

1 Modelagem dinâmica

1.1 Modelagem do quadrirrotor

Para se estudar as características de movimento e o sistema de controle do quadrirrotor deste trabalho é necessário entender como as forças que interagem com o corpo se relacionam. A análise dinâmica de um drone pode ser dividida na dinâmica de corpo rígido, dinâmica translacional, na cinemática e dinâmica de atitude, nas forças agindo sobre o corpo e o controle. Assim, neste capítulo será apresentado essa análise.

1.1.1 Sistemas de coordenadas

Podemos modelar um quadrirrotor considerando-o como um corpo rígido usando as leis de newton, que necessitam de um referencial inercial(que não está acelerando nem rotacionando) para serem válidas, bem como definir um sistema de coordenadas local que se move com o quadrirrotor. Nesse estudo, por conveniência escolhemos como sistema de coordenadas inercial o sistema North, East, Down(NED), que é tangencial a superfície da Terra e têm o eixo x apontando para o norte, o eixo y apontando para o leste e o eixo z apontando para baixo. E como sistema de coordenadas local um sistema ABC(Aircraft body centered) com origem no centro de gravidade do quadrirrotor e paralelo ao sistema NED.

1.1.2 Matrizes de rotação

A fim de realizar a modelagem dinâmica do quadrirrotor se faz necessário relacionar o sistema de referência inercial(NED), que será nosso sistema de trabalho, com o sistema de referência do corpo(XYZ) obtendo assim a matriz de rotação entre os sistemas, que chamaremos de Rib. A matriz de rotação Rib é obtida através de 3 rotações sucessivas ao longo dos eixos do sistema inercial, assim a sequência utilizada nesse trabalho será a x-y-z, ou seja, uma rotação de (ϕ) ao longo do eixo x (rolagem), uma rotação (θ) ao longo do eixo y (arfagem) e uma rotação (ψ) ao longo do eixo z (guinada). Cada rotação pode ser representada a partir de uma matriz, sendo que, a matriz de rotação ao longo de x é:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

A matriz de rotação ao longo de y é:

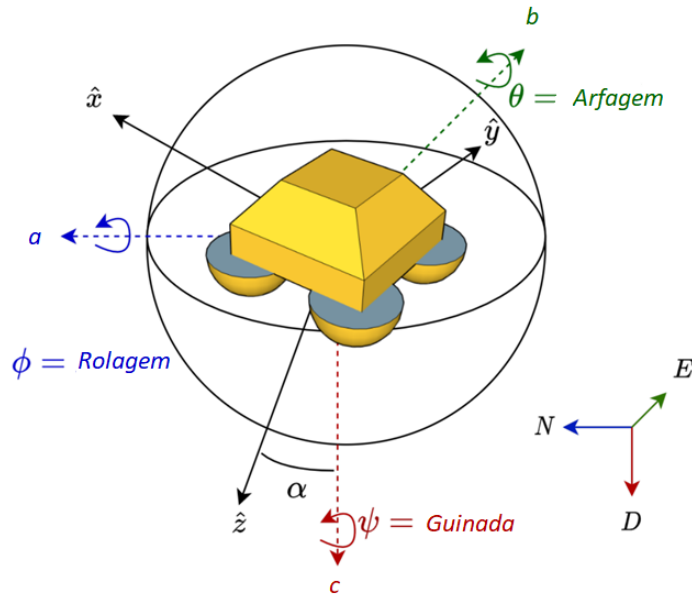
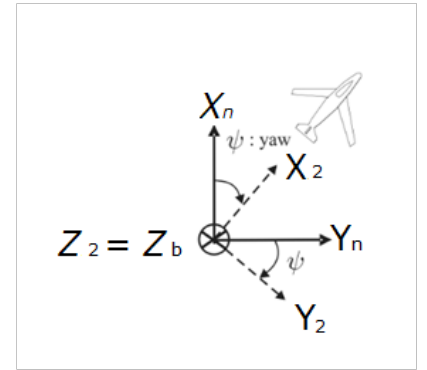
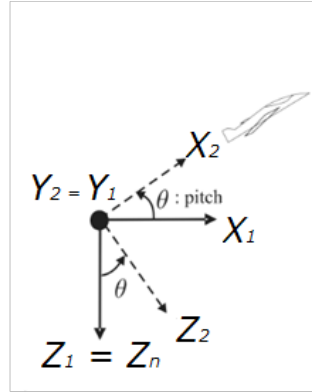
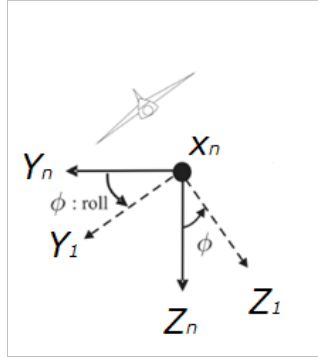
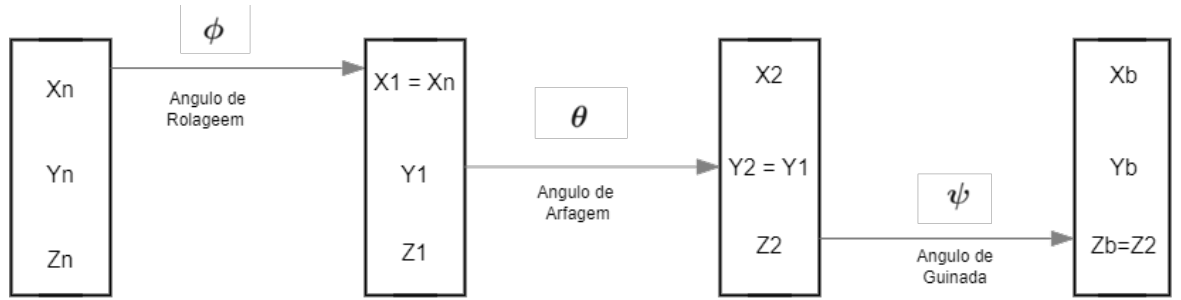


Figura 1 – Representação do sistema de referência inercial(NED) e do sistema local ABC. Imagem retirada de <https://www.mdpi.com/1424-8220/21/4/1310/html> e modificada pelo autor.

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

A matriz de rotação ao longo de z é:

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Tais rotações podem ser melhor observadas na figura ??.

A matriz de transformação de referência Rib que relaciona os dois sistemas de referência, inercial e fixo ao corpo, é o produto das matrizes Rx, Ry, Rz. De forma que:

$$R_t(\phi, \theta, \psi) = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi) = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}$$

1.1.3 Configuração do veículo

Observando o diagrama de corpo livre do quadricóptero retratado pela figura 1, chega-se nos seis graus de liberdade necessários para a representação do sistema. Esses se dividem em três para o movimento de translação nos eixos x', y' e z' e outros três para o movimento de rotação em cada um dos eixos. Para melhor estudo do problema, foram estabelecidos um referencial inercial e um referencial solidário ao corpo relacionados da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = R_{bi} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

Na sequência, usaremos a matriz de rotação previamente obtida, para descrever o movimento geral do corpo a partir de suas equações de movimento translacional e

rotacional.

Pode-se utilizar da matriz de rotação R_{bi} para chegar na seguinte relação entre as velocidades:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = R_{bi} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Para a análise da dinâmica rotacional do movimento, iremos utilizar as equações historicamente conhecidas como equações de Euler(HIBBLER), essas equações consideram que o sistema de referência solidário ao corpo é coincidente com o centro de massa e o corpo é rígido e simétrico, fazendo que os produtos de inércia sejam zero, $I_{xx} = I_x$, $I_{yy} = I_y$, $I_{zz} = I_z$:

$$I \frac{d\omega}{dt} = \omega \times I \cdot \omega + H \quad (1.1)$$

onde:

\mathbf{I} é a matriz de inércia do corpo, $\boldsymbol{\omega}$ é o vetor de velocidade angular, $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ é a taxa de variação da velocidade angular, \times representa o produto vetorial, \mathbf{H} é o vetor do momento aplicado.

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Onde I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} são os momentos de inércia sobre os seus eixos principais.

1.1.4 Dinâmica translacional

Usando a Segunda Lei de Newton, podemos analisar a dinâmica translacional do corpo no referencial inercial. As forças atuantes no drone são da tração gerada pelos 4 propulsores bem com as forças aerodinâmicas de arrasto agindo sobre o drone. Assim cada uma das forças aerodinâmicas e de tração devem ser transformadas do referencial to corpo para o referencial inercial utilizando as matrizes de transformação previamente definidas. Assim as equações de movimento translacional podem ser definidas como:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = R_{ib} \sum_{i=1}^4 T_i - R_{ib} D - m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Sendo que na equação (1.1), T_i são os vetores de força gerado pelos motores de 1 a n , D é a força aerodinâmica de arrasto agindo no drone, m é a massa total do drone e g é aceleração da gravidade.

1.1.5 Forças aerodinâmicas

Quando falamos das forças aerodinâmicas atuando em um drone, podemos considerar que a única força externa além do arrasto é gerada pelas hélices, na forma de torque e tração. Assim geralmente assumimos que os únicos torques e trações gerados pelas hélices são utilizados para o controle do drone.

Para compreender completamente a dinâmica do movimento translacional de um drone, é crucial examinar as forças e momentos que atuam sobre o corpo. Estas podem ser decompostas em forças de propulsão, forças aerodinâmicas, arrasto e momentos devido às hélices.

1. Forças de Propulsão:

As forças de propulsão são geradas pelos motores do drone e são representadas pelos vetores \mathbf{T}_i . A soma vetorial dessas forças, considerada no referencial inercial ($\mathbf{F}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{T}_i$), constitui a força total de propulsão que impulsiona o drone.

2. Força Aerodinâmica de Arrasto (\mathbf{D}):

O arrasto aerodinâmico (\mathbf{D}) é a força resistiva oposta ao movimento do drone. Essa força é influenciada pela velocidade relativa do drone em relação ao ar e por características aerodinâmicas específicas do seu design.

3. Força Gravitacional (\mathbf{F}_{mg}):

A força gravitacional (\mathbf{F}_{mg}) atua no sentido negativo do eixo vertical e é proporcional à massa do drone (m) e à aceleração da gravidade (g).

4. Momentos devido às Hélices ($\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi$):

Os momentos em torno dos eixos de rotação (ϕ, θ, ψ) são influenciados pelos torques ($\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi$) gerados pelas hélices. Estes momentos resultam da interação entre as forças de propulsão desiguais e as distâncias entre os motores.

A equação dos torques gerados pela hélice pode ser expandida para fornecer uma visão mais detalhada dos fatores envolvidos. A equação geral para o momento (τ) gerado por uma hélice é frequentemente modelada usando a equação do torque de potência. Vamos expandir essa equação:

$$\tau = k_t \cdot \rho \cdot A \cdot R \cdot \Omega^2 \quad (1.3)$$

onde:

τ_i é o momento gerado pelo i -ésimo motor.

k_t é o coeficiente de empuxo da hélice.

ρ é a densidade do ar.

A é a área da seção transversal da hélice.

R é o raio efetivo da hélice.

Ω_i é a velocidade angular da hélice.

Esta equação baseia-se na teoria da aerodinâmica das hélices e descreve como o torque gerado pela hélice (τ_i) é proporcional ao quadrado da velocidade angular (Ω_i), à densidade do ar (ρ), à área da seção transversal (A), e ao coeficiente de empuxo (k_t).

Além disso, é comum considerar outros fatores que afetam a eficiência do sistema de propulsão, como o efeito solo, a influência mútua entre as hélices e as perdas mecânicas. Assim, a equação do torque pode ser estendida para incorporar esses fatores:

$$\tau_i = k_t \cdot \rho \cdot A \cdot R \cdot \Omega_i^2 + Q_i \quad (1.4)$$

onde Q_i representa termos adicionais que levam em conta fatores de correção e não idealidades no sistema.

A modelagem precisa dos torques é fundamental para prever o comportamento dinâmico do drone e projetar sistemas de controle eficazes. A obtenção experimental desses parâmetros é frequentemente realizada em testes de laboratório, onde a resposta das hélices a diferentes condições de operação é medida e analisada.

Os momentos aerodinâmicos referem-se aos momentos (torques) que são gerados devido às forças aerodinâmicas atuando em uma aeronave, incluindo drones. Esses momentos desempenham um papel crucial na estabilidade e controle do voo. Vamos explorar os momentos aerodinâmicos em relação aos eixos principais de um drone.

1. Momento de Rolamento (L):

O momento de rolamento (L) é gerado pela componente aerodinâmica que atua perpendicularmente ao eixo transversal da aeronave. Ele resulta em uma rotação em torno do eixo de rotação longitudinal (Roll). A relação entre o momento de rolamento aerodinâmico (M_{aero}) e a taxa de rotação angular (ϕ) pode ser expressa por:

$$L = I_{xx} \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

2. Momento de Arfagem (M):

O momento de arfagem (M) é causado pela componente aerodinâmica que atua perpendicularmente ao eixo lateral da aeronave. Ele induz uma rotação em torno do eixo de rotação transversal (Pitch). A relação com a taxa de rotação angular (θ) é dada por:

$$M = I_{yy} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

3. Momento de Guinada (N):

O momento de guinada (N) é associado à componente aerodinâmica que atua perpendicularmente ao eixo vertical da aeronave. Ele resulta em uma rotação em torno do eixo vertical (Yaw). A relação com a taxa de rotação angular (ψ) é representada por:

$$N = I_{zz} \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2}$$

Vamos estabelecer a relação entre os momentos aerodinâmicos e os torques em um drone. Isso envolve considerar como as forças aerodinâmicas aplicadas às superfícies da aeronave geram torques que influenciam sua dinâmica de rotação. Vamos analisar cada eixo separadamente:

1. Momento de Rolamento (L) e Torque (τ_ϕ):

O momento de rolamento (L) é gerado por forças aerodinâmicas que atuam perpendicularmente ao eixo transversal da aeronave. Este momento é diretamente proporcional à taxa de rotação angular (ϕ). Portanto, podemos relacionar L com o torque de rolamento (τ_ϕ), sendo l o tamanho do braço do motor:

$$L = I_{xx} \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2} = l \cdot \tau_\phi$$

2. Momento de Arfagem (M) e Torque (τ_θ):

O momento de arfagem (M) é causado por forças aerodinâmicas perpendiculares ao eixo lateral da aeronave. Ele está diretamente relacionado à taxa de rotação angular (θ), sendo l o tamanho do braço do motor. Podemos expressar essa relação como:

$$M = I_{yy} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = l \cdot \tau_\theta$$

3. Momento de Guinada (N) e Torque (τ_ψ):

O momento de guinada (N) é associado a forças aerodinâmicas perpendiculares ao eixo vertical da aeronave e sendo l o tamanho do braço do motor. Sua relação com a taxa de rotação angular (ψ) pode ser descrita por:

$$N = I_{zz} \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2} = 0 \cdot \tau_\phi + 0 \cdot \tau_\theta + 1 \cdot \tau_\psi$$

1.1.6 Cinemática de Rotação

A cinemática de rotação em drones é essencial para compreender o movimento angular sem levar em conta as forças envolvidas. Vamos explorar os fundamentos passo a passo, abordando ângulos de Euler, taxas de rotação angular.

A relação entre as velocidades angulares do corpo e as taxas de variação dos ângulos de Euler, pode ser dada como:

$$\omega = \Omega \dot{\Theta} \quad (1.5)$$

As taxas de rotação angular ($\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$) são as derivadas dos ângulos de Euler. Utilizamos a matriz de rotação das velocidades angulares para relacionar as velocidades angulares às taxas de rotação(p,q,r) ao redor dos eixos x, y, e z:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\phi) \cdot \tan(\theta) & \cos(\phi) \cdot \tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi)/\cos(\theta) & \cos(\phi)/\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Essa relação nos permite converter as taxas de rotação angular para as taxas de variação dos ângulos de Euler.

Aqui, podemos aplicar a suposição para pequenos ângulos, assumindo que o sistema não alcançará ângulos elevados, sendo que isso invalidaria a modelagem. Logo, podemos fazer as seguintes aproximações,

$$\cos(\delta) = 1$$

,

$$\sin(\delta) = \delta$$

, o que nos dá:

$$p = \dot{\phi} - \theta\dot{\psi}$$

$$q = \dot{\theta} + \phi\dot{\psi}$$

$$r = -\psi\dot{\theta} + \dot{\psi}$$

Assim, considerando pequenas velocidades angulares, o termos com multiplicação podem ser considerados pequenos o suficiente para serem eliminados, de forma que ficamos com:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Derivando em função do tempo, temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}$$

1.1.7 Dinâmica de Rotação

A dinâmica de rotação em drones explora como os torques aplicados a uma aeronave influenciam suas taxas de rotação angular. Vamos passar por todos os passos do equacionamento, começando pela Segunda Lei de Newton para a rotação.

$$\vec{M} = \dot{\vec{H}} \quad (2.9)$$

Sendo que \vec{M} representa a soma total de todos os momentos que afetam a rotação do drone. Inclui contribuições externas, como os gerados pelos motores e forças aerodinâmicas, e contribuições internas, como os momentos inerciais resultantes da distribuição de massa. O termo, $\dot{\vec{H}}$ denota a variação do momento angular. O momento angular total de um quadrirotor compreende duas componentes distintas. A primeira delas diz respeito à rotação do próprio corpo, enquanto a segunda está relacionada à rotação dos motores. Portanto,

$$\vec{H} = \vec{H}_{\text{corpo}} + \vec{H}_{\text{motores}} \quad (2.10)$$

Onde \vec{H}_{corpo} representa o momento angular do corpo e \vec{H}_{motores} corresponde ao momento angular devido aos motores. Esses momentos angulares podem ser descritos da seguinte forma:

$$\vec{H}_{\text{corpo}} = \vec{I}_{\text{corpo}} \cdot \vec{\omega}_{\text{corpo}} \quad (2.11)$$

$$\vec{H}_{\text{motores}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_r \Omega \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Aqui, J_r representa o momento de inércia do conjunto composto pelo rotor, eixo e hélice, enquanto Ω é a velocidade nominal de rotação do motor. Portanto, a equação de Euler que descreve a dinâmica de rotação é definida como:

$$\vec{I}_{\text{corpo}} \cdot \dot{\vec{\omega}}_{\text{corpo}} = \vec{M} - \vec{\omega}_{\text{corpo}} \times (\vec{H}_{\text{corpo}} + \vec{H}_{\text{motores}}) \quad (2.13)$$

Para cada um dos eixos, temos:

$$I_{xx} \cdot \dot{\phi} = (I_{zz} - I_{yy}) \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\psi} + H_{\phi}$$

$$I_{yy} \cdot \dot{\theta} = (I_{xx} - I_{zz}) \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\psi} + H_{\theta}$$

$$I_{zz} \cdot \dot{\psi} = (I_{yy} - I_{xx}) \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\theta} + H_{\psi}$$

Os termos $\vec{I}_{\text{corpo}} \cdot \dot{\vec{\omega}}_{\text{corpo}}$ e $\vec{\omega}_{\text{corpo}} \times (\vec{H}_{\text{corpo}} + \vec{H}_{\text{motores}})$ representam a taxa de variação do momento angular no sistema do corpo. O operador de produto vetorial \times é aplicado na última parte da equação.

Isolando os momentos H e os relacionando com os momentos aerodinâmicos, temos:

$$I_{xx} \cdot \frac{d\omega_{\phi}}{dt} + (I_{yy} - I_{zz}) \cdot \omega_{\theta} \cdot \omega_{\psi} = I_{xx} \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$I_{yy} \cdot \frac{d\omega_{\theta}}{dt} + (I_{zz} - I_{xx}) \cdot \omega_{\phi} \cdot \omega_{\psi} = I_{yy} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$I_{zz} \cdot \frac{d\omega_{\psi}}{dt} + (I_{xx} - I_{yy}) \cdot \omega_{\phi} \cdot \omega_{\theta} = I_{zz} \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2}$$

(2.15)

1.1.8 Modelo dinâmico do quadricóptero

Assim, considerando (1.2) e (2.15), e as considerações feitas ao longo deste capítulo, podemos chegar ao modelo dinâmico do quadricóptero dado por:

$$\ddot{x} = -(\cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi)T_m$$

$$\ddot{y} = -(\cos \phi \sin \psi \sin \theta - \sin \phi \cos \psi)T_m$$

$$\ddot{z} = g - \cos \phi \cos \theta T_m$$

$$\dot{\phi} = -\dot{\theta}\dot{\psi}(I_{zz} - I_{yy}) - \dot{\theta}J_r\Omega_{I_{xx}} + LI_{xx}$$

$$\dot{\theta} = -\dot{\phi}\dot{\psi}(I_{xx} - I_{zz}) + \dot{\phi}J_r\Omega_{I_{yy}} + MI_{yy}$$

$$\dot{\psi} = -\dot{\phi}\dot{\theta}\frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} + NI_{zz}$$