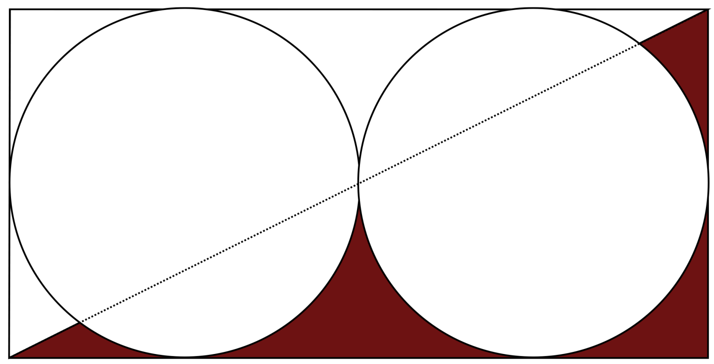
Dubium sapientiae initium
Cartesio

É apparso su web, da qualche giorno, un problemino geometrico che, dicono, sia stato proposto ai bimbi di 12 anni cinesi. A parte la veridicitá della cosa, il problemino si presenta cosí.
Data la seguente figura:

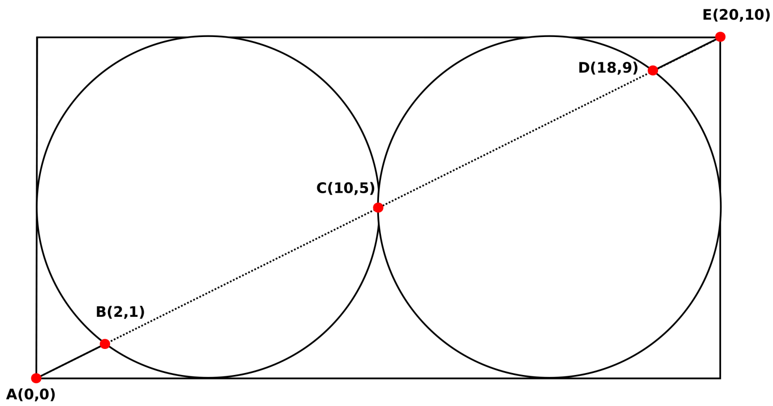


calcolarne l' area in rosso.
Il tutto é abbastanza elementare (bimbi di 12 anni) e con un minimo di intuizione geometrica si puó ragionare in questo modo:
La figura é a simmetria centrale quindi é lecito calcolare l' area del rettangolo, sottrarre l'area dei due cerchi e dividere per 2. O, alternativamente, notare che, grazie alla simmetria l'area del triangolino curvileno bianco in alto a destra é uguale all'area del triangolino curvilineo rosso in basso a sinistra e che quindi l' area cercata puó essere ridotta a cercare l' area del quadrato meno l' area del cerchio inscritto.
In entrambi i casi l' area cercata é:

$$100 - 25\pi \tag{1}$$

La cosa sarebbe finita qui e senza bisogno di alcuna calcolatrice o calcolo pesante ma solo sfruttando un po' di intuizione e di geometria elementare. Ma supponiamo che una persona non abbia né l' intuizione né la conoscenza della geometria elementare e volesse ricavare il risultato per via "analitica" come potrebbe procedere? In matematica, fortunatamente, si puó procedere in molti modi, spesso senza alcuna pre-condizione, ma basandosi solo sulla forza dei teoremi e delle definizioni. Questo la rende uno strumento estremamente potente nella scoperta di relazioni e conseguenze che sfuggono spesso

all' intuizione, proprio perché la nostra fiducia nell' ovvio ci rende ciechi.
In questo caso non faremo alcuna "scoperta sconvolgente" o preziosa per la matematica, ma solo un puro esercizio mentale per mettere in evidenza come un metodo forte possa essere usato da chiunque, anche da chi non si fidi affatto della propria intuizione ma abbia bisogno di tutti i passaggi. Proviamo quindi a partire dalla dimostrazione che i punti di contatto tra la diagonale e le circonferenze godano di una simmetria rispetto al centro della figura.
Se dimostriamo questo il problema é risolto per il ragionamento del triangolino bianco fatto all' inizio. Analiticamente si possono trovare i punti di contatto trovando l' equazione della retta che rappresenta la diagonale e le due equazioni delle due circonferenze.



Con assi cartesiani fissati in basso a sinistra possiamo ricavare facilmente l' equazione della retta osservando che passa per l' origine A(0,0) e il punto C(10,5). Con un pó di calcoli semplici ci si convince che la retta cercata ha equazione:

$$y = \frac{1}{2}x \tag{2}$$

Per le due circonferenze bisogna ricordare qualche nozione di geometria analitica ma si possono ricavare facilmente:[1]

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0 \quad (prima\ circonferenza) \tag{3}$$

$$x^2 + y^2 - 30x - 10y + 225 = 0 \quad (seconda\ circonferenza) \tag{4}$$

[1]Basta ricordare che una circonferenza é della forma $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ *con* $\alpha = -2x_c, \beta = -2y_c, \gamma = x_c^2 + y_c^2 - r^2$ *e* (x_c, y_c) *coordinate del centro*, r *raggio*

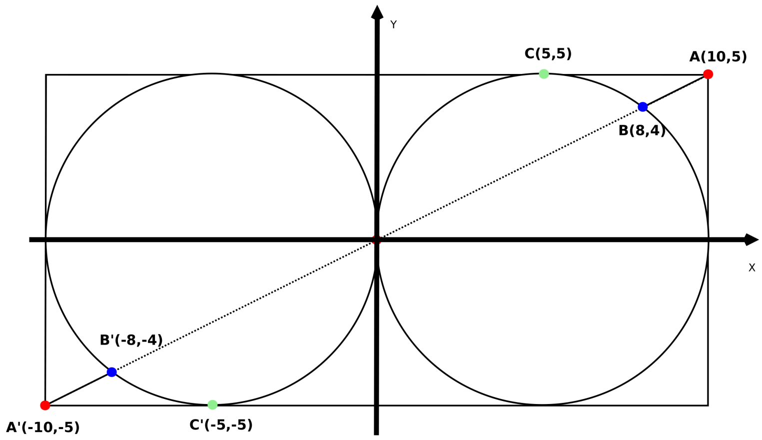
A questo punto per trovare i punti B e C come in figura basta imporre che la retta e la circonferenza 3 si intersechino, ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2-10x-10y+25=0 & (5)\\ y=\dfrac{1}{2}x & (6)\end{cases}$$

che da' le soluzioni B(2,1) e C(10,5). Analogamente per trovare il punto D (e ancora il punto C) basta imporre l' intersezione tra la retta e la circonferenza 4

$$\begin{cases} x^2+y^2-30x-10y+225=0 & (7)\\ y=\dfrac{1}{2}x & (8)\end{cases}$$

che da' soluzioni C(10,5) e D(18,9).
Da qui possiamo dimostrare la simmetria dei punti trovati rispetto al centro della figura. Facendo una traslazione degli assi e tenendo presente le nuove coordinate abbiamo la situazione :

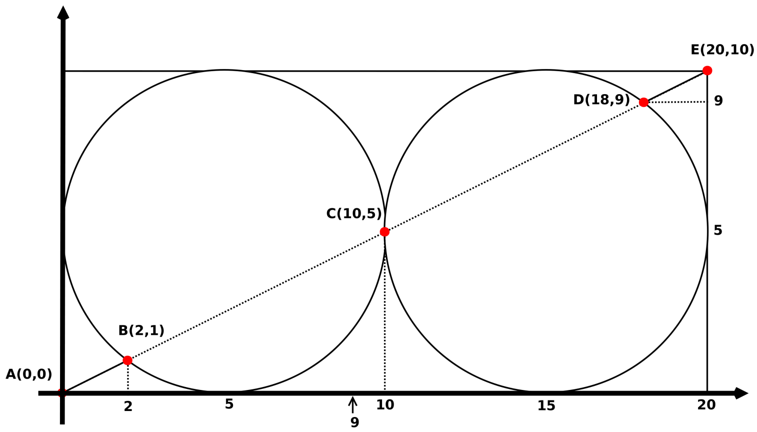


I punti indicati con i colori rosso, blu sono gli stessi di prima ma nel nuovo sistema di coordinate. Il punto verde é stato aggiunto per comoditá in modo da mostrare la simmetria del triangolo curvilineo ABC. Una simmetria centrale é verificata se dato un punto (x,y) esso viene mappato nel punto (-x,-y), cosa che si puó verificare facilmente con i dati della figura. (ad esempio il punto B(8,4) va in B'(-8,-4))
É anche utile notare che le due circonferenze nel nuovo sistema di assi cartesiani hanno equazioni

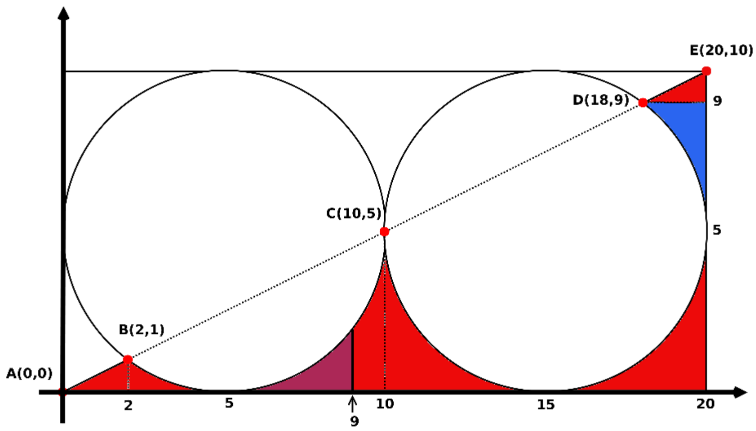
$$x^2+y^2+10x=0 \quad (prima\ circonferenza) \tag{9}$$

$$x^2 + y^2 - 10x = 0 \quad (seconda\ circonferenza) \tag{10}$$

e che la 9 diventa la 10 per trasformazioni $(x, y) \longrightarrow (-x, -y)$ e che quindi sono simmetriche rispetto all' origine. A questo punto é chiaro che sarebbe lecito, per ottenere le aree, sommare quattro volte le aree curvilinee di superficie $25 - \frac{25}{4}\pi$. Ma supponiamo di voler aumentare ancora il nostro livello di "divertimento matematico" e di provare a calcolare le aree con dei metodi analitici supponendo di non conoscere che l' area del cerchio sia πr^2. In questo caso dovremmo ricorrere al calcolo integrale usando i limiti di integrazione come da figura.



Abbiamo precedentemente dimostrato la simmetria centrale quindi la somma delle aree puó essere ricavata anche tenendo conto del fatto che l' area blu e quella magenta sono uguali.



In definitiva l' area cercata sarebbe la somma di:
$[area\ triangolo]_0^2 + [area\ triangolo\ curvilineo]_2^5 + 3 * [area\ triangolo\ curvilineo]_5^{10} +$

$[area\ triangolo\ blu]_5^9 + [area\ triangolo]_9^{10}$
Ora le aree dei triangolini sono abbastanza semplici
$[area\ triangolo]_0^2 = \frac{2*1}{2} = 1$
$[area\ triangolo]_9^{10} = \frac{2*1}{2} = 1$
Per calcolare le aree dei triangoli curvilinei bisogna esplicitare l' equazione della circonferenza rispetto alla y ovvero scrivere:

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0 \quad \longrightarrow \quad y^2 - 10y + x^2 - 10x + 25 = 0$$

e applicare la ben nota formula risolutiva delle equazioni di secondo grado per ottenere, dopo qualche semplificazione

$$y = 5 \pm \sqrt{10x - x^2}$$

da cui scegliamo solo quella con il segno meno perché rappresenta il ramo di curva che ci interessa (quella sempre minore di 5, per intenderci, l' arco di circonferenza inferiore).
Ora il nostro problema si riduce nel calcolare la primitiva dell' integrale

$$\int 5 - \sqrt{10x - x^2}\ dx \tag{11}$$

e calcolarlo nei limiti che abbiamo mostrato prima. Con qualche passaggio abbiamo:

$$\int 5\ dx - \int \sqrt{10x - x^2}\ dx \quad \longrightarrow \quad 5x - \int \sqrt{10x - x^2}\ dx + cost$$

$$\int \sqrt{10x - x^2}\ dx \quad \longrightarrow \quad \int \sqrt{5^2 - (x-5)^2} dx$$

$$x - 5 = t, dx = dt \quad \longrightarrow \quad \int \sqrt{5^2 - t^2} dt$$

$$t = 5 \sin\theta, dt = 5\cos\theta d\theta \quad \longrightarrow \quad \int \sqrt{25\cos\theta^2}\ 5\cos\theta d\theta \quad \longrightarrow \quad 25 \int \cos\theta^2 d\theta$$

$$25 \int \cos\theta^2 d\theta = \frac{25}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) + C$$

Rifacendo le sostituzioni otteniamo, in definitiva,

$$\int 5 - \sqrt{10x - x^2}\ dx = 5x - \frac{25}{2}[\arcsin\frac{(x-5)}{5} + \frac{(x-5)}{5}\frac{\sqrt{25-(x-5)^2}}{5}] + C \tag{12}$$

Verifichiamo che il calcolo tra gli estremi 5,10 ci dia il risultato atteso di $25 - \frac{25}{4}\pi$
Abbiamo infatti

$$\left[5x - \frac{25}{2}[\arcsin\frac{(x-5)}{5} + \frac{(x-5)}{5}\frac{\sqrt{25-(x-5)^2}}{5}]\right]_5^{10} = [50 - \frac{25}{2}\arcsin 1 + 0 - 25 + 0] = 25 - \frac{25}{4}\pi$$

Ora calcoliamo l' area del primo triangolino curvilineo tra 2 e 5

$$\Big[5x-\frac{25}{2}[\arcsin\frac{(x-5)}{5}+\frac{(x-5)}{5}\frac{\sqrt{25-(x-5)^2}}{5}]\Big]_2^5=[25-0-10-\frac{25}{2}\arcsin\frac{-3}{5}-6]\simeq 0.96$$

Da cui l' area del triangolo curvilineo da 0 a 5 é $1+0.96=1.96$
Ultimo pezzo, il triangolo blu, equivalente al triangolo magenta

$$\Big[5x-\frac{25}{2}[\arcsin\frac{(x-5)}{5}+\frac{(x-5)}{5}\frac{\sqrt{25-(x-5)^2}}{5}]\Big]_5^9\simeq 2.4$$

Che sommato all' altro triangolo di area 1 da 3.4. Notare che la somma $3.4+1.96\simeq 5.36$ ovvero il risultato approssimato di $25-\frac{25}{4}\pi$
In definitiva abbiamo mostrato, anche con il calcolo integrale, che la somma delle aree cercate é $3(25-\frac{25}{4}\pi)+5.36$ ovvero $4(25-\frac{25}{4}\pi)$ ovvero $100-25\pi$ ma il percorso seguito ci ha permesso di ricavare le due piccole aree in cui il triangolo curvilineo viene secato dalla diagonale (rispettivamente 1.96 e 3.4 per nulla facili da dimostrare geometricamente) e ci ha permesso di trovare un metodo generale per calcolare le aree qualunque sia la curva che intersechi i due cerchi, non solo rette ma funzioni generiche, con l'unico vincolo che se ne conosca l' equazione e si sia in grado di risolvere il sistema che impone l' intersezione delle curve. Naturalmente per questo caso specifico , come dicevamo, non abbiamo fatto alcuna scoperta sensazionale ma la generalizzazione di un problema specifico é sempre il punto di partenza per nuovi campi di indagine. Spesso si parte da cose conosciute benissimo e seguendo percorsi apparentemente tortuosi si arriva a deduzioni nuove che possono essere il punto di partenza di un' intera teoria.

25 Settembre 2016
Damiano Scaramuzza