nombres complexos es fa servir la notació $z = r\angle\alpha$ o també $z = r_\alpha$ per donar el nombre complex z que té aquestes coordenades polars. Una expressió d'un nombre complex z donada en funció de les seves coordenades polars es diu *forma polar* de z.

En parlar del mòdul i l'argument ja s'ha vist com calcular les coordenades polars en funció de les coordenades cartesianes. Les coordenades cartesianes en funció de les polars s'obtenen amb trigonometria elemental com:

$$x = r\cos\alpha, \qquad y = r\sin\alpha, \qquad z = x + iy = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Aquesta segona expressió dóna el nombre complex z com el producte $z = r\omega$ d'un real positiu r per un complex ω de mòdul 1, amb

$$r = |z| \in (0, \infty) \subset \mathbb{R}, \qquad \omega = \frac{z}{|z|} = \cos\alpha + i\sin\alpha \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}.$$

Aquesta expressió és única.

Proposició 1.3 *En multiplicar dos nombres complexos els seus mòduls es multipliquen i els seus arguments se sumen:*

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad i \quad \arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w).$$

Corol·lari 1.4 *Per a complexos $z, w \in \mathbb{C}^*$ i tot enter $n \in \mathbb{Z}$ es compleix:*

$$\arg(z^{-1}) = -\arg(z), \qquad \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w), \qquad \arg(z^n) = n\arg z.$$

Proposició 1.5 *Sigui $n \geqslant 1$ un enter positiu. Cada nombre complex no nul té n arrels n-èsimes diferents. Si $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$,*

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{r} \left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n} \right) : k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}.$$

La funció arrel n-èsima $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ és una funció multivaluada al conjunt $\mathbb{C}^*$ dels complexos no nuls. Tota determinació de l'argument $z \mapsto \operatorname{Arg}(z)$ indueix una determinació de l'arrel n-èsima que envia cada complex d'argument $\operatorname{Arg}(z)$ a l'arrel n-èsima seva que té argument $\frac{1}{n}\operatorname{Arg}(z)$.

Forma exponencial. Els complexos de mòdul 1 són els de la forma $\omega = \cos\alpha + i\sin\alpha \in \mathbb{S}^1$ per a algun $\alpha \in \mathbb{R}$. La *notació exponencial* per a aquests complexos consisteix a escriure'ls de la forma $\omega = e^{i\alpha}$, expressió que es coneix com a fórmula d'Euler. Així, tot nombre complex z s'escriu en *forma exponencial* com

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = re^{i\alpha}.$$

En aquesta notació les propietats de la multiplicació de nombres complexos corresponen a les propietats formals habituals de l'exponenciació:

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}, \qquad \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}, \qquad (e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}.$$

En particular aquesta darrera dóna lloc a la *fórmula de De Moivre*:

$$(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n,$$

que, desenvolupant pel binomi de Newton i igualant les parts real i imaginària, permet obtenir expressions per al cosinus i el sinus de $n\alpha$ en funció del cosinus i el sinus de α.

La forma exponencial no és només una notació. Més endavant, quan es defineixi la funció exponencial complexa, es veurà que la fórmula d'Euler és el resultat d'avaluar aquesta funció en un complex imaginari pur $i\alpha$.

Problemes

1.5. *Els complexos dins de* $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Comproveu que l'aplicació $z = z + iy \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right)$ dóna un isomorfisme de $\mathbb{C}$ amb un subanell de l'anell de matrius $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Caracteritzeu la imatge dels nombres reals i la imatge dels nombres complexos de valor absolut 1.

1.6. *El producte com a aplicació lineal.* El cos $\mathbb{C}$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió 2. Per a cada nombre complex $w \in \mathbb{C}$ es defineix l'aplicació $m_w \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ posant $m_w(z) = wz$.

1. Comproveu que m_w és $\mathbb{R}$-lineal i $\mathbb{C}$-lineal.
2. Calculeu la matriu de m_w en la base $1, i$.

3. Caracteritzeu les aplicacions $\mathbb{R}$-lineals de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ que corresponen a alguna de les m_w (aquestes són les que, a més de $\mathbb{R}$-lineals també són $\mathbb{C}$-lineals) en termes de la geometria euclidiana del pla.

1.7. *Arrels de la unitat complexes.* S'anomenen *arrels n-èsimes de la unitat* complexes a les arrels n-èsimes de 1: els nombres complexos ζ tals que $\zeta^n = 1$: les arrels complexes del polinomi $X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$. Una arrel *primitiva* n-èsima de la unitat és una arrel n-èsima de la unitat tal que totes les demés són potència seva.

1. Comproveu que les arrels n-èsimes de la unitat són els complexos de la forma:
$$e^{2\pi ik/n} = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$
2. Quina figura geomètrica formen les arrels n-èsimes de la unitat?
3. Demostreu que $e^{2\pi im/n}$ és primitiva si, i només si, $\gcd(m, n) = 1$.
4. Comproveu que les arrels n-èsimes $w = \sqrt[n]{z}$ d'un complex $z \neq 0$ són els nombres de la forma $\zeta^k w_0$ on w_0 és una arrel n-èsima de z fixada, ζ és una arrel primitiva n-èsima de la unitat fixada, i $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
5. Digueu quantes arrels primitives hi ha per a un n donat i doneu una fórmula per a aquest nombre.

1.8. Calculeu les coordenades cartesianes de totes les arrels primitives n-èsimes de la unitat per als valors de n següents: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 i 16, i doneu, per a cada n, un polinomi a coeficients enters de grau $\varphi(n)$ del qual són arrel.

Les coordenades s'han de donar amb expressions que no usin funcions trigonomètriques, només a partir de nombres reals i de la funció arrel quadrada

1.9. Calculeu les coordenades cartesianes de les arrels cinquenes de la unitat fent servir només nombres reals i arrels quadrades. Descomponeu el polinomi $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ com a producte de dos polinomis de segon grau de $\mathbb{R}[X]$.

1.3 Mètrica i topologia al pla

El valor absolut complex, que s'ha definit posant $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$, té les propietats següents:

Proposició 1.6 (Propietats del valor absolut)

1. $|z| \geqslant 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ *(positiu);*

2. $|zw| = |z||w|$ *(multiplicativitat);*

3. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ *(desigualtat triangular).*

Definició 1.7 (Mètrica) *Als nombres complexos es defineix una* distància *a partir del valor absolut posant:*
$$d(z, w) = |z - w|,$$
la qual dóna a $\mathbb{C}$ *estructura d'*espai mètric*.*

De fet, la distància definida a 1.7 no és res més que la distancia euclidiana ordinaria quan s'identifica $\mathbb{C}$ amb l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$. Per tant totes les seves propietats són les ja vistes als cursos d'àlgebra lineal, de geometria afí i euclidiana i de càlcul en varies variables.

En relació a aquesta mètrica la notació següent es farà servir sovint:

- $\mathcal{D}(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ el *disc obert* o *bola oberta* de centre el punt $z_0 \in \mathbb{C}$ i radi un real $r > 0$;
- $\overline{\mathcal{D}}(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\}$ el *disc tancat*, adherència de l'anterior;
- $C(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ la *circumferència* que és la frontera dels anteriors;
- $\mathcal{D}'(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ el *disc perforat*, sense el centre;
- $\mathcal{D}(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ la *corona circular* de radis $r < R$.

Definició 1.8 (Topologia) *Es considera a $\mathbb{C}$ la topologia corresponent a la seva estructura d'espai mètric; és a dir, els oberts són els subconjunts $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ que contenen una bola oberta de centre cadascun dels seus punts: per a tot $z_0 \in \mathcal{U}$ existeix un $r > 0$ tal que $\mathcal{D}(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subseteq \mathcal{U}$.*

Per tant les propietats topològiques de $\mathbb{C}$ són les que ja s'han estudiat en els cursos de càlcul en varies variables per als espais euclidians $\mathbb{R}^n$. Topològicament, i com a espai mètric, el pla complex $\mathbb{C}$ s'identifica amb $\mathbb{R}^2$.

Topologia al pla. A continuació es recorden alguns conceptes importants de la topologia del pla $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ja vistos en assignatures prèvies de càlcul i a l'assignatura de topologia:

- La reunió arbitrària i la intersecció finita d'oberts és un obert.
- Els tancats són els complementaris dels oberts. La intersecció arbitrària i la reunió finita de tancats és un tancat.
- Un subconjunt $S \subseteq \mathbb{C}$ és *connex* si no existeixen oberts $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ tals que $S \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$, $\mathcal{U} \cap S \neq \varnothing$ i $\mathcal{V} \cap S \neq \varnothing$.
- Un subconjunt $S \subseteq \mathbb{C}$ és *arc-connex* si per a cada parell de punts $z_0, z_1 \in S$ existeix una aplicació contínua $\gamma\colon [0, 1] \to S$ tal que $\gamma(0) = z_0$ i $\gamma(1) = z_1$.
- Les propietats de ser connex i arc-connex són equivalents quan es refereixen a *subconjunts oberts* del pla (perquè això no val per a subconjunts arbitraris?).
- Les *components connexes* d'un conjunt són els seus subconjunts connexos maximals. Tot conjunt és la reunió disjunta de les seves components connexes. Un conjunt no buit és connex quan té només una component connexa.

- Un subconjunt és *simplement connex* si és arc-connex i “no té forats”, en el sentit que dos camins tancats dins del conjunt amb els mateixos extrems es poden deformar contínuament l’un en l’altre mantenint els extrems fixos. La definició precisa es dóna a topologia usant el concepte d’homotopia de camins: un conjunt és simplement connex si, i només si, dos camins qualsevol amb els mateixos extrems són homòtops dins del conjunt.
- Un subconjunt és *convex* si conté el segment que uneix qualsevol parell de punts, i és *estrellat* si existeix un punt tal que el conjunt conté el segment que uneix aquest punt amb qualsevol altre.
- Un subconjunt K és *compacte* si tot recobriment obert té un subrecobriment finit: si $K \subseteq \cup_{i\in I}\mathcal{U}_i$ amb $\mathcal{U}_i$ subconjunts oberts de $\mathbb{C}$ existeix un conjunt finit d’índexs $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ tal que $K \subseteq \mathcal{U}_{i_1} \cup \mathcal{U}_{i_2} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_n}$.
- El teorema de Heine-Borel diu que al pla $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ un conjunt és compacte si, i només si, és tancat i fitat.
- El teorema de Bolzano-Weierstrass assegura que al pla un conjunt és compacte si, i només si, tota successió de punts del conjunt té alguna parcial convergent cap a un punt del mateix conjunt.

Problemes

1.10. Siguin z_1, z_2, z_3 tres nombres complexos diferents. Demostreu que aquests tres nombres són els vèrtex d’un triangle

1. equilàter si, i només si, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$;
2. rectangle isòsceles (tots dos catets tenen la mateixa longitud) amb angle recte al vèrtex z_2 si, i només si, $z_1^2 + 2z_2^2 + z_3^2 = 2z_2(z_1 + z_3)$.

1.11. Demostreu que les rectes i les circumferències al pla complex venen donades per equacions de la forma següent

$$a|z|^2 + \mathrm{Re}(\beta z) + c = 0, \qquad a, c \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{C}^*.$$

- Quina condició sobre els coeficients determina que sigui recta o circumferència?
- Quan dues equacions determinen la mateixa recta o circumferència?

1.4 Successions i sèries

Successions de nombres complexos. Com en qualsevol espai mètric, es poden considerar successions $(z_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres complexos $z_n \in \mathbb{C}$, tal i com ja s’ha fet en els cursos de càlcul en una i varies variables amb successions de nombres reals i d’elements de $\mathbb{R}^n$.

De fet, pràcticament tots els conceptes i propietats de les successions de nombres complexos corresponen a considerar aquestes successions com a successions d’elements de $\mathbb{R}^2$. L’única novetat és que, com que a $\mathbb{C}$ hi ha definit un producte, es poden multiplicar i dividir successions terme a terme, i el comportament d'aquestes successions és el mateix que el de les successions de nombres reals.

A continuació es recorden alguns dels conceptes i resultats principals, adaptats al cas de les successions de nombres complexos.

Definició 1.9 *Aquests conceptes estan definits per a successions de punts d'un espai mètric qualsevol:*

1. $z \in \mathbb{C}$ *és el* límit *de la successió* (z_n) *si per a tot* $\epsilon > 0$ *existeix un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \geqslant N \Rightarrow |z_n - z| < \epsilon$, *i en aquest cas es denota* $z = \lim_{n\to\infty} z_n$;
2. *una successió que tingui límit es diu* convergent;
3. *la successió* (z_n) *és* fitada *si existeix un* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $|z_n| \leqslant M$ *per a tot* n;
4. *la successió* (z_n) *és* de Cauchy *si per a tot* $\epsilon > 0$ *existeix un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $n, m \geqslant N \Rightarrow |z_n - z_m| < \epsilon$.

Proposició 1.10 *Les propietats següents valen en un espai mètric qualsevol:*

1. *tota successió convergent és fitada;*
2. *tota successió convergent és de Cauchy;*
3. *una successió és convergent (resp. de Cauchy) si, i només si, ho són totes les seves parcials (recordi's que una* parcial *d'una successió* $(z_n)_{n\geqslant 0}$ *és una successió de la forma* $\left(z_{\nu(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ *on* $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *és una aplicació estrictament creixent).*

Definició 1.11 *Operacions amb successions: la suma, resta, producte i quocient de les successions* (z_n) *i* (w_n) *són les successions* $(z_n + w_n)$, $(z_n - w_n)$, $(z_n w_n)$ *i* (z_n/w_n), *on per al quocient es requereix que tots els termes de la segona siguin diferents de zero.*

Proposició 1.12 *Si* $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ *i* $\lim_{n\to\infty} w_n = w$,

1. $(z_n + w_n)$ *és convergent i té límit* $z + w$;
2. $(z_n - w_n)$ *és convergent i té límit* $z - w$;
3. $(z_n w_n)$ *és convergent i té límit* zw;
4. *si* $w \neq 0$ *la successió* (z_n/w_n) *està definida llevat potser d'un nombre finit de termes en què* $w_n = 0$, *és convergent i té límit* z/w.

Definició 1.13 *La* part real *i la* part imaginària *d'una successió de nombres complexos* (z_n) *són les successions* (x_n) *i* (y_n) *de nombres reals determinats per* $z_n = x_n + iy_n$.

Proposició 1.14 *Sigui* (z_n) *una successió de nombres complexos i siguin* (x_n) *i* (y_n) *les seves parts real i imaginària.*

1. (z_n) *és convergent si, i només si, ho són* (x_n) *i* (y_n), *i, en aquest cas,*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n;$$

2. (z_n) *és de Cauchy si, i només si, ho són ho són* (x_n) *i* (y_n).

Definició 1.15 *Un espai mètric és* complet *si tota successió de Cauchy és convergent.*

Teorema 1.16 $\mathbb{C}$ *és complet: tota successió de Cauchy de nombres complexos és convergent.*

Sèries de nombres complexos. Com que a $\mathbb{C}$ hi ha una operació suma es poden considerar sèries: sumes infinites de nombres complexos, de la mateixa manera que s'ha fet en els cursos de càlcul d'una i varies variables, on s'han estudiat sèries de nombres reals o d'elements de $\mathbb{R}^n$. Gairebé totes les propietats de les sèries de nombres complexos corresponen a considerar els nombres complexos com a elements del pla euclidià $\mathbb{R}^2$, també en tot allò que requereix el concepte de convergència absoluta, ja que el valor absolut complex és el mateix que la norma euclidiana al pla.

Tal com i s'ha fet per a les successions, a continuació es recorden alguns dels conceptes i resultats principals sobre sèries vistos en altres assignatures, adaptats al cas de les sèries de nombres complexos.

Definició 1.17 *Conceptes bàsics de sèries de nombres complexos:*

1. *una sèrie de nombres complexos és una expressió de la forma* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *amb* $z_n \in \mathbb{C}$*;*
2. *la seva* successió de sumes parcials *és la successió* $(s_n)_{n\geqslant 0}$ *amb* $s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$*;*
3. $\sum z_n$ *es diu* convergent *o* sumable *si la successió* (s_n) *és convergent; en aquest cas el límit* $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ *es diu* suma *de la sèrie i s'escriu* $\sum z_n = s$*;*
4. *una* reordenació *d'una sèrie* $\sum z_n$ *és una sèrie de la forma* $\sum z_{\sigma(n)}$*, on* $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *és una aplicació bijectiva.*

A partir de la definició, i com que $s_n - s_{n-1} = z_n$, s'obté immediatament la condició necessària de sumabilitat que els sumands d'una sèrie sumable han de tendir a zero:

Proposició 1.18 *Si la sèrie* $\sum z_n$ *és sumable aleshores* $lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Definició 1.19 *La* part real *i la* part imaginària *d'una sèrie de nombres complexos* $\sum z_n$ *són les sèries* $\sum x_n$ *i* $\sum y_n$ *de nombres reals determinats per* $z_n = x_n + iy_n$.

Proposició 1.20 *Una sèrie* $\sum z_n$ *de nombres complexos és sumable si, i només si, ho són les seves parts real i imaginària, i, en aquest cas,* $\sum z_n = \sum x_n + i \sum y_n$.

Proposició 1.21 (Suma i producte per escalars) *Si* $\sum z_n = z$ *i* $\sum w_n = w$ *aleshores* $\sum (z_n + w_n)$ *és convergent amb suma* $z + w$ *i, per a tot complex* λ, $\sum (\lambda z_n)$ *és convergent amb suma* λz.

Proposició 1.22 (Convergència absoluta) *Una sèrie* $\sum z_n$ *es diu* absolutament convergent *si la sèrie (de nombres reals)* $\sum |z_n|$ *és convergent. Es compleixen les propietats:*

1. *tota sèrie absolutament convergent és convergent, però el recíproc no sempre és cert;*
2. *si una sèrie és absolutament convergent totes les seves reordenacions són convergents i tenen la mateixa suma.*

Producte de sèries. El producte de nombres complexos permet definir una operació de multiplicació de sèries de nombres complexos de la manera següent:

Definició 1.23 (Producte de Cauchy) *El* producte *de les dues series de nombres complexos* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *i* $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ *és la sèrie* $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ *amb termes* $p_n = \sum_{k=0}^{n} z_k w_{n-k}$.

Aquesta operació, que es pot fer també amb sèries de nombres reals, no forma part de la teoria estàndard de sèries a l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$, ja que en aquest espai no hi ha definit un producte, i juga un paper molt rellevant en variable complexa a l'hora de multiplicar sèries de potències. La propietat més important del producte és que es comporta bé respecte la convergència absoluta:

Proposició 1.24 *Si les dues sèries* $\sum z_n$ *i* $\sum w_n$ *són absolutament convergents la sèrie producte* $\sum p_n$ *també és absolutament convergent i les sumes compleixen:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n\right).$$

Proposició 1.25 *Criteris de convergència absoluta. Siguin* $\sum z_n$ *i* $\sum w_n$ *sèries de nombres complexos.*

1. Criteri de fitació*:* $\sum z_n$ *és absolutament convergent si, i només si, les sumes parcials de valors absoluts* $\sum_{k=0}^{n} |z_k|$ *estan fitades.*
2. Criteri de comparació*: si* $|z_n| \leqslant |w_n|$ *per a* n *prou gran, aleshores si* $\sum w_n$ *és absolutament convergent* $\sum z_n$ *també ho és i si* $\sum z_n$ *és absolutament divergent* $\sum w_n$ *també ho és.*
3. Comparació en el límit*: si el límit* $\lim_{n\to\infty} \frac{|z_n|}{|w_n|}$ *existeix i val* $\ell \in (0, \infty)$ *aleshores una sèrie és convergent si, i només si, ho és l'altra. Si el límit val zero o infinit es poden deduir també implicacions que només valen en un sentit.*
4. Criteri del quocient o de d'Alembert*: si el límit* $\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}$ *existeix i val* $\ell \in [0, \infty]$ *aleshores* $\sum z_n$ *és absolutament convergent si* $\ell < 1$*, és divergent si* $\ell > 1$ *però si* $\ell = 1$ *no es pot concloure res.*
5. Criteri de l'arrel o de Cauchy*: si el límit* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ *existeix i val* $\ell \in [0, \infty]$ *aleshores* $\sum z_n$ *és absolutament convergent si* $\ell < 1$*, és divergent si* $\ell > 1$ *però si* $\ell = 1$ *no es pot concloure res.*
6. *El criteri de l'arrel val exactament igual si en comptes del límit es considera el límit superior; l'avantatge d'això és que* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ *existeix sempre, acceptant també* ∞ *com un dels valors possibles.*

Problemes

1.12. Digueu si són convergents o no les successions següents i, si ho son, calculeu el límit:

1. i^n;
2. $\dfrac{i^{n+1}}{n}$;
3. $\dfrac{3+ni}{n+2ni}$;
4. $\dfrac{n+i^n}{\sqrt{n}}$.

1.13. Digueu si són convergents o no les sèries següents i, si ho són, calculeu la suma:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(1+2i)^n}{5^n}$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty}(1-i)^n$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}i\right)^n$.

1.5 L'esfera de Riemann

Per moltes raons és útil ampliar el conjunt dels nombres complexos afegint un nou element, que es denota ∞. Aquest conjunt ampliat $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es denotarà $\overline{\mathbb{C}}$. En alguns llocs es fa servir la notació $\mathbb{C}^*$, que aquí es reserva per a denotar el *grup multiplicatiu* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

El conjunt ampliat de nombres complexos $\overline{\mathbb{C}}$ té interpretacions i usos diversos en diferents branques de les matemàtiques: en anàlisi el punt ∞ serveix per indicar el límit de certes successions o funcions; en geometria projectiva és el punt de l'infinit que cal afegir a una recta afí per tenir la recta projectiva; en topologia és el punt que cal afegir a un espai topològic per compactificar-lo segons la compactificació d'Alexandroff. En variable complexa, $\overline{\mathbb{C}}$ s'anomena *esfera de Riemann* i s'identifica amb l'esfera unitat 2-dimensional dins de $\mathbb{R}^3$ a través de la projecció estereogràfica

Límit ∞ i aritmètica a $\overline{\mathbb{C}}$. Es considera ∞ com un nombre complex de valor absolut arbitràriament gran però sense imposar condicions sobre l'argument: geomètricament la idea és que ∞ està a distància infinita del zero (i, de fet, de qualsevol nombre complex), però no en una direcció determinada. En considerar límits de successions i de funcions aquest nou element ∞ pot ser límit o (per a funcions) el punt on tendeix la variable:

- $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ si $\forall M > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N \Rightarrow |z_n| > M$;
- $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ si $\forall M > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > M$;
- $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$ si $\forall \epsilon > 0$ $\exists M > 0$ tal que $|z| > M \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon$;
- $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ si $\forall M > 0$ $\exists M' > 0$ tal que $|z| > M' \Rightarrow |f(z)| > M$.

D'aquesta manera els límits es comporten bé respecte de les operacions amb successions i funcions si s'estenen les operacions amb nombres complexos al nou element ∞ posant:

- $\infty^{-1} = 0$ i $0^{-1} = \infty$;
- $z + \infty = \infty$ per a tot $z \in \mathbb{C} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$; i
- $z\infty = \infty$ per a tot $z \in \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

Les úniques operacions a $\overline{\mathbb{C}}$ que queden indefinides són la suma $\infty + \infty$, el producte 0∞, i els quocients $0/0$ i ∞/∞. Corresponen a casos d'*indeterminació*, en què el límit d'una suma, producte o quocient de successions o funcions no es poden deduir sabent els límits de totes dues.

Recta projectiva. En geometria projectiva la recta projectiva $\mathbb{P}^1(K)$ sobre un cos K es construeix afegint un *punt de l'infinit*, com el quocient del conjunt del parells $[x : y]$ amb $x, y \in K$ no tots dos zero per la relació d'equivalència $[x : y] \sim [\lambda x : \lambda y]$ per a tot $\lambda \in K^*$ (elements no nuls del cos). Les classes d'equivalència admeten com a representants canònics tots els parells $[x : 1]$ per a $x \in K$, que s'identifiquen amb els elements de K, i un element més: $[1 : 0]$, que es coneix com el *punt de l'infinit*, i és el nou element ∞ afegit al cos K. El cas $K = \mathbb{C}$ és simplement un cas particular. Observi's que amb la identificació $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ es podria també considerar el pla projectiu $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, que s'obté a partir de l'$\mathbb{R}$-espai vectorial 2-dimensional $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, però això no és el mateix que la recta projectiva complexa: per construir el pla projectiu cal afegir una recta projectiva a l'infinit.

Projecció estereogràfica. Una tercera interpretació del conjunt ampliat $\overline{\mathbb{C}}$, de caire topològic i analític, que és la que convé a la teoria de la variable complexa, consisteix a identificar-lo amb l'*esfera 2-dimensional*

$$\mathbb{S}^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$$

a través de l'aplicació anomenada *projecció estereogràfica*. El punt $N = (0, 0, 1)$ s'anomena *pol nord* de l'esfera. La projecció estereogràfica fa correspondre el pol nord al punt ∞ i els altres punts de l'esfera a nombres complexos de tal manera que, considerant $\mathbb{C}$ com l'hiperplà de $\mathbb{R}^3$ format pels punts amb $x_3 = 0$, cada punt de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ s'envia a l'únic nombre complex en què la recta que passa per N i pel punt talla aquest hiperplà. Concretament

$$\pi \colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad \pi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \dfrac{x_1}{1 - x_3} + i\dfrac{x_2}{1 - x_3}, & \text{si} \quad (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1), \\ \infty, & \text{si} \quad (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1), \end{cases}$$

i la seva aplicació inversa $\pi^{-1} \colon \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{S}^2$ envia els nombres complexos $z = x + iy$ al punt de l'esfera:

$$\pi^{-1}(z) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right)$$

i el punt de l'infinit ∞ al pol nord $N = (0, 0, 1)$.

Aquesta bijecció permet dotar d'una topologia $\overline{\mathbb{C}}$ declarant que els oberts són les imatges a través de la projecció estereogràfica dels oberts de $\mathbb{S}^2$. Això no canvia res a $\mathbb{C}$: els oberts segueixen essent els de sempre. Un subconjunt de $\overline{\mathbb{C}}$ que contingui ∞ és obert si, i només si, en treure aquest punt és un obert de $\mathbb{C}$ i, a més, existeix un $M > 0$ tal que el conjunt conté tots els complexos de valor absolut $|z| > M$: el conjunt ha de contenir l'exterior d'un disc $\mathcal{D}(0; M)$ de radi M suficientment gran.

Problemes

1.14. Caracteritzeu els parells de punts $z, w \in \mathbb{C}$ que la projecció estereogràfica transforma en punts diametralment oposats a $\mathbb{S}^2$.

1.15. Es defineix una distància a l'esfera de Riemann assignant a cada parell de punts de $z, w \in \overline{\mathbb{C}}$ la distància a $\mathbb{R}^3$ dels punts de $\mathbb{S}^2$ corresponents a través de la projecció estereogràfica. Doneu una fórmula per la distància $d(z, w)$.

1.16. Demostreu que la projecció estereogràfica transforma circumferències a l'esfera $\mathbb{S}^2$ (intersecció de l'esfera amb un pla de $\mathbb{R}^3$ no buida ni reduïda a un sol punt) en circumferències o rectes del pla complex. Quines circumferències es transformen en rectes?

2 Funcions de variable complexa

Es volen estudiar funcions $z \mapsto f(z) \colon \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ d'una variable complexa z a valors $f(z)$ nombres complexos. Amb la identificació entre $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^2$ són funcions definides a un subconjunt del pla a valors en el pla: funcions de dues variables reals a valors vectorials. Així, tota la teoria de funcions de varies variables reals a valors vectorials (i escalars) és una eina bàsica per a l'estudi de les funcions de variable complexa.

El domini de definició de les funcions considerades serà sempre un obert $\mathcal{U}$ del pla complex. Les notacions $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, etc. indicaran habitualment oberts complexos. També se sol usar la lletra Ω per denotar els dominis de definició de funcions de variable complexa; aquí també es farà servir de vegades, sobretot quan es tracti d'oberts amb alguna condició addicional: connex, simplement connex, etc. Ocasionalment es consideren funcions sobre conjunts K compactes: un punt, un filferro —la imatge contínua d'un interval real—, un disc tancat, etc. Sempre que es faci això es dóna per sobreentès que la funció amb què es treballa està definida en algun conjunt obert que conté el compacte K.

2.1 Funcions components, límits i continuïtat

Donar una funció $\mathcal{U} \to \mathbb{C}$ equival a donar dues funcions $u, v \colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ a valors reals, posant $f(z) = u(z) + iv(z)$. Les funcions u i v s'anomenen *funcions components* de la funció f. Es posa també $u = \operatorname{Re} f$ i $v = \operatorname{Im} f$, i les funcions s'anomenen també *part real* i *part imaginària* de la funció f. Aquesta situació és anàloga a la del càlcul de varies variables, en què donar una funció vectorial (camp vectorial) $f \colon \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ equival a donar m funcions escalars (camps escalars) $f_i \colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Recordi's que en el càlcul de varies variables una bona part dels conceptes, propietats i resultats per a funcions vectorials es redueixen als seus anàlegs per a les funcions escalars corresponents. Això mateix passa amb les funcions f a valors complexos en relació a les seves funcions components u i v. Que l'estudi de funcions vectorials sigui equivalent al de les funcions escalars components és conseqüència de les desigualtats següents:

$$|x_i| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m|, \qquad \text{per a tot } \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Aquestes desigualtats permeten reduir l'estudi de límits i continuïtat de funcions vectorials al de les seves funcions components. En el cas que es tracta aquí de funcions a valors complexos $f = u + iv$ es té:

$$|u(z)|, |v(z)| \leqslant |f(z)| \leqslant |u(z)| + |v(z)| \qquad \text{per a tot} \quad z \in \mathcal{U}.$$

Posant $z = x + iy$ les funcions components u i v es poden interpretar com a funcions de les dues variables reals x i y i moltes vegades convé pensar-les d'aquesta manera. Així:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Les funcions a valors complexos es poden sumar i multiplicar per escalars, tal i com es fa amb les funcions a valors vectorials del càlcul de varies variables. Gràcies al producte de nombres complexos a més es poden multiplicar entre elles, tal i com es fa amb les funcions a valors reals.

Definició 2.1 (Límit i continuïtat) *Sigui* $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$.

- *Sigui* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tal que* f *està definida en un entorn seu excepte, potser, en el punt mateix. El* límit *de* f *en* z_0 *és el nombre complex* w_0 *si* $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0$ *tal que* $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon$. *En aquest cas es denota* $w_0 = \lim_{z\mapsto z_0} f(z)$.
- *La funció* f *és* contínua *en un punt* $z_0 \in \mathcal{U}$ *si* $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ *i es diu* contínua a tot $\mathcal{U}$ *si ho és en cadascun dels seus punts.*

Tot allò relatiu a límits i continuïtat de funcions de variable complexa és el que ja s'ha vist a càlcul de varies variables en estudiar funcions en el pla euclidià. Es recorden a continuació algunes propietats importants. En general quan es parla d'una funció contínua en un subconjunt de $\mathbb{C}$ no obert (per exemple un compacte) se sobreentén que es tracta de la restricció a aquest subconjunt d'una funció contínua definida a un obert que el conté.

Proposició 2.2 *Els límits i la continuïtat es comporten bé respecte les operacions:*

1. *Si* $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ *i* $\lim_{z\to z_0} g(z) = w_1$, *aleshores*
$$\lim_{z\to z_0}(f \pm g)(z) = w_0 \pm w_1, \quad \lim_{z\to z_0}(fg)(z) = w_0 w_1, \quad \lim_{z\to z_0}(f/g)(z) = w_0/w_1,$$
on, per al quocient, es requereix que $w_1 \neq 0$ *(i això ja garanteix que* f/g *està definida a algun entorn de* z_0*).*
2. *Si* $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ *i* $\lim_{w\to w_0} g(w) = \zeta_0$ *aleshores* $\lim_{z\to z_0}(g\circ f)(z) = \zeta_0$.
3. *La suma, resta i producte de funcions contínues és contínua. El quocient és una funció contínua en els punts en què el denominador no s'anul·la. La composició de funcions contínues és contínua.*

Proposició 2.3 *Algunes propietats de les funcions contínues en relació amb la topologia.*

1. $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ *si, i només si, per a tota successió de punts de* $\mathcal{U} \setminus \{z_0\}$ *que tendeixi cap a* z_0 *la successió de les seves imatges per* f *tendeix cap a* w_0.
2. *Una aplicació* $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ *és contínua a un obert* $\mathcal{U}$ *si, i només si, l'antiimatge de tot obert és un obert.*
3. *La imatge d'un connex per una funció contínua és un connex.*
4. *La imatge d'un compacte per una funció contínua és un compacte.*
5. *Tota funció contínua sobre un compacte a valors reals pren un valor màxim i un valor mínim.*
6. *El mòdul d'una funció contínua sobre un compacte a valors complexos pren un valor màxim i un valor mínim.*

Proposició 2.4 *L'estudi dels límits i la continuïtat de funcions de variable complexa es redueix a les seves funcions components: per a tota funció* $f = u + iv$ *es compleix*
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z\to z_0} u(z) = \operatorname{Re} w_0 \quad i \quad \lim_{z\to z_0} v(z) = \operatorname{Im} w_0.$$
La funció f *és contínua en un punt o un obert si, i només si, ho són les seves funcions components.*

Problemes

2.1. Trobeu les components real i imaginària $u(x, y)$ i $v(x, y)$ de les funcions següents:

1. $f(z) = \overline{z}$;
2. $f(z) = |z|$;
3. $f(z) = 1/z$;
4. $f(z) = z^3$.

2.2. Tota funció de variable complexa es pot posar com a funció de les coordenades polars de la variable. Escrivint la variable com $z = re^{i\alpha} = r\cos\alpha + ir\sin\alpha$ per a $z \neq 0$ es posa $f(z) = \mu(r, \alpha) + i\nu(r, \alpha)$ amb funcions components μ i ν de dues variables reals definides en subconjunts de $(0, \infty) \times \mathbb{R}$. Doneu les funcions μ i ν corresponents a les funcions del problema anterior.

2.3. Siguin $\mu, \nu\colon (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dues funcions. Doneu condicions necessàries i suficients per tal que aquestes funcions siguin les components d'alguna funció de variable complexa: $f(z) = \mu(r, \alpha) + i\nu(r, \alpha)$.

2.4. Donada una funció de variable complexa $z \mapsto f(z)$ i usant la conjugació es poden definir les funcions $z \mapsto f(\overline{z})$, $z \mapsto \overline{f(z)}$ i $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$. Trobeu-les per a les funcions $f(z)$ següents:

1. $f(z) = z^{-1}$;
2. $f(z) = z^2$;
3. $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$;
4. $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k$.

2.5. Expresseu les components x i y del complex $z = x + iy$ en termes de z i $\overline{z}$ i escriviu les funcions següents com a funcions de z i $\overline{z}$:

1. $f(z) = x^2 + y^2$;
2. $f(z) = x^2 - y^2 - 5xyi$;
3. $f(z) = x - 2y + 2 + (6x + y)i$;
4. $f(z) = 3y^2 + 3x^2 i$.

2.6. Digueu si els limits següents existeixen o no i, en cas afirmatiu, calculeu-los:

1. $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{\overline{z}^2}$;
2. $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{1 + z^2}{1 + z^6}$;
3. $\displaystyle\lim_{z\to 2e^{i\frac{\pi}{3}}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16}$;
4. $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{\overline{z}}{z}$;
5. $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\sin x + i\sin y}{\overline{z}}$, amb $z = x + iy$.

2.2 Polinomis i funcions racionals

Les funcions de variable complexa més senzilles són les funcions definides per expressions polinòmiques:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \qquad a_i \in \mathbb{C},$$

on $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}$ és un polinomi a coeficients complexos. Estan definides i són contínues a tot el pla complex $\mathbb{C}$.

Les seves funcions components són polinomis a coeficients reals en dues variables: escrivint els coeficients com $a_k = x_k + iy_k$ amb $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ i la variable com $X = Y + iZ$ el polinomi $P(X)$ s'escriu de la forma

$$P(X) = U(Y, Z) + iV(Y, Z), \qquad U, V \in \mathbb{R}[Y, Z].$$

Les funcions racionals són les funcions definides com un quocient de polinomis:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \qquad P(X), Q(X) \in \mathbb{C}[X], \quad Q(X) \neq 0,$$

on es pot suposar que els polinomis P i Q no tenen factors comuns, el qual és equivalent a dir que no tenen arrels comunes. El seu domini de definició és tot $\mathbb{C}$ llevat del subconjunt finit de punts en els quals el denominador s'anul·la. Són funcions contínues on estan definides i en els punts on no estan definides no tenen límit: el seu mòdul tendeix a infinit. Escrivint els polinomis del numerador i denominador en termes de polinomis a coeficients reals en dues variables i multiplicant pel conjugat del denominador es veu que les funcions components d'una funció complexa racional són funcions racionals reals en dues variables: quocients de polinomis a coeficients reals en dues variables.

Transformacions de Möbius. Un tipus de funcions racionals especialment importants en la teoria de les funcions de variable complexa són les de la forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Aquestes funcions s'anomenen *transformacions de Möbius* o *transformacions lineals fraccionàries*. Es poden veure com a funcions bijectives $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ de l'esfera de Riemann convenint que $f(\infty) = \frac{a}{c}$ $(= \infty$ si $c = 0)$ i que $f(-\frac{d}{c}) = \infty$. Aquesta definició és la natural si es vol que l'aplicació sigui contínua quan s'identifica $\overline{\mathbb{C}}$ amb l'esfera $\mathbb{S}^2$ a través de la projecció estereogràfica. Les transformacions de Möbius formen un grup amb la composició isomorf al grup projectiu lineal $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*$.

Arrels de polinomis complexos. Una de les propietats més importants del cos dels nombres complexos és que tot polinomi no constant té alguna arrel. Aquest fet es coneix com a Teorema Fonamental de l'Àlgebra. Les seves demostracions depenen de propietats no només algebraiques dels nombres complexos sinó també de caire mètric i topològic.

Usant la regla de Ruffini es dedueix que tot polinomi $f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ descompon com un producte de polinomis de grau 1 de la forma:

$$f(X) = a_n(X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_n) \quad \text{amb} \quad \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

Els cossos que tenen aquesta propietat s'anomenen *algebraicament tancats*.

En els estudis de Matemàtiques s'acostuma a veure diverses demostracions del teorema fonamental de l'àlgebra. Més endavant en aquest curs es donarà la que és típica de la variable complexa, on el teorema s'obté com a conseqüència immediata del teorema de Liouville, que diu que tota funció entera fitada és constant. De moment es dóna aquí una demostració que no requereix res més que el fet que una funció contínua a valors reals pren un valor mínim sobre un conjunt compacte.

Teorema 2.5 (Teorema fonamental de l'Àlgebra) $\mathbb{C}$ *és algebraicament tancat.*

Problemes

2.7. Les transformacions de Möbius es poden relacionar amb matrius invertibles posant

$$f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Demostreu que

1. $f_A(z) = z$ per a tot $z \in \overline{\mathbb{C}}$ si, i només si, $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ amb $\lambda \in \mathbb{C}^*$;
2. $f_A \circ f_B = f_{AB}$;
3. $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$;
4. $f_A = f_B \Leftrightarrow B = \lambda A$ amb $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

2.8. Demostreu que donats tres elements diferents $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ i uns altres tres elements diferents $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ existeix una única transformació de Möbius $f \colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ tal que $f(z_i) = w_i$. Aquesta propietat s'enuncia dient que l'acció de les transformacions de Möbius a l'esfera de Riemann és *fortament* 3*-transitiva*.
INDICACIÓ: comenceu pel cas $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = \infty$.

2.9. *Raó doble.* Recordeu que la raó doble de quatre punts $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ (o de la recta projectiva sobre qualsevol cos) es defineix com

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) := \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

Demostreu que les transformacions de Möbius conserven la raó doble.

2.10. Demostreu que tota transformació de Möbius transforma rectes o circumferències en rectes o circumferències, i que donat un parell de rectes o circumferències existeixen infinites transformacions de Möbius diferents que transformen l'una en l'altra.
INDICACIÓ: Useu les equacions $a|z|^2 + \mathrm{Re}(\beta z) + c = 0$ amb $a, c \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}^*$ per a les rectes i circumferències del problema **1.11**.

2.3 Successions i sèries de funcions

Una de les maneres habituals de construir noves funcions és com a límit d'una successió de funcions: donades funcions $f_n\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ definides a un obert $\mathcal{U}$ per a $n \geqslant 0$ es considera la successió $(f_n)_{n\geqslant 0}$. La successió es diu *puntualment convergent* a un punt $z \in \mathcal{U}$ si la successió de nombres complexos $\big(f_n(z)\big)_{n\geqslant 0}$ és convergent. Quan la successió de funcions és puntualment convergent en tot punt $z \in \mathcal{U}$ es defineix el seu límit com la la funció $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ que pren valors $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$.

Com en el cas de les successions i sèries numèriques la sèrie de funcions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ és la successió de les sumes parcials.

En la teoria de les funcions de variable complexa també és útil considerar productes infinits, la versió multiplicativa de les sèries.

El concepte més important en relació a les successions i sèries de funcions és el de

Definició 2.6 (Convergència uniforme) *Siguin $f_n\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ funcions definides a un obert $\mathcal{U}$ per a cada $n \geqslant 0$. La successió de funcions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ es diu* uniformement convergent *cap a una funció f sobre un subconjunt $S \subseteq \mathcal{U}$ si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad \forall z \in S.$$

La sèrie de funcions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ es diu uniformement convergent cap a una funció f sobre S si ho és la successió de les seves sumes parcials.

La successió o sèrie es diu uniformement convergent sobre compactes *a $\mathcal{U}$ si és uniformement convergent sobre tot subconjunt compacte de $\mathcal{U}$.*

De la definició resulta obvi el

Proposició 2.7 (Criteri M de Weierstrass) *Si existeixen nombres reals M_n tals que $\sup\{|f_n(z)| \,:\, z \in S\} \leqslant M_n$ i la sèrie numèrica $\sum M_n$ és sumable, aleshores $\sum f_n$ és uniformement convergent al conjunt S.*

Igual com passa per a les successions i sèries de funcions de variable real estudiades a l'anàlisi funcional, per tal que les bones propietats de continuïtat, derivació i integració de les funcions d'una successió o sèrie es tradueixin en propietats anàlogues de la funció límit o suma s'ha de posar la condició de convergència uniforme sobre compactes.

Teorema 2.8 (Convergència uniforme i continuïtat) *Si (f_n) és una successió de funcions contínues $f_n\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ uniformement convergent sobre compactes de $\mathcal{U}$ cap a una funció f, la funció f també és contínua.*

El resultat anàleg val per a sèries uniformement convergents.

2.4 Sèries de potències

Tal i com ja s'ha vist en l'anàlisi real d'una i varies variables, una de les maneres més importants de construir funcions són les sèries de potències: polinomis de grau infinit que, en substituir la variable per un nombre del domini de definició, es converteixen en sèries numèriques convergents. En variable complexa aquestes funcions juguen un paper encara més important que en anàlisi real: tal i com es veurà més endavant en un dels resultats més importants d'aquesta teoria totes les funcions interessants de variable complexa venen donades localment com a sèries de potències.

Definició 2.9 (Sèrie de potències) *Una* sèrie de potències *centrada en* $z_0 \in \mathbb{C}$ *és una sèrie de nombres complexos de la forma*

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{C},$$

que depèn d'un nombre complex z*. Es diu* convergent *a* $z \in \mathbb{C}$ *si ho és la sèrie numèrica corresponent. Una sèrie de potències defineix una funció* $f(z) := \sum a_n(z - z_0)^n$ *en el conjunt dels nombres complexos* z *on sigui convergent.*

Amb el canvi de variable $w = z - z_0$ l'estudi de les sèries de potències es redueix al de les sèries de potències centrades en el punt zero. Això simplifica la notació sense perdre generalitat, ja que totes les propietats de les sèries $\sum a_n(z - z_0)^n$ i $\sum a_n w^n$ són les mateixes, tenint en compte el canvi de variable. Per tant, sempre que convingui, per comoditat es consideraran només sèries centrades al punt zero.

Definició 2.10 (Radi de convergència) *El* radi de convergència *d'una sèrie de potències* $\sum a_n(z - z_0)^n$ *es defineix com*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty].$$

Teorema 2.11 (Teorema de Cauchy-Hadamard) *La sèrie de potències* $\sum a_n(z-z_0)^n$ *és absolutament convergent per a* $|z - z_0| < R$ *i divergent per a* $|z - z_0| > R$*.*

Per tant, defineix una funció en el disc obert $\mathcal{D} = \mathcal{D}(z_0; R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ *de centre* z_0 *i radi* R*, anomenat el seu* disc de convergència.

Proposició 2.12 (Convergència uniforme sobre compactes) *Tota sèrie de potències és uniformement convergent sobre compactes en el seu disc de convergència.*

Proposició 2.13 (Continuïtat) *La funció definida per una sèrie de potències és contínua en el seu disc de convergència.*

La sèrie geomètrica. La sèrie de potències

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \text{amb} \quad a_n = 1 \text{ per a tot } n \geqslant 0$$

té radi de convergència $R = 1$. Al disc unitat defineix una funció que coincideix amb la funció racional $(1-z)^{-1}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad z \in \mathcal{D}(0;1).$$

La funció racional $(1-z)^{-1}$ està definida a tot el pla complex excepte l'únic punt $z = 1$. Existeixen altres sèries de potències que donen aquesta mateixa funció en altres discs, que mai, però, poden contenir $z = 1$, ja que la funció no és contínua en aquest punt. Si $z_0 \neq 1$ és un nombre complex es té una expressió en sèrie de potències:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z_0-(z-z_0)} &= \frac{1}{1-z_0}\left(\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{1-z_0}}\right) = \frac{1}{1-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \text{amb coeficients} \quad a_n = \frac{1}{(1-z_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Els càlculs fets valen sempre que $\left|\frac{z-z_0}{1-z_0}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-z_0| < |1-z_0|$. Això es confirma calculant el radi de convergència de la sèrie obtinguda, que és $R = \left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} = |1-z_0|$.

La mateixa idea usada per construir aquesta sèrie es pot fer servir per trobar una expressió com a sèrie de potències d'altres funcions racionals (de fet, de totes les funcions racionals) al voltant d'un punt en què no s'anul·li el denominador. Per exemple, la funció $f(z) = 1/(1+z^2)$ ve donada per la sèrie

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}, \quad \text{on} \quad a_n = \begin{cases} (-1)^{n/2}, & \text{n parell}, \\ 0, & \text{n senar}, \end{cases}$$

que té radi de convergència $R = 1$. Aquesta identitat $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, que val per a tot $x \in \mathbb{R}$ amb $|x| < 1$, ja apareix a l'anàlisi real en estudiar sèries de potències i sèries de Taylor. En aquest cas, a diferència de la sèrie geomètrica $1/(1-x)$, la funció $1/(1+x^2)$ està definida a tot $\mathbb{R}$, i el motiu pel qual la sèrie de potències no aconsegueix donar el valor d'aquesta funció per a nombres reals de valor absolut $\geqslant 1$ apareix en estudiar-la com a funció de variable complexa: el denominador s'anul·la en els complexos $z = \pm i$ de mòdul 1. Això és el que impedeix que la sèrie de potències complexa (i de retruc la real) convergeixi més enllà d'aquest punt.

L'exponencial complexa. La funció exponencial complexa es defineix a partir de la mateixa sèrie de potències que dóna l'exponencial real:

$$e^z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \text{amb} \quad a_n = \frac{1}{n!}.$$

Té radi de convergència $R = \infty$ i per tant defineix una funció contínua $z \mapsto e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en tot el pla complex. A partir de la definició i del comportament multiplicatiu del producte de Cauchy de sèries numèriques convergents que s'ha vist a la proposició 1.24 es dedueix immediatament que la funció exponencial envia sumes a productes:

Proposició 2.14 $e^{z+w} = e^z e^w$ *per a tot* $z, w \in \mathbb{C}$.

Proposició 2.15 (Fórmula d'Euler) *Per a tot nombre real* t *es té la igualtat de nombres complexos següent:*

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Combinant la fórmula d'Euler de la proposició 2.15 amb la proposició 2.14 s'obtenen les funcions components de la funció exponencial en termes de la part real i imaginària del paràmetre:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y. \tag{2}$$

És a dir, les funcions components de la funció exponencial són

$$u(x, y) = e^x \cos y, \qquad v(x, y) = e^x \sin y \qquad \text{si} \quad e^{x+iy} = u(x, y) + iv(x, y).$$

Així, en els nombres complexos es descobreix una relació entre les funcions exponencial i trigonomètriques que només considerant funcions de variable real no es veu. En particular, això dóna un sentit matemàtic precís a les fórmules i notacions exponencials per als nombres complexos que moltes vegades s'introdueixen només formalment.

De la multiplicativitat i la identitat d'Euler es dedueixen també les propietats següents de la funció exponencial complexa:

- és periòdica de període $2\pi i$: $e^{z+2\pi i} = e^z$ per a tot $z \in \mathbb{C}$;
- la seva imatge és $\mathbb{C}^*$: e^z pren tots els valors complexos excepte el zero;
- $e^z = e^w \Leftrightarrow w = z + 2\pi i k$ amb $k \in \mathbb{Z}$.

Funcions trigonomètriques. Les funcions trigonomètriques complexes es poden definir, tal com s'ha fet amb l'exponencial, considerant les mateixes sèries de potencies que les defineixen sobre els reals com a sèries sobre els complexos:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Aquestes sèries tenen radi de convergència infinit i per tant defineixen funcions a tot $\mathbb{C}$. Alternativament també es pot considerar l'expressió per a les funcions trigonomètriques reals que s'obté a partir de la fórmula d'Euler $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ i $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$, i agafant aquestes mateixes expressions amb valors complexos a la variable definir:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

El logaritme complex. Es vol que la funció logaritme sigui la inversa de l'exponencial. L'exponencial real és una bijecció $x \mapsto e^x \colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ i això permet definir el logaritme en el domini $(0, \infty)$ com la seva funció inversa. En els complexos la situació és diferent ja que l'exponencial no és injectiva; de fet, tot complex no nul és l'exponencial d'infinits nombres complexos diferents:

$$w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \quad \Leftrightarrow \quad |w| = e^x \text{ i } \arg w = y \quad \Leftrightarrow \quad z = \log|w| + i \arg w.$$

Com que l'argument està definit només llevat de múltiples enters de 2π el logaritme és una *funció multivaluada*: cada valor de l'argument de w dóna un logaritme $\log w$ diferent.

Aquesta situació no és nova: el mateix passa sobre els reals amb la funció $\sqrt{x}$ o les funcions inverses de les funcions trigonomètriques arcsin, arccos i arctan, i sobre els complexos amb qualsevol funció $\sqrt[n]{z}$ que pretengui invertir la funció potència $z \mapsto z^n$, o amb la mateixa funció arg, definida a $\mathbb{C}^*$ amb valors reals.

En aquests casos s'acostuma a triar una imatge d'entre totes les possibles. Per exemple, el conveni habitual és que $\sqrt{x}$ és el valor positiu, arcsin pren valors a $[0, \pi]$, arccos pren valors a $[-\pi, \pi]$, arctan pren valors a $(-\pi, \pi)$, $\sqrt[n]{z}$ pren valors amb argument $0 \leqslant \alpha < 2\pi/n$ o arg pren valors a $(-\pi, \pi]$. El problema principal que sorgeix en fer aquestes tries és que sobre els complexos moltes vegades és impossible fer-les de manera que el resultat sigui una funció contínua.

Definició 2.16 (Determinació del logaritme) *Una* determinació del logaritme *en un subconjunt $S \subseteq \mathbb{C}^*$ és una aplicació* $\mathrm{Log} \colon S \to \mathbb{C}$ *tal que* $\mathrm{Log}(z) \in \log(z)$ *per a tot $z \in S$. Equivalentment, tal que $\mathrm{e}^{\mathrm{Log}(z)} = z$ per a tot $z \in S$.*

Per exemple, posant $\mathrm{Log}(z) = \log|z| + i \,\mathrm{Arg}(z)$ es té l'anomenada *determinació principal* del logaritme a $\mathbb{C}^*$, que correspon a la determinació principal de l'argument. És clar que les determinacions del logaritme corresponen a determinacions de l'argument, i que les determinacions són contínues en un cas si, i només si, ho són en l'altre.

Funció arrel n-èsima. Igual com en intentar invertir l'exponencial s'obté una funció multivaluada, el mateix passa en intentar invertir la funció potència n-èsima: l'equació $w = z^n$ té n solucions diferents $z = \sqrt[n]{w}$.

Anàlogament als casos ja considerats es defineix una *determinació de l'arrel n-èsima* a un subconjunt $S \subseteq \mathbb{C}$ com una aplicació $z \mapsto z^{1/n} \colon S \to \mathbb{C}$ tal que $(z^{1/n})^n = z$ per a tot $z \in S$. Per exemple, l'aplicació $z \mapsto z^{1/n} := \sqrt[n]{|z|} e^{i \,\mathrm{Arg}(z)/n}$, definida a $\mathbb{C}^*$, és la determinació principal de l'arrel, que correspon a la determinació principal de l'argument, i que no és contínua a la semirecta real negativa.

Igualment com en el cas del logaritme, sempre que es tingui una determinació contínua de l'argument la fórmula anterior dóna una determinació contínua de l'arrel n-èsima.

Funció potència fraccionària. Si $n \in \mathbb{Z}$ la funció $z \mapsto z^n$ es defineix de manera natural com el producte de z per ell mateix n vegades si n és positiu, o del seu invers si n és negatiu. En canvi, per a exponents $a \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}$ per definir la funció potència

$z \mapsto z^a$ es necessita el logaritme: aquesta funció "potència fraccionària" és una funció multivaluada que es defineix com $e^{a \log z}$ per a complexos $z \neq 0$; els seus valors són sempre $\neq 0$ i difereixen en la multiplicació per complexos de la forma $e^{2\pi i a k}$ amb $k \in \mathbb{Z}$. Tota determinació contínua del logaritme Log dóna una determinació contínua d'aquesta funció: $z^a = e^{a \operatorname{Log} z}$.

Problemes

2.11. Trobeu el radi de convergència de les sèries de potències amb coeficients:

1. $a_n = (\log n)^2$;
2. $a_n = n!$;
3. $a_n = \dfrac{n^2}{4^n + 3n}$;
4. $a_n = \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$;
5. $a_n = \cos(in)$.

2.12. Determineu el radi de convergència de les sèries següents:

1. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} z^{5n}$;
2. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n^3} z^n$;
3. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} z^{n!}$;
4. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a^{n^2} z^n$ (on $|a| < 1$).

2.13. Si el radi de convergència de $\sum a_n z^n$ és R, quins són els de $\sum a_n z^{2n}$ i $\sum a_n^2 z^n$?

2.14. *Fórmula de la suma per parts.* Siguin (a_n) i (b_n) dues successions de nombres complexos. Sigui $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ la suma parcial n-èsima de la sèrie $\sum a_n$. Demostreu la fórmula de la suma per parts:

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = b_N A_N - b_M A_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (b_{n+1} - b_n) A_n, \qquad N \geqslant M \geqslant 0.$$

2.15. *Teorema d'Abel.* Sigui $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie de nombres complexos convergent, no necessàriament absolutament. Demostreu que

$$\lim_{r \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

INDICACIÓ: Suma per parts amb $b_n = r^n$.

2.16. *Convergència a la frontera.* Demostreu que:

1. $\sum z^n$ no convergeix en cap punt de la circumferència unitat;
2. $\sum \frac{z^n}{n^2}$ convergeix en tot punt de la circumferència unitat;
3. $\sum \frac{z^n}{n}$ convergeix en tot punt la circumferència unitat excepte en $z = 1$.
   INDICACIÓ: Vegeu que les sumes parcials són de Cauchy usant la fórmula de la suma per parts.

2.17. Escriviu les funcions següents com a sèries de potències centrades al zero i doneu el radi de convergència en cada cas:

1. $\dfrac{1}{2z+5}$
2. $\dfrac{1}{1+z^4}$
3. $\dfrac{1+iz}{1-iz}$
4. $\dfrac{1}{z^2+3z+2}$
5. $\dfrac{1}{(i-z)^2}$

2.18. Trobeu els desenvolupaments de les funcions

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \qquad \text{i} \qquad g(z) = \frac{1}{z^2+2z}$$

com a sèries de potències al voltant de -1 i de i i digueu quin radi de convergència tenen.

2.19. Calculeu, per a tot parell de nombres $r, \alpha \in \mathbb{R}$ amb $0 < r < 1$, les sumes

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\alpha), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(n\alpha).$$

2.20. Es consideren les funcions trigonomètriques complexes sinus i cosinus

1. Calculeu $\cos i$ i $\sin(2+i)$;
2. Comproveu que són periòdiques de període 2π;
3. Comproveu que les identitats següents, ben conegudes en el cas real, també valen sobre els complexos:
   (a) paritat: $\cos(-z) = \cos z$; $\sin(-z) = -\sin z$;
   (b) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$;
   (c) addició: $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$; $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \cos z \sin w$.
4. Comproveu que (a diferència del que passa sobre els reals) aquestes funcions no estan fitades.

2.21. Les funcions hiperbòliques complexes es defineixen de la manera següent:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

1. Comproveu que sobre els reals coincideixen amb les hiperbòliques reals.
2. Calculeu $\cosh(\pi i)$ i $\sinh(\frac{\pi}{2} i)$;
3. Trobeu les seves components real i imaginària;
4. Comproveu les relacions: $\cosh z = \cos(iz)$ i $\sinh z = -i \sin(iz)$;
5. Deduïu de les relacions anteriors identitats per a les funcions hiperbòliques a partir de les identitats trigonomètriques habituals.

2.22. *Gràfiques de funcions de variable complexa.* Per entendre millor les propietats de les funcions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és molt útil dibuixar la seva gràfica i, en el segon cas, també les corbes de nivell. Per a funcions de variable complexa no es pot intentar dibuixar una "gràfica" a $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$. Una alternativa és estudiar les seves parts real i imaginària o el mòdul i l'argument de com a funcions $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Una altra manera de copsar el seu comportament és estudiar com es transformen determinats subconjunts de $\mathbb{C}$ en aplicar-los la funció: rectes, circumferències, graelles, etc. Feu això en els casos següents:

1. Per a la funció $f(z) = z^2$ les rectes horitzontals, verticals, els angles amb vèrtex al zero, i els sectors circulars $\{z \in \mathbb{C} : \alpha \leqslant \arg(z) \leqslant \beta\}$.
2. Per a la funció $f(z) = z^{-1}$ definida a $\mathbb{C}^*$ el disc perforat $\mathcal{D}'(0,1)$, la mitja circumferència $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2, 0 \leqslant \arg(z) \leqslant \pi\}$, la recta $\mathrm{Re}(z) = 1$ i les semirectes $\arg(z) = \alpha$ per a un α fixat.
3. Per a la funció exponencial $f(z) = e^z$ les rectes horitzontals i verticals.
4. Per a les funcions trigonomètriques $\sin z$ i $\cos z$ les rectes horitzontals i verticals.
5. Per a la determinació principal del logaritme $\mathrm{Log}(z) = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$, definida a $\mathbb{C}^*$, les circumferències $C(0;r)$ i les semirectes $\arg(z) = \alpha$ per a un α fixat.

Hi ha eines que ajuden a aquesta visualització. Per exemple, WolframAlpha.

2.23. Sigui $\mathrm{Log}\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ el *valor principal* del logaritme complex, definit com $\mathrm{Log}(z) = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$, on Arg és el valor principal de l'argument.

1. Comproveu que $e^{\mathrm{Log}\, z} = z$ per a tot $z \in \mathbb{C}^*$ i que $\mathrm{Log}\, e^z = z$ per a tot z del conjunt $\mathbb{R} \times (-\pi, \pi] \subset \mathbb{C}$; què passa per a z fora d'aquest conjunt?
2. Avalueu el logaritme en $z = i$, $1 + i$ i -2.
3. Escriviu $\mathrm{Log}\, z$ en forma polar i exponencial.
4. Trobeu les imatges per la funció Log dels cercles $\mathcal{D}(0;r)$ i dels radis $\arg z = \theta$.
5. Comproveu que $\mathrm{Log}\, z$ és discontínua en tot l'eix real negatiu i contínua fora d'ell.
6. Segueixen sent vàlides les següents identitats del logaritme real?
   (a) $\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}\, z + \mathrm{Log}\, w$;
   (b) $\mathrm{Log}(z/w) = \mathrm{Log}\, z_1 - \mathrm{Log}\, w$;
   (c) $\mathrm{Log}(z^n) = n \,\mathrm{Log}\, z$.

En cas afirmatiu, demostreu-les. En cas negatiu, doneu-ne contraexemples. Serien certes si posem log (funció multivaluada) en lloc de Log?

2.24. Resoleu les equacions següents:

1. $\log(i - z) = 1$;
2. $e^{i-z} = e$;
3. $e^{e^z} = 1$;
4. $z^3 = 2 + 2i\sqrt{3}$;
5. $\sin z = 2$;
6. $\tan z = 2i$;

2.5 Funcions analítiques

Com ja s'ha vist als exemples de la secció anterior hi ha funcions que es poden expressar com a sèries de potències en discs continguts al seu domini de definició, però cap sèrie de potències les dóna en tot el domini. Per exemple la funció $\frac{1}{1-z}$ és una sèrie de potències en tot disc de $\mathbb{C}$ que no contingui el punt $z = 1$, però cap d'aquests discs és tot el domini $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ on està definida.

Les *funcions analítiques* són funcions que venen donades localment per sèries de potències. El concepte de funció analítica es pot considerar per a funcions de variable real, de variable complexa, o també en altres contextos (nombres p-àdics, etc.). En la teoria de les funcions de variable complexa juguen un paper especial ja que (a diferència de les funcions de variable real) totes les funcions interessants de variable complexa són analítiques. El resultat més important en aquest sentit es donarà al teorema 5.6, on es veurà que les funcions derivables en sentit complex són totes analítiques.

Definició 2.17 (Funció analítica) *Una funció de variable complexa $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ és* analítica *a un obert $\mathcal{U}$ si a un entorn de cada punt $z_0 \in \mathcal{U}$ ve donada per una sèrie de potències amb radi de convergència positiu*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad z \in \mathcal{D}(z_0; R), \quad R > 0.$$

Aquesta condició es pot enunciar dient que f és localment una sèrie de potències.

Naturalment, en aquesta definició el radi R depèn del punt z_0.

Propietats de les funcions analítiques. Les funcions analítiques, en qualsevol context general en què es defineixin, satisfan una colla de propietats naturals que es poden demostrar només a partir de la definició, treballant amb expressions locals per a les funcions com a sèries de potències convergents. Per exemple, satisfan les propietats següents:

- Les funcions analítiques són contínues i de classe $\mathbb{C}^\infty$, i totes les seves derivades també són analítiques.

- Els polinomis i les funcions racionals són funcions analítiques en tot el seu domini de definició.
- Tota sèrie de potències és una funció analítica en el seu disc de convergència.
- La suma i el producte de funcions analítiques és analítica; el quocient de funcions analítiques és analítica on està definit (on el denominador no s'anul·la).
- La composició de funcions analítiques és analítica.
- La inversa d'una funció analítica és analítica.

La continuïtat és immediata ja que les sèries de potències defineixen funcions contínues en el seu disc de convergència. Per a les funcions de variable complexa totes aquestes propietats s'obtindran com a conseqüència del teorema 5.6 a partir del fet que les funcions derivables en sentit complex (holomorfes) les satisfan.

Principi de prolongació analítica. Les funcions analítiques tenen la propietat de quedar unívocament determinades a un obert connex pels seus valors en un conjunt qualsevol que tingui algun punt d'acumulació. Aquesta propietat s'anomena *principi de prolongació analítica*. De vegades es presenta amb l'enunciat equivalent següent: si els zeros d'una funció analítica en un obert connex tenen un punt d'acumulació la funció és constant igual a zero.

Teorema 2.18 (Principi de prolongació analítica) *Siguin f i g funcions analítiques a un obert* connex $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. *Suposi's que $f(z) = g(z)$ per a tot z d'un subconjunt $S \subset \Omega$ que té un punt d'acumulació a Ω. Aleshores totes dues funcions coincideixen en Ω.*

El terme *prolongació analítica* es justifica per la conseqüència següent, que de fet és una manera alternativa d'enunciar la propietat:

Corol·lari 2.19 *Sigui Ω un obert connex. Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ una funció analítica en un obert $\mathcal{U} \subseteq \Omega$. Existeix com a màxim una funció analítica $\widetilde{f}\colon \Omega \to \mathbb{C}$ que coincideixi amb la funció f donada a l'obert $\mathcal{U}$.*

Aquesta funció, si existeix, es diu la prolongació analítica *de f a Ω.*

Per exemple, la sèrie de potències $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ defineix una funció analítica al disc obert $\mathcal{U} = \mathcal{D}(0;1)$, però la sèrie divergeix en tots els punts que no pertanyen al disc. La funció racional $\widetilde{f}(z) = \frac{1}{1-z}$ defineix una funció analítica a l'obert connex $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ que coincideix amb f a $\mathcal{U}$: és la seva prolongació analítica.

Altres exemples menys trivials molt importants de prolongació analítica [1] són els de la funció Γ d'Euler o la funció ζ de Riemann, en què les prolongacions analítiques s'obtenen a partir de tècniques diverses. La funció Γ es defineix amb una expressió integral com $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$, que només convergeix per a complexos del semiplà $\operatorname{Re} z > 0$. Existeix una (única) prolongació analítica d'aquesta funció a tot el pla complex excepte

[1] que desafortunadament no es podran estudiar en aquest curs per falta de temps

els enters $\leqslant 0$. La funció ζ es defineix com la suma de la sèrie $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, que només convergeix per a complexos del semiplà $\operatorname{Re} s > 1$. Existeix una (única) prolongació analítica a tot el pla complex excepte el punt $s = 1$.

Ordre dels zeros. Els zeros de les funcions analítiques tenen un comportament semblant al dels dels polinomis. Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ una funció analítica. Donat un punt $z_0 \in \mathcal{U}$ sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ la sèrie de potències que dóna la funció f en algun entorn d'aquest punt. Si tots els coeficients a_n són zero aleshores la funció és constant igual a zero en aquest entorn. Altrament sigui $m = \min\{n \geqslant 0 : a_n \neq 0\}$ l'índex més petit corresponent a un coeficient no nul. Es pot escriure

$$f(z) = (z-z_0)^m g(z), \qquad \text{amb} \quad g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^m} & \text{si} \quad z \neq z_0, \\ a_m & \text{si} \quad z = z_0, \end{cases}$$

Aquesta funció g també és analítica a $\mathcal{U}$ ja que en els punts $\neq z_0$ és el quocient de dues funcions analítiques amb denominador $\neq 0$ i, en el mateix punt z_0, aquesta funció ve donada per la sèrie de potències següent, que té el mateix radi de convergència que la sèrie que dóna f a un entorn d'aquest punt:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z-z_0)^n.$$

Aquest nombre m s'anomena *ordre de f en el punt z_0* i es denota

$$\operatorname{ord}_{z_0}(f) = m.$$

Si f s'anul·la en algun entorn de z_0 es posa $\operatorname{ord}_{z_0}(f) = \infty$.

Problemes

2.25. Doneu exemples de:

1. Una funció $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable no analítica.
2. Una funció $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ no analítica.

3 Derivació. Funcions holomorfes

La derivada d'una funció de variable complexa es defineix exactament igual que per a funcions de variable real:

Definició 3.1 (Derivació complexa) *La funció $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ és* derivable *(en sentit complex) en un punt $z_0 \in \mathcal{U}$ si existeix el límit*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

En aquest cas el valor del límit és la derivada *de f en aquest punt, i es denota $f'(z_0)$.*

Proposició 3.2 (Propietats de la derivació) *La suma, producte, quocient i composició de funcions derivables és derivable, i les derivades venen donades per les fórmules habituals:*

1. $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$;
2. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z) = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$;
4. $(g \circ f)'(z) = g'\big(f(z)\big)f'(z)$ *(regla de la cadena).*

3.1 Funcions holomorfes

Definició 3.3 (Funció holomorfa) *Una funció de variable complexa és* holomorfa *en un obert $\mathcal{U}$ si és derivable en cadascun dels punts de $\mathcal{U}$. En aquest cas la funció $z \mapsto f'(z)$ que dóna la derivada en cada punt és la seva* funció derivada.

Una funció que sigui holomorfa a tot $\mathbb{C}$ es diu funció entera.

Com en el cas de la continuïtat una funció es diu holomorfa en un subconjunt qualsevol, no necessàriament obert (per exemple un compacte), si és la restricció a aquest subconjunt d'una funció holomorfa en un obert que el contingui. En particular, "derivable" i "holomorfa" en un punt no volen dir exactament el mateix: una funció holomorfa en un punt ha de ser derivable en algun entorn del punt.

Definició 3.4 (Primitiva) *La funció F és una* primitiva *(o* antiderivada*) de la funció f en un obert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ si F és holomorfa i té derivada $F' = f$ a $\mathcal{U}$.*

Exemples. Aplicant la definició es veu immediatament que tota funció constant és derivable amb derivada zero i que la funció identitat té derivada constant igual a 1. Aplicant la proposició 3.2 es dedueix que tot polinomi i tota funció racional són derivables als seus dominis de definició i que les derivades es calculen de la manera habitual:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \quad \Rightarrow \quad P'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1},$$

$$\left(\frac{P}{Q}\right)'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - Q'(z)P(z)}{Q(z)^2}.$$

En canvi, moltes altres funcions prou senzilles no són derivables. Per exemple,

- La conjugació complexa $f(z) = \overline{z}$ no és derivable en cap punt de $\mathbb{C}$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overline{z_0 + h} - \overline{z_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h} \quad \text{no existeix}$$

  ja que fent tendir h a zero sobre l'eix real posant $h = t \in \mathbb{R}$ el límit de $\frac{\overline{h}}{h} = 1$ és 1 i fent-lo tendir sobre l'eix imaginari posant $h = it$ el límit de $\frac{\overline{h}}{h} = -1$ és -1, i per tant per a valors de h arbitràriament petits el quocient $\overline{h}/h$ no s'acosta a cap límit.

- El quadrat del valor absolut $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$ és derivable només a $z_0 = 0$ ja que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(z_0 + h)\overline{(z_0 + h)} - z_0 \overline{z_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\operatorname{Re}(z_0 \overline{h}) + h\overline{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\operatorname{Re}(z_0 \overline{h})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ax + by}{x + iy},$$

  posant $h = x + iy$, $2z_0 = a + ib$. Aquest límit només existeix quan $(a, b) = (0, 0)$. Efectivament, en aquest cas és clar que el límit existeix i val zero. Altrament el límit sobre la recta real i imaginària donen, respectivament, els valors real a i purament imaginari $-ib$, que només coincideixen si $a = b = 0$.

Observi's que en tots dos exemples les funcions tenen les millors propietats possibles com a funcions de dues variables reals: són $\mathscr{C}^\infty$ i, de fet, són polinomis en les variables x i y.

Proposició 3.5 *Tota funció donada per una sèrie de potències* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *en un disc obert* $\mathcal{D}(z_0; R)$ *és holomorfa i la seva derivada ve donada per la sèrie de potències* $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ *en aquest disc.*

Corol·lari 3.6 *Tota funció analítica en un obert* $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ *és holomorfa en aquest obert i la seva derivada també és una funció analítica.*

Derivació de sèries terme a terme. La proposició anterior és un cas particular de derivació terme a terme d'una funció definida com la suma d'una sèrie de funcions; en aquest cas la sèrie de potències és la suma de les funcions $f_n(z) = a_n (z - z_0)^n$ i la proposició assegura que la funció és derivable i que la seva derivada és la suma de les funcions derivades $f_n'(z) = n a_n (z - z_0)^{n-1}$. En anàlisi funcional s'estudia el cas més general de sèries de funcions $f = \sum f_n$; quan totes les f_n són derivables es busquen condicions que garanteixen que f també ho és i que la seva derivada sigui $f' = \sum f_n'$. Sobre els reals la convergència uniforme no és suficient. En canvi, sobre els complexos sí que ho és, tal i com es veurà més endavant.

Terminologia. Holomorfa versus analítica. En molts textos i cursos de variable complexa les funcions derivables en un obert (en sentit complex) s'anomenen analítiques en comptes de fer servir el terme holomorfes. El motiu d'això és que, amb les definicions d'holomorfa i analítica donades aquí (definicions 2.17 i 3.3) tota funció holomorfa en un obert també és analítica en aquest obert: la condició de tenir derivada complexa en tots els punts implica que és localment una sèrie de potències. Aquest resultat es demostrarà més endavant usant l'eina més important de la variable complexa: el Teorema de Cauchy.

Per tant, en variable complexa hi ha una duplicitat de terminologia: holomorfa i analítica són condicions equivalents, tot i que s'han definit de manera diferent (i que l'equivalència no és un fet obvi sinó que requereix una demostració el·laborada).

Aquesta equivalència entre derivabilitat i analicitat és un fet característic de la variable complexa que no es compleix en els reals: sobre oberts de $\mathbb{R}$ la propietat de ser derivable i de ser analítica no són equivalents. Per exemple la funció $f(x) = e^{-1/x^2}$ per a $x \neq 0$ i $f(0) = 0$ és derivable a tot $\mathbb{R}$ (de fet, és $\mathscr{C}^\infty$) però, en canvi, no ve donada com una sèrie de potències en cap entorn del punt $x = 0$.

Problemes

3.1. Comproveu a partir de la definició de derivada que les funcions $z^2, z^3, e^z, \sin z, \cos z, \sinh z$ i $\cosh z$ són funcions enteres i calculeu les seves derivades.

3.2. Demostreu a partir de la definició que les funcions següents no són derivables en cap punt del conjunt $\mathcal{U}$ que s'indica.

1. $f(z) = 4x - i2y, \quad \mathcal{U} = \mathbb{C};$
2. $f(z) = x^2 + y^2 - i2xy, \quad \mathcal{U} = \mathbb{C}^*;$
3. $f(z) = y + ix, \quad \mathcal{U} = \mathbb{C};$
4. $f(z) = \dfrac{x}{|z|^2} + i\dfrac{y}{|z|^2}, \quad \mathcal{U} = \mathbb{C}^*.$

3.3. Estudieu la derivabilitat de la funció $f(z) = 2|z|^2 - \overline{z}^2$ a partir de la definició. On és holomorfa aquesta funció?

3.4. *Examen parcial abril-17.* Demostreu que l'aplicació $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ és un difeomorfisme (funció holomorfa bijectiva amb inversa holomorfa) del disc unitat $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ en el semiplà superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ i digueu quina és la seva funció inversa.

3.5. *Factors de Blaschke.* Per a complexos $z, w \in \mathbb{C}$ tals que $\overline{z}w \neq 1$ es defineix

$$F_w(z) = \frac{w - z}{1 - \overline{w}z}.$$

Comproveu que

1. si $|z| < 1$ i $|w| < 1$ aleshores $|F_w(z)| < 1$;
2. si $|z| = 1$ o $|w| = 1$ aleshores $|F_w(z)| = 1$.

En endavant se suposa que $|w| < 1$. Demostreu que

3. L'aplicació $z \mapsto F_w(z)$ és una funció holomorfa $\mathcal{D}(0;1) \to \mathcal{D}(0;1)$;
4. F_w intercanvia 0 i w; és a dir, $F_w(0) = w$ i $F_w(w) = 0$;
5. $|F_w(z)| = 1$ si $|z| = 1$;
6. F_w és un automorfisme complex del disc unitat: $F_w \colon \mathcal{D}(0;1) \to \mathcal{D}(0;1)$ és bijectiva holomorfa i la seva inversa també és holomorfa.
   Indicació: Calculeu $F_w \circ F_w$.

3.6. La funció de Bessel de primera espècie d'ordre zero $J_0(z)$ és una funció entera que satisfà l'equació diferencial següent:

$$z^2 J_0''(z) + zJ_0'(z) + z^2 J_0(z) = 0, \qquad J_0(0) = 1, \quad J_0'(0) = 0.$$

Demostreu, calculant la seva sèrie de potències, que, efectivament, existeix una funció que satisfà aquesta equació, i que amb les condicions sobre el valor en zero és única.

3.2 Equacions de Cauchy-Riemann

Les funcions de variable complexa són també funcions de dues variables reals, i per tant a l'hora d'estudiar-les es pot fer servir tota la teoria del càlcul diferencial. L'objectiu d'aquesta secció és veure quina relació hi ha entre el fet que la funció sigui derivable en sentit complex i que sigui diferenciable en sentit real.

Es comença recordant definicions i propietats de la derivació de funcions reals. Es considera una funció $f \colon \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ i com sempre es denoten $f = u + iv$ les funcions components i $z = x + iy$ les parts real i imaginària de la variable. Totes tres funcions f, u i v es poden pensar com a funcions de la variable complexa z o de les dues variables reals x i y. Donat un punt $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, corresponent al punt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,

- Les *derivades parcials* de f en el punt z_0 són

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{t}, \tag{3}$$

  i les de la funció component u (anàlogament per a v) en el punt (x_0, y_0) són

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)}{t},$$

  on tota l'estona t denota una variable real. Les derivades parcials de les funcions components són les components de les derivades parcials de la funció:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.$$

- Si la funció té totes les derivades parcials la seva *matriu jacobiana* és la que té per entrades les derivades parcials de les funcions components:

$$Jf(z_0) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

- La funció f es diu *de classe* $\mathscr{C}^1$ en un obert $\mathcal{U}$ si les derivades parcials existeixen i són contínues en tots els punts de l'obert; es diu de classe $\mathscr{C}^k$ si les derivades parcials d'ordre k existeixen i són contínues. El *teorema de Schwarz* (o de Clairaut) assegura que si la funció és de classe $\mathscr{C}^2$ aleshores les derivades parcials respecte les dues variables no depenen de l'ordre:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

  que també es pot enunciar dient que la *matriu Hessiana* és una matriu simètrica.

- La *diferencial* de f al punt z_0 (també se li diu derivada de Fréchet) és una aplicació lineal $Df(z_0)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\lim_{h \to (0,0)} \frac{\|f(z_0 + h) - f(z_0) - \big(Df(z_0)\big)(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

  i la diferencial de la funció component u (anàlogament per a v) és una aplicació lineal $Du(x_0, y_0)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|u\big((x_0, y_0) + h\big) - u(x_0, y_0) - \big(Du(x_0, y_0)\big)(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

  on en tots dos casos h denota una variable a $\mathbb{R}^2$. Les diferencials de les funcions components són les components de la diferencial de la funció.

- Si la funció és diferenciable en un punt z_0 aleshores necessàriament té totes les derivades parcials i la matriu de la diferencial en la base canònica és la matriu jacobiana:

$$\operatorname{Mat}\big(Df(z_0), \{(1,0), (0,1)\}\big) = Jf(z_0).$$

- Només amb l'existència de parcials no es garanteix la diferenciabilitat. Afegint la continuïtat de les derivades parcials sí que es pot assegurar: si la funció és de classe $\mathscr{C}^1$ en un obert aleshores és diferenciable en tots els punts de l'obert.

- Geomètricament les derivades parcials d'una funció escalar tenen la mateixa interpretació que la derivada d'una funció d'una variable: la pendent de la tangent a la gràfica de la funció en el punt; la diferencial d'una funció escalar s'interpreta com l'hiperplà tangent a la gràfica de la funció en el punt: si $f\colon \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és derivable en x_0 la recta tangent a la seva gràfica en el punt (x_0, y_0), amb $y_0 = f(x_0)$, és la recta d'equació $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$; si $f\colon \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és diferenciable en (x_0, y_0) el pla tangent a la seva gràfica en el punt (x_0, y_0, z_0), on $z_0 = f(x_0, y_0)$, és el pla d'equació $z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$.

En endavant, per a una funció de variable complexa es consideraran els tipus de derivada següents: la derivada en sentit complex, que s'anomenarà simplement *derivada*, les *derivades parcials* respecte cadascuna de les dues variables reals, i l'aplicació lineal *diferencial* en el sentit del càlcul de varies variables. En el cas de la derivació complexa no cal una notació especial per indicar el nombre de vegades que la funció és derivable ja que, com es veurà més endavant, tota funció holomorfa és automàticament infinitament derivable en sentit complex. Per tant, la notació $\mathscr{C}^k$ es farà servir només per indicar derivabilitat en sentit real: totes les derivades parcials k-èsimes existeixen i són contínues.

La relació entre la derivabilitat en sentit complex i en sentit real la donen les equacions de Cauchy-Riemann: per tal que una funció sigui derivable en sentit complex cal no només que sigui diferenciable com a funció de dues variables reals sinó que, a més, cal les seves derivades parcials satisfacin unes identitats: les equacions de Cauchy-Riemann. Aquestes equacions equivalen a què l'aplicació lineal diferencial sigui no només $\mathbb{R}$-lineal sinó també $\mathbb{C}$-lineal.

Teorema 3.7 (Equacions de Cauchy-Riemann) *La funció $f = u + iv$ és derivable en el punt $z_0 = x_0 + iy_0$ si, i només si, és diferenciable en el punt (x_0, y_0) i les derivades parcials de u i v satisfan les* equacions de Cauchy-Riemann*:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{5}$$

En aquest cas, la derivada de f en el punt z_0 pren el valor següent:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{6}$$

Exemples. Usant les equacions de Cauchy-Riemann es veu immediatament que moltes funcions que apareixen de manera natural no són derivables. Per exemple:

- Les funcions coordenades $z \mapsto \operatorname{Re} z$ i $z \mapsto \operatorname{Im} z$ que donen la part real i imaginària d'un nombre complex no són derivables en cap punt: la funció $\operatorname{Re}(z)$ té funcions components $u(z) = x$ i $v(z) = 0$ i

  $$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = 1 \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y}(z)$$

  i la funció $\operatorname{Im}(z)$ té funcions components $u(z) = y$ i $v(z) = 0$ i

  $$\frac{\partial u}{\partial y}(z) = 1 \neq 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}(z).$$

- La funció mòdul $z \mapsto |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ no és derivable en cap punt. Les seves funcions components són $u(z) = \sqrt{x^2+y^2}$ i $v(z) = 0$. En els punts $z \neq 0$ existeixen les derivades parcials i:
$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$
que no es compleix mai, i en el punt $z = 0$ no hi ha ni derivades parcials.
- La conjugació complexa no és derivable en cap punt: les funcions components són $u(z) = x$ i $v(z) = -y$ i
$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}(z).$$
- La funció $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ només és derivable en el punt $z = 0$:
$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = 2x = 2y = \frac{\partial v}{\partial y}(z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = 2y = -2x = \frac{\partial v}{\partial x}(z) \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0.$$
- La funció $f(z) = 2|z|^2 - \overline{z}^2 = x^2 + 3y^2 - 2ixy$ només és derivable en el punts de la recta real $z \in \mathbb{R}$:
$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = 2x = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}(z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = 6y = -2y = \frac{\partial v}{\partial x}(z) \quad \Leftrightarrow \quad y = 0.$$

Observi's que les dues darreres funcions, a pesar de ser derivables en alguns punts, no són holomorfes enlloc: no hi ha cap obert no buit en què siguin derivables.

Operadors diferencials a funcions de variable complexa. Per a funcions de variable complexa, a partir dels operadors diferencials (3) es defineixen els *operadors de Wirtlinger* posant
$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$
Aquests operadors diferencials respecte z i $\overline{z}$ estan definits per a funcions f tals que les seves funcions components u i v tinguin totes dues derivades parcials i són no només $\mathbb{R}$-lineals sinó també $\mathbb{C}$-lineals. No tenen una interpretació natural com una derivada parcial com sí que passa amb els operadors (3) i s'han de considerar únicament des del punt de vista formal. Tot i això tenen la seva utilitat ja que permeten expressar moltes propietats de manera intuïtiva i es comporten de manera anàloga als operadors diferencials sobre els reals. Per exemple, les equacions de Cauchy-Riemann es tradueixen en:

Proposició 3.8 *Una funció diferenciable és derivable en el sentit complex si, i només si,*
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0,$$
i en aquest cas la seva derivada és
$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Problemes

3.7. Trobeu constants reals a, b tals que la funció $f(x+iy) = 3x - y + 5 + i(ax + by - 3)$ sigui entera.

3.8. Demostreu que $f(z)$ és derivable a un punt z_0 si, i només si, la funció $\overline{f(\overline{z})}$ és derivable a $\overline{z}_0$. Quina relació hi ha entre les derivades?

3.9. Doneu condicions necessàries i suficients per tal que les funcions $f(z)$ i $\overline{f(z)}$ siguin simultàniament derivables en un punt.

3.10. Doneu condicions necessàries i suficients per tal que les funcions $f = u + iv$ i $g = v + iu$ siguin simultàniament derivables en un punt.

3.11. Digueu en quins punts es derivable la funció següent:

$$f(z) = \begin{cases} |z|^{-2}(1+i)\,\mathrm{Im}(z^2), & \text{si} \quad z \neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad z = 0. \end{cases}$$

3.12. *Examen parcial Abril 17.* Demostreu que la funció

$$f(z) = (e^x + e^{-x})\cos y + i(e^x - e^{-x})\sin y, \qquad \text{on} \quad z = z + iy$$

és holomorfa i calculeu f''.

3.13. Estudieu la derivabilitat de la funció $f(z) = 2|z|^2 + \overline{z}^2$ usant els operadors de Wirtlinger. Compareu amb el problema **3.3**.

3.14. Sigui $f = u + iv$ de classe $\mathscr{C}^1$ en un punt z. Comproveu que per a tot $h \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ es compleix:

$$Du(z)(h) + iDv(z)(h) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)h + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)\overline{h}.$$

3.15. *Funcions no derivables que satisfan C-R.* Comproveu que les funcions següents tenen derivades parcials que satisfan les equacions de Cauchy-Riemann al punt $z = 0$ però no són derivables en aquest punt (la tercera no és ni tan sols contínua):

1. $f(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+iy)}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad x+iy \neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad x+iy = 0; \end{cases}$
2. $f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$;
3. $f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4}, & \text{si} \quad z \neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad z = 0. \end{cases}$

3.16. *Cauchy-Riemann en polars.* Sigui $f(z) = u(r, \alpha) + iv(r, \alpha)$ amb funcions components donades en termes de coordenades polars.

1. Demostreu que, en coordenades polars, les equacions de Cauchy-Riemann prenen la forma següent:
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \alpha} \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \alpha} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$
2. Demostreu que, si la derivada existeix, ve donada per:
$$f'(z) = e^{-i\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}e^{-i\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - i\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right).$$
3. Utilitzeu els apartats anteriors per demostrar que el logaritme complex és holomorfa a la regió $|z| > 0$ i $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$, i calculeu la seva derivada.

3.17. Sigui $u\colon \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funció definida a un obert $\mathcal{U}$.

1. Suposi's que $\frac{\partial u}{\partial x}$ existeix i val zero a tot $\mathcal{U}$. Sigui $\{(x_0(1-t)+x_1 t, y_0) : 0 \leqslant t \leqslant 1\} \subset \mathcal{U}$ un segment horitzontal contingut a $\mathcal{U}$. Demostreu que el valor de la funció als seus dos extrems és el mateix: $u(x_0, y_0) = u(x_1, y_0)$.
2. Suposi's que f és contínua, les seves derivades parcials existeixen i són zero a $\mathcal{U}$, i que $\mathcal{U}$ és connex. Demostreu que f és constant a $\mathcal{U}$.
   Indicació: Demostreu que els punts of f pren un valor donat són un subconjunt de $\mathcal{U}$ que és obert i tancat.

Sigui $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa definida a un obert *connex* Ω. Demostreu que la funció f és constant en cadascuna de les situacions següents:

3. la seva derivada és zero;
4. només pren valors reals;
5. no s'anul·la i el seu argument és constant;
6. el mòdul de $f(z)$ és constant.

3.18. Sigui $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funció diferenciable (en el sentit real) en z_0 tal que el limit
$$\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|$$
existeix. Demostreu que f o bé $\overline{f}$ és holomorfa en z_0.

4 Integració. Teorema de Cauchy i conseqüències

En aquesta secció s'estudia la integració de funcions complexes sobre contorns, que és una teoria semblant a la de l'integral de línia del càlcul diferencial. Només caldrà treballar amb integrals del tipus següent:

Definició 4.1 (Integrals de funcions a valors complexos) *Sigui $\phi\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funció definida en un interval real a valors complexos. Sigui $\phi = \mu + i\nu$ la seva descomposició en part real i imaginària, amb $\mu, \nu\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funcions a valors reals. Es defineix la* integral de ϕ a l'interval $[a,b]$ *com el nombre complex*

$$\int_a^b \phi(t)\,dt := \int_a^b \mu(t)\,dt + i \int_a^b \nu(t)\,dt$$

amb parts real i imaginària les integrals de les funcions components.

Aquí les integrals reals s'entén que són les integrals de Riemann ordinàries. Moltes propietats de les integrals complexes es dedueixen directament de les propietats d'aquesta integral. La condició que la funció ϕ sigui contínua és suficient per garantir l'existència de la integral a la definició 4.1.

Proposició 4.2 *La integral de funcions $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ compleix les condicions següents:*

1. *$\mathbb{C}$-linealitat: $\int_a^b (\phi + \psi)(t)\,dt = \int_a^b \phi(t)\,dt + \int_a^b \psi(t)\,dt$; $\int_a^b (w\phi)(t)\,dt = w \int_a^b \phi(t)\,dt$;*
2. *fitació del mòdul: $\left|\int_a^b \phi(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |\phi(t)|\,dt$;*
3. *canvi de variable: si $\rho\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ és un canvi de paràmetre de classe $\mathscr{C}^1$ i ϕ està definida a l'interval $\rho\big([a,b]\big)$, aleshores $\int_a^b \phi\big(\rho(t)\big)\rho'(t)\,dt = \int_{\rho(a)}^{\rho(b)} \phi(t)\,dt$;*
4. *canvi de signe: $\int_b^a \phi(t)\,dt = -\int_a^b \phi(t)\,dt$.*

4.1 Integral de contorn

El concepte de corba o camí apareix en moltes branques de les matemàtiques, especialment a càlcul diferencial, a càlcul integral i a topologia. A continuació es donen algunes definicions i notacions (la terminologia pot canviar lleugerament segons les fonts). Tota l'estona $\mathcal{U}$ denotarà un obert de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, ja que les corbes que interessen aquí són corbes al pla complex.

- Una *corba* (a topologia se li diu també *camí*) a $\mathcal{U}$ és una aplicació contínua

  $$\gamma\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathcal{U}$$

  d'un interval tancat (compacte) de $\mathbb{R}$ amb imatge dins de $\mathcal{U}$.
- Els seus *extrems* són $\gamma(a)$ (*origen*) i $\gamma(b)$ (*final*).

- Es diu *tancada* si $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- Es diu *simple* si és injectiva, amb l'única possible excepció dels extrems: els únics punts de $[a, b]$ que poden tenir la mateixa imatge són els extrems a i b.
- Una corba *trivial* o *constant* és una aplicació constant: la imatge és un únic punt.
- No s'ha de confondre la corba, que és l'aplicació contínua γ, amb la seva imatge $\gamma^* = \gamma\big([a, b]\big)$, que és un subconjunt (compacte) de $\mathcal{U}$. De vegades el terme corba es fa servir per referir-se a aquesta imatge γ^* i aleshores per distingir-la de l'aplicació γ aquesta s'anomena *corba parametritzada*. Hi ha moltes corbes parametritzades diferents que tenen la mateixa corba imatge.
- Si γ_1 i γ_2 són corbes tals que el final de γ_1 és l'origen de γ_2 es defineix de manera natural la seva *concatenació*, que és una corba amb origen el de γ_1 i final el de γ_2. Una notació habitual per a la concatenació de corbes és $\gamma_1 + \gamma_2$ (observi's però que la concatenació no és commutativa).
- Una corba *llisa* és una corba γ de classe $\mathscr{C}^1$ (com a funció a valors en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{C}$, tant se val). Si a més es compleix que $\gamma'(t) \neq 0$ per a tot $t \in [a, b]$ (als extrems derivades laterals) se li diu *regular*. De vegades en la definició de corba llisa ja s'inclou la condició que la derivada sigui no nul·la. Geomètricament, la condició de regularitat significa que la corba té tangent en tots els punts.
- Una *corba llisa a trossos* és una corba obtinguda per concatenació de (un nombre finit de) corbes llises: és contínua a tot $[a, b]$ i de classe $\mathscr{C}^1$ excepte en un conjunt finit de punts. És una *corba regular a trossos* si s'afegeix la condició de derivada no nul·la; en aquest cas, en el conjunt finit de punts on no es derivable es requereix que les derivades laterals siguin no nul·les.
- Una *reparametrització* (o *canvi de paràmetre*) és una aplicació contínua bijectiva $\rho\colon [c, d] \to [a, b]$, que necessàriament és un homeomorfisme: té inversa que també és contínua. Es diu positiva o negativa segons que ρ sigui creixent o decreixent.
- Dues corbes $\gamma_1\colon [a, b]$ i $\gamma_2\colon [c, d] \to \mathcal{U}$ són *equivalents llevat de reparametrització* si existeix un canvi de paràmetre positiu ρ tal que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \rho$. Es denota $\gamma_1 \equiv \gamma_2$. Això és una relació d'equivalència que respecta la concatenació de corbes. En particular, llevat de reparametrització es pot suposar que tota corba està parametritzada a l'interval $[a, b] = [0, 1]$.
- Es denota $-\gamma$ una corba obtinguda a partir de γ amb una reparametrització negativa. Intuïtivament es tracta d'una corba amb la mateixa imatge però recorreguda en sentit contrari. És clar que $\gamma_1 \equiv \gamma_2 \Leftrightarrow -\gamma_1 \equiv -\gamma_2$.
- Per a corbes llises es demana que els canvis de paràmetre siguin funcions de classe $\mathscr{C}^1$ amb derivada no nul·la (que tenen inversa també de classe $\mathscr{C}^1$ amb derivada no nul·la), de tal manera que en reparametritzar no es perdin les propietats de la corba.
- Dues corbes amb el mateix origen i final contingudes a $\mathcal{U}$ són *homòtopes sobre* $\mathcal{U}$ si l'una es pot deformar en l'altra sense sortir de $\mathcal{U}$ i mantenint els extrems fixats.

Això vol dir que existeix una aplicació contínua $\phi\colon [a,b] \times [0,1] \to \mathcal{U}$ tal que en el segment $[a,b] \times \{0\}$ és una de les corbes, en el segment $[a,b] \times \{1\}$ és l'altra, en el segment $\{a\} \times [0,1]$ és l'origen de totes dues i en el segment $\{b\} \times [0,1]$ és el final de totes dues. El fet de ser homòtopes és una relació d'equivalència que respecta la concatenació de corbes. Una corba tancada a $\mathcal{U}$ és *contràctil* a $\mathcal{U}$ si és homòtopa sobre $\mathcal{U}$ a la corba trivial amb imatge el punt que és el seu origen i final.

- L'obert $\mathcal{U}$ es diu *simplement connex* si tota corba tancada és contràctil a $\mathcal{U}$. De manera equivalent, si dues corbes amb el mateix origen i final sempre són homòtopes.
- La *longitud* d'una corba γ és $\ell(\gamma) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \right\} \in [0,\infty]$, on el suprem s'agafa sobre totes les particions $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ de l'interval $[a,b]$. La corba es diu *rectificable* si té longitud finita. La longitud és additiva respecte la concatenació i és un invariant de la classe de reparametrització (però no de la classe d'homotopia).
- Tota corba de classe $\mathscr{C}^1$ és rectificable, amb longitud $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$.

Per a la integració complexa es treballa gairebé sempre amb corbes que són regulars a trossos. Tot i que la gran majoria de resultats valen per a corbes llises o llises a trossos, el tipus de corbes que apareixeran en endavant són majoritàriament els següents:

Definició 4.3 (Contorn) *Un* contorn *és una corba regular a trossos. Es pot pensar que és una concatenació de corbes regulars o també directament com una corba $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{U}$ que és contínua a tot l'interval i és de classe $\mathscr{C}^1$ amb derivada $\gamma'(t) \neq 0$ excepte a un nombre finit de punts de l'interval en els quals té derivades laterals no nul·les.*

Es consideraran només reparametritzacions que siguin de classe $\mathscr{C}^1$ amb derivada no nul·la, per tal que en canviar de paràmetre un contorn sigui essent un contorn.

Exemples. Alguns exemples importants de contorns que apareixen sovint són:

- El *segment* que uneix z_0 amb z_1, que es pot parametritzar amb paràmetre a l'interval $[0,1]$ posant $\gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$. La tangent és constant $\gamma'(t) = z_1 - z_0$. La seva longitud és $|z_1 - z_0|$. Es denotarà $\gamma_{z_0 \to z_1}$.
- La *poligonal* que uneix els punts $z_0, z_1, \ldots, z_n$, que s'obté concatenant els n segments que uneixen cada parell de punts consecutius. És tancada si $z_0 = z_n$. La seva longitud és la suma $\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|$. Es denotarà $\gamma_{z_0 \to z_1 \to \cdots \to z_n}$. Com a cas particular es poden considerar les *poligonals esgraonades*, en què els segments que uneixen punts consecutius són tots horitzontals o verticals. Un cas especialment important que sortirà sovint més endavant és el dels triangles: poligonals tancades que s'obtenen unint tres punts.
- La circumferència de centre z_0 i radi r recorreguda en sentit positiu (antihorari) amb punt inicial i final el punt $z_0 + r$, que es pot parametritzar a l'interval $[0,2\pi]$ posant $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$. La tangent és $\gamma'(t) = ire^{it} = re^{i(t+\pi/2)}$. La seva longitud

és $\int_\gamma |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} |ire^{it}|\,dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r$. De vegades la notació $C = C(z_0; r)$, que es refereix a la circumferència com a conjunt, es farà servir també per denotar aquesta circumferència parametritzada.

- Es poden considerar també arcs de circumferència agafant l'aplicació γ de l'exemple anterior amb paràmetre variant en altres intervals $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
- Donat un contorn $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ es pot considerar el contorn que té la mateixa imatge però la recorre en sentit contrari, que s'obté amb un canvi de paràmetre negatiu; per exemple amb la reparametrització negativa $t \mapsto a+b-t\colon [a, b] \to [a, b]$ és el contorn $t \mapsto \gamma(a + b - t)$ amb paràmetre $t \in [a, b]$, o amb la reparametrització negativa $t \mapsto -t\colon [-b, -a] \to [a, b]$ és el contorn $t \mapsto \gamma(-t)$ amb paràmetre $t \in [-b, -a]$. Se sol denotar $-\gamma$ o també γ^-.

Com que es vol poder treballar tota l'estona amb corbes que són contorns és útil disposar del resultat següent:

Lema 4.4 *Dos punts qualsevol d'un obert arc-connex es poden unir amb un contorn contingut a l'obert. De fet, es poden unir per una poligonal o fins i tot per una poligonal esglaonada.*

Definició 4.5 (Integral de contorn) *Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ definida a un obert $\mathcal{U}$ i sigui $\gamma\colon [a, b] \to \mathcal{U}$ un contorn. La* integral de contorn *de f sobre γ es defineix com:*

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt. \tag{7}$$

La integral de contorn existeix sempre que existeixi la integral de la funció $[a, b] \to \mathbb{C}$ definida per $\phi(t) = f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)$; per exemple, n'hi ha prou que la funció f sigui contínua, però això no és necessari: si es canvia el valor de la funció f en un conjunt finit de punts la integral segueix existint i pren el mateix valor.

Observi's que a la definició anterior la derivada $\gamma'(t)$ pot no estar definida en un nombre finit de punts de l'interval $[a, b]$; això no afecta el valor de la integral. Alternativament, es podria definir amb la fórmula (7) només la integral d'una corba regular i després definir la integral sobre un contorn com la suma de les integrals de les corbes regulars de les quals és concatenació. Totes dues definicions són equivalents.

Segons la definició 4.1 la integral de contorn (7) s'obté integrant les funcions components de $\phi(t) = f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)$. Si $f = u + iv$ i $\gamma = x + iy$ són les funcions components, les funcions components de ϕ es calculen a partir d'elles. Posant $\phi(t) = \mu(t) + i\nu(t)$, són:

$$\mu(t) = u\big(x(t), y(t)\big)x'(t) - v\big(x(t), y(t)\big)y'(t),$$
$$\nu(t) = u\big(x(t), y(t)\big)y'(t) + v\big(x(t), y(t)\big)x'(t),$$

i s'obté l'expressió següent per a la integral de contorn en termes d'integrals reals:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \mu(t)\,dt + i\int_a^b \nu(t)\,dt.$$

Exemple. L'exemple més important d'integral de contorn complexa és el següent: donat un punt $z_0 \in \mathbb{C}$ la funció $\frac{1}{z-z_0}$ és contínua (i holomorfa) a tot $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Per a tota circumferència $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ parametritzada a l'interval $t \in [0, 2\pi]$, tenint en compte que $\gamma'(t) = ire^{it}$, la integral dóna

$$\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i \tag{8}$$

independentment de quin sigui el radi r de la circumferència.

Proposició 4.6 *Propietats de la integral de contorn:*

1. *És invariant per canvis de paràmetre positius: si $\gamma_1 \equiv \gamma_2$,*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

2. *Canvia de signe en fer un canvi de paràmetre negatiu:*

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

3. *Fitació: si $|f(z)| \leqslant M$ per a tot $z \in \mathrm{Im}(\gamma)$, aleshores*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leqslant M\ell(\gamma).$$

Teorema 4.7 (Convergència uniforme i integració) *Sigui $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un contorn amb imatge $\gamma^* = \gamma\big([a,b]\big)$. Si (f_n) és una successió de funcions contínues uniformement convergent sobre el compacte γ^* cap a una funció f aleshores*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz.$$

Es compleix el resultat anàleg per a sèries $f = \sum f_n$ uniformement convergents sobre γ^*:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz.$$

Notacions i convenis. Per simplificar les notacions de vegades es denota

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz := \int_{\gamma_{z_1\to z_2}} f(z)\,dz$$

la integral sobre el segment que uneix z_1 amb z_2;

$$\int_\gamma f := \int_\gamma f(z)\,dz$$

quan està clara la variable d'integració;

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz := \int_{C(z_0;r)} f(z)\,dz$$

la integral sobre la circumferència de radi r i centre z_0 recorreguda en sentit positiu segons la parametrització habitual;

$$\left[\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \cdots + \int_{\gamma_n}\right] f$$

la suma de les integrals sobre cada contorn γ_i; si γ és la concatenació dels contorns γ_i això coincideix amb $\int_\gamma f$.

També és convenient de vegades considerar sumes formals de contorns $\Gamma = \sum n_i \gamma_i$ que no necessàriament es poden concatenar (els finals i orígens no tenen perquè coincidir). Aquestes sumes formals s'anomenen *cadenes* a $\mathbb{C}$ (o a $\mathcal{U}$ si totes les imatges dels γ_i estan contingudes a $\mathcal{U}$) i, apart de ser una eina bàsica de la topologia algebraica, permeten simplificar expressions on apareixen sumatoris d'integrals sobre diversos contorns posant

$$\int_\Gamma f := \sum n_i \int_{\gamma_i} f.$$

Problemes

4.1. Calculeu les integrals de contorn següents:

1. $\int_\gamma (z+3)\,dz, \quad \gamma(t) = 2t + i(4t-1),\ 1 \leqslant t \leqslant 3;$
2. $\int_\gamma (2\overline{z} - z)\,dz, \quad \gamma(t) = -t + i(t^2+2),\ 0 \leqslant t \leqslant 2;$
3. $\int_C \mathrm{Re}(z)\,dz;$ sobre la circumferència unitat $C(0;1)$;
4. $\int_\gamma (x^2 + iy^3)\,dz,$ sobre el segment que uneix 1 amb i;
5. $\int_\gamma e^z\,dz,$ sobre la poligonal que uneix els punts 0, 2 i $1+\pi i$;
6. $\int_\gamma f(z)\,dz$ amb $f(z) = |z|^2$, z^2 i $\overline{z}^2$, sobre la poligonal tancada que és la frontera del quadrat amb vèrtexs 0, 1, $1+i$ i i;
7. $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{\overline{z}^2},$ sobre l'arc de circumferència que uneix i amb 1 pel semiplà superior.

4.2. Digueu quines de les propietats següents són certes:

1. $\mathrm{Re}\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \mathrm{Re}\, f(z)\,dz.$
2. $\overline{\int_\gamma f(z)\,dz} = \int_\gamma \overline{f}(z)\,dz \quad \text{o} \quad = \int_\gamma \overline{f}(\overline{z})\,dz.$
3. $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leqslant \int_\gamma |f(z)|\,dz.$

4.3. Sigui γ l'arc de la circumferència unitat que uneix 1 amb -1 pel semiplà superior.

1. Comproveu que $\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz\right| \leqslant \pi e$.
2. Trobeu una constant M tal que $\left|\int_\gamma \frac{dz}{2+z^2}\,dz\right| \leqslant M$.

4.2 Teorema fonamental del càlcul

El teorema fonamental del càlcul relaciona derivació amb integració i n'hi ha versions per a diferents classes de funcions i integrals.

En càlcul d'una variable real aquest teorema diu que:

- per a tota funció $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua* la funció $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ és una primitiva seva: és contínua a $[a,b]$ i $F'(x) = f(x)$ a (a,b);
- si la funció contínua F és una primitiva de la funció integrable $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gairebé a tot punt: $F'(x) = f(x)$ per a tot $x \in (a,b)$ llevat d'un nombre finit, aleshores $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Les dues afirmacions se solen conèixer com a primer i segon teorema fonamental del càlcul, respectivament. Diversos resultats del càlcul integral es poden considerar generalitzacions seves: teorema del gradient, teorema de Green, teorema de Stokes, etc.

En aquesta secció es veurà el teorema fonamental del càlcul per a variable complexa. La segona part, que calcula integrals avaluant una primitiva en els extrems, es dedueix del seu anàleg real:

Teorema 4.8 (Segon teorema fonamental del càlcul) *Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ una funció contínua que admet una primitiva F a un obert $\mathcal{U}$. Per a tot contorn $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{U}$ es té:*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

Corol·lari 4.9 *Si la funció contínua $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ admet una primitiva a $\mathcal{U}$ la integral sobre tot contorn tancat val zero.*

De manera equivalent: la integral sobre un contorn qualsevol només depèn dels seus punts inicial i final, i no del contorn concret que uneix l'un amb l'altre.

Corol·lari 4.10 *Una funció holomorfa en un obert connex amb derivada zero és constant.*

Teorema 4.11 (Primer teorema fonamental del càlcul) *Tota funció contínua a un obert $\mathcal{U}$ tal que la integral sobre tot contorn tancat és zero té una primitiva a $\mathcal{U}$.*

Si $\mathcal{U}$ és un disc n'hi ha prou que la integral sobre tot triangle sigui zero.

La primera part d'aquest teorema, que dóna una primitiva de la funció, es demostra essencialment igual que el resultat corresponent de variable real. Aquí, però, per a l'existència de primitiva no n'hi ha prou amb la continuïtat de la funció com passa en els reals, sinó que la funció ha de complir una hipòtesi addicional molt forta: que la integral sobre tot contorn tancat sigui zero. El teorema de Cauchy, que es veurà a la propera secció, dóna condicions per tal que aquesta condició es compleixi.

Relació amb el teorema del gradient. Els dos teoremes fonamentals d'aquesta secció són totalment anàlegs al teorema del gradient en la teoria de la integral de línia, que assegura que la integral de línia d'un camp vectorial que és el gradient d'un camp escalar és la diferència entre els valors en els extrems de la corba, i el seu invers, que diu que tot camp vectorial conservatiu (la integral de línia de tota corba tancada és zero) és el gradient d'algun camp escalar. Les demostracions són anàlogues en totes dos casos.

Problemes

4.4. Per a nombres reals a i b amb $a > 0$ calculeu les integrals

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,dx \qquad \text{i} \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)\,dx$$

integrant la funció $t \mapsto e^{-t(a+ib)}$ al llarg del segments $[0, R]$.

4.5. Calculeu les integrals $\int_{C(z_0;r)}(z-z_0)^n\,dz$ per a tot enter $n \in \mathbb{Z}$.

4.6. Calculeu les integrals de contorn següents:

$$1.\ \int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-1)(z+3)}; \qquad 2.\ \int_{|z|=4}\frac{dz}{(z-1)(z+3)}; \qquad 3.\ \int_{|z|=3}\frac{dz}{z^2-1}.$$

4.7. Sigui $C = C(z_0; R)$ la circumferència de centre z_0 i radi R.

1. Per a complexos a, b que no pertanyen a C calculeu les integrals

$$\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,dz.$$

2. Per a complexos $a_1, \ldots, a_n$ i $R > \max\{|a_i| : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ calculeu la integral

$$\int_C \frac{1}{(z-a_1)\cdots(z-a_n)}\,dz.$$

4.8. Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa tal que $|f(z)-1| < 1$. Demostreu que $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$ per a tot contorn tancat γ dins de $\mathcal{U}$.

4.9. Per a tot contorn $\gamma\colon [a, b] \to \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ i funció contínua $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ es defineix

$$\int_\gamma f(z)\,d\overline{z} := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\overline{\gamma'(t)}\,dt$$

Demostreu que, per a tot polinomi P, es té:

$$\int_{C(z_0;R)} P(z)\,d\overline{z} = -2\pi i R^2 P'(z_0).$$

4.3 El Teorema de Cauchy

En càlcul d'una variable el sol fet que una funció $f\colon I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sigui contínua en un interval $I\subseteq\mathbb{R}$ ja permet construir una primitiva posant

$$F(t)=\int_{t_0}^{t} f(x)\,dx,\qquad t\in I,$$

on t_0 és un punt qualsevol de I fixat.

En variable complexa la manera de construir una primitiva d'una funció $f\colon\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ en un obert $\mathcal{U}$ és anàloga usant integrals de contorn. Aquí, però, un cop fixat un punt z_0 de $\mathcal{U}$ hi ha molts contorns que l'uneixen amb un altre punt $z\in\mathcal{U}$ i cal que el valor de la integral no depengui del contorn triat. Aquesta propietat no es compleix només demanant que la funció sigui contínua (per poder integrar) i que l'obert $\mathcal{U}$ sigui connex (per tal que existeixin contorns que uneixen z_0 amb z) tal i com passa a $\mathbb{R}$. Calen més condicions tant sobre la funció f com sobre l'obert $\mathcal{U}$. D'una banda cal que la funció sigui holomorfa; això és perquè, tal com es veurà més endavant, i a diferència del que passa a $\mathbb{R}$, la derivada d'una funció holomorfa és automàticament holomorfa (i, per tant, infinitament derivable), de manera que les funcions contínues no holomorfes no poden tenir primitiva. D'altra banda calen condicions topològiques sobre l'obert $\mathcal{U}$: ha de ser simplement connex (no pot tenir forats).

El resultat que assegura que, en les condicions esmentades, la integral només depèn dels punts inicial i final, es coneix amb el nom de *Teorema de Cauchy* i és un dels resultats principals de la teoria de la variable complexa.

Per a la majoria d'aplicacions n'hi ha prou amb versions del teorema sobre oberts $\mathcal{U}$ que siguin més simples, com ara conjunts convexos o estrellats; la versió més general es pot deduir a partir d'aquests casos particulars amb una mica de feina. El teorema es demostrarà en tres passos. En el primer es consideraran només contorns d'un tipus molt simple: triangles. En el segon el conjunt on està definida la funció és un disc i els contorns són poligonals. En el tercer i més general la funció està definida en un obert simplement connex i els contorns són arbitraris.

Triangles. En endavant, i per a l'enunciat i la demostració del teorema de Goursat, es consideraran entorns que són triangles $T=\gamma_{z_0\to z_1\to z_2\to z_0}$, on z_0,z_1,z_2 són tres complexos no alineats. Aquests contorns són la vora $\partial\mathscr{T}$ del *triangle sòlid* o *regió triangular* (o *símplex* en la terminologia de la geometria afí)

$$\mathscr{T}=\{t_0z_0+t_1z_1+t_2z_2 : t_i\geqslant 0, t_0+t_1+t_2\leqslant 1\}.$$

A l'hora d'integrar sobre contorns com aquests es demanarà que la funció estigui definida a un obert que contingui no només el triangle T sinó també tota la regió triangular $\mathscr{T}$; és a dir, que el domini de definició, i on ha de tenir les propietats que es demanin, no pot tenir forats a l'interior de la regió triangular.

Teorema 4.12 (Teorema de Goursat) *Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa en un obert $\mathcal{U}$ que contingui el triangle sòlid $\mathscr{T}$ de vora $T = \partial\mathscr{T}$. Aleshores:*

$$\int_T f(z)\,dz = 0.$$

De vegades el Teorema de Goursat s'enuncia i demostra per a rectangles en comptes de triangles. L'argument de la demostració és exactament el mateix. Com a conseqüència s'obté immediatament el

Teorema 4.13 (Teorema de Cauchy a un disc) *Si $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ és holomorfa a un disc obert $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$, la integral de f sobre tot contorn tancat és zero.*

Teorema 4.14 (Teorema de Cauchy) *Si $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ és holomorfa a un obert simplement connex $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$, la integral de f sobre tot contorn tancat és zero.*

Corol·lari 4.15 (Primitiva d'una funció holomorfa) *Tota funció holomorfa en un obert simplement connex té una primitiva en aquest obert.*

Com a aplicació del teorema de Cauchy en oberts simplement connexos es dóna un exemple que d'una situació que apareix molt sovint a l'hora de calcular integrals, que permet reduir el càlcul de la integral sobre un disc donat a la integral de la mateixa funció sobre un disc més petit que estigui contingut al seu interior.

Exemple 4.16 *Si $\overline{\mathcal{D}}(z_1;r) \subseteq \overline{\mathcal{D}}(z_0;R)$ i f és una funció holomorfa a un obert $\mathcal{U}$ amb $\overline{\mathcal{D}}(z_0;R) \setminus \mathcal{D}(z_1;r) \subset \mathcal{U}$, aleshores*

$$\int_{C(z_0;R)} f(z)\,dz = \int_{C(z_1;r)} f(z)\,dz$$

Per exemple, l'enunciat s'aplica a tota funció de la forma $\dfrac{g(z)}{z-z_1}$ amb g holomorfa.

Teorema de Cauchy amb singularitats. Els teoremes d'aquesta secció, que asseguren que la integral d'una funció en un contorn dóna zero, també valen amb una hipòtesi lleugerament més dèbil: que la funció sigui holomorfa a l'obert $\mathcal{U}$, excepte potser a un punt, en el qual només se sap que és contínua, o, fins i tot, només que està fitada en algun entorn seu. De fet n'hi ha prou que els punts on es té aquesta condició més dèbil formen un conjunt finit o almenys un conjunt sense punts d'acumulació a $\mathcal{U}$.

En realitat el que passa, tal i com es veurà més endavant, és que una funció holomorfa i fitada a un entorn perforat d'un punt té necessàriament una *singularitat evitable* en aquest punt i, definint-la per tal que sigui contínua, s'obté una funció que és derivable en el punt, i per tant aquesta "anomalia" en realitat no hi és. De totes maneres poder usar aquesta versió del teorema és molt útil mentre no es disposi del teorema 6.3 d'evitació de singularitats.

Teorema 4.17 (Teorema de Cauchy amb singularitats) *Els teoremes de Goursat i de Cauchy, teoremes 4.12, 4.13 i 4.14, també valen amb la hipòtesi més dèbil que la funció sigui holomorfa excepte potser en un punt, en el qual només se sap que és contínua, o fins i tot només que està fitada en algun entorn seu.*

També valen si en comptes d'un únic punt, el conjunt dels punts en aquesta situació no té cap punt d'acumulació a l'obert.

4.4 Aplicacions: funcions multivaluades i càlcul d'integrals

Recordi's que al conjunt $\mathbb{C}^*$ dels complexos no nuls hi ha definides diverses funcions multivaluades, de la manera següent:

- $\arg\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ definida per $\alpha \in \arg z \Leftrightarrow z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$;
- $\log\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ definida per $w \in \log z \Leftrightarrow e^w = z$;
- $\sqrt[n]{\cdot}\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ definida per $w \in \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z$.

S'anomenen *determinacions* les funcions definides en un subconjunt de $\mathbb{C}^*$ que en cada punt trien un dels valors possibles. En el cas de les funcions considerades es denotaran amb majúscula Arg i Log per a les dues primeres i es denotarà $z \mapsto z^{1/n}$ una determinació de l'arrel n-èsima.

El teorema de Cauchy permet assegurar l'existència de determinacions holomorfes del logaritme i l'arrel n-èsima i de classe $\mathscr{C}^\infty$ de l'argument en dominis de definició que siguin *oberts simplement connexos*:

Proposició 4.18 *En tot obert simplement connex que no contingui el punt* $z = 0$

1. *existeixen determinacions del logaritme holomorfes amb derivada* $1/z$*;*
2. *existeixen determinacions contínues de l'argument, que són* $\mathscr{C}^\infty$ *amb derivades parcials* $\frac{-y}{x^2+y^2}$ *i* $\frac{x}{x^2+y^2}$*, respectivament;*
3. *existeixen determinacions de l'arrel* n*-èsima* $z \mapsto z^{1/n}$ *holomorfes amb derivada* $z \mapsto \frac{z^{1/n}}{nz}$.

Càlcul d'integrals definides. Una de les aplicacions més importants del teorema de Cauchy és el càlcul d'integrals definides; especialment integrals de Riemann reals que només amb eines de variable real no es calculen fàcilment. La idea és posar una d'aquestes integrals com una integral de contorn complexa i estendre el contorn fins a tenir un contorn tancat en el qual es pugui aplicar el teorema de Cauchy. A continuació es veuen alguns exemples:

Exemple 4.19

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

Transformada de Fourier. L'exemple següent assegura que la transformada de Fourier de la funció $e^{-\pi t^2}$ és ella mateixa. Com que molts càlculs i propietats de la transformada de Fourier es veuen usant integral de contorn complexa, es dóna a continuació la definició per tal que es puguin interpretar els càlculs des d'aquest punt de vista.

Donada una funció $t \mapsto f(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que satisfaci propietats prou bones (ha de tendir a zero enèrgicament a $\pm\infty$) la seva *transformada de Fourier* és la funció $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida posant:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t}\, dt.$$

En bones condicions la funció es recupera amb la transformada inversa:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i t \xi}\, d\xi.$$

Noti's que les integrals que intervenen en aquestes definicions no són integrals de contorn complexes sinó integrals de funcions de variable real.

Exemple 4.20 *Per a tot nombre real $\xi \in \mathbb{R}$,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i t \xi}\, dt = e^{-\pi \xi^2}$$

Problemes

4.10. Calculeu la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ integrant la funció $f(z) = \dfrac{e^{iz} - 1}{z}$ sobre un contorn.

4.11. *Integrals de Fresnel.* Comproveu el valor de les igualtats següents:

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx = \int_0^\infty \cos(x^2)\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

Indicació: Integreu e^{iz^2} en el contorn format pels segments que uneixen el punt 0 amb els punts R i $Re^{\pi i/4}$ i l'arc de circumferència que uneix aquests dos punts. Recordeu la integral Gaussiana $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

4.12. Calculeu la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x\, dx$$

integrant la funció e^{-z^2} sobre la poligonal tancada que uneix els punts $-R$, R, $R + i/2$ i $-R + i/2$. Us caldrà la integral Gaussiana.

4.13. A partir d'una integral $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ amb un contorn γ adequat calculeu la integral real

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}, \qquad a, b > 0.$$

4.14. *Examen parcial abril-17.* Calculeu la integral real

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}\, dt.$$

INDICACIÓ: podeu convertir-la en una integral de contorn complexa sobre la circumferència unitat posant $z = e^{it}$.

5 Fórmula integral de Cauchy i aplicacions

La fórmula de Cauchy és una representació integral de les funcions holomorfes. Dóna el valor d'una funció en un punt com la integral de la funció sobre un contorn que "doni una volta" al punt. És, junta amb el Teorema de Cauchy, el resultat més important de la teoria de les funcions de variable complexa, i a partir d'ell s'obtenen la majoria de les propietats i resultats fonamentals sobre aquestes funcions.

5.1 Fórmula integral de Cauchy

La fórmula integral de Cauchy permet expressar el valor d'una funció en un punt en termes dels seus valors sobre la imatge d'un contorn tancat que no passa pel punt.

En la seva versió bàsica el contorn és una circumferència. Recordi's el conveni que, si $C = C(z_0; r)$, s'entén que la integral $\int_C f(z)\, dz$ correspon al contorn $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, que recorre la circumferència una única vegada en sentit antihorari, amb inici i final al punt $z_0 + r$, quan el paràmetre t recorre l'interval $[0, 2\pi]$.

Teorema 5.1 (Fórmula integral de Cauchy a un disc) *Si $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ és holomorfa a un obert $\mathcal{U}$ que conté un disc obert $\mathcal{D}$ i la seva frontera, la circumferència C,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad \forall z \in \mathcal{D}.$$

La fórmula integral de Cauchy es pot interpretar com el fet que el valor d'una funció holomorfa en un punt és el valor mitjà de la funció sobre els punts d'una circumferència centrada al punt:

Corol·lari 5.2 (Teorema del valor mitjà) *Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa a l'obert $\mathcal{U}$. Per a tot $z \in \mathcal{U}$ i $r > 0$ tals que $\overline{\mathcal{D}}(z; r) \subset \mathcal{U}$,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\, dt.$$

Índex d'una corba tancada. La circumferència C de la fórmula del teorema 5.1 dóna una volta al voltant de cada punt del disc $\mathcal{D}$. Es pot donar una versió més general de la fórmula integral de Cauchy que val per a contorns tancats qualsevol, la qual en cada punt dóna el valor de la funció multiplicat pel "nombre de voltes" que el contorn dóna al voltant del punt. Primer cal definir aquest nombre de voltes.

Definició 5.3 (Índex d'un contorn al voltant d'un punt) *Sigui $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ un contorn tancat. Per a cada punt $z \notin \gamma\big([a, b]\big)$ es defineix l'índex de γ al voltant de z com*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Proposició 5.4 $\operatorname{Ind}_\gamma(z_0)$ *és un nombre enter, que s'ha d'interpretar com el nombre de voltes (winding number) de la corba al voltant del punt.*

La integral, i per tant l'índex, també es pot calcular per a corbes més generals, no necessàriament de classe $\mathscr{C}^1$. A topologia aquest mateix concepte del nombre de voltes d'una corba tancada al voltant d'un punt es defineix a partir del concepte de grau d'una aplicació contínua $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.

Teorema 5.5 (Fórmula integral de Cauchy) *Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa a un obert simplement connex Ω. Per a tot contorn γ i tot punt z que no estigui a la seva imatge,*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z_0) f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Problemes

5.15. Sigui f una funció holomorfa a $\mathbb{C}^*$ i $C = C(0;1)$ la circumferència unitat. Demostreu que si f està fitada a $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, aleshores

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)}\, d\zeta \qquad \forall z \in \mathcal{U}.$$

5.2 Holomorfia i analicitat

Aquest apartat es dedica a un dels fets més rellevants de la teoria de les funcions de variable complexa: que tota funció holomorfa és analítica.

Teorema 5.6 *Si $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ és holomorfa a l'obert $\mathcal{U}$ i $\overline{\mathcal{D}}(z_0;R) \subset \mathcal{U}$ existeix una sèrie de potències $\sum a_n(z-z_0)^n$ tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad \forall z \in \mathcal{D}.$$

La sèrie té radi de convergència $\geqslant R$ i els seus coeficients venen donats per la fórmula:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, dz, \qquad C = C(z_0;R).$$

Com a conseqüència s'obté l'equivalència entre les propietats de ser holomorfa i ser analítica per a funcions de variable complexa, i, per tant, les funcions, pel sol fet de ser holomorfes, ja tenen totes les bones propietats de les funcions analítiques.

Corol·lari 5.7 (Holomorfa equival a analítica) *Tota funció holomorfa és analítica.*

Corol·lari 5.8 *La derivada d'una funció holomorfa és holomorfa (en particular, contínua). Tota funció holomorfa és derivable infinites vegades.*

Corol·lari 5.9 (Principi de prolongació analítica) *Les funcions holomorfes satisfan el principi de prolongació analítica: tota funció holomorfa en un obert connex queda unívocament determinada pels seus valors en un conjunt de punts que tingui algun punt d'acumulació a l'obert.*

D'aquesta equivalència també es poden deduir propietats en sentit invers: propietats de les funcions holomorfes s'apliquen a les funcions analítiques. En particular totes les propietats de les funcions analítiques esmentades a la pàgina ... es dedueixen del fet que les funcions holomorfes les satisfan.

Ordre en un punt. Recordi's que per a funcions analítiques s'ha definit l'ordre en un punt com la multiplicitat del zero de la funció en aquest punt. Atenent que les funcions holomorfes són totes analítiques aquest concepte es pot aplicar també a les funcions holomorfes. Això és el que es farà a continuació.

Proposició 5.10 (Zeros de funcions holomorfes) *Una funció f holomorfa a un obert $\mathcal{U}$ s'anul·la a un punt $z_0 \in \mathcal{U}$ si, i només si, existeix una funció g holomorfa a $\mathcal{U}$ tal que $f(z) = (z - z_0)g(z)$ per a tot $z \in \mathcal{U}$.*

Proposició 5.11 (Ordre del zero en un punt) *Tota funció f holomorfa a un obert $\mathcal{U}$ no localment zero a un punt $z_0 \in \mathcal{U}$ es pot escriure de manera única de la forma*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \qquad \textit{amb} \quad m \geqslant 0, \quad g \textit{ holomorfa a } \mathcal{U}, \quad g(z_0) \neq 0.$$

El nombre m s'anomena ordre de f en el punt z_0 *i es denota*

$$\operatorname{ord}_{z_0}(f) = m.$$

Si f s'anul·la en algun entorn de z_0 es posa $\operatorname{ord}_{z_0}(f) = \infty$.

El resultat anàleg no és cert sobre els reals. La funció $f(x) = e^{1/x^2}$ és derivable a tot $\mathbb{R}$, i de fet és de classe $\mathscr{C}^\infty$. S'anul·la en el punt $x = 0$ i és no nul·la en tot punt $x \neq 0$, però no es pot posar de la forma $(x - 0)^m g(x)$ amb g derivable. El problema és que no és analítica en el punt $x_0 = 0$: no ve donada per cap sèrie de potències a un entorn d'aquest punt ja que $f^{(n)}(0) = 0$ per a tot $n \geqslant 0$ i, per tant, la sèrie hauria de ser la sèrie zero.

Problemes

5.16. Siguin f i g funcions holomorfes en un obert connex Ω que no s'anul·len en cap punt i tals que $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)}$ per als punts z d'un conjunt S que té un punt d'acumulació a Ω. Demostreu que $f = cg$ a tot Ω per a una certa constant c.

5.17. Sigui f una funció holomorfa a un obert que conté el disc unitat tancat $\overline{\mathbb{D}} = \overline{\mathcal{D}}(0; 1)$.

1. Demostreu que si
$$\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{n\zeta - 1}\, d\zeta = 0, \qquad \forall n$$
aleshores f és la funció zero en tot el disc.
2. Què es pot dir si la funció compleix
$$\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{(n\zeta - 1)^2}\, d\zeta = 0, \qquad \forall n\ ?$$

5.18. Sigui f una funció holomorfa a un obert connex $\mathcal{U}$. Suposi's que per a tot $z_0 \in \mathcal{U}$ almenys un des coeficients a_n de l'expansió $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ és igual a zero. Demostreu que f és un polinomi.
Indicació: Perquè no és cert si $\mathcal{U}$ no és connex?

5.19. Demostreu que la funció definida per $f(z) = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}z^n$ és holomorfa al disc unitat obert $\mathcal{D}(0,1)$. Trobeu la seva prolongació analítica al pla perforat $\mathbb{C} \smallsetminus \{-1\}$.

5.20. Demostreu que la funció definida posant $f(z) = \int_0^\infty t^3 e^{-zt}\, dt$ és holomorfa al semiplà $\operatorname{Re} z > 0$. Trobeu la seva prolongació analítica a l'obert $\mathbb{C}^*$.
Indicació: Integreu per parts justificant que també es pot fer amb funcions a valors complexos.

5.21. *Examen final maig-17.* Sigui $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa a un obert connex Ω. Suposi's que existeix un punt $z_0 \in \Omega$ per al qual la sèrie numèrica $\sum_{n=0}^\infty f^{(n)}(z_0)$ és convergent. Demostreu que f té una única prolongació analítica a tot $\mathbb{C}$.
És certa la conclusió si l'obert no és connex?

5.22. *Examen extraordinari juliol-17. Singularitats a la frontera.* Sigui $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ una funció holomorfa definida al disc $\mathcal{D} = \mathcal{D}(z_0; R)$ per una sèrie de potències amb radi de convergència $R < \infty$. Un punt $\zeta \in C$ de la circumferència $C = C(z_0; R)$ es diu *regular* si existeix una funció holomorfa $g(w) = \sum b_n(w - \zeta)^n$ a un disc $\mathcal{D}(\zeta; r)$ tal que $f = g$ a $\mathcal{D}(z_0; R) \cap \mathcal{D}(\zeta; r)$, i es diu *singular* altrament.

1. Demostreu que els punts singulars de C són un subconjunt tancat no buit.
2. Calculeu el conjunt de punts singulars de les funcions següents:
   (a) $f(z) = \sum_{n=0}^\infty z^n$;
   (b) $f(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$;
   (c) $f(z) = \sum_{n=0}^\infty z^{mn}, \quad m \geqslant 1$;
   (d) $f(z) = \sum_{n=0}^\infty z^{2^n}$.

   Indicació: A l'apartat (d) vegeu que totes les arrels de la unitat $\zeta = e^{2\pi i k/2^m}$ d'ordre potència de 2 són punts singulars, demostrant que la funció no està fitada en cap entorn seu dins del disc unitat.

5.23. Comproveu que la funció holomorfa f té un zero d'ordre $m = \operatorname{ord}_{z_0}(f)$ a un punt z_0 si, i només si,
$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{i} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

5.24. Trobeu els ordres $\mathrm{ord}_{z_0}(f)$ de les funcions següents:

1. $f(z) = e^z - 1$ en els punts $z_0 = 2\pi ik$ per a $k \in \mathbb{Z}$;
2. $f(z) = \sin z - \tan z$ en el punt $z_0 = 0$;
3. $f(z) = \cos z - 1 + \frac{1}{2}\sin^2 z$ en el punt $z_0 = 0$.

5.25. Siguin f i g funcions holomorfes a un entorn de z_0. Demostreu que

1. $\mathrm{ord}_{z_0}(f+g) \geqslant \min\{\mathrm{ord}_{z_0}(f), \mathrm{ord}_{z_0}(g)\}$, amb igualtat si són diferents;
2. $\mathrm{ord}_{z_0}(fg) = \mathrm{ord}_{z_0}(f) + \mathrm{ord}_{z_0}(g)$;
3. $\mathrm{ord}_{z_0}(f^n) = n\,\mathrm{ord}_{z_0}(f)$ per a tot $n \geqslant 0$;
4. $\mathrm{ord}_{z_0}(f') = \mathrm{ord}_{z_0}(f) - 1$ si $f(z_0) = 0$.

5.26. Trobeu els zeros i calculeu els seus ordres, per a les funcions enteres següents:

1. $(1+z^2)^4$;
2. $\sin^2 z$;
3. $1 + e^z$;
4. $z^3 \cos z$.

5.3 Morera, funció inversa, mòdul màxim, aplicació oberta

Observi's que de la definició de derivada complexa no es dedueix immediatament cap propietat sobre la derivada d'una funció holomorfa. L'analicitat de les funcions holomorfes té com a conseqüència que la derivada d'una funció holomorfa és també holomorfa, i per tant la funció és infinitament derivable. Això en particular assegura que com a funció de dues variables reals tota funció holomorfa és de classe $\mathscr{C}^1$, una propietat que fins ara no es podia donar per certa, i encara més, es de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Corol·lari 5.12 *Tota funció holomorfa en un obert és de classe $\mathscr{C}^\infty$ en aquest obert.*

El teorema 5.21 també permet afirmar que una funció que tingui una primitiva és necessàriament holomorfa. S'obté així el

Teorema 5.13 (Teorema de Morera: recíproc del Teorema de Cauchy) *Sigui f una funció contínua en un obert $\mathcal{U}$. Suposi's que la integral sobre tot contorn tancat a $\mathcal{U}$ és zero. Aleshores f és holomorfa a $\mathcal{U}$.*

El resultat també val només suposant que la integral sobre vores de triangles sòlids continguts a $\mathcal{U}$ és zero.

Aquest fet, de fet només la propietat de ser de classe $\mathscr{C}^1$, permet deduir el teorema de la funció inversa per a funcions de variable complexa, del teorema corresponent per a funcions de dues variables reals.

Teorema 5.14 (Teorema de la funció inversa) *Sigui f holomorfa a un obert. Per a tot punt z_0 amb derivada $f'(z_0) \neq 0$ la funció té una inversa local: existeixen entorns oberts $\mathcal{U}$ de z_0 i $\mathcal{V}$ de $f(z_0)$ tals que la restricció de f a $\mathcal{U}$ és una bijecció $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ i la funció inversa és holomorfa amb derivada $(f^{-1})'\big(f(z)\big) = f'(z)^{-1}$.*

Funcions no constants. El principi de prolongació analítica assegura que una funció f no constant al voltant d'un punt z_0 pren valors diferents, $f(z) \neq f(z_0)$, en algun entorn del punt. Aquesta propietat té algunes conseqüències interessants, que es veuen a continuació.

Corol·lari 5.15 (Principi del mòdul màxim i mínim) *Sigui $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa no constant a un obert* connex Ω. *La funció $|f(z)|$ no té cap màxim local a Ω i els seus únics mínims locals els pren en els punts en què $f(z) = 0$.*

D'aquí es pot deduir que tota funció analítica és oberta:

Teorema 5.16 (Teorema de l'aplicació oberta) *Tota funció holomorfa no constant a un obert connex és oberta: envia oberts a oberts.*

Les demostracions dels resultats anteriors de vegades es presenten en ordre invers. El teorema de l'aplicació oberta es demostra primer com a conseqüència de l'analicitat de la funció f a partir del corol·lari 5.18, que assegura que si la funció no és localment constant a z_0 tot punt d'un entorn de $f(z_0)$ té tantes antiimatges com la multiplicitat $\geqslant 1$ corresponent. Després el teorema del mòdul màxim és una conseqüència immediata: per a tot punt $z_0 \in \Omega$ la imatge de tot entorn és un obert que conté $f(z_0)$ i, per tant, conté un disc $\mathcal{D}\big(f(z_0); \epsilon\big)$ per a algun $\epsilon > 0$, i tot disc conté punts de mòdul estrictament més gran que el mòdul del seu centre.

Logaritmes i arrels de funcions. El fet que una funció holomorfa sigui sempre infinitament derivable permet assegurar que tota funció holomorfa en un obert *simplement connex* que no s'anul·li en cap punt de l'obert té un logaritme i una arrel n-èsima holomorfes:

Proposició 5.17 *Per a tota funció $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}^*$ holomorfa a un obert simplement connex $\mathcal{U}$ que no s'anul·la en cap punt existeixen funcions holomorfes $z \mapsto \operatorname{Log} f(z)$ i $z \mapsto f(z)^{1/n}$ tals que $e^{\operatorname{Log} f(z)} = f(z)$ i $\big(f(z)^{1/n}\big)^n = f(z)$ per a tot $z \in \mathcal{U}$. Les seves derivades són*

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Log} f(z) = \frac{f(z)}{f'(z)} \quad i \quad \frac{d}{dz} f(z)^{1/n} = \frac{f(z)^{1/n} f'(z)}{n f(z)}$$

Multiplicitat en un punt. A continuació es veurà que les funcions holomorfes es comporten localment de manera molt semblant a una funció $z \mapsto z^m$ i es deduiran algunes conseqüències.

Corol·lari 5.18 (Multiplicitat) *Sigui f una funció holomorfa no localment constant al punt z_0. Sigui $w_0 = f(z_0)$ i $m = \operatorname{ord}_{z_0}\big(f(z) - w_0\big) \geqslant 1$. Existeix un entorn $\mathcal{U}$ del punt z_0 tal que:*

1. *$f(z) = w_0 + h(z)^m$ a $\mathcal{U}$ amb h holomorfa a $\mathcal{U}$ tal que $h(z_0) = 0$ i $h'(z_0) \neq 0$;*
2. *el punt w_0 té una única antiimatge z_0 a $\mathcal{U}$; i*

3. tot punt $w \in f(\mathcal{U})$ diferent de w_0 té exactament m antiimatges diferents a $\mathcal{U}$.

L'enter m s'anomena multiplicitat *de f en el punt z_0.*

Corol·lari 5.19 *Tota funció holomorfa injectiva $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ en un obert $\mathcal{U}$ té derivada no nul·la en tot punt: $f'(z) \neq 0$ per a tot $z \in \mathcal{U}$.*

Observi's que l'anàleg d'aquest resultat no és cert en variable real: $f(x) = x^3$ és derivable injectiva a tot $\mathbb{R}$ però la seva derivada és zero en el punt $x = 0$. Observi's també que el recíproc no és cert a $\mathbb{C}$: $f(z) = e^z$ té derivada no nul·la en tot punt $z \in \mathbb{C}$ però no és injectiva a $\mathbb{C}$; aplicant el teorema de la funció inversa l'únic que es pot dir de la funció exponencial és que és localment injectiva, però globalment no ho és.

El fet que la derivada d'una funció injectiva sigui no nul·la permet aplicar el teorema de la funció inversa i obtenir la conseqüència següent, que tampoc és certa sobre els reals (la inversa de la funció $x \mapsto x^3$ és la funció $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, que no és derivable en el zero):

Corol·lari 5.20 *Tota funció holomorfa injectiva en un obert té inversa holomorfa.*

Problemes

5.27. Sigui Ω un obert connex fitat. Sigui f una funció holomorfa en Ω, contínua a l'adherència $\overline{\Omega}$, i que no s'anul·la a cap punt de Ω. Demostreu que si $|f|$ és constant a la frontera $\partial\Omega$, aleshores f és constant.
INDICACIÓ: Principi del mòdul màxim.

5.28. Sigui $f(z)$ una funció entera tal que $f(0) = 3 + 4i$ i $|f(z)| \leqslant 5$ si $|z| \leqslant 1$. Demostreu que f és constant.

5.29. Trobeu el màxim de $|f(z)|$ en els casos que s'especifica.

1. $f(z) = z^2 - 3z + 2$ en $|z| \leqslant 1$.
2. $f(z) = z^2 + z$ en el triangle de vèrtexs $0, -1$ i $-2i$.

5.30. Sigui f una funció holomorfa no constant en un domini D. Demostreu que

1. si $|f(z)| > 0$ per a tot $z \in D$, aleshores $|f(z)|$ no té mínim en D.
2. Si D és fitat, f és holomorfa en la vora ∂D de D i $|f(z)|$ és constant sobre ∂D, aleshores f té algun zero en D.
3. $\mathrm{Re}(f)$ no té ni màxim ni mínim en D.

5.31. Siguin $w_1, \ldots, w_n$ punts de la circumferència de radi 1 centrada a l'origen.

1. Demostreu que existeix un punt z amb $|z| = 1$ tal que el producte de les distàncies de z als punts w_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ és com a mínim 1.
2. Demostreu que existeix un punt w amb $|w| = 1$ tal que el producte de les distàncies de w als punts w_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ és igual a 1.

5.32. Existeix alguna funció f holomorfa en el disc unitat tal que $|f(z)| = e^{|z|}$ per a tot $|z| < 1$?

5.33. *Examen extraordinari juliol-17.* Sigui f una funció tal que:

- és holomorfa a un obert que conté el disc tancat $\overline{\mathcal{D}}(0;2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 2\}$;
- existeix un enter $n \geqslant 0$ tal que $|f(z)| \leqslant 2^n$ si $|z| = 2$;
- $|f(0)| = 1$.

L'objectiu del problema és demostrar que f té com a màxim n zeros (comptant multiplicitats) a $\overline{\mathcal{D}}(0;1)$. Per fer-ho:

1. Demostreu que, per a tot $R > 0$ i tot punt $z_0 \in \mathcal{D}(0;R)$, la funció
$$M(z) = \frac{R^2 - \overline{z}_0 z}{R(z - z_0)}$$
transforma la circumferència $C(0;R)$ en la circumferència unitat $C(0;1)$.
2. Siguin $z_1, z_2, \ldots, z_m$ els zeros de f a $\mathcal{D}(0;1)$ (repetits tantes vegades com la seva multiplicitat). Es considera la funció
$$g(z) = f(z) \prod_{i=1}^{m} \frac{4 - \overline{z}_i z}{2(z - z_i)}, \qquad z \in \mathcal{D}(0;2) \smallsetminus \{z_i\}.$$
Vegeu que
   (a) g es pot definir als punts z_i de manera que sigui holomorfa a tot el disc $\mathcal{D}(0;2)$;
   (b) $|g(z)| = |f(z)|$ a la circumferència $C(0;2)$;
   (c) $|g(0)| \leqslant 2^n$;

   i deduïu el resultat de l'enunciat d'aquesta darrera desigualtat.

5.4 Fórmula de Cauchy per a les derivades

En aquesta secció es dóna una representació integral semblant a la fórmula integral de Cauchy per a les derivades d'una funció holomorfa i es dedueixen algunes conseqüències.

Teorema 5.21 (Fórmula integral de Cauchy per a les derivades) *Si $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ és holomorfa a un obert $\mathcal{U}$ que conté un disc obert $\mathcal{D}$ i la seva frontera C,*
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta, \qquad \forall z \in \mathcal{D}, \quad \forall n \geqslant 0.$$

Corol·lari 5.22 (Desigualtats de Cauchy) *Si $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ és holomorfa a l'obert $\mathcal{U}$ que conté el disc tancat $\overline{\mathcal{D}}(z_0;R) \subset \mathcal{U}$ i M és una fita de $|f|$ a la circumferència $C(z_0;R)$,*
$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leqslant \frac{n!}{R^n} M \qquad \forall n \geqslant 0.$$

Corol·lari 5.23 (Teorema de Liouville) *Tota funció entera fitada és constant.*

Corol·lari 5.24 (Teorema Fonamental de l'Àlgebra) *Tot polinomi no constant sobre els complexos té alguna arrel.*

Derivació de successions i sèries. Una altra conseqüència de la fórmula integral de Cauchy per a les derivades és la possibilitat de derivar terme a terme les successions i sèries de funcions holomorfes uniformement convergents sobre compactes. Recordi's que anteriorment ja s'han vist les propietats de la continuïtat al teorema 2.8 i la integració al teorema 4.7 per a aquest tipus de successions i sèries.

Teorema 5.25 (Convergència uniforme i holomorfia) *Si (f_n) és una successió de funcions $f_n \colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorfes en un obert $\mathcal{U}$ que convergeix uniformement sobre compactes de $\mathcal{U}$ cap a una funció f, aleshores f també és holomorfa i la successió de derivades (f_n') convergeix uniformement sobre compactes cap a f'.*

El resultat anàleg val per a sèries de funcions holomorfes.

Observi's que sobre $\mathbb{R}$ el resultat anàleg és fals: un límit uniforme de funcions derivables no té perquè ser derivable.

Problemes

5.34. Calculeu les integrals següents

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}\, dz, \qquad \int_{|z|=2} \frac{z^n}{(1-z)^m}\, dz, \qquad n, m \in \mathbb{N}.$$

5.35. Calculeu la integrals següents sobre el contorn poligonal tancat que és la frontera del quadrat amb vèrtexs ± 4 i $\pm 4i$ recorreguda en sentit positiu:

$$1.\ \int_\gamma \frac{e^z}{(z-\pi i)^4}\, dz; \qquad 2.\ \int_\gamma \frac{\sin 2z}{(z-\pi)^4}\, dz; \qquad 3.\ \int_\gamma \frac{e^z \cos z}{(z-\pi)^3}\, dz.$$

5.36. Sigui f una funció holomorfa en el disc unitat $\mathbb{D} = \mathcal{D}(0;1)$. Es defineix el seu *diàmetre* posant $d = \sup\{|f(z) - f(w)| : z, w \in \mathbb{D}\}$.

1. Demostreu que $2|f'(0)| \leqslant d$.
2. Doneu una funció f diferent de la identitat per a la qual es compleixi la igualtat.
   INDICACIÓ: Fixeu-vos que $2\pi i f'(0) = -\int_{|z|=r} \frac{f(-z)}{z^2}\, dz$ per a $0 < r < 1$.

5.37. Demostreu que tota funció f holomorfa en un obert fitat $\mathcal{U}$ que tingui un punt fix on la derivada és 1 ha de ser lineal.
INDICACIÓ: Vegeu que podeu suposar que el punt és el zero, i argumenteu sobre la primera derivada no nul·la de f d'ordre $k > 1$, considerant la composició $f \circ \overset{n)}{\cdots} \circ f$,

5.38. Sigui f una funció holomorfa a la banda horitzontal $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$ tal que existeixen constants A, e amb $|f(z)| \leqslant A(1 + |z|)^e$ per a tot $z \in \mathcal{U}$. Demostreu que per a tot $n \geqslant 0$ existeix A_n amb $|f^{(n)}(x)| \leqslant A_n(1 + |x|)^e$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

5.39. Demostreu que la imatge de tota funció entera no constant és densa a $\mathbb{C}$.

5.40. Demostreu que tota funció entera f tal que $f(z+1) = f(z+i) = f(z)$ per a tot $z \in \mathbb{C}$ és constant.

5.41. Demostreu que una funció entera $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de creixement polinòmic: existeixen constants M i e tals que $|f(z)| < M|z|^e$ per a tot $|z|$ prou gran és necessàriament un polinomi de grau $\leqslant e$.

5.42. Demostreu que per a tota funció $f = u + iv$ entera no constant les components u i v no poden estar fitades ni superiorment ni inferiorment.
Indicació: Si $u \leqslant M$ considereu la funció $e^{f(z)-M}$.

5.43. *Examen parcial abril-17.* Digueu si existeix algun difeomorfisme (funció holomorfa bijectiva amb inversa holomorfa) $f_i\colon \mathcal{U}_i \to \mathcal{D}$ entre un obert complex $\mathcal{U}_i \subseteq \mathbb{C}$ i el disc unitat $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ per a cadascun dels oberts $\mathcal{U}_i$ següents:

1. $\mathcal{U}_1 = \mathbb{C}$;
2. $\mathcal{U}_2 = \{x + iy \in \mathbb{C} : x > 0, y > 0\}$;
3. $\mathcal{U}_3 = \{x + iy \in \mathbb{C} : xy > 0\}$;
4. $\mathcal{U}_4 = \{x + iy \in \mathbb{C} : -\pi < y < \pi\}$.

En cas afirmatiu, doneu-ne un; en cas negatiu, justifiqueu-ho.
Indicació: Us pot ser útil el problema **3.4**.

5.44. *Examen final maig-17.* Sigui f una funció entera. Per a tot parell de nombres complexos $z \neq w$ i tota circumferència C que els contingui al seu interior calculeu

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - w)}\, d\zeta.$$

Deduïu, agafant circumferències de radis tendint a infinit, una nova demostració del Teorema de Liouville sense fer servir la fórmula de Cauchy per a la derivada.

5.5 Derivació sota el signe integral

Moltes funcions es defineixen a partir d'expressions integrals, per exemple les transformades integrals, i en aquesta situació és important poder deduir bones propietats de la funció a partir de les propietats de la funció que s'integra. El fet més rellevant en aquest context és la *regla integral de Leibniz*, que també es coneix com a regla de *derivació sota el signe integral*. Es tracta d'un fet bàsicament equivalent a la possibilitat d'intercanviar l'ordre en integrals iterades (teorema de Fubini) o també a la igualtat entre derivades parcials mixtes (teorema de Schwarz).

En aquesta secció s'enuncia els teorema corresponent per a funcions de variable complexa, que es dedueix immediatament a partir dels seu anàleg de variable real. Primer es veu una versió del teorema de Fubini per a integrals de contorn:

Lema 5.26 *Siguin $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ i $\eta\colon J \to \mathbb{C}$ contorns i sigui $\Phi\colon \gamma^* \times \eta^* \to \mathbb{C}$ una funció contínua en el producte cartesià de les seves imatges. Aleshores*

$$\int_\gamma \left(\int_\eta \Phi(z,\zeta)\, d\zeta \right) dz = \int_\eta \left(\int_\gamma \Phi(z,\zeta)\, dz \right) d\zeta.$$

Teorema 5.27 (Derivació sota el signe integral) *Sigui $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un contorn. Sigui $\Phi\colon \mathcal{U} \times \gamma^* \to \mathbb{C}$ definida al producte cartesià d'un obert complex $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ i la imatge $\gamma^* = \gamma\big([a,b]\big)$. Suposi's que la funció Φ satisfà les condicions següents*

1. *és contínua a tot $\mathcal{U} \times \gamma^*$;*
2. *per a cada $\zeta \in \gamma^*$ la funció $z \mapsto \Phi(z,\zeta)$ és holomorfa a $\mathcal{U}$ com a funció de la variable z; es denota $z \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z,\zeta)$ la funció derivada corresponent;*
3. *la funció $(z,\zeta) \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z,\zeta)$ és contínua a tot $\mathcal{U} \times \gamma^*$.*

Aleshores la funció $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ definida posant

$$f(z) = \int_\gamma \Phi(z,\zeta)\, d\zeta$$

és holomorfa a $\mathcal{U}$ i la seva derivada és

$$f'(z) = \int_\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z,\zeta)\, d\zeta.$$

Problemes

5.45. Comproveu que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z(z+1)\dots(z+n-1)}{n^n}$$

defineix una funció entera.
INDICACIÓ: Considereu la successió de funcions $f_n(z) = z(z+1)\dots(z+n-1)/n^n$. Vegeu que existeix una constant $0 < M < 1$ tal que, per a tot $R > 0$, existeix $n_0(R)$ de manera que, si $n \geqslant n_0(R)$, llavors $|f_{n+1}(z)| \leqslant M|f_n(z)|$ per a tot $|z| \leqslant R$.

5.46. Vegeu que la funció Γ definida per l'expressió següent:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

és holomorfa en el semiplà $\operatorname{Re} z > 0$.
INDICACIÓ: Considereu els conjunts compactes de la forma

$$K = \{(x,y) \ : \ m \leqslant x \leqslant M \text{ i } -R \leqslant y \leqslant R\} \ ,$$

amb $m > 0$ i $R > 0$. Vegeu que la successió de funcions

$$\Gamma_n(z) = \int_{1/n}^{n} t^{z-1} e^{-t}\, dt \ , \quad n = 1, 2, \dots,$$

convergeix uniformement a Γ en K.

6 Funcions meromorfes i residus

En aquesta secció s'estudien funcions que són holomorfes en un obert excepte a un subconjunt de punts aïllats, anomenats *singularitats aïllades* de la funció. Aquestes singularitats es classificaran en tres categories: les *singularitats evitables*, on la funció es pot estendre de manera holomorfa; els *pols*, que són punts on la funció tendeix a infinit, i les *singularitats essencials*, que són les que no són evitables ni pols, i es caracteritzen pel fet que els valors que pren la funció en tot entorn seu són densos a $\mathbb{C}$.

Les singularitats evitables ja han sortit abans en el curs: el teorema de Cauchy amb singularitats (teorema 4.17) és una versió per a funcions que poden tenir singularitats d'aquest tipus.

Les funcions meromorfes són funcions holomorfes amb singularitats que són pols. Es poden pensar com a funcions holomorfes amb valors a l'esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$, definint la imatge dels pols com el punt de l'infinit de $\overline{\mathbb{C}}$, i en molts aspectes el seu comportament és anàleg al de les funcions holomorfes.

6.1 Singularitats aïllades

Definició 6.1 (Singularitat aïllada) *Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa a un obert $\mathcal{U}$. Un punt z_0 és una* singularitat aïllada *de la funció f si $\mathcal{D}'(z_0; r) \subseteq \mathcal{U}$ per a algun $r > 0$.*

O sigui, la funció f està definida i és holomorfa a un entorn de z_0.

Com que només es consideraran singularitats aïllades se'ls dirà simplement singularitats. Una *funció holomorfa amb singularitats* a un obert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ és una funció $f\colon \mathcal{U} \setminus \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ definida i holomorfa a tot punt de $\mathcal{U}$ excepte a un subconjunt $\mathcal{S} \subset \mathcal{U}$ de punts que són singularitats aïllades de f. La funció pot no estar definida als punts de $\mathcal{S}$ o pot estar-ho però no ser (necessàriament) holomorfa. Observi's que $\mathcal{S}$ és tancat dins de $\mathcal{U}$ ja que està format per punts aïllats. Per tant, el conjunt $\mathcal{U} \setminus \mathcal{S}$ és un obert. Observi's també que tot compacte dins de $\mathcal{U}$ conté només un nombre finit de singularitats.

Exemples. A continuació es donen exemples de funcions holomorfes a l'obert $\mathcal{U} = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ amb una singularitat aïllada en el punt $z_0 = 0$, on es veuen els tres comportaments típics a l'entorn d'una singularitat.

- Evitable. Qualsevol funció f que sigui la restricció a $\mathbb{C}^*$ d'una funció holomorfa a tot $\mathbb{C}$. En aquest cas, definint $f(0)$ com el valor d'aquesta funció en el punt singular $z_0 = 0$ s'obté una extensió holomorfa de f a aquest punt. Un altre exemple del mateix tipus és la funció $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ per a $z \in \mathbb{C}^*$. Tot i que aquesta fórmula no val en el punt $z = 0$, ja que dóna la indeterminació $0/0$, si es posa $f(0) = \lim_{z\to z_0} f(z) = 1$ es té una extensió que és la funció entera donada per la sèrie de potències

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^2}{(2n+1)!} z^{2n}$$

- Pol. La funció $f(z) = 1/z$ és holomorfa a $\mathbb{C}^*$ i tendeix a zero en apropar-se al punt singular $z_0 = 0$. No es pot estendre de manera holomorfa en aquest punt. Anàlogament les funcions $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}$ amb $n \geqslant 1$ tenen una singularitat en el punt z_0 amb $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.
- Essencial. La funció $f(z) = e^{1/z}$ és holomorfa a $\mathbb{C}^*$ i no existeix el límit a la singularitat. En efecte, si t és real $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \infty$, $\lim_{t\to 0^-} f(t) = 0$ i $\lim_{t\to 0} f(it)$ no existeix ja que $f(it) = e^{-i/t}$ dóna infinites voltes a la circumferència de radi 1 quan t s'apropa a zero. De fet, és fàcil veure que $f\big(D'(0;\epsilon)\big) = \mathbb{C}^*$ per a tot disc perforat de radi ϵ tan petit com es vulgui, i per tant els valors de la funció en tot entorn de la singularitat són tots els nombres complexos excepte un: el zero.

Definició 6.2 (Tipus de punts singulars) *Una singularitat z_0 d'una funció f holomorfa es diu*

- singularitat evitable *si existeix el límit* $\lim_{z\to z_0} f(z)$*;*
- pol *si* $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$*; i*
- singularitat essencial *altrament: el límit en el punt z_0 no existeix ni és infinit.*

En aquesta definició la singularitat evitable ho és en el sentit de continuïtat: correspon a una discontinuïtat evitable en el sentit que l'únic que es demana és que la funció es pugui estendre de manera contínua en el punt z_0. A continuació es veurà que aquesta extensió és necessàriament una funció holomorfa. Aquest fet és fals sobre els reals: una funció derivable de variable real pot tenir una discontinuïtat evitable en un punt però, en estendre-la de manera contínua, donar una funció que no sigui derivable en aquest punt. Per exemple la funció $f(x) = |x|$ és derivable a $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i té límit zero en el punt $x_0 = 0$ però en completar-la posant $f(0) = 0 = |0|$ la funció que s'obté és contínua però no derivable.

Teorema 6.3 (Teorema de Riemann d'evitació de singularitats) *Una singularitat z_0 és evitable si, i només si, la funció està fitada en algun entorn seu. En aquest cas posant $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$ es té una extensió holomorfa de la funció al punt singular.*

El comportament d'una funció holomorfa a l'entorn d'un pol és anàleg al que s'ha vist a la proposició 5.11 per als zeros:

Proposició 6.4 (Ordre d'un pol) *Sigui f holomorfa a un obert $\mathcal{U}$ excepte a un punt $z_0 \in \mathcal{U}$ en què té una singularitat. La singularitat z_0 és un pol si, i només si, existeix una descomposició de la forma*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}, \qquad m \geqslant 1, \quad g \textit{ holomorfa a } \mathcal{U}, \quad g(z_0) \neq 0.$$

En aquest cas la descomposició és única, es diu que z_0 és un pol d'ordre *m, i es posa*

$$\operatorname{ord}_{z_0}(f) = -m.$$

A tot entorn d'una singularitat essencial la funció es comporta molt erràticament, en el sentit que els seus valors es distribueixen per tot el pla complex. Hi ha dos resultats molt importants que descriuen aquest comportament. El primer, que es demostrarà a continuació, és el teorema de Casorati-Weierstrass, que assegura que els valors de la funció en tot entorn del punt són densos a $\mathbb{C}$. L'altre és el *teorema gran de Picard*, que és més difícil de demostrar i no es veurà en aquest curs. Diu que els valors de la funció en tot entorn del punt són tot $\mathbb{C}$ llevat, potser, d'un únic punt.

Teorema 6.5 (Casorati-Weierstrass) *Una singularitat és essencial si, i només si, la imatge de tot entorn seu és densa a $\mathbb{C}$.*

Definició 6.6 (Funció meromorfa) *Una* funció meromorfa *a un obert $\mathcal{U}$ és una funció definida i holomorfa a $\mathcal{U} \smallsetminus \mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$ que té pols en tots els punts de $\mathcal{S}$.*

O sigui, una funció que, en cada punt de $\mathcal{U}$, o bé és holomorfa o bé hi té un pol.

Igual que per a les funcions holomorfes, una funció es diu meromorfa a un subconjunt de $\mathbb{C}$ qualsevol, no necessàriament obert, per exemple un compacte o un punt, si és la restricció d'una funció meromorfa a algun obert que conté aquest conjunt.

Definició 6.7 (Ordre) *Si f és una funció meromorfa a $\mathcal{U}$ per a cada $z_0 \in \mathcal{U}$ es defineix*

$$\operatorname{ord}_{z_0}(f) \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

com l'enter $m \geqslant 0$ determinat per la proposició 5.11 si f és holomorfa no localment zero en el punt, ∞ si és holomorfa localment zero, i com l'enter $-m < 0$ determinat per la proposició 6.4 si f té un pol en el punt.

Les funcions que tenen ordre finit en un punt es caracteritzen de la manera següent:

Lema 6.8 (Funcions d'ordre finit) *Una funció f no localment zero és meromorfa en un punt z_0 si, i només si, existeix una funció g holomorfa amb $g(z_0) \neq 0$ tal que*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

en algun entorn del punt per a algun enter $m \in \mathbb{Z}$. En aquest cas, $m = \operatorname{ord}_{z_0}(f)$.

Proposició 6.9 *Si f i g són funcions meromorfes a un punt z_0,*

1. *$f + g$ és meromorfa a z_0 i $\operatorname{ord}_{z_0}(f + g) \geqslant \min\{\operatorname{ord}_{z_0}(f), \operatorname{ord}_{z_0}(g)\}$, amb igualtat si tots dos ordres són diferents;*
2. *fg és meromorfa a z_0 i $\operatorname{ord}_{z_0}(fg) = \operatorname{ord}_{z_0}(f) + \operatorname{ord}_{z_0}(g)$;*
3. *si f no és localment zero a z_0, $1/f$ és meromorfa a z_0 i $\operatorname{ord}_{z_0}(1/f) = -\operatorname{ord}_{z_0}(f)$.*

Corol·lari 6.10 *El conjunt $\mathscr{M}(\Omega)$ de les funcions meromorfes en un obert connex Ω és un cos.*

Exemples. Les funcions racionals són funcions meromorfes a qualsevol obert de $\mathbb{C}$. Si

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n(z-\alpha_1)^{n_1}\cdots(z-\alpha_r)^{n_r}}{b_m(z-\beta_1)^{m_1}\cdots(z-\beta_s)^{m_s}}$$

aleshores f té pols en els punts β_i en què s'anul·la el denominador, d'ordres m_i, les multiplicitats corresponents. En els zeros α_i del numerador la funció té ordre positiu n_i i en tot altre punt $z \neq \alpha_i, \beta_j$ l'ordre de la funció és zero.

La funció $f(z) = 1/(e^z - 1)$ és meromorfa a $\mathbb{C}$ amb infinits pols al conjunt $\mathcal{S} = 2\pi i\mathbb{Z}$, tots d'ordre 1. En efecte, tenint en compte el desenvolupament en sèrie de potències és clar que $\operatorname{ord}_0(e^z - 1) = 1$. Per tant, $\operatorname{ord}_0\big(1/(e^z-1)\big) = -1$. En els altres punts l'ordre és el mateix per periodicitat de la funció exponencial: a un entorn de zero i d'un complex de la forma $2\pi ik$ la funció exponencial i, per tant, la funció $f(z)$, pren els mateixos valors.

Problemes

6.1. Comproveu que $z_0 = 0$ és una singularitat evitable de la funció

$$f(z) = \frac{1}{\tan z} - \frac{1}{\sin z}$$

i digueu quin valor l'estén de manera holomorfa en aquest punt.

6.2. Trobeu tots els zeros i pols de la funcions següents i digueu quins són els seus ordres:

$$f(z) = \frac{(\cos z - 1)^3 \sin(z^2)\sin(\pi z)}{(e^{2\pi z} - 1)(z^2+1)}, \qquad g(z) = \frac{z(z-1)^3}{\sin^2(\pi z)}.$$

6.3. Sigui z_0 un punt singular de les funcions f i g. Estudieu el tipus de singularitat de les funcions $f+g$, $1/f$ i fg en el punt z_0 en funció del tipus de singularitat de f i de g.

6.4. Estudieu la singularitat $z_0 = 0$ de la funció

$$f(z) = \frac{\sin^p(z^q)}{z^r}, \qquad p, q, r \in \mathbb{Z}$$

6.5. Es diu que ∞ és una singularitat aïllada de la funció $f(z)$ si 0 és una singularitat aïllada de la funció $f(1/z)$. Per a quines funcions enteres ∞ és un pol? i una singularitat evitable?

6.6. Demostreu que no existeix cap funció f holomorfa a algun disc perforat $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(0; R)$ tal que $f(z)^2 = z$ per a tot $z \in \mathcal{D}'$.

6.2 Sèries de Laurent

Definició 6.11 *Una* corona circular *amb radi petit r i radi gran R, on $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$, és un obert de la forma*

$$\mathcal{D}(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}.$$

Es denotarà $\overline{\mathcal{D}}(z_0;r,R)=\{z\in\mathbb{C}: r\leqslant |z-z_0|\leqslant R\}$ la seva adherència i $C_r=C(z_0;r)$ i $C_R=C(z_0;R)$ les dues circumferències que són la seva frontera. L'*exterior* de la corona és el conjunt

$$\overline{\mathcal{D}}(z_0;r,R)^c=\{z\in\mathbb{C}: |z|<r \text{ o } |z|>R\}=\mathcal{D}(z_0;r)\cup\overline{\mathcal{D}}(z_0;R)^c.$$

Definició 6.12 (Sèries de Laurent) *S'anomena* sèrie de Laurent *una sèrie de la forma:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \qquad a_n\in\mathbb{C}. \tag{9}$$

La seva part principal *és la sèrie dels termes amb índex negatiu:*

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}, \tag{10}$$

i la seva part ordinària *és la sèrie de potències d'exponent positiu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n. \tag{11}$$

La convergència de les sèries de Laurent s'entén com la convergència per separat tant de la seva part principal com de la seva part ordinària i la suma de la sèrie (9) és la suma de les dues sumes (10) i (11).

Quan hi ha convergència absoluta no cal especificar com es calcula la suma ja que no depèn de l'ordre amb què s'agafen els seus termes.

Proposició 6.13 (Corona de convergència) *Tota sèrie de Laurent és absolutament convergent en una corona circular $\mathcal{D}=\mathcal{D}(z_0;r,R)$ de radis*

$$r=\limsup_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{|a_{-n}|} \qquad i \qquad R=\frac{1}{\limsup_{n\geqslant 0}\sqrt[n]{|a_n|}},$$

i divergent a l'exterior de la corona.

A més, és uniformement convergent sobre compactes a $\mathcal{D}$ i, per tant, defineix una funció holomorfa en aquesta corona.

Lema 6.14 (Integral d'una sèrie de Laurent) *Sigui $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ definida per una sèrie de Laurent convergent a la corona $\mathcal{D}(z_0;r,R)$. Per a tota circumferència $C=C(z_0;\rho)$ amb $r<\rho<R$,*

$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i a_{-1}.$$

Lema 6.15 (Teorema de Cauchy a una corona) *Si $f\colon\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ és una funció holomorfa a un obert $\mathcal{U}$ que conté la corona circular tancada $\overline{\mathcal{D}}(z_0;r,R)$,*

$$\int_{C_R} f(\zeta)\,d\zeta-\int_{C_r} f(\zeta)\,d\zeta=0.$$

Corol·lari 6.16 (Fórmula integral de Cauchy a una corona) *Si $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ és una funció holomorfa a un obert $\mathcal{U}$ que conté la corona circular tancada $\overline{\mathcal{D}}(z_0; r, R)$,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad \forall z \in \mathcal{D}(z_0; r, R).$$

Proposició 6.17 *Tota funció $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa a un obert $\mathcal{U}$ que conté una corona circular tancada $\overline{\mathcal{D}}(z_0; r, R)$ es pot posar de manera única com una suma $f = f_1 + f_2$ amb*

- *f_1 holomorfa a $\mathcal{D}(z_0; R) \cup \mathcal{U}$, i*
- *f_2 holomorfa a $\overline{\mathcal{D}}(z_0; r)^c \cup \mathcal{U}$ i amb $\lim_{z\to\infty} f_2(z) = 0$.*

Teorema 6.18 (Desenvolupament de Laurent) *Tota funció f holomorfa en una corona circular $\mathcal{D}(z_0; r, R)$ ve donada per una (única) sèrie de Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad \forall z \in \mathcal{D}(z_0; r, R),$$

amb coeficients

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, d\zeta, \qquad \forall n \in \mathbb{Z},$$

on $C = C(z_0; \rho)$ és una circumferència qualsevol de radi $r < \rho < R$.

Com que un disc perforat és una corona amb radi petit igual a zero aquest teorema es pot aplicar a discs perforats de centre una singularitat d'una funció holomorfa f:

Corol·lari 6.19 (Sèrie de Laurent en un punt singular) *Tota funció f holomorfa a un obert $\mathcal{U}$ excepte a un punt z_0, on té una singularitat, ve donada per una sèrie de Laurent en tot disc perforat $\mathcal{D}'(z_0; R) \subseteq \mathcal{U}$:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad \forall z \in \mathcal{D}'(z_0; R).$$

El tipus de singularitat queda caracteritzat per la part principal de la sèrie de Laurent corresponent:

Corol·lari 6.20 (Caracterització de les singularitats) *Una singularitat d'una d'una funció holomorfa és*

1. *evitable si, i només si, la part principal de la sèrie de Laurent és zero;*
2. *un pol si, i només si, la part principal de la sèrie de Laurent és no nul·la amb només un nombre finit de termes;*
3. *essencial si, i només si, la part principal de la sèrie de Laurent té infinits coeficients no nuls.*

Problemes

6.7. Trobeu les parts principals de la funció $\dfrac{8z^3}{(z+1)(z-1)^2}$ en els punts $z_0 = -1$ i $z_0 = 1$.

6.8. Calculeu la sèrie de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ en les corones:

1. $0 < |z| < 1$;
2. $1 < |z| < 2$;
3. $2 < |z| < \infty$.

6.9. Trobeu la sèrie de Laurent de les funcions següents en un disc perforat $\mathcal{D}(z_0; R)$ i digueu quin és el radi de convergència R.

$$f(z) = \frac{8-2z}{4z-z^3}, \text{ en } z_0 = 0; \qquad g(z) = \frac{\cos z}{(z-\pi)^3}, \text{ en } z_0 = \pi.$$

6.3 Residus

En aquesta secció es demostra el teorema del residu, una fórmula per al càlcul d'integrals de contorn de funcions que són holomorfes en un obert llevat singularitats aïllades. La fórmula dóna la integral en termes dels coeficients de a_{-1} dels desenvolupaments de Laurent de la funció en cadascun dels punts aïllats als quals el contorn dóna voltes.

Definició 6.21 (Residu) *El residu d'una funció holomorfa en una singularitat aïllada z_0 és el coeficient a_{-1} del desenvolupament de Laurent corresponent. Es denota* $\mathrm{Res}(f; z_0)$.

Teorema 6.22 (Teorema del residu) *Sigui $f\colon \mathcal{U} \setminus \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa amb singularitats aïllades als punts d'un conjunt $\mathcal{S} \subset \mathcal{U}$. Per a tot disc tancat $\overline{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{U}$ tal que la seva frontera C no passa per cap singularitat,*

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z_i \in \mathcal{D} \cap \mathcal{S}} \mathrm{Res}(f; z_i),$$

on la suma s'agafa sobre totes les singularitats de l'interior del disc.

Teorema 6.23 (Principi de l'argument) *Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ una funció meromorfa. Per a tot disc tancat $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{U}$ tal que la seva vora C no passa per cap zero ni cap pol de la funció,*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{f(z) \in \{0, \infty\}} \mathrm{ord}_z(f),$$

on la suma s'agafa sobre els zeros i pols de f a l'interior del disc.

Teorema 6.24 (Teorema de Rouché) *Siguin f i g holomorfes a un obert $\mathcal{U}$ que conté el disc tancat $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{U}$ de circumferència C. Si $|f(z)| > |g(z)|$ per a tot $z \in C$ aleshores f i $f + g$ tenen el mateix nombre de zeros en el disc $\mathcal{D}$.*

Observi's que el teorema val també en la situació una mica més general en què les funcions f i g són meromorfes i la circumferència C no conté ni zeros ni pols. En aquest cas es conserva la diferència entre el nombre de zeros i de pols de les funcions f i $f+g$. La demostració és exactament la que s'ha donat.

Càlcul de residus. El residu en una singularitat aïllada s'ha definit com un coeficient de la seva sèrie de Laurent en aquest punt. A la pràctica per a calcular el residu es pot calcular aquesta sèrie però hi ha altres maneres de trobar-lo. Es donen a continuació alguns resultats que poden ser útils per al càlcul de residus:

Lema 6.25 (Càlcul del residu en un pol) *Si f té un pol simple en el punt z_0,*

$$\operatorname{Res}(z_0; f) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z).$$

Més en general, si el pol és d'ordre m, posant $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ aleshores

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\big((z-z_0)^m f(z)\big).$$

Lema 6.26 (Regla de l'Hôpital) *Siguin f i g dues funcions meromorfes en un obert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$. Si f i g són holomorfes a z_0 i $f(z_0) = g(z_0) = 0$ o bé f i g tenen totes dues un pol a z_0, aleshores*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Lema 6.27 *Es considera una funció $f(z)/g(z)$ donada com a quocient de funcions f i g holomorfes al voltant d'un punt z_0. Si $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$ i $g'(z_0) \neq 0$ aleshores la funció f/g té un pol simple en z_0 i*

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}; z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Problemes

6.10. Classifiqueu la singularitat de les funcions següents en el punt $z_0 = 0$. Si és evitable, dieu quin valor l'evita; altrament doneu la part principal de la sèrie de Laurent corresponent.

$$\frac{\sin z}{z}, \quad \frac{\cos z}{z}, \quad \frac{\cos z - 1}{z}, \quad e^{1/z}, \quad z\cos(1/z).$$

6.11. Trobeu tots els pols, el seu ordre i el seu residu per a les funcions següents:

$$z\cot z, \qquad \frac{\sin z}{z^5}, \qquad \frac{1}{1-e^z}, \qquad \frac{z}{1-e^z}.$$

6.12. Trobeu totes les singularitats aïllades i el seu residu per a les funcions següents:

$$\frac{\sqrt{z}}{z^3-4z^2+4z}, \qquad \frac{e^{2z}}{z^2-z+1}, \qquad \frac{\cos(1/z)}{\sin z}.$$

INDICACIÓ: Useu la determinació principal de l'arrel.

6.13. Calculeu els residus $\operatorname{Res}(f, z_0)$ en els punts singulars indicats:

1. $f(z) = \dfrac{z-1}{z}$, en $z_0 = 0$;
2. $f(z) = \dfrac{1}{\sin(z(e^z-1))}$, en $z_0 = 0$;
3. $f(z) = \dfrac{1}{\sinh(2\operatorname{Log} z)}$, en $z_0 = i$;
4. $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z+i)^5}$, en $z_0 = -i$;
5. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^4}$, en $z_0 = 0$.

6.14. Demostreu que tota funció entera injectiva és de la forma $f(z) = az + b$ amb $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.
INDICACIÓ: feu servir els teoremes de Casorati-Weierstrass i de l'aplicació oberta per veure que $f(1/z)$ té un pol al punt $z = 0$.

6.15. Sigui $f(z)$ una funció holomorfa a un disc perforat $\mathcal{D}'(z_0; R)$ tal que existeixen constants A i $\epsilon > 0$ tals que

$$|f(z)| \leqslant A|z-z_0|^{-1+\varepsilon}, \qquad \forall z \in \mathcal{D}'(z_0; R).$$

Demostreu que f té una singularitat evitable en el punt z_0.

6.16. Doneu condicions necessàries i suficients per tal que una funció holomorfa en una corona $\mathcal{D}(z_0; r, R)$ tingui primitiva en aquesta corona en termes de la seva sèrie de Laurent.

6.17. *Examen final maig-17.* Sigui $f(z)$ una funció meromorfa en un obert $\mathcal{U}$ que conté un disc tancat $\overline{\mathcal{D}}(0; r)$ de radi $r > 1$ i tal que tots els seus pols són simples i tenen mòdul 1.

1. Demostreu que f té només un nombre finit de pols.
2. Demostreu que $f(z)$ es pot escriure de la forma:

$$f(z) = g(z) + \sum_{r=1}^{k} \frac{r_i}{z - z_i}, \qquad r_i = \operatorname{Res}(f; z_i)$$

   on els z_i són els pols de f i $g(z)$ és una funció holomorfa a tot $\mathcal{U}$.
3. Sigui $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la seva sèrie de potències al voltant de $z = 0$. Demostreu que la successió dels coeficients $(a_n)_{n \geqslant 0}$ està fitada.
   INDICACIÓ: Vegeu primer que la successió dels coeficients de $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ està fitada.
4. És compleix l'apartat anterior si hi ha algun pol que no sigui simple?

6.18. Calculeu $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ per a les funcions i contorns següents:

1. $f(z) = z^6 - 2iz^4 + (5-i)z^2 + 10$ amb γ una circumferència que té tots els zeros de f al seu interior.
2. $f(z) = z^2 + z$ amb γ una circumferència que té tots els zeros de f al seu interior.
3. $f(z) = \cos z$ amb γ la poligonal tancada de vèrtexs $10+i, -4+i, -4-i$ i $10-i$.

6.19. Siguin f i g funcions holomorfes en un obert que conté un disc tancat $\overline{\mathcal{D}}$ de circumferència $C = \partial\mathcal{D}$ tals que f no s'anul·la en C. Trobeu $\displaystyle\int_C \frac{f'(z)g(z)}{f(z)}\,dz$ en funció dels zeros de f.

6.20. Deduïu el teorema fonamental de l'àlgebra del teorema de Rouché comparant un polinomi no constant amb un altre del qual se saben els zeros.

6.21. Demostreu que la funció $2 + z^2 - e^{iz}$ només té un zero en el semiplà superior.

6.22. Sigui $\lambda > 1$ real. Demostreu que l'equació $z + e^{-z} = \lambda$ té una única solució amb part real estrictament positiva, i que aquesta solució és real.

6.23.
1. Vegeu que els quatre zeros de $P(z) = 4z^4 + 2(i-1)z + 1$ són dins el disc $|z| < 1$ i que tres d'ells són a la corona circular $1/2 < |z| < 1$.
2. Vegeu que tots els zeros de $P(z) = z^7 + 10z^3 + 14$ són a la corona $1 < |z| < 2$.
3. Localitzeu els zeros del polinomi $P(z) = z^9 - 8z^2 + 5$.

6.4 Càlcul d'integrals

El teorema dels residus es pot fer servir per a calcular integrals de manera anàloga a com es fa servir el teorema de Cauchy, però en aquest cas també es poden considerar contorns que al seu interior tinguin punts singulars d'una funció holomorfa. A continuació es donen alguns exemples típics d'aquesta tècnica.

Exemple 6.28

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$$

Exemple 6.29

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{at}}{1+e^t}\,dt = \frac{\pi}{\sin \pi a}, \qquad 0 < a < 1.$$

Exemple 6.30 *La transformada de Fourier de la funció* $1/\cosh \pi x$ *és ella mateixa:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh \pi t} e^{-2\pi i t\xi}\,dt = \frac{1}{\cosh \pi\xi}, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Problemes

6.24. Sigui γ la poligonal tancada de vèrtexs $0, 1+i, 2i, -1+i$ amb orientació positiva. Calculeu

$$\int_\gamma \frac{e^{-iz}}{1+z^2}\,dz.$$

6.25. *Integrals trigonomètriques racionals.* Es consideren integrals de la forma

$$I = \int_0^{2\pi} g(\cos t, \sin t)dt, \qquad g(X,Y) \in \mathbb{C}(X,Y)$$

amb g un quocient de polinomis en dues variables tal que el denominador de $g(\cos t, \sin t)$ no s'anul·la per a $t \in [0, 2\pi]$. Posant $z = e^{it}$ aquestes integrals es transformen en integrals de la forma

$$I = \int_{|z|=1} r(z)\,dz, \qquad r(X) \in \mathbb{C}(X)$$

amb r una funció raciona d'una variable sense pols a la circumferència unitat.

Calculeu d'aquesta manera la integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t}$. Compareu amb el problema **4.14**.

6.26. Comproveu que, per a tot nombre real $a > 1$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+\cos t)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}.$$

6.27. Siguin $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tals que $Q(X)$ no té arrels reals i amb graus $\deg Q \geqslant \deg P + 2$ per assegurar la convergència. Demostreu que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{z_i} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}; z_i\right)$$

on z_i varia sobre totes les arrels de $\mathbb{Q}$ al semiplà superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

6.28. Calculeu les integrals següents:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^4}$;
2. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^6}$;
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2-t+2}{t^4+10t^2+9}\,dt$.

6.29. Vegeu que, per a tot $n \geqslant 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\,\pi.$$

6.30. Vegeu que, per a tot $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i t\xi}}{(1+t^2)^2}\, dt = \frac{\pi}{2}\big(1 + 2\pi|\xi|\big)e^{-2\pi|\xi|}.$$

6.31. Vegeu que, per a tot real $a > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \sin t}{t^2 + a^2}\, dt = \pi e^{-a}.$$

6.32. Comproveu que, per a tot $a \in (0, 1)$,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

Què passa amb la integral quan $a = 0$ o 1?

6.33. *Examen final maig-17.* Calculeu la integral següent

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dt}{1+t^n}, \qquad \text{per a tot enter } n \geqslant 2$$

integrant la funció apropiada sobre la vora de sectors circulars d'angle $\frac{2\pi}{n}$. Doneu el valor de la integral simplificat, sense nombres complexos.

6.34. Calculeu la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t(1+t^2)}\, dt.$$

6.35. *Examen extraordinari juliol-17.* Calculeu, per a tot nombre real $a \neq 0$, la integral

$$\int_{0}^{\pi} \tan(t + ai)\, dt.$$

posant l'integrand en funció de e^{2it} i reduint el problema a una integral de contorn sobre la circumferència unitat.

6.36. *Lema de Jordan.* Sigui $f(z)$ una funció holomorfa amb un pol simple en z_0. Sigui γ_ϵ l'arc de circumferència de radi ϵ centrada en z_0 comprès entre els angles θ_0 i θ_1, amb orientació positiva. Demostreu que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\gamma_\epsilon} f(z)\, dz = (\theta_1 - \theta_0) i \operatorname{Res}(f; z_0).$$

6.37. *Suma de sèries usant residus.* Sigui f una funció holomorfa a tot el pla complex excepte en un conjunt (necessàriament numerable) $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$ de singularitats aïllades. Siguin $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{U}_n \subset \cdots \subset \mathbb{C}$ una successió d'oberts creixent amb $\cup \mathcal{U}_n = \mathbb{C}$ tal que les seves fronteres $\gamma_n^* = \partial \mathcal{U}_n$ són imatges de contorns tancats simples que donen una volta a tots els punts del seu interior i no contenen cap singularitat de f. Comproveu que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\gamma_n} f(z)\, dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{w \in \mathcal{S}} \operatorname{Res}(f; w) = 0.$$

Deduïu que, si $g(z)$ és una funció meromorfa a $\mathbb{C}$ amb només un nombre finit de pols als punts $z_1, z_2, \ldots, z_k$ i tal que $\lim_{z\to\infty} zg(z) = 0$, aleshores

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{z_i\}} g(n) = -\pi\sum_{i=1}^{k}\operatorname{Res}\big(g(z)\cot(\pi z); z_i\big),$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{z_i\}} (-1)^n g(n) = -\pi\sum_{i=1}^{k}\operatorname{Res}\big(g(z)\operatorname{cosec}(\pi z); z_i\big).$$

6.38. Usant el problema anterior calculeu les sumes següents:

1. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin\pi a)^2}$, per a tot $a\in\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{Z}$;
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24}$;
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$;
4. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2} = -\frac{\pi}{a}\cot(\pi a)$, per a tot $a\in\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{Z}$.

7 Temes complementaris

7.1 Teorema de Runge

En anàlisi real d'una variable el *teorema d'aproximació de Weierstrass* o *teorema de Stone-Weierstrass* diu que tota funció contínua en un interval compacte $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es pot aproximar uniformement per polinomis.

En aquesta secció es demostrarà el *Teorema d'aproximació de Runge*, que assegura que les funcions holomorfes en un compacte es poden aproximar uniformement per funcions racionals. De fet, es pot afinar una mica més l'enunciat i veure que la funció és límit uniforme de funcions racionals que tenen tots els seus pols en un conjunt finit que depèn de la topologia del compacte. En endavant es denotarà $K^c = \mathbb{C} \setminus K$ el complementari del conjunt compacte K.

Observi's que dir que una funció "es pot aproximar (uniformement)" per funcions d'una classe determinada equival a dir que la funció és límit (uniforme) d'una successió de funcions d'aquesta classe.

Es comença amb un lema que diu que, en bones condicions, una funció definida per una expressió integral és el límit uniforme sobre compactes d'una successió de funcions que corresponen a sumes de Riemann de la integral:

Lema 7.1 *Siguin $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ un obert, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un contorn i $\Phi\colon \mathcal{U} \times \gamma^* \to \mathbb{C}$ una funció contínua. Es defineix la funció $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ com la integral de contorn*

$$f(z) = \int_\gamma \Phi(z,\zeta)\, d\zeta, \qquad z \in \mathcal{U}.$$

Per a cada $n \geqslant 1$ es defineix la funció $R_n\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ posant

$$R_n(z) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(z,\zeta_i)(\zeta_i - \zeta_{i-1}), \qquad \zeta_i = \gamma(t_i), \quad t_i = a + i\frac{b-a}{n}b.$$

Aleshores la successió de funcions R_n convergeix cap a la funció f uniformement sobre tot compacte K contingut a l'obert $\mathcal{U}$.

Corol·lari 7.2 *Siguin f una funció holomorfa en un obert $\mathcal{U}$, $K \subset \mathcal{U}$ un subconjunt compacte i $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{U}$ un contorn amb $\gamma^* \cap K = \varnothing$. Suposi's que la funció ve donada a K per la fórmula integral de Cauchy:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz, \qquad \forall z \in K.$$

Aleshores la funció f és límit uniforme sobre K de funcions racionals amb tots els seus pols en punts de γ^*.

Recordi's que s'anomena *cadena* a una suma formal de contorns $\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$ i que es defineix la integral sobre Γ posant $\int_\Gamma f(z)\,dz := \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz$. Es denota $\Gamma^* = \bigcup \gamma_i^*$ la reunió de la imatge de tots els contorns.

En el lema següent es veu que sempre que es té un conjunt compacte contingut a un obert $K \subset \mathcal{U}$ existeix una cadena Γ amb imatge $\Gamma^* \subset \mathcal{U} \setminus K$ tal que la fórmula integral de Cauchy dóna els valors de les funcions holomorfes a $\mathcal{U}$ en tots els punts del compacte K en integrar sobre aquesta cadena.

Aquest resultat es pot veure com una generalització més de la fórmula integral de Cauchy, que s'ha demostrat abans per a punts d'un disc (teorema 5.1) i després per a contorns tancats qualsevol on s'ha de tenir en compte l'índex de cada punt (teorema 5.5). Això es pot interpretar com que la cadena Γ dóna una volta a cada punt del compacte K dins del l'obert $\mathcal{U}$, que és el domini de definició de la funció.

Lema 7.3 *Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa a un obert $\mathcal{U}$. Per a cada subconjunt compacte $K \subseteq \mathcal{U}$ existeix una cadena Γ amb imatge Γ^* continguda a $\mathcal{U} \setminus K$ tal que*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad \forall z \in K.$$

Lema 7.4 *Sigui $K \subseteq \mathbb{C}$ un compacte. Sigui $P \subseteq K^c$ un conjunt de punts (potser buit). El conjunt de les funcions $K \to \mathbb{C}$ que es poden aproximar uniformement per funcions racionals amb tots els pols a P és tancat per sumes, productes i límits uniformes.*

Lema 7.5 *Sigui $K \subset \mathbb{C}$ un subconjunt compacte i sigui $\Omega \subseteq K^c$ un subconjunt connex del seu complementari. Per a cada $w \in \Omega$ es defineix la funció $f_w\colon K \to \mathbb{C}$ posant $f_w(z) = \frac{1}{w-z}$.*

1. *Si Ω és no fitat, $f_w(z)$ és límit uniforme de polinomis per a tot $w \in \Omega$.*
2. *Fixat un punt $p \in \Omega$, tota funció $f_w(z)$ és límit uniforme de funcions racionals amb un únic pol a p per a tot $w \in \Omega$.*

Teorema 7.6 (Teorema de Runge) *Tota funció holomorfa en un conjunt compacte K es pot aproximar uniformement per funcions racionals. A més,*

- *si K^c és connex, la funció es pot aproximar uniformement per polinomis i*
- *donat un conjunt P que contingui punts en totes les components connexes fitades de K^c, la funció es pot aproximar uniformement per funcions racionals que només tenen pols en punts de P.*

Observi's que, tot i que per a un compacte K el complementari K^c pot tenir infinites components connexes (per exemple conjunts del tipus $\overline{D}(1;1) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(\frac{1}{n};\epsilon_n)$, que és un disc tancat on s'han tret infinits discs oberts disjunts), a la pràctica sempre es pot agafar un conjunt P que sigui finit, gràcies al fet que K està contingut en un obert on hi ha definida la funció holomorfa i les components connexes fitades que estiguin dins de l'obert en realitat no compten, ja que de fet la funció es pot estendre de manera holomorfa en aquests "forats" i es pot treballar amb un compacte una mica més gran que tingui només un nombre finit de forats. En efecte, si $\Gamma = \sum \gamma_i$ és la cadena del lema 7.3 aleshores cadascun dels contorns γ_i^* està contingut en alguna component connexa Ω_i de K^c i en l'argument de la demostració n'hi ha prou a passar cada pol de les funcions $R_n(z)$, que són punts de $\Gamma^* = \cup \gamma_i^*$, a un pol en la component connexa Ω_i corresponent.

Problemes

7.1. *Teorema de Runge per a oberts.* Demostreu que tota funció holomorfa en un obert $\mathcal{U}$ és el límit d'una successió de funcions racionals uniformement convergent sobre compactes continguts a $\mathcal{U}$ i que, a més,

- si $\mathcal{U}^c$ és connex, es pot agafar una successió de polinomis, i
- donat un conjunt P que contingui punts en totes les components connexes fitades de $\mathcal{U}^c$, es pot agafar una successió de funcions racionals amb tots els pols a P.

7.2. Demostreu que existeix una successió de polinomis $P_n(z) \in \mathbb{C}[z]$ tals que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(z) = \begin{cases} 0, & z \notin \mathbb{R}, \\ 1, & z \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

7.2 Teorema de l'aplicació conforme de Riemann

Etimològicament la paraula *conforme* significa "amb la mateixa forma". Intuïtivament les aplicacions conformes són les que preserven localment la forma. En càlcul diferencial s'anomenen així les funcions que conserven els angles en cada punt. En variable complexa aquest concepte es fa servir com a sinònim de "biholomorfisme": una funció que tant ella com la seva inversa són holomorfes. Concretament, es defineix de la manera següent:

Definició 7.7 (Transformacions conformes) *Siguin $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ oberts de $\mathbb{C}$. Una* transformació conforme *entre $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ és una funció $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ holomorfa, bijectiva i amb inversa holomorfa.*

Els oberts $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ es diuen conformement equivalents *si existeix una transformació conforme de l'un a l'altre.*

Les transformacions conformes d'un obert $\mathcal{U}$ en ell mateix s'anomenen automorfismes *i es denoten* $\mathrm{Aut}(\mathcal{U})$*. Formen un grup amb la composició.*

El teorema de l'aplicació oberta (teorema 5.16) junt amb el corol·lari 5.20 asseguren que tota funció $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa i injectiva és una transformació conforme entre $\mathcal{U}$ i la seva imatge $f(\mathcal{U})$: el teorema diu que $\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$ és un obert de $\mathbb{C}$ i el corol·lari que la funció inversa $f^{-1}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ també és holomorfa.

La condició de ser conformement equivalents és una relació d'equivalència i classifica els oberts de $\mathbb{C}$ en classes d'equivalència conforme. L'objectiu a continuació és demostrar un dels resultats més importants en relació a aquesta classificació, el teorema de l'aplicació conforme de Riemann, que diu que els oberts simplement connexos formen dues classes: una conté només el propi $\mathbb{C}$ i l'altra conté tots els demés oberts simplement connexos diferents de tot $\mathbb{C}$. Un representant d'aquesta segona classe és el disc unitat $\mathbb{D} = \mathcal{D}(0;1)$. L'afirmació es redueix a veure que $\mathbb{C}$ i $\mathbb{D}$ no són conformement equivalents, i això és una conseqüència immediata del teorema de Liouville, i que tot obert simplement connex diferent de $\mathbb{C}$ és conformement equivalent al disc $\mathbb{D}$, que s'acabarà finalment veient, després de diversos preliminars, al teorema 7.17.

Exemple 7.8 *L'aplicació $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ és una transformació conforme entre el disc unitat $\mathbb{D}$ i el semiplà superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{im} z > 0\}$.*

Tot disc i tot semiplà són conformement equivalents i es poden trobar transformacions conformes de l'un en l'altre que siguin transformacions de Möbius.

Exemple 7.9 *L'aplicació exponencial és una transformació conforme entre una banda horitzontal $\{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Im} z < a + \alpha\}$ i un sector circular $\{z \in \mathbb{C}^* : a < \operatorname{Arg} z < a + \alpha\}$ per a tot $0 < \alpha < 2\pi$.*

Exemple 7.10 (Factors de Blaschke) *Per a cada $w \in \mathbb{C}$ amb $|w| < 1$ la funció definida posant $B_w(z) = \frac{w-z}{1-\overline{w}z}$ és un automorfisme del disc $\mathbb{D}$ que intercanvia 0 amb w.*

Primerament es veu un resultat que s'obté fàcilment com a conseqüència del teorema d'Arzelà-Ascoli de l'anàlisi funcional, i que es pot veure com una generalització d'aquest teorema per a funcions de variable complexa en què la hipòtesi d'equicontinuïtat no és necessària ja que es dedueix del fet que les funcions siguin uniformement fitades.

Teorema 7.11 (Teorema de Montel) *Sigui $(f_i)_{i\in I}$ una família de funcions holomorfes en un obert $\mathcal{U}$. Suposi's que $(f_i)_{i\in I}$ és uniformement fitada sobre compactes: per a cada subconjunt compacte $K \subset \mathcal{U}$ existeix una constant M_K tal que $|f_i(z)| \leqslant M_K$ per a tot $i \in I$ i tot $z \in K$. Aleshores tota successió de funcions d'aquesta família té una parcial uniformement convergent sobre compactes.*

Lema 7.12 (Lema de Schwarz) *Si $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ és holomorfa amb $f(0) = 0$,*

- *$|f(z)| \leqslant |z|$ per a tot $z \in \mathbb{D}$, i*
- *$|f'(0)| \leqslant 1$.*

A més, si $|f(z)| = |z|$ per a algun $z \neq 0$ o bé $|f'(0)| = 1$ aleshores f és una rotació: $f(z) = e^{i\theta}z$ per a algun angle $\theta \in \mathbb{R}$.

Teorema 7.13 (Automorfismes del disc) *Els automorfismes del disc $\mathbb{D}$ són les funcions de la forma $z \mapsto e^{i\theta}\frac{z-w}{1-\overline{w}z}$ amb $\theta \in \mathbb{R}$ i $w \in \mathbb{D}$. Els que fixen el zero són les rotacions.*

Proposició 7.14 *Per a tot obert simplement connex $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ diferent de tot $\mathbb{C}$ existeix una funció holomorfa injectiva $f\colon \Omega \hookrightarrow \mathbb{D}$ en el disc unitat.*

Teorema 7.15 (Teorema de Hurwitz) *Sigui (f_n) una successió de funcions holomorfes a un obert $\mathcal{U}$ que convergeix uniformement sobre compactes cap a una funció f. Per a tot punt $z_0 \in \mathcal{U}$ amb $\operatorname{ord}_{z_0}(f) = m \geqslant 0$ existeix un $R > 0$ tal que per a tot r amb $0 < r < R$ totes les funcions f_n tenen exactament m zeros al disc $\mathcal{D}(z_0; r)$ per a n suficientment gran.*

Corol·lari 7.16 *Sigui (f_n) una successió de funcions holomorfes a un obert connex Ω uniformement convergent sobre compactes cap a una funció f. Si totes les f_n són injectives aleshores f és injectiva o constant.*

Teorema 7.17 (Teorema de l'aplicació conforme de Riemann) *Tot obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplement connex diferent de tot $\mathbb{C}$ és conformement equivalent al disc unitat.*

Problemes

7.3. Sigui $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ un obert i $z_0 \in \mathcal{U}$ un punt fixat. Sigui $\mathcal{H}_{z_0}(\mathcal{U}, \mathbb{D})$ el conjunt de les funcions holomorfes $\mathcal{U} \to \mathbb{D}$ que s'anul·len en z_0. Si $\phi \in \mathcal{H}_{z_0}(\mathcal{U}, \mathbb{D})$ és una transformació conforme, demostreu que

$$|f(z)| \leqslant |\phi(z)| \quad \forall z \in \mathcal{U} \quad \text{i} \quad |f'(z_0)| \leqslant |\phi'(z_0)|$$

per a tota funció $f \in \mathcal{H}_{z_0}(\mathcal{U}, \mathbb{D})$.

A més, la primera igualtat es compleix per a algun $z \neq z_0$ de $\mathcal{U}$ o bé la segona es compleix per a z_0 si, i només si, $f = e^{i\theta}\phi$ per a algun angle θ.

7.4. *Altra demostració de la proposició 7.14* Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un obert simplement connex i sigui $w \in \Omega$ un punt. Sigui $z \mapsto f(z) = \operatorname{Log} z - \operatorname{Log} w + 2\pi i \colon \Omega \to \mathbb{C}$, on Log és una determinació del logaritme a Ω. Demostreu que existeix un entorn de 0 que no talla $f(\Omega)$ i deduïu que Ω és homeomorf a un obert contingut al disc unitat $\mathcal{D}(0; 1)$.

Referències

[1] Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979 (3rd. ed.)

[2] M. Beck; G. Marchesi; D. Pixton; L. Sabalka *A first course in Complex Analysis*, San Francisco State University course notes online, 2009.

[3] Joaquim Bruna; Julià Cufí, *Anàlisi Complexa*, Publicacions UAB, 2008.
English translation: *Complex Analysis*, EMS Textbooks in Mathematics, 2010.

[4] Henri Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1985 (6ème. éd.)

[5] John B. Conway, *Functions of one complex variable*, Springer GTM-11, 1978 (2nd. ed.)

[6] Eberhard Freitag; Rolf Busam, *Complex Analysis*, Springer 2005.

[7] T.W. Gamelin, *Complex Analysis*, Springer, 2001.

[8] Peter Henrici, *Applied and computational Complex Analysis* (3 vols.), Wiley, 1974–1977–1986.

[9] Steven G. Krantz, *Handbook of complex variables*, Birkhäuser, 1999.

[10] Serge Lang, *Complex Analysis*, Springer GTM-103, 1999 (4th. ed.)

[11] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1970.

[12] Elias M. Stein; Rami Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003.

[13] Terence Tao, UCLA fall 2016 Math 246A - Complex Analysis, Course notes.