

# Estructures Algebraiques: Tema 1

Dean

December 12, 2017

## Contents

<b>1</b>	<b>TODO Grup</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>TODO Interseccio, unio, producte i generacio</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Elements d'un grup</b>	<b>3</b>
3.1	Definico Centre . . . . .	3
3.2	Definico Centralitzador . . . . .	3
3.3	Definico Normalitzador . . . . .	3
3.3.1	Observacio: . . . . .	3
<b>4</b>	<b>TODO Ordre d'un element, grup ciclic</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>TODO Morfismes de grups</b>	<b>4</b>
<b>6</b>	<b>Classes laterals</b>	<b>4</b>
6.1	Definico . . . . .	4
6.2	Definico de la classe d'equivalencia . . . . .	4
6.3	Definico Classe Lateral: . . . . .	4
6.3.1	Observacio: . . . . .	4
6.4	Teorema de Lagrange . . . . .	4
6.4.1	<b>TODO</b> Demo . . . . .	4
<b>7</b>	<b>Subgrup normal, Grup quocient</b>	<b>4</b>
7.1	Definico: Subgrup Normal . . . . .	4
7.2	Lema . . . . .	4
7.2.1	<b>TODO</b> Demo . . . . .	5
7.3	Observacio . . . . .	5
7.4	Observacio . . . . .	5
7.5	Definico: Operacio interna . . . . .	5
7.6	Corollari . . . . .	5
7.7	Exercici: La aplicacio quocient es un morfisme . . . . .	5
<b>8</b>	<b>Primer teorema d'isomorfisme</b>	<b>5</b>
8.1	<b>TODO</b> Teorema: . . . . .	5

<b>9</b>	<b>El grup multiplicatiu d'un cos finit</b>	<b>5</b>
9.1	Definició . . . . .	5
9.2	Teorema . . . . .	6
9.2.1	<b>TODO</b> demo . . . . .	6
<b>10</b>	<b>Grup simples</b>	<b>6</b>
10.1	Definició . . . . .	6
10.2	Proposició . . . . .	6
10.2.1	<b>TODO</b> Demo . . . . .	7
10.3	Teorema de Feit-Thompson . . . . .	7
10.4	Teorema . . . . .	7
10.4.1	<b>TODO</b> Demo . . . . .	7
10.5	Proposició . . . . .	7
10.5.1	<b>TODO</b> Demo . . . . .	7
<b>11</b>	<b>Grup resolubles</b>	<b>7</b>
11.1	Definició torre normal . . . . .	7
11.2	Definició Grup Resoluble . . . . .	7
11.3	Teorema: Segon Teorema d'isomorfisme . . . . .	7
11.3.1	<b>TODO</b> Demo . . . . .	8
11.4	Teorema: Jordan-Holder . . . . .	8
11.4.1	<b>TODO</b> Demo . . . . .	8
11.5	Proposició . . . . .	8
<b>12</b>	<b>Accio d'un grup en un conjunt</b>	<b>8</b>
12.1	Definició: Accio d'un grup en un conjunt . . . . .	8
12.2	Observació . . . . .	8
12.3	Definició: Orbita d'un element . . . . .	8
12.4	Definició: L'estabilitzador/grup d'isotropia d' $x \in X$ . . . . .	8
12.5	Lema: . . . . .	8
12.5.1	<b>TODO</b> DEMO . . . . .	9
12.6	Proposició . . . . .	9
12.6.1	<b>TODO</b> DEMO . . . . .	9
12.7	Definició: punt fix . . . . .	9
12.8	Definició: Accio Transitiva . . . . .	9
12.9	Definició: Accio Fidel . . . . .	9
12.9.1	Observació: . . . . .	9
12.10	Accio per translació en $X$ , quan $X = G$ . . . . .	9
12.11	Teorema de Cayley . . . . .	10
12.11.1	<b>TODO</b> Demo . . . . .	10
12.12	Definició: Accio per conjugació de $G$ en $X = G$ . . . . .	10
12.12.1	Centre . . . . .	10
12.12.2	Centralitzador . . . . .	10
12.13	Definició: Accio per translació en les classes laterals . . . . .	10
12.14	Definició: Accio per conjugació en els subgrups . . . . .	10
12.15	Teorema de Cauchy . . . . .	11

12.15.1 <b>TODO</b> Demo . . . . .	11
<b>13 Subgrups de Sylow</b>	<b>11</b>
13.1 Definicio: p-grups: Subgrups de Sylow . . . . .	11
13.2 Teorema: . . . . .	11
13.2.1 <b>TODO</b> demo . . . . .	11
<b>14 Teoremas de Sylow</b>	<b>11</b>
14.1 Teorema: Primer Teorema de Sylow . . . . .	11
14.2 Definicio . . . . .	11
14.2.1 Observacio: . . . . .	11
14.3 Teorema: Segon Teorema de Sylow . . . . .	12
14.3.1 <b>TODO</b> Demo . . . . .	12

## 1 **TODO Grup**

## 2 **TODO Interseccio, unio, producte i generacio**

## 3 **Elements d'un grup**

### 3.1 **Definicio Centre**

Signi  $G$  un grup, llavors el Centre  $G$  es  $\mathcal{Z}(G) = \{a \in G \mid aba^{-1} = b \quad \forall b \in G\} = \{a \in G \mid ab = ba \quad \forall b \in G\}$ .

### 3.2 **Definicio Centralitzador**

Signi  $G$  un grup, i  $H$  un subgrup de  $G$  llavors el Centralitzador de  $H$  en  $G$  es  $\mathcal{Z}_G(H) = \{a \in G \mid aba^{-1} = b \quad \forall b \in H\} = \{a \in G \mid ab = ba \quad \forall b \in H\}$ .

### 3.3 **Definicio Normalitzador**

Signi  $G$  un grup, i  $H$  un subgrup de  $G$ , llavors el normalitzador de  $H$  en  $G$  es  $N_G(H) = \{a \in G \mid aHa^{-1} = H\} = \{a \in G \mid aH = Ha\}$ .

#### 3.3.1 **Observacio:**

Normalitzador de  $H$  en  $G = G \iff H \triangleleft G$

## 4 TODO Ordre d'un element, grup ciclic

## 5 TODO Morfismes de grups

## 6 Classes laterals

### 6.1 Definició

Sigui  $G$  un grup i  $H$  un subgrup de  $G$ .  $a, b \in G$ .

Definim  $a \sim b$  (esquerra)  $\iff a^{-1}b \in H$

### 6.2 Definició de la classe d'equivalència

$$\bar{a} := \{ b \in G \mid a \sim b \}$$

$$aH := \{ ax \mid x \in H \}$$

Observem que  $aH = \bar{a}$

A més  $H$  i  $aH$  tenen el mateix cardinal.

### 6.3 Definició Classe Lateral:

Anomenem  $G/H = \{aH \mid a \in G\}$  el conjunt de les classes laterals per l'esquerra (conjunt quocient).

Diem també que l'índex de  $H$  en  $G$  es  $[G : H] = |G/H|$  = nombre d'elements de  $G$  modul  $H$

#### 6.3.1 Observació:

1. El nombre de classes laterals per l'esquerra es el mateix que el nombre de classes laterals per la dreta.
2. L'índex és multiplicatiu.  $K \subset H \subset G$ . Llavors  $[G:K] = [G:H] * [H:K]$

### 6.4 Teorema de Lagrange

Sigui  $G$  un grup i  $H$  un subgrup,  $G$  finit.

Aleshores  $|G| = |G/H| * |H| \iff |G/H| = \frac{|G|}{|H|}$ , i a més  $|H|$  divideix  $|G|$ .

#### 6.4.1 TODO Demo

## 7 Subgrup normal, Grup quocient

### 7.1 Definició: Subgrup Normal

Sigui  $G$  un grup,  $H$  un subgrup de  $G$ .  $H$  és subgrup normal de  $G$  si  $aH = Ha \forall a \in G$ .

### 7.2 Lema

$f: G_1 \rightarrow G_2$  morfisme de grups. Aleshores,

1. Si  $H_1 \triangleleft G_1 \implies f(H_1) \triangleleft f(G_1)$ .

2. Si  $H_2 \triangleleft G_2 \implies f^{-1}(H_2) \triangleleft G_1$ .

### 7.2.1 TODO Demo

### 7.3 Observacio

$H \subseteq K \subseteq G$ ,  $H, K$  subgrups de  $G$ . Aleshores.

Si  $H \triangleleft G \implies H \triangleleft K$ . El reciproc es fals.

### 7.4 Observacio

si  $H \triangleleft G$ , aleshores  $(aH)^*(bH) = (ab)H$

### 7.5 Definicio: Operacio interna

Sigui  $H \triangleleft G$  i sigui  $G/H = \{aH \mid a \in G\}$  el conjunt de classes laterals per l'esquerra modul  $H$ . En  $G/H$  definim l'operacio interna:

$$\begin{aligned} G/H \times G/H &\rightarrow G/H \\ aH \times bH &\mapsto (ab)H \end{aligned}$$

### 7.6 Corol.lari

$G/H$  es un grup i s'anomena el grup quocient de  $G$  per  $H$ .

### 7.7 Exercici: La aplicacio quocient es un morfisme

## 8 Primer teorema d'isomorfisme

### 8.1 TODO Teorema:

Sigui  $f : G_1 \rightarrow G_2$  morfisme de grups, Sigui  $H \triangleleft G_1$ , i sigui l'aplicació

$$\begin{aligned} \tilde{f} : G_1/H &\rightarrow G_2 \\ aH &\mapsto \tilde{f}(aH) := f(a) \end{aligned}$$

## 9 El grup multiplicatiu d'un cos finit

### 9.1 Definicio

Sigui  $\mathbb{K}$  un cos. El grup multiplicatiu de  $\mathbb{K}$  és

$$\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{K} \mid x \neq 0\}$$

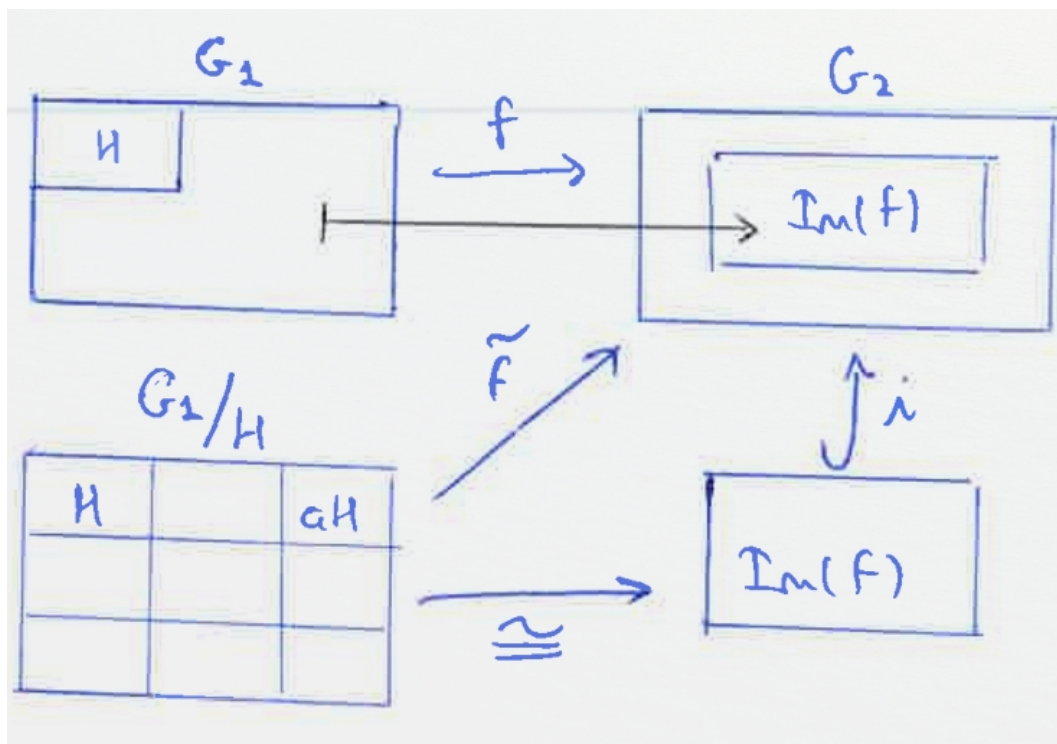


Figure 1: Primer teorema d'isomorfisme

## 9.2 Teorema

Sigui  $\mathbb{K}$  un cos. Sigui  $G$  un subgrup finit de  $\mathbb{K}^*$ . Aleshores  $G$  és cíclic

### 9.2.1 TODO demo

## 10 Grup simples

### 10.1 Definició

Sigui  $G$  un grup no trivial. Direm que  $G$  és simple si els únics subgrups normals de  $G$  són  $\{1\}$  i  $G$ .

### 10.2 Proposició

Sigui  $G$  un grup no trivial. Son equivalents

1.  $G$  és simple i abeliana
2.  $|G| = p$ , on  $p$  és primer
3.  $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

### 10.2.1 TODO Demo

## 10.3 Teorema de Feit-Thompson

Sigui  $G$  grup simple, Suposem  $|G|$  es senar. Aleshores  $G$  es ciclic i  $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

## 10.4 Teorema

Sigui  $n \geq 5$ , Aleshores  $\mathcal{A}_n$  es simple

### 10.4.1 TODO Demo

## 10.5 Proposicio

Sigui  $G$  un grup,  $H \triangleleft G$ . Aleshores,  
 $G/H$  es grup simple  $\iff H$  es un element maximal en el conjunt  $\{K \mid K \triangleleft G, K \neq G\}$

### 10.5.1 TODO Demo

## 11 Grup resolubles

### 11.1 Definicio torre normal

Una torre normal de  $G$  es  $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_n = \{1\}$  on  $G$  es un grup i  $G_i \triangleleft G_{i+1}$ .  
Anomenem  $n$  la *longitud de la torre*  
 $G_{i-1}/G_i$  s'anomenen els *quocients de la torre*

A mes definim:

- **Torre normal abeliana:** Torre normal amb quocients abelians.
- **Torre normal simple/serie de composicio:** Torre normal amb quocients abelians

### 11.2 Definicio Grup Resoluble

Direm que  $G$  es resoluble si te una torre normal abeliana.

### 11.3 Teorema: Segon Teorema d'isomorfisme

Sigui  $G$  grup i  $H, K$  dos subgrups de  $G$ . Suposem  $H \triangleleft G$ . Aleshores:

1.  $H \cap K \triangleleft K$
2.  $H \cdot K$  es subgrup de  $G$
3.  $H \triangleleft H \cdot K$
4. A mes a mes,  $K/H \cap K \cong H \cdot K/H$

### 11.3.1 TODO Demo

### 11.4 Teorema: Jordan-Holder

Sigui  $G$  un grup i  $\left\{ \begin{array}{l} G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_n = \{1\} \\ G = H_0 \triangleright H_1 \triangleright H_2 \triangleright \dots \triangleright H_m = \{1\} \end{array} \right\}$  Dues series de composicio de  $G$

Aleshores  $n = m$ , i  $\exists \sigma \in \mathcal{S}_n$  tal que  $H_i/H_{i+1} \cong G_{\sigma(i)}/G_{\sigma(i)+1}$ .

### 11.4.1 TODO Demo

### 11.5 Proposicio

Sigui  $G$  un grup,  $H$  un subgrup de  $G$ . Aleshores

1. Si  $G$  es resoluble  $\implies H$  es resoluble
2. Si  $H \triangleleft G$  i  $G$  es resoluble  $\implies G/H$  es resoluble
3. Si  $H \triangleleft G$  i  $H$  i  $G/H$  son resolubles  $\implies G$  es resoluble

## 12 Accio d'un grup en un conjunt

### 12.1 Definicio: Accio d'un grup en un conjunt

Sigui  $G$  un grup. Sigui  $X$  un conjunt. Una accio de  $G$  en  $X$  es una aplicacio

$$\begin{aligned} \varphi : G \times X &\rightarrow X \\ (a, x) &\mapsto \varphi(a, x) = ax \end{aligned}$$

tal que:

1.  $a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x \quad \forall a, b \in G, \forall x \in X$
2.  $1 \cdot x = x \quad \forall x \in X$

### 12.2 Observacio

Hi ha una bijeccio entre

$$\{\varphi : G \times X \rightarrow X \mid \varphi \text{ accio de } G \text{ en } X\} \leftrightarrow \{\phi : G \rightarrow \text{Perm}(X) \mid \phi \text{ morfisme de grups}\}$$

### 12.3 Definicio: Orbita d'un element

L'orbita de  $x \in X$  es el subconjunt  $G \cdot x = \{ax \mid a \in G\} \subseteq X$

### 12.4 Definicio: L'estabilitzador/grup d'isotropia d' $x \in X$

$G_x := \{a \in G \mid ax = x\} \subseteq G$ , es un subgrup de  $G$ .

### 12.5 Lema:

Si  $x, y$  estan en la mateixa orbita, els seus estabilitzadors son conjugats.

Concretament, si  $y = ax \implies G_y = aG_xa^{-1}$



### 12.5.1 TODO DEMO

## 12.6 Proposicio

L'aplicacio

$$G \cdot x \rightarrow G/G_x$$

$$ax \mapsto a \cdot G_x$$

esta ben definida i es bijectiva. En particular,

1.  $|G \cdot x| = |G/G_x| = [G : G_x]$
2. Si  $G$  es finit,  $|G \cdot x| \mid |G|$
3. Si  $X$  es finit,  $|X| = \sum_{i=1}^n |G \cdot x_i| = \sum_{i=1}^n [G : G_{x_i}]$

### 12.6.1 TODO DEMO

## 12.7 Definicio: punt fix

$x \in X$  es un punt fix per l'accio si  $ax = x \forall a \in G$ . En particular  
 $G \cdot x = \{ax \mid a \in G\} = \{x\}$ ,  $G_x = \{a \in G \mid ax = x\} = G$

## 12.8 Definicio: Accio Transitiva

$G \times X \rightarrow X$  es accio transitiva si  $\forall x, y \in X, \exists a \in G$  tal que  $y = ax$ .  
 En aquest cas.  $G \cdot y = X \forall y \in X$ .

## 12.9 Definicio: Accio Fidel

$G \times X \rightarrow X$  es accio fidel si  $\forall a \neq b, a, b \in G$ . Aleshores  $m_a \neq m_b$ , on

$$m_a : X \rightarrow X$$

$$x \mapsto ax$$

$$m_a \in \text{Perm}(X)$$

### 12.9.1 Observacio:

Si be  $G \times X \rightarrow X \cong m : G \rightarrow \text{Perm}(X)$  es morfisme de grups, si imposem que es fidel, el morfisme es injectiu. A mes si  $X$  es finit l'accio es isomorf a un subgrup del grup simetric.

## 12.10 Accio per translacio en X, quan $X = G$

Segui  $G$  un grup, definim

$$G \times G \rightarrow G$$

$$a \quad x \mapsto a \cdot x = ax$$

I es efectivament una accio.

### 12.11 Teorema de Cayley

Sigui  $G$  un grup finit,  $n = |G|$ . Aleshores  $G$  es isomorf a un subgrup del grup simetric  $\mathcal{S}_n$

#### 12.11.1 TODO Demo

### 12.12 Definicio: Accio per conjugacio de $G$ en $X = G$

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ a \quad x &\mapsto a \cdot x = axa^{-1} \end{aligned}$$

#### 12.12.1 Centre

$x \in G$  es punt fix  $\iff a \cdot x = x \quad \forall a \in G \iff axa^{-1} = x \quad \forall a \in G \iff ax = xa \quad \forall a \in G \iff x \in \mathcal{Z}(G) = \{x \in G \mid ax = xa \quad \forall a \in G\} =$  centre de  $G$ . El centre de  $G$  es subgrup.

#### 12.12.2 Centralitzador

L'estabilitzador de  $y \in G$  es  $G_y = \{a \in G \mid a \cdot y = y\} = \{a \in G \mid aya^{-1} = y\} = \{a \in G \mid ay = ya\} = \mathcal{Z}_G(y)$ , centralitzador de  $G$ . El centralitzador tambe es un subgrup de  $G$ .

### 12.13 Definicio: Accio per translacio en les classes laterals

Sigui  $G$  grup,  $H$  subgrup de  $G$  i  $X = G/H = \{aH \mid a \in G\}$

$$\begin{aligned} G \times G/H &\rightarrow G/H \\ a \quad bH &\mapsto abH \end{aligned}$$

- Es una accio transitiva.
- si  $aH \in X = G/H$ : L'estabilitzador de  $aH$  es  $G_{aH} = \{b \in G \mid b(aH) = aH\} = aHa^{-1}$

### 12.14 Definicio: Accio per conjugacio en els subgrups

Sigui  $G$  grup i  $X = \{H \mid H \text{ subgrup de } G\}$ .

$$\begin{aligned} G \times \{\text{sg. de } G\} &\rightarrow \{\text{sg. de } G\}, \text{ conjugat de } H \\ a \quad H &\mapsto aHa^{-1} \end{aligned}$$

Si  $H$  es subgrup de  $G$ , l'orbita d' $H$  es:

$G \cdot H = \{a \cdot H \mid a \in G\} = \{aHa^{-1} \mid a \in G\}$ : els conjugats de  $H$

$H$  es punt fix per l'accio si  $a \cdot H = H \iff aHa^{-1} = H \quad \forall a \in G \iff H$  es subgrup normal de  $G$

L'estabilitzador de  $H$  es:  $G_H = \{a \in G \mid a \cdot H = H\} = \{a \in G \mid aHa^{-1} = H\} = N_G(H)$ :

Normalitzador de  $H$  en  $G$

Sabem que  $|G \cdot H| = [G : G_H]$ . Per tant.

$H \triangleleft G \iff H$  es punt fix per l'accio  $\iff$  L'orbita de  $H$  te un sol punt  $\iff |G \cdot H| = 1 \iff [G : G_H] = 1 \iff G_H = G \iff N_G(H) = G$

### 12.15 Teorema de Cauchy

Signi  $G$  un grup finit,  $|G| = n$ . Signi  $p$  primer tal que  $p|n$ .  
Aleshores,  $\exists x \in G$  tal que  $\text{ord}(x) = p$

#### 12.15.1 TODO Demo

## 13 Subgrups de Sylow

### 13.1 Definicio: p-grups: Subgrups de Sylow

Signi  $G$  un grup i  $p$  un nombre primer. Aleshores,  $G$  es un  $p$ -grup  $\iff |G| = p^r$  per a algun  $r \geq 0$ .

### 13.2 Teorema:

Signi  $G$  un  $p$ -grup. Aleshores,  $|G| = p^r$ ,  $r \geq 0$ , i:

1.  $G$  no trivial  $\iff \mathcal{Z}(G)$  no trivial.
2.  $G$  es resoluble
3. si  $G$  es simple, aleshores  $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

#### 13.2.1 TODO demo

## 14 Teoremas de Sylow

### 14.1 Teorema: Primer Teorema de Sylow

Signi  $G$  un grup finit i considerem  $p$  primer,  $r \geq 0$ .  
Aleshores, si  $p^r || |G| \implies G$  conte un subgrup d'ordre  $p^r$

### 14.2 Definicio

Signi  $G$  grup finit,  $|G| = p^r \cdot m$ ,  $p$  primer,  $r \geq 0$ ,  $p \nmid m$ .

Denotem  $\text{Syl}_p(G) = \{H \mid H \text{ subgrup de } G, |H| = p^r\}$ .

Els anomenem els  $p$ -subgrups de Sylow de  $G$  ( $p$ -Sylow de  $G$ ) i denotem  $n_p(G) = \text{cardinal de } \text{Syl}_p(G)$ .

#### 14.2.1 Observacio:

1. El conjugat d'un  $p$ -Sylow es un  $p$ -Sylow ja que  $|H| = |aHa^{-1}|$ .
2. Els  $P$ -subgrups son  $\{H \mid H \text{ subgrup de } G, |H| = p^s, s \leq r\}$ .

### 14.3 Teorema: Segon Teorema de Sylow

Sigui  $G$  grup finit,  $|G| = p^r \cdot m$ ,  $p$  primer,  $r \geq 0$ ,  $p \nmid m$ .

1. Si  $L$  es un  $p$ -subgrup de  $G$  ( $|L| = p^s, s \leq r$ ). Aleshores  $\exists H \in Syl_p(G)$  tal que  $L \subseteq H$
2. Si  $H$  i  $P$  son dos  $p$ -Sylow de  $G$ . Aleshores  $\exists a \in G$  tal que  $aHa^{-1} = P$ . Es a dir, tots els  $p$ -Sylow son conjugats.
3.  $n_p(G) \equiv 1 \pmod{p}$  i  $n_p(G) | m$ .

#### 14.3.1 TODO Demo