Mục lục

Chương II

Bài toán tối ưu thời gian tuyến tính tổng quát

Bài tập

1. Xét một quá trình điều khiển được mô tả bởi $\dot{x} + bx = u$ cho hằng số thực b, với ràng buộc $|u(t)| \leq 1$. Chứng minh rằng phản hồi $x(t)$ ($x(0) = 0$) với điều khiển $u(t)$ là:

   $$x(t) = e^{-bt}x_0 + e^{-bt}\int_0^t e^{bs}u(s)ds$$

   (a) Nếu $b \geq 0$, chứng minh rằng trạng thái đầu có thể kiểm soát để $x_1 = 0$ (b) Nếu $b < 0$, mô tả chính xác các trạng thái ban đầu x_0 để hệ chuyển dịch được đến $x_1 = 0$.

2. Với quá trình điều khiển ở bài 1, chứng minh rằng điều khiển làm hệ chuyển dịch từ x_0 đến $x_1 = 0$ trong thời gian nhanh nhất (nếu có thể) là *bang-bang*, chỉ ra số lần nổ có thể xảy ra và chứng minh nó có thể tổng quát dưới dạng:

   $$u(t) = -sgn(x(t))$$

   Tính thời gian nhanh nhất t theo x_0 và b.

3. Giả sử bạn nhận được một hợp đồng giao trứng bằng tên lửa từ New York đến Los Angeles, khoảng cách là 2400 dặm. Tìm thời gian nhanh nhất để hoàn thành mà không làm vỡ bất kỳ quả trứng nào. Giả thiết rằng đường đi là một đường thẳng, bỏ qua ma sát, sự quay của Trái Đất... Ràng buộc duy nhất là các quả trứng sẽ vỡ nếu gia tốc vượt quá 100 ft/sec^2

4. Tính thời gian nhanh nhất để đưa hệ sau từ trạng thái ban đầu $(1, 0)$ về trục

$(0, 0)$:

$$\ddot{x} + x = u, \quad |u(t)| \leq 1.$$

Điều khiển tối ưu có bao nhiêu lần nổ?

5. Tìm quỹ đạo tối ưu và vị trí nổ cho bài toán tối ưu thời gian đưa về trục $(0, 0)$ cho hệ:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 + u_1, \quad |u_1| \leq 1, \\ \dot{x_2} &= -x_1 + u_2, \quad |u_2| \leq 1. \end{aligned}$$

6. Tìm điều khiển đưa hệ

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \quad x_1(0) = 1, \\ \dot{x_2} &= u, \quad x_2(0) = 0, \end{aligned}$$

về trục (0, 0) trong thời gian $t = 1$ và cực tiểu hàm chi phí

$$C(u) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|.$$

[*Gợi ý*: Nếu với điều khiển tối ứu u^*, $C(u^*) = k$, chứng mình rằng bài toán đang xét tương đương với việc tìm số $k > 0$ với thời gian nhanh nhất t^* để đưa hệ

$$\dot{x_1} = x_2, \quad \dot{x_2} = u, \quad |u| \leq 1$$

về (0, 0) từ $(1/k, 0)$ là $t^* = 1$.]

7. Cho hệ điều khiển

$$\dot{x} = u - u^2, \quad |u| \leq 1,$$

Chứng minh rằng thời gian nhanh nhất để đưa hệ từ $x_0 = -1$ đến $x_0 = 0$ là $u \equiv \frac{1}{2}$ và u không phải là *bang-bang*.

8. Chứng minh hệ quả của định lý 3.1.

9. Xác định điều khiển tối ưu thời gian đưa hệ về trục (0, 0) cho hệ:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= u_1 + u_2, \quad |u_1| \leq 1, \\ \dot{x_2} &= u_1 - u_2, \quad |u_2| \leq 1. \end{aligned}$$

10. Chứng minh rằng cực đại của hàm Hamilton được định nghĩa trong mục 1 là không đổi theo thời gian nếu hệ điều khiển $\dot{x} = Ax + Bu$ là hệ tự điều khiển.

11. Chứng minh rằng một trạng thái $y_1 \in \mathscr{R}(t)$ nằm trên một quỹ đạo duy nhất nếu và chỉ nếu y_1 là trạng thái tới hạn của $\mathscr{R}(t)$.

Chương III

Nguyên lý cực đại Pontryagin

Bài tập

1. Tìm cường độ sản xuất $P(t)$ để lượng hàng tồn kho $I(t)$ chuyển từ $I(0) = 2$ đến $I(1) = 1$ và cường độ bán hàng $S(t)$ chuyển từ $S(0) = 0$ đến $S(1) = 1$ với chi phí $C = \int_0^1 P^2(t)dt$ nhỏ nhất.
Giả sử:

$$\dot{I}(t) = P(t) - S(t), \tag{1}$$
$$\dot{S}(t) = -P(t) \tag{2}$$

(P không giới hạn)

2. Cực tiểu $C(u) = \frac{1}{4}\int_0^1 u(t)^4 dt$ với

$$\dot{x} = x + u, \qquad x(0) = x_0, \qquad x(1) = 0.$$

3. Tìm cực trị của:

(a) $\int_0^\pi ((y')^2 - y^2)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0,$

(b) $\int_0^1 ((y')^2 + 4xy')dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$ Nhớ lại rằng cực trị của

$$\int_a^b f(x, y'(x), y(x))dx, \quad y(a) = y_a \quad y(b) = y_b$$

là nghiệm của phương trình Euler-Lagrange

$$f_y - \frac{d}{dx}(f_{y'}) = 0$$

thỏa mãn điều kiện biên.

4. Xét mô hình tính toán chi phí quảng cáo cho một công ty chỉ sản xuất một loại sản phẩm duy nhất. Gọi $S(t)$ là cường độ bán tại thời điểm t và $A(t)$ là cường độ quảng cáo tại thời điểm t, giới hạn $0 \leq A(t) \leq \overline{A}$, ta giả sử:

$$S(t) = -\lambda S(t) + \gamma \int_0^t A(t-\tau)e^{-\tau}d\tau, \quad \lambda, \gamma > 0.$$

Tìm A sao cho tổng lượng hàng bán ra trong khoảng thời gian $[0, T] : \int_0^T S(t)dt$ đạt cực đại.

5. Tìm điều khiển tối ưu làm cực đại hàm giá:

$$\int_0^{100} x(t)dt$$

với hệ động lực:

$$\dot{x}(t) = -0.1x(t) + u(t), \quad 0 \leq u(t) \leq 1, \quad x(0) = x_0.$$

6. Áp dụng nguyên lý cực đại, giải bài toán điều khiển tối ưu làm cực đại

$$\int_0^2 (2x(t) - 3u(t) - \alpha u^2(t))dt, \quad \alpha \geq 0$$

với hệ: $\dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad x(0) = 5, \quad 0 \leq u(t) \leq 2.$

7. Tìm điều khiển tối ưu của hệ:

$$\dot{x}_1 = x_2 + u, \quad \dot{x}_2 = -u$$

từ $x(0) = (x_1^0, x_2^0)$ đến (0, 0) sao cho cực tiểu hàm giá:

$$\int_0^t x_1^2(t)dt$$

8. Tìm lời giải dựa vào nguyên lý cực đại cho bài toán tối thiểu lượng nhiên liệu tiêu thụ. Cực tiểu hóa

$$\int_0^{t_1} \sqrt{1 + u(t)^2}dt,$$

cho hệ:

$$\ddot{x} = u, \quad |u| \leq 1,$$

$$x(0) = x_1^0, \quad \dot{x}(0) = x_2^0, \quad x(t_1) = 0, \quad \dot{x}(t_1) = 0.$$

Lời giải bài toán có thay đổi không nếu hàm chi phí thay bằng

$$\int_0^{t_1} |u(t)|dt \ ?$$

9. Hàm $E(x^*, u^*, u, t)$ định nghĩa như sau:

$$E(x^*, u^*, u, t) = f(x^*, u, t) - f(x^*, u^*, t) + (u^* - u)f_u(x^*, u^*, t).$$

Chứng minh rằng nếu (x^*, u^*) là một phương án tối ưu của các biến thể bài toán trong mục 2, thì

$$E(x^*, u^*, u, t) \geq 0 \quad \text{với mọi } u, t.$$

(Đây là điều kiện cần của *hàm E Weierstrass* cho cực trị mạnh.)

Chương IV

Nguyên lý cực đại tổng quát; Điều khiển tối ưu với chi phí trạng thái cuối

1. Giới thiệu

Trong chương này chúng ta sẽ xem xét nguyên lý cực đại cho các bài toán điều khiển không độc lập (nonautonomous) tổng quát. Cụ thể là, giả sử:

(1) $\dot{x} = f(x, t, u)$ là hệ điều khiển và f là hàm khả vi liên tục trên $\mathbb{R}^{n+1+m}$;

(2) Gọi tập X_0, X_1 trong $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa tương ứng là tập các giá trị ban đầu và giá trị cuối chấp nhận được;

(3) $\Delta = \{u : u$ bị chặn, liên tục từng khúc, $u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, và u đưa hệ từ một điểm $x_0 \in X_0$ bắt đầu từ thời điểm t_0, đến điểm $x_1 \in X_1$ tại thời điểm $t_1\}$

(4) Chi phí của điều khiển u là:

$$C(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), t, u(t))dt,$$

Trong đó f_0 là hàm liên tục khả vi trên $\mathbb{R}^{n+m+1}$.

Định nghĩa hàm Hamilton cho $x = (x_1, ..., x_n),\ u = (u_1, ..., u_m)$, và $\psi = (\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n)$:

$$H(x, u, t, \psi) = \psi_0 f^0(x, t, u) + \psi_1 f^1(x, t, u) + ... + \psi_n f^n(x, t, u)$$

và đặt: $M(x, t, \psi) = \max_{u \in \Omega} H(x, u, t, \psi)$.

Định lý 1 (Lee và Marcus [2]) Nếu u^*, x^* là nghiệm tối ưu cho bài toán trên trong khoảng $[t_0, t_1^*]$, thì tồn tại một phản ứng liên hợp không tầm thường ψ^* thỏa mãn:

(i) $\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), t, \mathbf{u}^*(t))$,

(ii) $\dot{\psi^*}_j(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_j} = \sum_{i=0}^n \psi_i^* \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*(t), t, \mathbf{u}^*(t)), \quad j = 1, ..., n,$

(iii) ψ_0^* là một hằng số không dương (≤ 0), và

(iv) $H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t, \psi^*(t)) = M(\mathbf{x}^*(t), t, \psi^*(t))$ tại mọi điểm thỏa mãn tính liên tục, hơn nữa:

$$M(\mathbf{x}^*(t), t, \psi^*(t)) = \int_{t_1^*}^{t} \sum_{i=0}^{n} \psi_i^*(s) \frac{\partial f_i}{\partial t}(\mathbf{x}^*(s), s, \mathbf{u}^*(s)) ds$$

và do đó:

$$M(\mathbf{x}^*(t_1^*), t_1^*, \psi^*(t_1^*)) = 0.$$

Nếu X_0 và X_1 (hoặc 1 trong 2) là các đa tạp (mặt trơn) trong $\mathbb{R}^n$ với không gian tiếp tuyến T_0 và T_1 tại $\mathbf{x}^*(t_0)$ và $x^*(t_1^*)$ tương ứng, thì có thể chọn ψ^* thỏa mãn điều kiện *ngang* ở 2 đầu t_0, t_1^* (hoặc chỉ tại 1 đầu)

$$\psi^*(t_0) \perp T_0 \quad \text{và} \quad \psi^*(t_1^*) \perp T_1.$$

Trong phần lớn các trường hợp, X_1 (có thể cả X_0) sẽ có dạng:

$$X_1 = \{x : g_k(x) = 0, k = 1, 2, ..., l\}. \tag{1}$$

với một số hàm cho trước $\{g_1, ..., g_l\}$. Ví dụ, bài toán có đích cố định có thể được biểu diễn là $x^*(t_1^*) = x^1$ hoặc

$$g_r(x^*(t_1)) = x_r^*(t_1) - x_r^1 = 0, \ r = 1, ..., n \tag{2}$$

Nếu các hàm $\{g_1, ..., g_l\}$ là khả vi, thì điều kiện *ngang* được hiểu đơn giản là:

$$\psi^*(t_1^*) = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{x}^*(t_1^*)), \tag{3}$$

Với các hằng số $\{\lambda_1, ..., \lambda_l\}$. Thế (1) tại thời điểm cuối ta cũng có:

$$g_k(x^*(t_1^*)) = 0 \text{ với } k = 1, ..., l.$$

Lấy ví dụ, trong bài toán có đích đến cố định,

$$\nabla g_r(x^*(t_1^*)) = (0, ..., \underset{rth}{1}, 0...0).$$

Nên (3) trở thành $\psi^*(t_1^*) = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, và trong trường hợp này $\psi^*(t_1)$ là chưa biết.

Trong trường hợp bài toán có đích đến không xác định $X_1 = \mathbb{R}^n$; hệ quả là vectơ trực giao duy nhất với không gian tiếp tuyến là 0, hay:

$$\psi^*(t_1^*) = 0$$

2. Bài toán điều khiển với chi phí trạng thái cuối

Trong nhiều ứng dụng của lý thuyết điều khiển, hàm chi phí có dạng:

$$C(\mathbf{u}) = g(\mathbf{x}(T)) + \int_0^T f_0(\mathbf{x}(t), t, \mathbf{u}(t))dt, \tag{1}$$

với $T > 0$ cố định và hàm $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục biểu diễn một chi phí nào đó ở trạng thái cuối, hay *salvage cost*, tại thời điểm cuối T. Chúng ta có thể biến đổi bài toán trên về dạng chuẩn bằng cách thêm một biến trạng thái phụ $x_{n+1}(t)$ thỏa mãn:

$$\dot{x}_{n+1}(t) = 0, \quad x_{n+1}(T) = g(\mathbf{x}(T))/T.$$

Từ đó $g(x(T)) = \int_0^T x_{n+1}(t)dt$, và chi phí (1) chỉ còn lại dạng tích phân. Khi áp dụng nguyên lý cực đại cho bài toán mới này, sự thay đổi duy nhất là điều kiện *ngang* trở thành:

$$\psi_i^*(T) = -\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*(T)), \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{2}$$

Ví dụ 1: Một mô hình giao thương lúa mì liên tục (Norström [3])
Xét mô hình sau của một công ty tham gia mua bán lúa mì, hoặc hàng hóa liên quan. Tài sản của công ty nằm ở 2 dạng, tiền và lúa mì, và đặt tương ứng lượng tiền và lúa tại thời điểm t là $x_1(t)$ và $x_2(t)$. Ban đầu công ty có $x_1(0)$ đơn vị tiền và $x_2(0)$ đơn vị lúa mì. Giá lúa mì trong khoảng thời gian $[0, T]$ cho bởi $p(t),\ 0 \le t \le T$.

Mục tiêu của công ty là mua và bán lúa mì trong từng chu kì $[0, T]$ để tối đa lượng tài sản tại thời điểm T, hay làm cực đại:

$$C = x_1(T) + p(T)x_2(T) \tag{3}$$

Giả sử sức mua hay bán lúa mì tại thời điểm t cho bởi $u(t)$ ($u(t) > 0$ ứng với mua, $u(t) < 0$ ứng với bán) ta có thể mô hình hóa hoạt động của công ty bởi hệ phương trình vi phân:

$$\dot{x}_1(t) = -\alpha x_2(t) - p(t)u(t), \tag{4}$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t), \tag{5}$$

với $\alpha > 0$ trong (4) là chi phí lưu trữ một đơn vị lúa mì, và biểu thức $p(t)u(t)$ là chi phí (lợi nhuận) của mua (bán) lúa mì tại thời điểm t. Ta cũng có điều kiện *điều khiển tự nhiên*:

$$\underline{M} \leq u(t) \leq \overline{M}, \quad \text{với } \underline{M},\ \overline{M} \text{ cho trước} \tag{6}$$

Hàm Hamilton cho bài toán được cho bởi:

$$H = \psi_1(-\alpha x_2 - pu) + \psi_2 u, \tag{7}$$

và các phương trình liên hợp:

$$\psi_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \tag{8}$$
$$\psi_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = \alpha\psi_1, \tag{9}$$

với điều kiện ngang:

$$\psi_1(T) = -1, \quad \psi_2(T) = -p(T)$$

cho bởi (2). Trong trường hợp này (8) và (9) không phụ thuộc vào trạng thái và có thể giải trực tiếp:

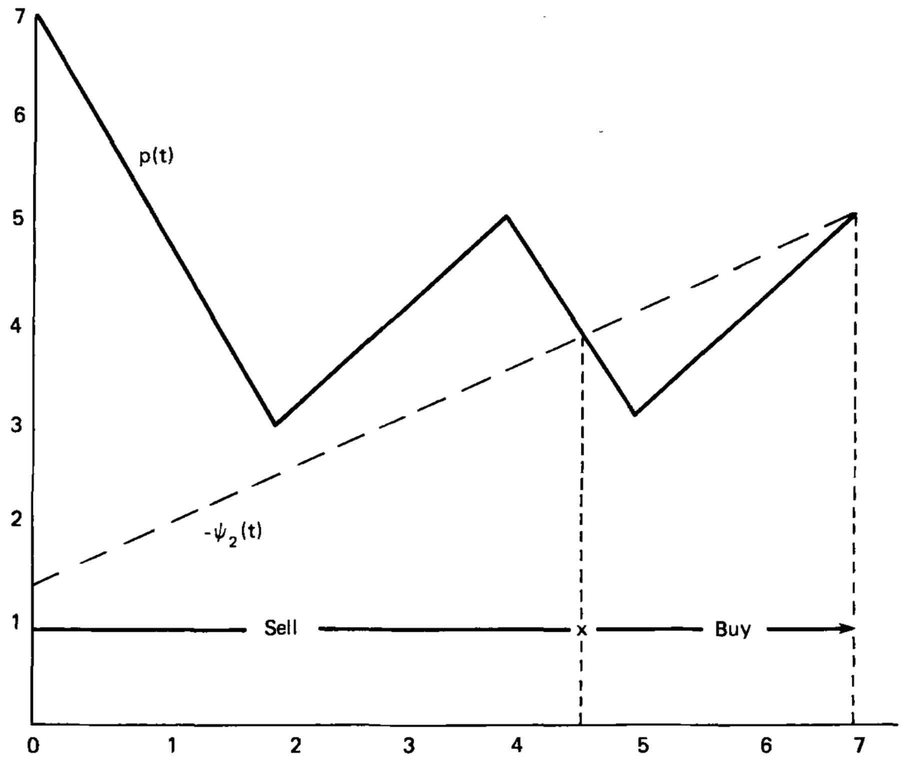
$$\psi_1(t) = -1, \tag{10}$$
$$\psi_2(t) = -\alpha(t - T) - p(T), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{11}$$

Từ đó ta có thể viết rõ hàm Hamilton ra thành:

$$\begin{aligned} H &= \alpha x_2 + p(t)u + u(-\alpha(t-T) - p(T)) \\ &= u(p(t) - \alpha(t-T) - p(T)) + \alpha x_2. \end{aligned}$$

H sẽ đạt cực tiểu qua u nếu:

$$u^*(t) = \begin{cases} M \text{ (mua)} & \text{khi } p(t) < p(T) - \alpha(T-t)(= -\psi_2(t)) \\ \underline{M} \text{ (bán)} & \text{khi } p(t) > p(T) - \alpha(T-t) \\ \text{không xác định} & \text{khi } p(t) = p(T) - \alpha(T-t). \end{cases} \tag{12}$$



Hình 1:

Hình 1 minh họa phương pháp này cho một hàm giá đặc biệt,

$$T = 7,\ \alpha = \frac{1}{2},\ \underline{M} = -1,\ \overline{M} = 1,\ x_1(0) = 50,\ x_2(0) = 1,$$

$$p(t) = \begin{cases} -2t + 7 & 0 \le t \le 2 \\ t + 1 & 2 \le t \le 4 \\ -2t + 13 & 4 \le t \le 5 \\ t - 2 & 5 \le t \le 7. \end{cases}$$

Từ (11), theo đó $\psi_2(t) = -(\frac{1}{2}t + \frac{3}{2})$. Điều khiển tối ưu là

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 \text{ (bán)} & 0 \le t < 4.6 \\ 1 \text{ (mua)} & 4.6 < t < 7. \end{cases}$$

Phương án tối ưu (12) còn một vài thiếu sót, đặc biệt là với những kế hoạch dài hạn. Nó phụ thuộc rất nhiều vào giá lúa mì ở thời điểm cuối $p(T)$ chứ không phải giá ở trong khoảng t và T. Nếu T rất lớn, với t âm và phương án tối ưu (12) là bán lúa mì. Có nghĩa là (với T đủ lớn) nguồn cung lúa mì $x_2(t)$ đạt giá trị âm, tốn chi phi do phương trình trạng thái có dạng (4). Vì vậy với chu kì dài hạn, ta nên chỉnh sửa (4) có thêm chi phí cho việc *bán ngay lập tức* (khiến cho $x_2 < 0$), hoặc cấm hẳn nó bằng điều kiện:

$$x_2(t) \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Ta sẽ quay trở lại vấn đề này trong chương VIII, khi bàn về bài toán điều khiển có ràng buộc trạng thái.

3. Sự tồn tại của điều khiển tối ưu

Phần này tóm tắt một số định lý chính về sự tồn tại của điều khiển tối ưu. Từ bây giờ chúng ta sẽ giả sử tập hợp điều khiển chấp nhận được là:

$$\Delta = \{\mathbf{u}, \mathbf{u}(t) \in \Omega \ \forall t\} \text{ với } \mathbf{u} \text{ bị giới hạn và đo được,}$$

với tập compact $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Để có một định lí hợp lý về sự tồn tại, ta cần xét cả điều khiển đo được, không chỉ xét liên tục từng khúc. Một khi đã đảm bảo được sự tồn tại của điều khiển tối ưu, các điều kiện cần thiết chẳng hạn như nguyên lí cực đại có thể áp dụng và không cần lo lắng, và trong nhiều trường hợp chúng ta sẽ chỉ ra điều khiển tối ưu là liên lục từng khúc hoặc tốt hơn.
Ta có định lý đầu tiên của Fillipov. Để xem chứng minh chi tiết, tham khảo [2].
Định lí 1 Xét quá trình điều khiển phi tuyến:

$$\dot{x} = f(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}), \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) \in X_0,$$

trong đó f là liên tục khả vi, và

(a) Tập khởi đầu và tập đích X_0, X_1 là compact khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$;

(b) Tập điều khiển ràng buộc Ω là compact và tồn tại một điều khiển chuyển X_0 tới X_1 trong thời gian hữu hạn.

(c) hàm giá cho mỗi $u \in \Delta$ là:

$$C(\mathbf{u}) = g(\mathbf{x}(t_1)) + \int_0^{t_1} f_0(\mathbf{x}(t), t, \mathbf{u}(t))dt + \underset{t\in[t_0,t_1]}{max}\{\gamma(\mathbf{x}(t))\},$$

trong đó f_0 là khả vi liên tục trong $\mathbb{R}^{n+1+m}$, g và γ liên tục trong $\mathbb{R}^n$ Giả sử:

(d) $|\mathbf{x}(t)| \leq b, 0 \leq t \leq t_1$, cho tất cả $x(t)$ đến mọi điều khiển $u \in \Delta$

(e) (a) Tập vận tốc mở rộng $\tilde{V}(\mathbf{x}, t) = \{(f^0(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}),\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) :\ u \in \Omega\}$ là lồi trong $\mathbb{R}^{n+1}$ tại mỗi $(\mathbf{x}, t)$ cố định.

Khi đó tồn tại điều khiển tối ưu $u^*(t)$ trong đoạn $[0, t_1^*], \mathbf{u}^* \in \Delta$ làm cực tiểu C(u).

Hệ quả 1 Cho bài toán tối ưu thời gian nếu các điều kiện (a) (b) (c) thỏa mãn và tập vận tốc $V(\mathbf{x}, t) = \{f(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) | u \in \Omega\}$ là lồi trong $\mathbb{R}^n$ tại mỗi $(\mathbf{x}, t)$ cố định thì tồn tại điều khiển tối ưu thời gian.
Có rất nhiều ứng dụng của định lí 1 và hệ quả của nó. Xét bài toán hạ cánh trên mặt trăng sau:
Cực tiểu $\int_0 t_1 u(\tau) d\tau$ với $\dot{h} = v,\ \dot{v} = -g + m^{-1}u,\ \dot{m} = -ku.$
Do

$$\tilde{V}((h, v, m), t) = \{(u, v, -g + m^{-1}u, -ku) : 0 \leq u \leq 1\},$$

là tập lồi nên tồn tại điều khiển tối ưu, và tất cả tính toán trước đây là hợp lí.
Tương tự cho Ví dụ 3 chương I,
Cực tiểu $\int_0^T (1-u) x dt \quad$ với $\dot{x} = kux, \quad 0 \leq u \leq 1.$
Ta có

$$\tilde{V}(x, t) = \{((1-u)x, kux) : 0 \leq u \leq 1\} = \{(x - ux, kux) : 0 \leq u \leq 1\},$$

là tập lồi nên tồn tại điều khiển tối ưu.
Tuy nhiên trong nhiều trường hợp không tồn tại điều khiển tối ưu [1].

Ví dụ 1 Xét bài toán tối ưu thời gian với điểm cuối (1,0) với các giả thiết sau:

$$\begin{array}{lll} \dot{x}_1 & = (1 - x_2^2)u^2, & x_1(0) = 0, \\ x_2 & = u, & x_2(0) = 0, \end{array} \quad |u(t)| \leq 1.$$

Ta thấy rằng $(1, 0) \in \overline{\mathscr{A}(1)}$ nhưng $(1, 0) \notin \mathscr{A}(1)$.
Cho số nguyên dương m, chia đoạn $[0, 1]$ thành $2n$ khoảng con bằng nhau. Cho $I_j = (j/2n, (j+1)/2n), j = 0, 1, ..., 2n-1$. Định nghĩa

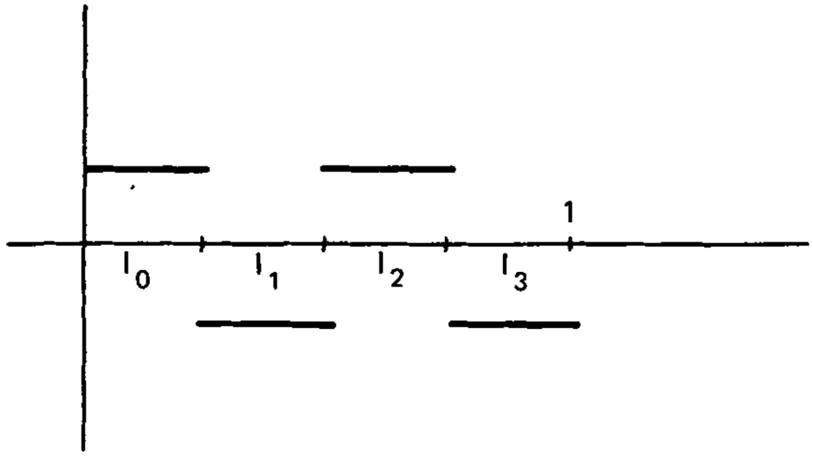
$$u_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t \in I_j, \quad j \text{ lẻ} \\ -1 & \text{nếu } t \in I_j, \quad j \text{ chẵn}. \end{cases}$$

Ví dụ (xem hình 2), gọi $x(t, u_n)$ là nghiệm tương ứng với u_n. Khi đó:

$$x_2(1 : u_n) = \int_0^t u_n(\tau) d\tau \text{ với mọi n}$$

và

$$|x_2(t : u_n) \leq | \int_0^t u_n(\tau) d\tau \to 0 \text{ với mọi } t \in [0, 1]$$



Hình 2:

khi $n \to \infty$. Vì vậy:

$$\begin{aligned} x_1(1:u_n) &= \int_0^1 [1 - x_2(\tau : u_n)^2] u_n^2(\tau) d\tau \\ &= \int_0^1 [1 - x_2(\tau : u_n(\tau))^2] d\tau \to 1 \text{ khi } n \to \infty \end{aligned}$$

Nên $x_1(1:u_n) \to (1,0)$ tuy nhiên $(1,0) \notin \mathscr{A}(1)$, vì điều này yêu cầu một điều khiển để $x_2(t:u) \equiv 0$ hoặc $u \equiv 0$ và sau đó $x_1(t:u) \equiv 0$.
Bài tập chỉ ra rằng với bất kỳ $t > 1, (1,0) \in \mathscr{A}$ suy ra $inf\{t : (1,0)$ đạt được trong thời gian $t\}$, nhưng infimum không thể đạt được.

Định lý cuối cùng về sự tồn tại, chúng ta xem xét bài toán tối ưu thời gian khi các phương trình trạng thái tuyến tính đối với $\mathbf{x}$. Trong trường hợp này chúng ta không cần giả thiết tập lồi.

Định lí 2 (Olech và Neustadt [4]) Xét bài toán tối ưu thời gian với phương trình trạng thái sau:

$$\dot{x}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

Trong đó f là liên tục và A là khả tích trên đoạn hữu hạn. Giả sử Δ, X_1 là cho trước. Nếu tập đích X_1 là đạt được trong một thời điểm nào đó bởi một điều khiển chấp nhận được, thì nó đạt được trong thời gian tối ưu bởi một điều khiển tối ưu.

Bài tập

1. Sử dụng nguyên lí cực đại giải bài toán sau:
Cực đại $(8x_1(18) + 4x_2(18)$ với

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + u, \quad x_1(0) = x_1^0,\\
&\dot{x}_2 = 4x_1 - 2u, \qquad\quad x_2(0) = x_2^0,\\
&\ 0 \le u \le 1.
\end{aligned}$$

2. Giải bài toán điều khiển Chương III, bài 5 với hàm giá: maximize $x(100)$.

3. Tìm điều khiển tối ưu của hệ:
minimize $\frac{1}{2}\int_0^{t_1} x_1^2 dt$ với

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2 + u, \quad x_1(0) = x_1^0,\\
&\dot{x}_2 = -u, \qquad\ x_2(0) = x_2^0,\\
&|u| \le 1,
\end{aligned}$$

và $x(t_1) = 0$.

4. Giải bài toán điều khiển tối ưu thời gian cho hệ:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad |u| \le 1.$$

5. Tìm nghiệm đơn có thể của hệ:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2,\\
&\dot{x}_2 = -x_2 - x_1 u, |u| \le 1,
\end{aligned}$$

với tập đích ràng buộc $X_1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, và hàm giá:

$$C(u) = \frac{1}{2}\int_0^t (x_1^2(t) + x_2^2(t))dt.$$

6. Tìm nghiệm tối ưu của bài toán điều khiển thời gian cố định sau:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -2x_2 + u, \quad |u| \le 1,$$

$$C(u) = \int_0^T (x_1^2 + |u|)dt.$$

7. Xét mô hình của một tên lửa trong máy bay chiến đấu. Cho $x_1(t)$ và $x_2(t)$ là tọa độ Descarte của tên lửa; $x_3(t) = dx_1/dt$ và $x_4(t) = dx_2/dt$ là các tốc độ thành phần, $x_5(t)$ là khối lượng tên lửa, $u_1(t), u_2(t)$ là cosin hướng của vectơ đẩy, tỉ lệ tan chảy khối lượng $u_3(t) = -dx_5/dt$, c là tốc độ khí ga và g là gia tốc trọng trường. Định nghĩa:

$$u_1 = cos\alpha, \quad u_2 = cos\beta$$

Phương trình trạng thái:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_3, \\
\dot{x}_2 &= x_4, \\
\dot{x}_3 &= Cu_1u_3/x_5, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \\
\dot{x}_4 &= Cu_2u_3/x_5 - g, \\
\dot{x}_5 &= -u_3,
\end{aligned}$$

Tập điều khiển ràng buộc được cho như sau:

$$u_1^2 + u_2^2 = 1, \qquad 0 \leq u_3 \leq M.$$

Tìm điều khiển chuyển tên lửa từ trạng thái $\mathbf{x}_0$ đến $[., A, ., ., B]$ $(A, B$ cố định) và cực tiểu:

$$-\int_0^t x_3 dt$$

8. Chỉ ra rằng không tồn tại điều khiển tối ưu chuyển từ (0,0) đến (1,0) trong ví dụ mục 3.

Tài liệu tham khảo

[1] H. Hermes and J. P. LaSalle, "Functional Analysis and Time-Optimal Control." Academic Press, New York, 1969.

[2] E. B. Lee and L. Marcus, "Foundations of Optimal Control Theory." Wiley, New York, 1967.

[3] C. Norström, The continuous wheat trading model reconsidered. An application of mathematical control theory with a state constraint. Working Paper, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, 1978.

[4] C. Olech, Extremal solutions of a control system, J. Differential Equations 2, 74-101 (1966).