

João Paulo Souza Flores NUSP: 10773892
José Arthur Siqueira Guerreiro NUSP: 10791767
Samuel Alves da Silva Junior NUSP: 10769639
Wallace Moreira e Silva NUSP: 10823772

Modelagem Dinâmica de um Quadricóptero

São Paulo
2021

João Paulo Souza Flores NUSP: 10773892
José Arthur Siqueira Guerreiro NUSP: 10791767
Samuel Alves da Silva Junior NUSP: 10769639
Wallace Moreira e Silva NUSP: 10823772

Modelagem Dinâmica de um Quadricóptero

Trabalho Final da Disciplina de
PME3380 - Modelagem de Sistemas
Dinâmicos

Universidade de São Paulo
Escola Politécnica da USP
PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Orientador:
Prof. Dr. Décio Crisol Donha
Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury

São Paulo
2021

Resumo

O intuito deste trabalho referente ao curso de Modelagem de Sistemas Dinâmicos (PME 3380) será a modelagem de um quadricóptero que possui 3 graus de liberdade tendo a possibilidade de transladar e rotacionar. Perpassando os textos e análises retratadas ao longo desta tarefa será possível verificar o modelo físico tridimensional do sistema, sua análise cinemática e dinâmica, os quais consideraram em seu desenvolvimento e elaboração algumas hipóteses simplificadoras. Por fim o modelo será submetido à presença do arrasto com intuito de verificar os comportamentos que o mesmo irá demonstrar. Cabe salientar que é utilizado o software computacional Scilab para todos os testes e averiguações no quadricóptero.

Palavras Chaves: quadricoptero - análise - força - motores - eixo - matriz

Abstract

The purpose of this work referring to the Dynamic Systems Modeling course (PME 3380) will be the modeling of a quadcopter that has 3 degrees of freedom, with the possibility of translating and rotating. Going through the texts and analyzes portrayed throughout this task, it will be possible to verify the three-dimensional physical model of the system, its kinematic and dynamic analysis, which considered in its development and elaboration some simplifying hypotheses. Finally, the model will be submitted to the presence of drag in order to verify the behaviors that it will demonstrate. It is worth mentioning that the Scilab computational software is used for all tests and inquiries on the quadcopter.

Keywords: quadricopter - analysis - force - engines - axis - matrix

Lista de Figuras

1	Gyroplane No.1	8
2	Motor Le Rhone	8
3	Oemichen No. 2	9
4	Ruston Proctor Aerial Target	9
5	Vergeltungswaffe	10
6	Parrot AR Drone	10
7	Rotação das Hélices do Quadricóptero	11
8	Giro do Quadricóptero	11
9	Quadricóptero indo para frente e para trás	11
10	Subida e Descida de um Quadricóptero	12
11	Movimento de Rolagem	12
12	Movimento de Arfagem	12
13	Efeito Solo	14
14	Força de Arrasto em Relação ao Movimento	15
15	<i>Vortex Ring</i> em um Quadricóptero	15
16	Topologia Positiva e Cruzada de um Quadricóptero	16
17	Pequena Oscilação do Movimento de Pitching	16
18	CAD do Quadricóptero	17
19	Diagrama do Quadricóptero	17
20	Diagrama de Corpo Livre	18
21	Ângulos (Convenção Tait Bryan)	19
22	Forças Atuantes no Quadricóptero	21
23	Diagrama de Blocos	26
24	Drones mais velozes	29
25	Motor E-MAX CF2822	30
26	Coeficientes de Empuxo e Arrasto para baixas velocidades	31
27	Distribuição das Massas	33
28	Movimento Apenas em Z	35
29	Movimento Apenas em X	36
30	Ação do Torque em θ no Quadricóptero	37
31	Phantom 4 DJI	38
32	Diagrama de Bode para entrada T_θ , caso sem arrasto	43
33	Diagrama de Bode para entrada F, caso sem arrasto	43
34	Diagrama de Bode para entrada Unitária, caso sem arrasto	44
35	Diagrama de Bode para entrada T_θ , caso com arrasto	45
36	Diagrama de Bode para entrada F, caso com arrasto	45
37	Diagrama de Bode para entrada Unitária, caso com arrasto	46

Lista de Tabelas

1	Momentos gerados no Quadricóptero	23
2	Variáveis do Espaço de Estados	25
3	Tipos de Drones Analisados	29
4	Característica do Motor E-MAX CF2822	30
5	Áreas frontais do Quadricóptero	32
6	Situações de Análise do Quadricóptero	34
7	Funções de Transferência - Entrada T_θ	39
8	Funções de Transferência - Entrada F	40
9	Funções de Transferência - Entrada Unitária	40
10	Funções de Transferência - Entrada T_θ	41
11	Funções de Transferência - Entrada F	42
12	Funções de Transferência - Entrada Unitária	42
13	Estabilidade do Sistema	47
14	Tabela de Routh-Hurwitz	47

Sumário

1	Introdução	8
1.1	Funcionamento	11
1.2	Revisão Bibliográfica	13
1.3	Objetivo	13
2	Metodologia	14
2.1	Hipóteses Simplificadoras	14
2.2	Topologia do Quadricóptero	16
2.3	Plano Vertical XZ	16
3	Modelagem	17
3.1	Modelo Físico	17
3.2	Análise Cinemática	19
3.3	Dinâmica do Sistema	21
3.4	Espaço de Estados	25
3.4.1	Diagrama de Blocos	26
3.4.2	Equacionamento	26
3.4.3	Linearização	27
3.4.4	Matrizes do Espaço de Estado	28
4	Parâmetros	29
4.1	Massa	30
4.2	Motor	30
4.3	Força de Empuxo	31
4.4	Força de Arrasto	32
4.5	Momentos de Inércia	33
5	Análise	34
5.0.1	Situação 1 - Voo Pairado	34
5.0.2	Situação 2 - Voo Apenas em Z	35
5.0.3	Situação 3 - Voo Apenas em X	36
5.0.4	Situação 4 - Voo em X e em Z	37
5.0.5	Situação 5 - Voo com Arrasto	38
5.1	Funções de Transferência - SEM ARRASTO	39
5.1.1	Entrada T_θ	39
5.1.2	Entrada F	40
5.1.3	Entrada Unitária	40
5.2	Funções de Transferência - COM ARRASTO	41
5.2.1	Entrada T_θ	41
5.2.2	Entrada F	42
5.2.3	Entrada Unitária	42
5.3	Diagrama de Bode - SEM ARRASTO	43
5.4	Diagrama de Bode - COM ARRASTO	45
5.5	Polos das Funções de Transferência	47
5.6	Critério de Routh Hurwitz	47
6	Conclusão	48
7	Referencias Bibliográficas	49

1 Introdução

Os quadricópteros são aeronaves impulsionadas por 4 rotores, cujo formato mais comum é com as 4 hélices dispostas em formato de cruz que geram um empuxo devido ao movimento das mesmas pelo ar. Os primeiros registros desse tipo de aeronave datam do início do século 20 quando em 1907 o Gyroplane No.1 fez seu primeiro voo, esse foi um quadrotor desenvolvido pelos irmãos Jacques Breguet e Louis Charles Breguet com auxílio do professor Charles Richet. Porém, sendo um protótipo pioneiro na área dos quadricópteros, o Gyroplane No.1 tinha inúmeras limitações, primeiramente a aeronave necessitava do auxílio de um operador em cada ponta dos seus braços para manter controle da aeronave, além disso tinha dificuldade de alçar voo. Em 19 de setembro de 1907 o Gyroplane No.1 chegou a apenas 0,6m de altura de voo, em condições mais favoráveis e em 29 de setembro do mesmo ano ele chegou a 1,50m de altura, desta forma podemos dizer que o Gyroplane No.1, apesar de pioneiro, não pode ser declarado como o primeiro quadricóptero funcional da história da aviação.

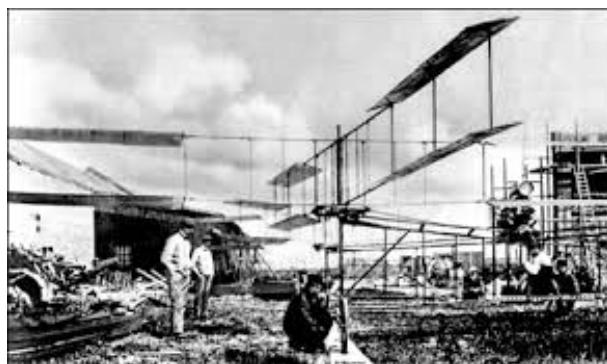


Figura 1: Gyroplane No.1

A ideia de um veículo aéreo do tipo multirotor voltou a ser explorada nos anos 20 quando Étienne Edmond Oehmichen, um engenheiro francês da empresa automobilística Peugeot começou a explorar a ideia de um veículo aéreo capaz de decolar de maneira vertical. Sua primeira criação mostrou-se incapaz de alçar voo inicialmente, porém sua segunda tentativa trouxe a troca do motor original de 25hp pelo motor Le Rhône rotativo muito comum entre as aeronaves utilizadas durante a primeira guerra mundial, este motor produzia 120hp aumentando assim dramaticamente o empuxo máximo, tornando assim possível a decolagem.

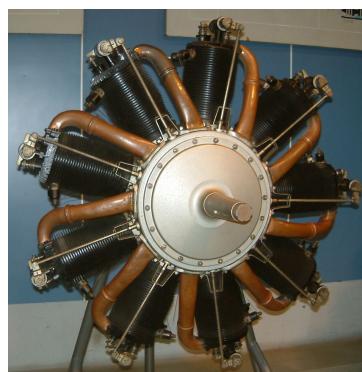


Figura 2: Motor Le Rhone

Seu primeiro voo foi em 11 novembro de 1922, tornando-se a primeira instância de uma decolagem vertical sem assistência ou dependência de operadores posicionados em terra firme, e em 1924 o Oemichen No. 2 tornou-se o primeiro veículo do seu tipo a completar um circuito de 1 km.

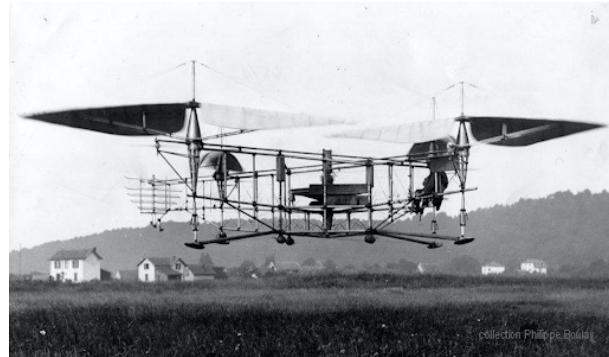


Figura 3: Oemichen No. 2

Outra grande inovação que se torna fundamental para o entendimento do atual posicionamento dos quadricópteros estudados neste trabalho, foi a criação de veículos aéreos não tripulados, apesar de sua história começar nos balões explosivos utilizados pelo exército austríaco no ataque a cidade de Veneza em 1849. Esses eram dependentes em grande parte do vento para que fossem carregados corretamente em direção ao alvo, tendo desta forma um alto nível de imprecisão.

A partir de outros relatos históricos é possível dizer que o vôo controlado não tripulado tem suas origens em 1916, durante a primeira guerra mundial, quando o Ruston Proctor Aerial Target alçou voo sendo controlado por um sistema de rádio. Hewitt-Sperry Automatic Airplane também teve seu primeiro voo nessa época, não existem registros da data exata de seu primeiro voo, esse era controlado por um sistema de giroscópios.



Figura 4: Ruston Proctor Aerial Target

Com o final da primeira guerra, a redução do investimento em aviação militar e em veículos não tripulados foi reduzido, porém assim como o estado de paz na Europa não foi duradouro, o período de estagnação da tecnologia dos Vants também foi curto. Durante a segunda guerra o desenvolvimento de veículos não tripulados aéreos foi acelerado, o mais famoso exemplo dessa tecnologia de guerra foi o Vergeltungswaffe 1, chamado na época de “bomba voadora” V-1 desenvolvida pela Alemanha, esse se tornou o primeiro míssil guiado da história.

Neste período mais de 8000 mísseis V-1 foram lançados contra Londres, sendo assim uma das mais efetivas armas de guerra da época. O sistema de navegação da mesma foi desenvolvido pela Askania Werke AG e consistia na utilização de giroscópios, bússolas magnéticas e barômetros para garantir a rota da mesma.

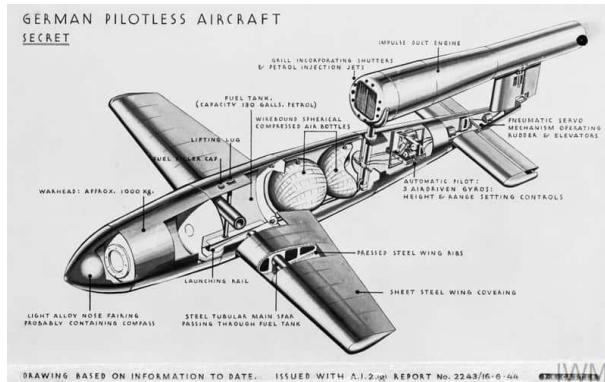


Figura 5: Vergeltungswaffe

Mesmo com o final da segunda guerra os avanços tecnológicos na área de voo de veículos não tripulados continuaram a acontecer em decorrência, principalmente do avanço das tensões entre os Estados Unidos da América e a União das Repúblicas Socialistas Soviéticas. É reconhecido mundialmente que um dos mais importantes personagens no avanço das tecnologias de veículos não tripulados é Abraham Karem, responsável por alguns dos mais importantes VANTS do final da Guerra fria até os dias de hoje.

Com os avanços militares dos VANTS e a popularização da tecnologia observa-se uma mudança do mercado, com a tecnologia sendo cada vez mais implementada a aplicações civis que vão desde monitoramento de segurança, auxílio para lavoura, transporte de objetos, vídeo e cinematografia, assim como lazer.

Lançado em 2010 o Parrot AR Drone foi um enorme sucesso de vendas e popularizou a revolução do uso de equipamentos do gênero em aplicações não militares, sendo em parte responsável pela aceitação do público às novas ideias. Essa tecnologia levou a pizzaria domino's a se tornar a primeira empresa a fazer uma entrega dese porte por meio de um veículo aéreo não tripulado, mostrando que tal tecnologia está se tornando cada vez mais presente no cotidiano civil.



Figura 6: Parrot AR Drone

1.1 Funcionamento

O quadricóptero é um Veículo Aéreo Não Tripulado (VANT) no qual sua elevação e propulsão são originadas pelos vários motores controláveis que o constituem. Seu funcionamento pode ser melhor observado pela Figura 7, na qual os dois rotores diagonais A e C giram no sentido horário, e os dois outros B e D giram no sentido anti-horário, possibilitando ao mesmo maior equilíbrio e estabilidade no voo.

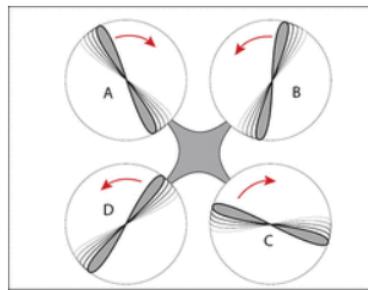


Figura 7: Rotação das Hélices do Quadricóptero

Para fazer com que o quadricóptero gire em torno dos seu eixo vertical de sustentação é necessário que os rotores diagonalmente rotacionem em velocidades angulares diferentes conforme ilustrado pela Figura 8, o que possibilitará que o mesmo realize manobras de desvio no ar.

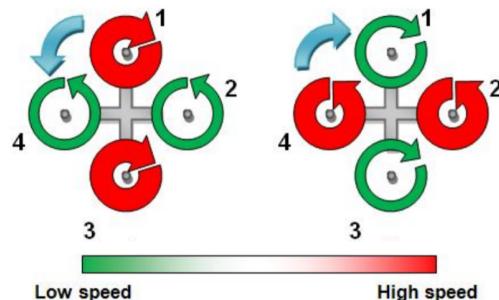


Figura 8: Giro do Quadricóptero

Para fazer com que o quadricóptero vá para frente é necessário aumentar velocidade do rotor traseiro e desacelerar o dianteiro, já para fazer o quadricóptero ir para trás basta fazer o oposto. Isto está ilustrado pela Figura 9.

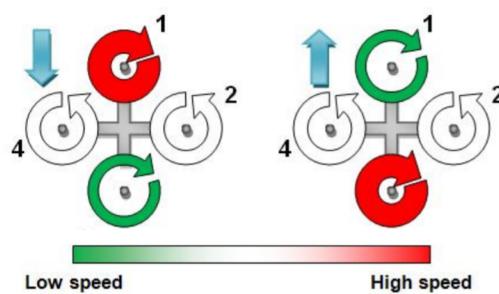


Figura 9: Quadricóptero indo para frente e para trás

Para fazer o quadricóptero descer ou subir é necessário que os rotores diminuam sua velocidade ou aumentem a mesma como está representado na Figura 10, sendo que para deixá-lo pairado é necessário que sua força de sustentação seja igual à força da gravidade, possibilitando portanto que o multirotor mantenha uma altitude constante.

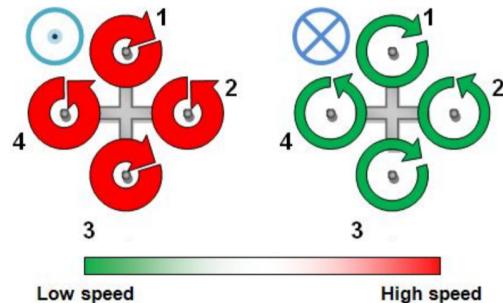


Figura 10: Subida e Descida de um Quadricóptero

Para fazer com que o quadricóptero (em topologia cruzada) realize o movimento de arfagem (pitch) é necessário que haja o ajuste das velocidades relativas aos motores traseiros e dianteiros. Para realizar o movimento de rolagem (roll) é necessário alterar as velocidades dos motores localizados à direita e à esquerda fazendo com que um lado do quadrirotor tenha mais sustentação que o outro. Essas movimentações podem ser observadas pelas Figuras 11 e 12.

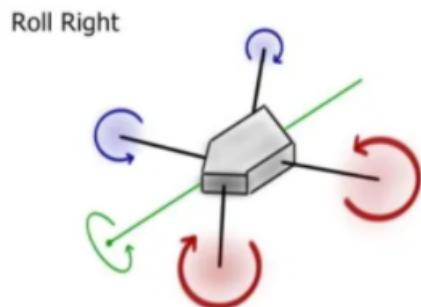


Figura 11: Movimento de Rolagem

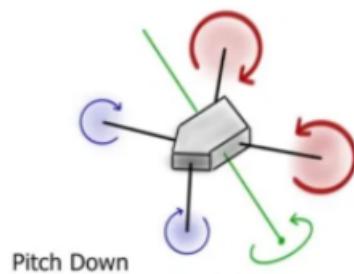


Figura 12: Movimento de Arfagem

1.2 Revisão Bibliográfica

Para o presente trabalho foram analisados vários artigos e trabalhos científicos relacionados à temática explorada buscando um maior aprofundamento nos temas referentes à modelagem de sistemas de veículos do tipo quadricópteros.

Foi feito um estudo da história dos VANTS e dos quadricópteros para se compreender as diversas dificuldades relacionadas ao funcionamento destes veículos e o processo de modelagem dos mesmos, em seus diversos estágios de funcionamento. Alguns dos trabalhos relacionados ao tema tem como enfoque a análise do funcionamento dos VANTS do tipo quadricóptero, como o Cavallaro (2019) e Kokron Rodrigues (2014), que apresentam uma visão geral sobre a história de ambos os temas. Há também artigos mais focados em um dos temas, como o Madani e Benallegue (2006) que tem enfoque no funcionamento dos quadricópteros, e como o texto de Phillips (2009), que tem enfoque na análise da mecânica de voo de qualquer aeronave, não apenas os quadricópteros.

Para a modelagem do sistema foram tomados como base os trabalhos Luukkonen(2011), em que foi adotado um sistema de coordenadas solidário ao quadricóptero e a partir disso foram obtidas as equações que regem os movimentos do VANT, levando em consideração sua massa e outros parâmetros considerados relevantes para a análise.

Foram analisados trabalhos como Bouabdallah(2007), Dremel(2008) e Rodrigues(2014), pela sua representação das forças atuantes num sistema, assim como suas componentes mais complexas e metodologia empregada.

1.3 Objetivo

O intuito deste trabalho será apresentar uma modelagem dinâmica do quadricóptero, apresentando toda descrição do sistema referencial a ser adotado, sua cinemática e o conjunto de equações que regem seu movimento. Para tanto, dada a complexidade desta modelagem, serão consideradas algumas hipóteses e simplificações; ademais será aplicado o uso de simulações computacionais para ilustrar o comportamento deste quadrirotor em uma série de cenários com o intuito de exemplificar e analisar seu comportamento. O trabalho é baseado na movimentação do quadrirotor no plano XZ tendo assim movimentação nula no eixo Y, porém com variação no ângulo θ , também chamado na aviação como ângulo de arfagem, assim permitindo a movimentação no mesmo no plano citado.

2 Metodologia

A pretensão deste relatório é modelar o movimento de um quadrirotor a partir das análises estática e dinâmica do modelo físico, buscando um sistema de equações e relacionando-as com base em um referencial inercial e outro solidário ao corpo. Com isso deseja-se definir as entradas e saídas do sistema além de influências externas como o arrasto, com o objetivo de complementar o modelo.

Ademais o modelo matemático necessita de simplificações para facilitar a análise e simulação, essas se deram por meio da expansão das equações por séries de Taylor de segunda ordem em torno do ponto de equilíbrio do sistema. Após isso o modelo foi organizado em espaço de estados e representado por uma equação matricial, concluindo a modelagem e seguindo para as simulações computacionais e análises dos resultados.

2.1 Hipóteses Simplificadoras

Para examinar o problema posto do quadrirotor, algumas hipóteses simplificadoras serão adotadas a fim de representar o modelo sem recair em todas as complexidades que o mesmo pode ter. As hipóteses admitidas para as análises foram:

- **Efeito solo desprezado:** Não será considerado em nosso modelo o efeito aerodinâmico produzido pelo solo na qual poderia aumentar a sustentação do quadricóptero quando o mesmo se aproximasse do solo causando uma perturbação no seu escoamento aerodinâmico. A visualização deste efeito é ilustrada pela Figura 13.

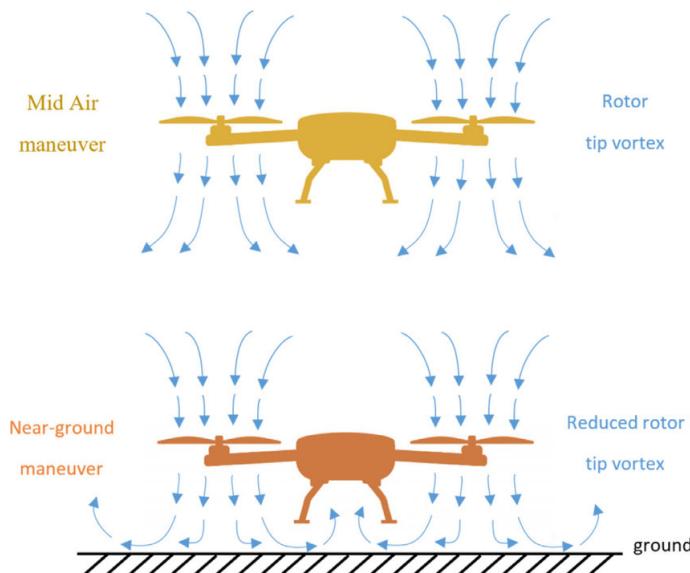


Figura 13: Efeito Solo

- **Quadricóptero é simétrico:** A simetria do quadrirotor foi considerada para simplificações nos futuros equacionamentos, assumindo que haverá uma distribuição de massa homogênea na qual o centro geométrico do sistema será coincidente com o centro de gravidade.

- **Força de arrasto será contrária ao movimento:** Ao longo do movimento do quadricóptero a força de arrasto (proporcional à velocidade do mesmo) será sempre considerada de maneira inversa à movimentação do mesmo, sendo que será considerado que sua aplicação irá se limitar ao centro geométrico do quadricóptero, como ilustrado pela Figura 14.

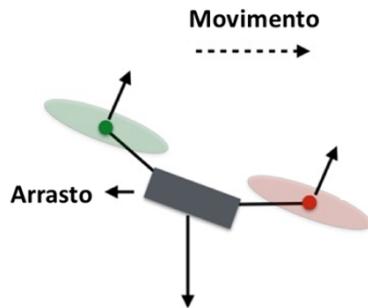


Figura 14: Força de Arrasto em Relação ao Movimento

- **Área do quadrirotor constante:** Considerando o quadricóptero como um corpo rígido e assumindo que não haverá variação das áreas do mesmo (seja no plano x, y ou z).
- **A vibração dos motores é desprezada:** A vibração foi desprezada para não haver perda de rendimento no empuxo dos motores.
- **Sem escorregamento entre as hélices e o rotor do motor:** O efeito de escorregamento ou “*slip*” poderia diminuir ou mitigar o deslocamento do quadrirotor a ser modelado, desta forma foi desconsiderado nas análises.
- **4 motores idênticos:** Todos os motores que irão compor o quadricóptero serão análogos do tipo E-MAX CF2822.
- **Vortex Ring desprezado:** Não será considerado a formação de vórtices sob o eixo de rotação das hélices, pois acarretaria numa grande perda de sustentação no quadricóptero. Isso está representado pela Figura 15.

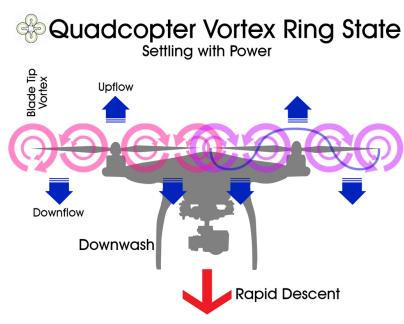


Figura 15: *Vortex Ring* em um Quadricóptero

2.2 Topologia do Quadricóptero

Os quadricópteros assim como outros multirotors podem ser classificados de acordo com sua orientação em relação aos eixos de referência para seu deslocamento.

As orientações principais para os quadrirotos são com topologia cruzada ou positiva, como exemplifica a Figura 16. No caso em particular deste trabalho as análises serão feitas considerando um quadricóptero com topologia positiva.

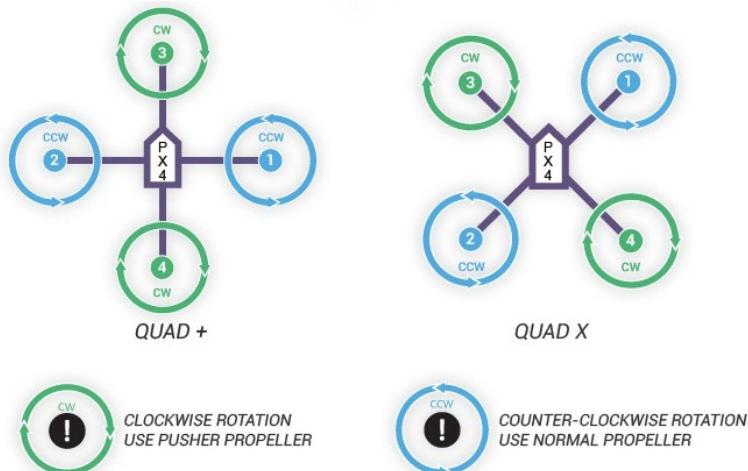


Figura 16: Topologia Positiva e Cruzada de um Quadricóptero

2.3 Plano Vertical XZ

Será admitido que o movimento adotado no plano vertical XZ será de *short-period mode* ou seja: a oscilação do pitch será amortecida, na qual o movimento de arfagem ou a variação do ângulo de ataque em relação ao centro de gravidade será célere e curto. Isto está esboçado pela Figura 17.

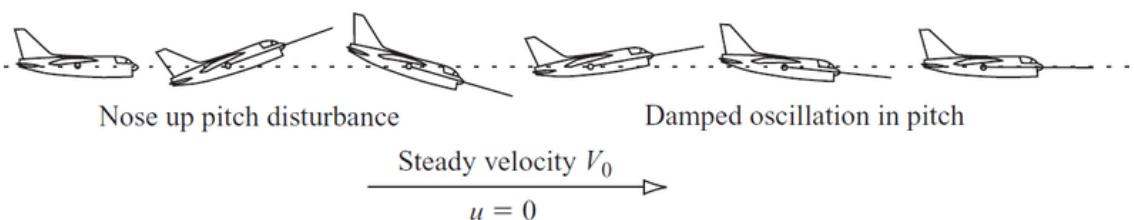


Figura 17: Pequena Oscilação do Movimento de Pitching

3 Modelagem

3.1 Modelo Físico

Para a construção de um modelo físico representativo de um drone do tipo quadricóptero foi criado um corpo central onde os sistemas de controle e de fornecimento de energia irão residir, assim como os braços pelos quais acontece o cabeamento necessário para instalação dos motores que estarão presentes nas pontas dos mesmos. Dessa forma chega-se a estrutura final da Figura 18.



Figura 18: CAD do Quadricóptero

Uma vez que o projeto básico foi definido, a atenção passa a ser a definição de todas as forças atuantes no sistema, e seus diferentes graus de liberdade para que com isso pudesse haver uma compreensão física mais detalhada do sistema e que possibilitasse a formulação de um modelo matemático mais acurado para descrever o comportamento do quadrirotor.

Para tanto utilizou-se das ferramentas computacionais do CAD Siemens NX11 para representar as rotações de cada uma das hélices, assim como a força de “lift” relativa a cada uma das hélices. Também foi definido o sistema de coordenadas solidário ao corpo, denominado como x' , y' e z' , assim como a rotação nestes respectivos eixos, φ , θ e ψ respectivamente. Esse sistema de coordenadas adotado, bem como as rotações podem ser observadas na Figura 19.

Ademais, observa-se que na representação tridimensional colocou-se no eixo z' a representação da força peso, assim como as 4 forças geradas pelos motores. Cabe salientar que o eixo z' da imagem aponta para baixo com o intuito de manter a imagem o menos poluída possível, uma vez que a presença do mesmo em cima do quadricóptero causaria confusão com as forças F .

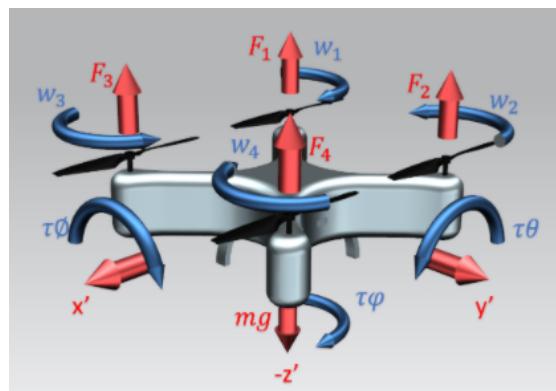


Figura 19: Diagrama do Quadricóptero

Por fim, definiu-se também uma versão simplificada do problema através de um Diagrama de Corpo Livre com intuito de representar de maneira mais clara os esforços solicitantes no quadrirotor, como verifica-se na Figura 20.

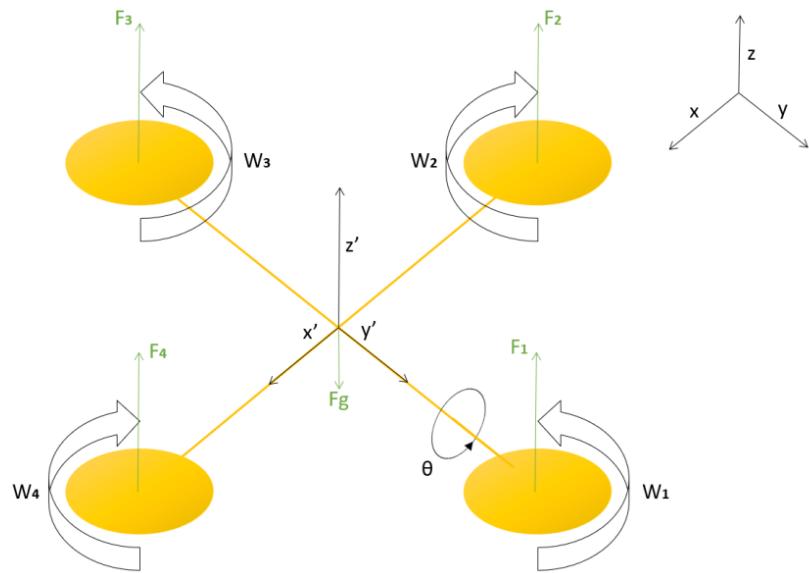


Figura 20: Diagrama de Corpo Livre

3.2 Análise Cinemática

Analizando o diagrama de corpo livre de um quadricóptero retratado pela Figura 19, chega-se nos seis graus de liberdade necessários para a representação do sistema. Esses se dividem em três para o movimento de translação nos eixos x' , y' e z' e outros três para o movimento de rotação em cada um dos eixos. Para melhor estudo do problema, foram estabelecidos um referencial inercial e um referencial solidário ao corpo relacionados da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_T \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Por conseguinte, foi definida a matriz de transformação de base para descrever a rotação geral no espaço Euclidiano tridimensional, em que utilizam-se os 3 ângulos de Euler , roll, pitch e yaw respectivamente, o que está de acordo com a convenção de Tait-Bryan, representada esquematicamente na Figura 21.

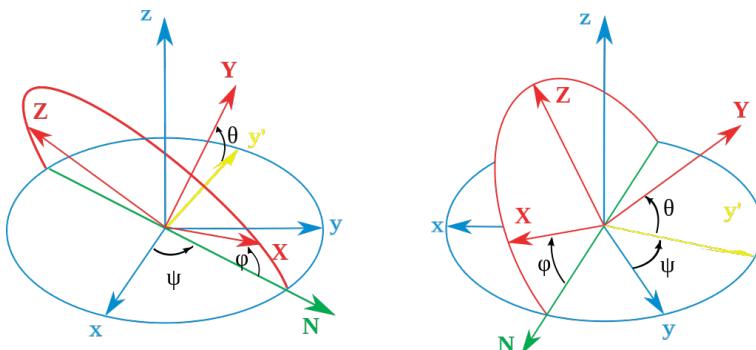


Figura 21: Ângulos (Convenção Tait Bryan)

Ademais, para os eixos x , y e z verifica-se respectivamente as seguintes matrizes de rotação:

Matriz de Rotação em x

$$R(x_B, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (1)$$

Matriz de Rotação em y

$$R(y_B, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

Matriz de Rotação em z

$$R(z_B, \psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Realizando o produto entre as matrizes de rotação obtidas anteriormente obtém-se a matriz de rotação que definirá a orientação relativa do sistema de coordenadas fixo ao corpo rígido em relação ao sistema de coordenadas inicial.

$$R_T = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\theta\sin\psi & \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\sin\theta\sin\psi & \cos\varphi\sin\theta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

Pode-se utilizar da matriz de rotação R_T para chegar na seguinte relação entre as velocidades:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = R_T \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (5)$$

Para obter a equação cinemática rotacional do sistema, relacionou-se as velocidades angulares do corpo rígido em relação ao referencial solidário (p, q, r) e com relação ao inercial ($\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$) como verifica-se abaixo.

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (R(x_B, \varphi)')^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + ((R(y_B, \theta)')^{-1}(R(x_B, \varphi))^{-1})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\varphi\tan\theta & \cos\varphi\tan\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi\sec\theta & \cos\varphi\sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (7)$$

Dessa forma o estabelecimento dos referenciais facilita a análise do sistema, de modo que ambos serão utilizados para montagem do sistema e simulação, buscando uma análise completa do problema.

3.3 Dinâmica do Sistema

Como foi dito na construção do modelo físico, o quadricóptero a ser modelado terá a presença da força gravitacional, a força de arrasto aerodinâmico e a força de empuxo pelos motores, conforme ilustra a Figura 22.

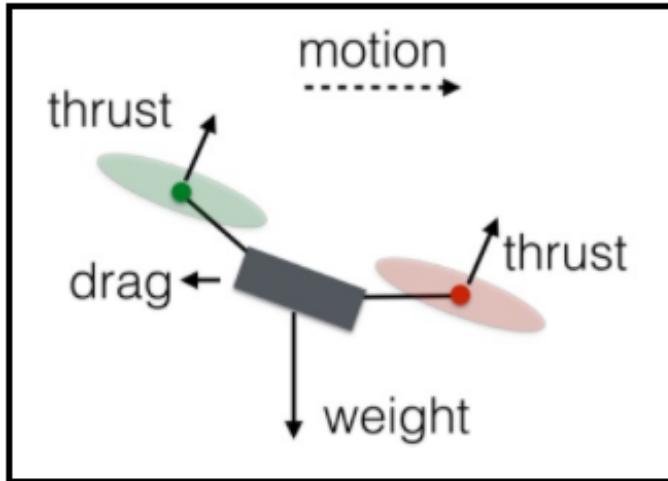


Figura 22: Forças Atuantes no Quadricóptero

A força gravitacional é solidária ao referencial estacionário e terá sua atuação no eixo Z apenas; a força de arrasto aerodinâmico é diretamente proporcional à velocidade do ar que passa pelo quadricóptero, em casos de ventos mais fortes o arrasto aerodinâmico pode auxiliar ou até impossibilitar certas movimentações, sendo que isso será explorado mais a fundo durante o processo de simulação dos próximos capítulos. A representação vetorial das forças é apresentada a seguir.

$$\mathbf{F}_g = (0, 0, -f_g) \rightarrow f_g = mg \quad (8)$$

$$\mathbf{F}_{arr} = (F_{arr,x}, F_{arr,y}, F_{arr,z}) \quad (9)$$

No caso da força de arrasto aerodinâmico estaremos utilizando a nomenclatura F_{arr} , na qual *arr* vem da palavra arrasto. O arrasto aerodinâmico para todos os eixos é calculado da mesma forma, que será apresentada a seguir e pela equação 10

$$F_{arr,i} = \frac{1}{2} C_D \rho A V_i^2 \quad (10)$$

Onde ρ representa a densidade do meio, que no caso será constante para todas as direções, C_D representa o coeficiente de arrasto, (mais uma vez se utilizando da nomenclatura em inglês), A representa a área frontal e V_i representa a velocidade do ar na coordenada do sistema.

Dado a simetria do quadricóptero teremos uma área frontal igual para os eixos X e Y, contudo teremos uma área frontal consideravelmente diferente no eixo Z. Cabe salientar que não será considerada a variação dessas áreas frontais em caso de uma movimentação do drone com certa angulação.

A força responsável pela movimentação do quadricóptero provém da propulsão gerada pelos motores (F_m), na qual os mesmos irão gerar um empuxo na vertical (em relação ao sistema solidário ao quadricóptero) e a força de cada um dos motores juntos formarão a propulsão total do quadricóptero. Isto pode ser exemplificado pela equação 11 e calculado pela equação 12.

$$F_m = (0, 0, \sum F_i) \quad (11)$$

$$F_i = C_e \frac{4\rho r_h^4}{\pi^2} \Omega_i^2 \quad (12)$$

Assim, pelo teorema do movimento do baricentro verifica-se a relação entre as acelerações nos 3 eixos do referencial inercial, as quais estão intrinsecamente inter-relacionadas com as forças atuantes no sistema.

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_g \end{bmatrix} + [R_T] \frac{1}{M} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum F_i \end{bmatrix} + \frac{1}{M} \begin{bmatrix} F_{arr,x} \\ F_{arr,y} \\ F_{arr,z} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Utilizando-se dessas equações supracitadas definem-se as matrizes de velocidade linear V e velocidade angular Ω , que irão corresponder ao deslocamento do quadrirotor ao longo do tempo.

$$V = [u, v, w]^T \quad (14)$$

$$\Omega = [p, q, r]^T \quad (15)$$

Ademais, é possível representar a matriz correspondente às forças principais que atuarão no sistema.

$$F = \begin{bmatrix} -Mg\sin\theta - F_{arr,x} \\ Mg\sin\varphi\cos\theta - F_{arr,y} \\ -Mg\cos\varphi\cos\theta - F_{arr,z} + F_m \end{bmatrix} \quad (16)$$

Sendo que F_m (explicitado pelo equacionamento 11) corresponderá a somatória das forças de empuxo produzidas pelos motores do quadricóptero.

$$F_m = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \quad (17)$$

O torque em cada motor do quadricóptero pode ser representado pela seguinte expressão:

$$I\dot{\Omega} = \tau_i - \tau_{arr} \quad (18)$$

Sendo que o torque gerado pelo arrasto (τ_{arr}) presente na equação 18 é definido por:

$$\tau_{arr} = \frac{1}{2} R \rho A C_e V^2 \quad (19)$$

Sendo $V = wR$ é possível reduzir a expressão anterior e definir os valores fixos dela através de uma constante K_b , como é feito a seguir:

$$\tau_{arr} = \frac{1}{2} R^3 \rho A C_e w_i^2 = K_b w_i^2 \quad (20)$$

Considerando que as manobras realizadas pelo quadrirotor modelado será com baixas velocidades rotacionais têm-se que $t_i = t_{arr}$ aproximadamente. Por conseguinte, da mesma forma que foi feito com a expressão τ_{arr} será representado os valores fixos da expressão da Força de Empuxo por uma única constante K_m .

$$F_i = \frac{1}{2} \rho A C_e \Omega_i^2 = K_m \Omega_i^2 \quad (21)$$

Por conseguinte, determina-se a matriz de Torque a qual é incluída para possibilitar uma compreensão total do problema em questão, e possibilitar observações mais precisas do comportamento do quadrirotor.

$$T = \begin{bmatrix} T_\varphi \\ T_\theta \\ T_\psi \end{bmatrix} \quad (22)$$

Sendo que cada uma das variáveis da matriz de torque supracitada estão explanadas pela seguinte tabela:

Tabela 1: Momentos gerados no Quadricóptero

Variável	Significado
T_φ	Momento de Rolagem
T_θ	Momento de Arfagem
T_ψ	Momento de Guinada

Desenvolvendo a matriz de torque definida pela equação 20, com o auxilio da equação 18 e 19, é possível representar o seguinte equacionamento matricial que irá auxiliar no entendimento da dinâmica rotacional do quadricóptero:

$$T = \begin{bmatrix} T_\varphi \\ T_\theta \\ T_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F_3 - F_1) \cdot r_h \\ (F_2 - F_4) \cdot r_h \\ \tau_3 - \tau_4 + \tau_1 - \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_m \cdot r_h \cdot (\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ K_m \cdot r_h \cdot (\Omega_2^2 - \Omega_4^2) \\ K_b \cdot (\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (23)$$

Realiza-se posteriormente uma verificação do equilíbrio de forças do sistema através da seguinte equação:

$$F = M \cdot \frac{dV}{dt} \quad (24)$$

Dado a equação supracitada utiliza-se a regra da cadeia (sendo esta uma fórmula utilizada para a derivada da função composta de duas funções), obtendo por conseguinte o equacionamento 26.

$$\sum F = M(\dot{V} + \vec{\Omega} \times \vec{V}) \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} -Mg \sin \theta - F_{arr,x} \\ Mg \sin \varphi \cos \theta - F_{arr,y} \\ -Mg \cos \varphi \cos \theta - F_{arr,z} + F_m \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (26)$$

Posteriormente analisa-se a matriz de momentos de inercia, sendo que por se tratar de um sólido em relação a um referencial ortogonal ela terá a seguinte expressão:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Considerando um quadricóptero simétrico na qual os eixos principais de inércia são os eixos do referencial móvel, a matriz de momentos de inercia assumirá a seguinte configuração:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Por fim efetua-se o equilíbrio de momentos do sistema, o qual correlacionará a matriz de torque com a matriz de momentos de inercia. A priori é definida a expressão geral para o calculo do momento.

$$T = \frac{dH}{dt} \quad (29)$$

Em seguida expande-se a expressão anterior aplicando a regra da cadeia na parte direita da igualdade de forma a obter-se o equacionamento matricial 31.

$$\sum T = I\vec{\Omega} + \vec{\Omega} \times I\vec{\Omega} \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} T_\varphi \\ T_\theta \\ T_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (31)$$

3.4 Espaço de Estados

Através das equações diferenciais linearizadas o modelo matemático do quadricóptero pode ser descrito por uma relação matricial composta de um conjunto de variáveis de entradas e saídas, o qual auxiliará posteriormente o projeto de controle do mecanismo.

O sistema será descrito por 12 variáveis de Estado que irão descrever o comportamento do quadrirotor. Elas estão representadas respectivamente pela seguinte matriz transposta:

$$\mathbf{X} = [x \ y \ z \ u \ v \ w \ \varphi \ \theta \ \psi \ p \ q \ r]^T \quad (32)$$

Sendo que cada uma dessas 12 variáveis podem ser explicadas pela seguinte tabela:

Tabela 2: Variáveis do Espaço de Estados

Variável	Significado
x	Deslocamento Linear em X
y	Deslocamento Linear em Y
z	Deslocamento Linear em Z
u	Velocidade Linear em X
v	Velocidade Linear em Y
w	Velocidade Linear em Z
φ	Deslocamento Angular em X
θ	Deslocamento Angular em Y
ψ	Deslocamento Angular em Z
p	Velocidade Angular em X
q	Velocidade Angular em Y
r	Velocidade Angular em Z

A matriz \mathbf{U} corresponderá ao vetor das entradas do sistema analisado, em que os primeiros três termos da matriz representam as entradas para os torques em relação aos ângulos φ , θ e ψ , respectivamente; a entrada F corresponde a uma força de entrada; a entrada unitária está colocada para considerar as constantes matemáticas, como por exemplo a gravidade.

$$\mathbf{U} = [T_\varphi \ T_\theta \ T_\psi \ F \ 1]^T \quad (33)$$

Cabe ressaltar que existem algumas restrições de movimento no sistema a ser modelado, pois ele só se movimentará no plano vertical XZ e terá angulação apenas em θ .

$$\mathbf{X} = [x \ 0 \ z \ u \ 0 \ w \ 0 \ \theta \ 0 \ 0 \ q \ 0]^T \quad (34)$$

$$\mathbf{U} = [0 \ T_\theta \ 0 \ F \ 1]^T \quad (35)$$

Por conseguinte é necessário definir as equações que regerão o movimento do quadricóptero tanto em sua dinâmica translacional quanto rotacional, para por fim representar o Estado de Espaços pelo seguinte equacionamento:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = A\mathbf{X}(t) + B\mathbf{U}(t) \\ \dot{\mathbf{Y}}(t) = C\mathbf{X}(t) + D\mathbf{U}(t) \end{cases} \quad (36)$$

3.4.1 Diagrama de Blocos

Para uma melhor visualização de como cada parte do espaço de estados se relaciona é possível escrever o sistema como um todo em um diagrama de blocos de forma a relacionar suas entradas e saídas, como esta ilustrado pela Figura 23.

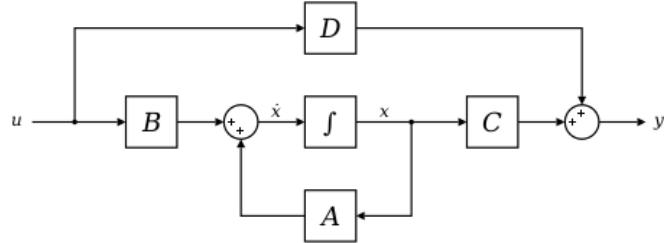


Figura 23: Diagrama de Blocos

3.4.2 Equacionamento

A partir dos equacionamentos previamente desenvolvidos é possível determinar as equações diferenciais que regem o movimento do quadricóptero com orientação estabelecida por um referencial inercial. Desta forma obtém-se 4 sistemas

- **Cinemática Translacional**

$$\dot{x} = u(\cos\theta \cos\varphi) + v(\sin\varphi \cos\theta) - w(\sin\theta) \quad (37)$$

$$\dot{y} = u(\sin\varphi \sin\theta \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi) + v(\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\theta \sin\psi) + w(\sin\varphi \cos\theta) \quad (38)$$

$$\dot{z} = u(\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \sin\theta \cos\varphi) + v(\cos\varphi \sin\theta \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi) + w(\cos\varphi \cos\theta) \quad (39)$$

- **Cinemática Rotacional**

$$\dot{\varphi} = p + (q \sin\varphi + r \cos\varphi) \operatorname{tg}\theta \quad (40)$$

$$\dot{\theta} = q \cos\varphi - r \sin\varphi \quad (41)$$

$$\dot{\psi} = \sec\theta(q \sin\varphi + r \cos\varphi) \quad (42)$$

- **Dinâmica Translacional**

$$\dot{u} = \frac{-1}{M} \rho A C_e u^2 - g \sin\theta + (r v - q v) \quad (43)$$

$$\dot{v} = \frac{-1}{M} \rho A C_e v^2 + g \sin\varphi \cos\theta + (p w - r u) \quad (44)$$

$$\dot{w} = \frac{-1}{M} \rho A C_e w^2 + g \cos\varphi \cos\theta + \frac{F}{M} + (q u - p v) \quad (45)$$

- **Dinâmica Rotacional**

$$\dot{p} = \frac{1}{I_{xx}} [T_\varphi + (I_{yy} - I_{zz}) q r] \quad (46)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{I_{yy}} [T_\theta + (I_{zz} - I_{xx}) p r] \quad (47)$$

$$\dot{r} = \frac{1}{I_{zz}} [T_\psi + (I_{xx} - I_{yy}) p q] \quad (48)$$

3.4.3 Linearização

O objetivo deste estudo, conforme citado anteriormente, consiste em analisar o movimento do quadricóptero no plano XZ com inclinação em θ , por isso as variáveis que não se relacionam a esse movimento não foram consideradas para o desenvolvimento do modelo linear. Dessa forma o sistema linearizado foi obtido através da expansão por séries de Taylor de segunda ordem (representada pela equação 49), a partir do equacionamento definido no item 3.4.1 deste relatório.

$$\begin{aligned} f(x, u) = f(x_0, u_0) + \left[\frac{\delta f(x, u)}{\delta x} \right]_{x_0, u_0} (x - x_0) + \left[\frac{\delta f(x, u)}{\delta u} \right]_{x_0, u_0} (u - u_0) \\ + \frac{1}{2!} \left[\frac{\delta^2 f(x, u)}{\delta^2 x} \right]_{x_0, u_0} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\delta^2 f(x, u)}{\delta x \delta u} \Big|_{x_0, u_0} + \frac{\delta^2 f(x, u)}{\delta^2 u} \Big|_{x_0, u_0} (u - u_0)^2 \end{aligned} \quad (49)$$

Com isso o processo de linearização de cada uma das equações foi realizado em torno de u_0 , w_0 e θ_0 , para as variáveis u , w e θ , respectivamente. Para as demais variáveis o ponto de equilíbrio foi considerado como 0, sendo linearizadas em torno desse ponto.

Para a linearização das equações foi utilizado o software Octave com o auxílio da biblioteca “symbolic”, dessa forma o processo pode ser representado pelas equações abaixo.

- **Cinemática Translacional**

$$\dot{x} = u \cos \theta_0 - w \sin \theta_0 - \theta (u_0 \sin \theta_0 + w_0 \cos \theta_0) + \theta_0 (w_0 \cos \theta_0 + u_0 \sin \theta_0) \quad (50)$$

$$\dot{z} = u \sin \theta_0 + w \cos \theta_0 + \theta (u_0 \sin \theta_0 - w_0 \cos \theta_0) + \theta_0 (w_0 \cos \theta_0 - u_0 \sin \theta_0) \quad (51)$$

- **Cinemática Rotacional**

$$\dot{\theta} = q \quad (52)$$

- **Dinâmica Translacional**

$$\dot{u} = \frac{-2u_0 u \rho A_x C_{dx}}{M} - \theta g - q w_0 + \frac{u_0^2 \rho A_x C_{dx}}{M} \quad (53)$$

$$\dot{w} = \frac{-2w_0 w \rho A_z C_{dz}}{M} - \theta g \sin \theta_0 + q u_0 + \frac{w_0^2 \rho A_z C_{dz}}{M} + g \theta_0 \sin \theta_0 + g \cos \theta_0 + \frac{F}{M} \quad (54)$$

- **Dinâmica Rotacional**

$$\dot{q} = \frac{T_\theta}{I_{yy}} \quad (55)$$

3.4.4 Matrizes do Espaço de Estado

Admitindo que as variáveis de estado e as entradas do nosso sistema sejam representadas pelas seguintes matrizes:

$$\mathbf{X} = [x \ z \ u \ w \ \theta \ q]^T \quad (56)$$

$$\mathbf{U} = [T_\theta \ F \ 1]^T \quad (57)$$

É possível determinar a matriz A, B e C que definem o Espaço de Estados desta modelagem:

- **Matriz de Espaços**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 & -(u_0\sin\theta_0 + w_0\cos\theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta_0 & \cos\theta_0 & (u_0\sin\theta_0 - w_0\cos\theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2u_0A_xC_{dx}\rho}{M} & 0 & -g & -w_0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2w_0A_zC_{dz}\rho}{M} & -gsin\theta_0 & u_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

- **Matriz de Entrada**

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta_0(w_0\cos\theta_0 + u_0\sin\theta_0) \\ 0 & 0 & \theta_0(w_0\cos\theta_0 - u_0\sin\theta_0) \\ 0 & 0 & \frac{u_0^2A_xC_{dx}\rho}{M} \\ 0 & \frac{1}{M} & \frac{w_0^2A_zC_{dz}\rho}{M} + g\theta_0\sin\theta_0 + g\cos\theta_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_{yy}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

- **Matriz de Saída**

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (60)$$

- **Matriz de Transmissão Direta**

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

4 Parâmetros

Para a definição dos parâmetros utilizados no trabalho foi realizado um estudo analisando alguns dos principais quadricópteros disponíveis no mercado hoje, buscando entender o que é esperado de um produto desse setor em termos de performance, assim depois do levantamento foi confeccionada a Tabela 3 apresentando alguns dos dados levantados durante o processo de pesquisa.

Tabela 3: Tipos de Drones Analisados

Drone	Velocidade Horizontal	Velocidade Vertical	Massa
DJI Mavic Air 2	19 m/s	5 m/s	570 g
DJI mini 2	16 m/s	5 m/s	249 g
DJI Phantom 4 Pro	32 m/s	6 m/s	1388 g
Parrot Anafi	15 m/s	4 m/s	320 g
PowerEye	18 m/s	5 m/s	3950 g
PowerEgg X	18 m/s	5 m/s	544 g

Observando os dados apresentados na Tabela 4 verifica-se que todos os quadricópteros possuem uma velocidade máxima vertical entre 4m/s e 6m/s, independentemente de massa ou de porte do mesmo. Observa-se também que a velocidade máxima horizontal dos quadricópteros fica entre 8m/s e 32m/s, nesse parâmetro há uma grande variação dos dados, diferentemente do que é visto na velocidade vertical. Nota-se que o DJI Phantom 4 Pro é um *outlier* quando comparado aos demais, sendo sua velocidade máxima, de 32m/s, 68.42% maior que a velocidade máxima do segundo colocado nessa categoria, o DJI Mavic air 2 (ambos ilustrados pela Figura 24).

A análise das velocidades máximas permite tirar algumas conclusões com relação a performance esperada, e com relação as velocidades máximas que são consideradas adequadas pela indústria especializada, para que o operador do quadricóptero seja capaz de manter controle sobre o mesmo, sem a necessidade de um treinamento específico para o produto. Dessa forma os dados levantados anteriormente formam um intervalo no qual um produto desta categoria seja capaz de servir sua função e sem a necessidade de treinamento específico para sua operação



(a) DJI Phantom 4 Pro



(b) DJI Mavic air 2

Figura 24: Drones mais velozes

4.1 Massa

A partir dos dados analisados, a etapa seguinte é a verificação do modelo em CAD e sua análise. Inicialmente verificou-se a massa do quadricóptero, que é de 761,05 gramas, valor condizente com o que é esperado do mesmo, uma vez que as opções já disponíveis se encontram entre 249g e 1388g, excluindo os *outliers* representados pelo Tello por ser um drone de pequeno porte (criado para o uso indoors) e o PowerEye por ser um quadricóptero feito para operar durante longos períodos de tempo sem a necessidade de recarga. Sendo assim seu peso se torna muito elevado quando comparado aos outros produtos analisados uma vez que esse tem uma bateria maior que os demais.

4.2 Motor

A partir da análise do CAD inicial tem-se as dimensões máximas que o motor escolhido deve ter. Assim, com estes parâmetros em mente, foi escolhido simular o sistema utilizando-se o motor do modelo E-MAX CF2822, como apresentado na Figura 25, sendo este uma escolha compatível com o projeto.



Figura 25: Motor E-MAX CF2822

Algumas características deste motor podem ser observadas pela tabela abaixo:

Tabela 4: Característica do Motor E-MAX CF2822

Parâmetro	Valor
RPM/V	1200
RPM Máximo	7100
Corrente Máxima [A]	16.5
Dimensão do Motor [mm]	22 x 10

Utilizando a hipótese de baixas rotações para as hélices tem-se a adequação do sistema por meio da tensão esperada que será proporcionada ao motor, assim utilizamos a seguinte equação, onde Ω é a rotação das hélices, r_p é a rotação parcial por voltz, e V é a tensão elétrica:

$$\Omega = r_p \cdot V \quad (62)$$

Considerando uma rotação parcial de 1200 RPM/V e uma tensão de 1,1519 V, temos um Ω de 1382 rpm.

4.3 Força de Empuxo

Para o cálculo da força de propulsão são necessários alguns dados, primeiramente o raio das hélices do quadricóptero (r_h) = 0,0806 m, de acordo com o CAD inicial do projeto, rotação das hélices (Ω), que foi apresentado anteriormente no subcapítulo motor, e o coeficiente de empuxo (C_e), considerando em todos os casos uma gravidade de 9,81 m/s² e uma densidade do ar de 1,2041 kg/m³.

Para o coeficiente de empuxo vamos utilizar a teoria apresentada por Heinz Heisler em Advanced Vehicle Technology (Second Edition), 2002, em especial o gráfico da Figura 26, levando em conta a angulação máxima de ataque do veículo utilizada no presente trabalho, que será de 2° na situação 5 apresentada no Capítulo 5 – Análise.

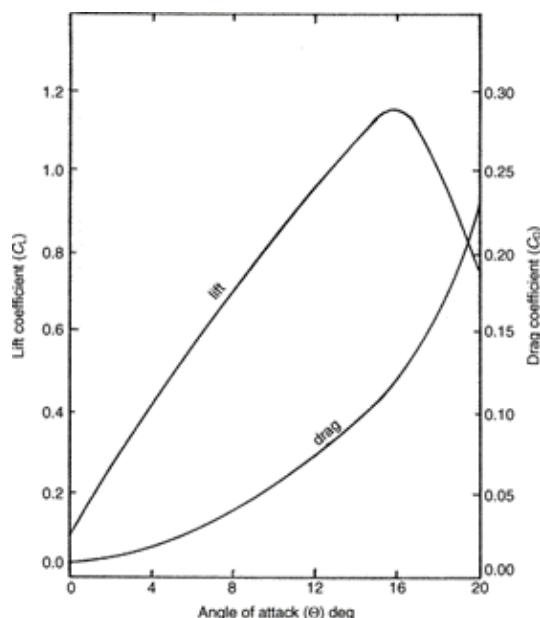


Figura 26: Coeficientes de Empuxo e Arrasto para baixas velocidades

Tendo o ângulo de ataque em 7° podemos estimar o valor de C_e em torno de 0,21034, assim fazendo a substituição dos valores na equação 12, obtemos:

$$F_{max,empuxo} = C_e \cdot \frac{4\rho r_h^4 \Omega^2}{\pi^2} = 8,27731N$$

4.4 Força de Arrasto

Neste subcapítulo serão apresentados os parâmetros relacionados à força de arrasto, essa será utilizada nas simulações referentes a situação 5 do capítulo 5.

A força de arrasto no presente trabalho estará relacionada a resistência do fluido ar, no qual o quadricóptero estará imerso, e a velocidade de movimentação; sendo assim já podemos definir o arrasto como uma força sempre contraria ao movimento do quadricóptero.

Para o cálculo da força de arrasto são necessários alguns parâmetros importantes, que serão obtidos de diversas maneiras, o primeiro deles são as áreas frontais, referentes a face ou superfície que faz a interação inicial do veículo com o fluido; as mesmas são obtidas a partir do CAD inicial e são apresentadas na Tabela 5.

Tabela 5: Áreas frontais do Quadricóptero

Parâmetro	Valor
Área Superior e Inferior [m ²]	0,0131505375
Área Lateral [m ²]	0,008553265

E por fim temos o coeficiente aerodinâmico de arrasto, esse é um numero adimensional cuja função é quantificar a resistência do formato do objeto analisado ao movimento em um certo fluido, o coeficiente de arrasto é definido a partir da equação 10, presente no capítulo 3.3, baseado neste define-se:

$$C_D = \frac{2F_{arr,i}}{\rho Av_i^2}$$

Analisando assim este buscando a aproximação da força de arrasto a força de máxima na direção do movimento próximo as velocidades máximas analisadas na primeira parte deste capítulo leva a escolha de um $C_{D,x} = 0,52$ e $C_{D,z} = 0,27$.

4.5 Momentos de Inércia

Como visto no Capítulo 3 deste trabalho esse quadricóptero é um sólido analisado em relação a um referencial ortogonal na qual os eixos do referencial móvel são os eixos principais. Sabe-se também como visto no item 2.2 deste trabalho que escolheu-se a topologia positiva para fazer todas as análises numéricas deste drone, portanto pode-se admiti-lo como um corpo que possui uma massa central e 4 massas periféricas distribuídas em seus 4 cantos espaçadas uma em relação à outra num ângulo de 90° , como mostra a Figura 27.

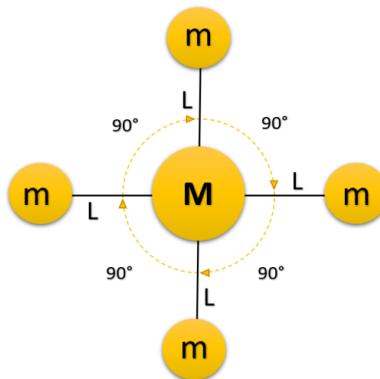


Figura 27: Distribuição das Massas

Sabe-se que o momento de Inércia pode ser definido pela seguinte expressão:

$$I = \int \int \int_V \rho r^2 dV \quad (63)$$

Contudo para o cálculo do momento de inércia nas configurações supracitadas e a partir da expressão 28 tem-se a seguinte matriz:

$$I = \begin{bmatrix} 2mr_h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2mr_h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4mr_h^2 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Portanto depreende-se da matriz acima que os momentos de inércia serão: $I_{xx} = 0,0098$, $I_{yy} = 0,0098$ e $I_{zz} = 0,01977$.

5 Análise

Para analisar e verificar o comportamento do sistema em estudo será utilizado o Scilab (software científico empregado para computação numérica). O intuito será abstrair das representações gráficas subsequentes algumas apreciações de dados de forma a averiguar a validade da modelagem proposta.

Isto posto, serão feitas duas abordagens distintas ao sistema, sendo que na primeira ele será analisado desconsiderando qualquer perturbação do meio e na segunda considerando o arrasto. Desta forma será possível observar como as condições externas e irregularidades no espaço de simulação podem modificar o comportamento do quadricóptero.

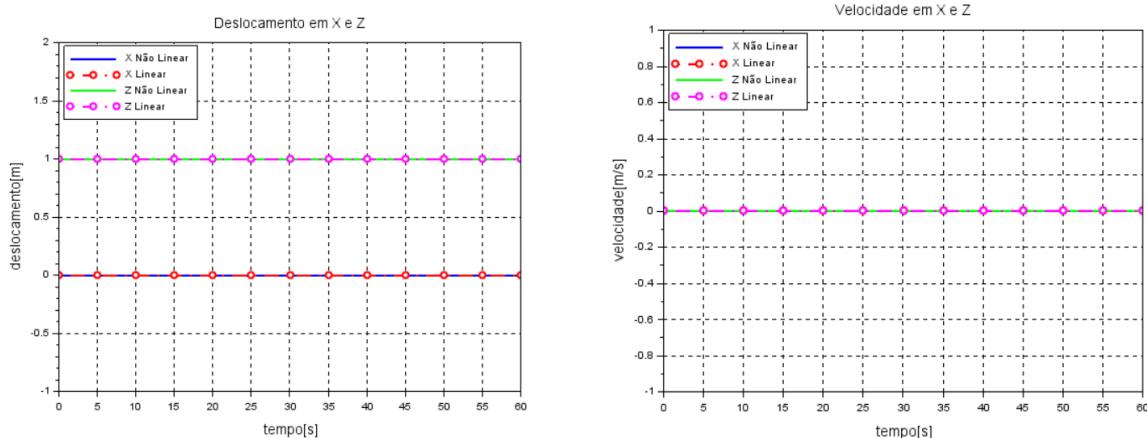
A princípio os gráficos gerados apresentarão uma correlação entre as variáveis dos sistemas (x, z, u, w, θ, q) com o tempo, de maneira que será registrado questões como estabilidade, crescimento e decrescimento a partir da variação das entradas, admitindo que drone parta sempre de uma altura inicial z_0 de 1 metro.

As situações nas quais nosso modelo será analisado podem ser listadas pela tabela abaixo:

Tabela 6: Situações de Análise do Quadricóptero

Situações	Cenário	u_0	w_0	θ_0	Força dos Motores	Torque
1	Voo Pairado	0	0	0	Força de Sustentação	0
2	Voo Apenas em Z	0	0	0	Força Máxima	0
3	Voo Apenas em X	0	0	1°	$\frac{mg}{\cos(\theta)}$	0
4	Voo em X e em Z	0	0	2°	Força Máxima	10^{-4} N/m
5	Voo com Arrasto	$2.8m/s$	$5.7m/s$	2°	Força Máxima	0

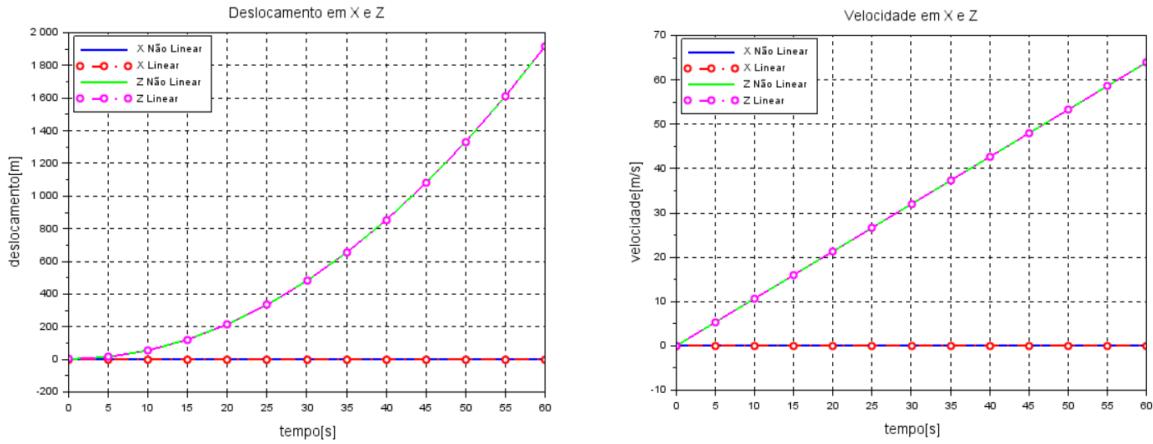
5.0.1 Situação 1 - Voo Pairado



Neste cenário foi utilizada como a força de empuxo (*lift*) dos motores a força de sustentação do quadricóptero, ou seja, a força que mantém o VANT estável no ar, para o sistema modelado, essa força tem magnitude de 7,4659005 N e é calculada multiplicando a massa do quadricóptero pela aceleração da gravidade.

Com a aplicação da força de sustentação, a resultante das forças aplicadas sobre o drone tem magnitude igual a zero, e devido a isso o drone continua em sua posição original de partida. No caso em particular o drone partiu de 1 metro de altura, sem variação desse valor durante a simulação, ademais, não ocorre deslocamento ou variação de velocidade em nenhuma de suas coordenadas. Nota-se que esses comportamentos são observados tanto na simulação linear quanto na simulação do sistema não linearizado.

5.0.2 Situação 2 - Voo Apenas em Z



Neste cenário foi utilizada como força de empuxo (lift) dos motores a força máxima de operação dos mesmos, 8,277 N (como demonstrado anteriormente) pois a partir de uma força maior que a de sustentação (Força Peso) é possível deslocar positivamente o quadricóptero (como ilustrado na Figura 28). Nesta situação temos também uma angulação inicial de 0° com torque de 0 N/m, desta forma garantindo que não teremos variação angular.

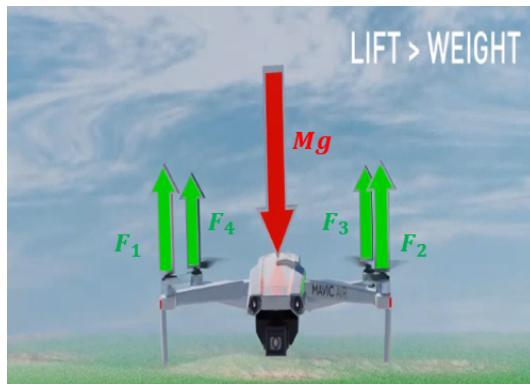
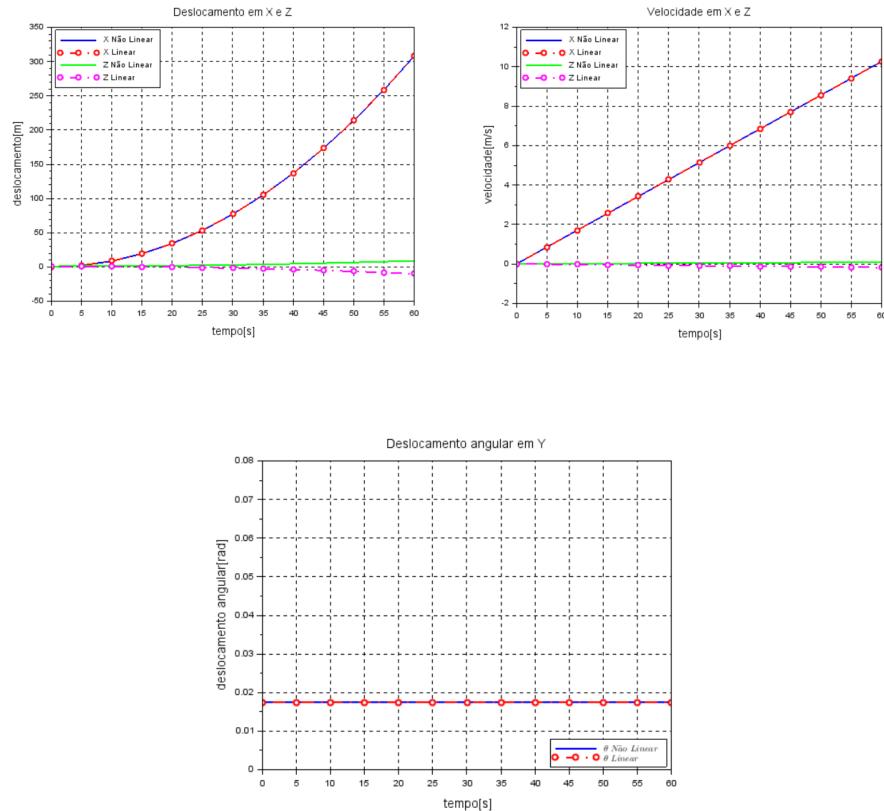


Figura 28: Movimento Apenas em Z

Uma vez em regime de operação em força máxima, com variação angular nula e angulação inicial de 0° observamos a movimentação do quadricóptero apenas na coordenada Z, sendo este um movimento de subida, uma vez que não há decomposição da força dos motores na coordenada X. Logo temos a manutenção de sua posição inicial nesta coordenada durante toda a simulação.

Verifica-se neste caso o aumento constante da velocidade em Z (uma vez que força de empuxo nesta coordenada é constante) e do deslocamento do quadricóptero nesta mesma coordenada. Nota-se que esses comportamentos são observados tanto na simulação do sistema linear quanto não linearizado.

5.0.3 Situação 3 - Voo Apenas em X



Para possibilitar esta condição inclinou-se o quadricóptero num angulo $\theta = 1^\circ$ e estipulou-se que a força total de empuxo dos motores equivaleria à $\frac{mg}{\cos(\theta)}$, desta forma o deslocamento em z seria anulado visto que na somatória de forças neste eixo a força peso se anularia com a componente vertical da força de empuxo.

Neste caso em particular a única força que deslocará o quadricóptero será a componente horizontal do empuxo a qual terá um valor em módulo de $\frac{mg}{\cos(\theta)} \cdot \sin(\theta)$ (como ilustrado pela Figura 29). Desta forma só haverá movimento translacional como observa-se nos gráficos, nas quais o modelo não linear e linear possuem uma diferença de comportamento irrisória, sendo que a variação do movimento do drone está presente apenas em x e em u .

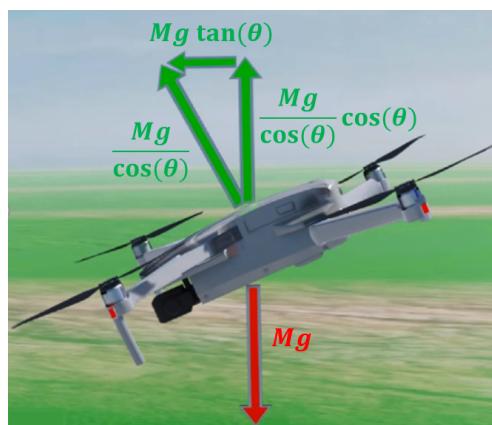
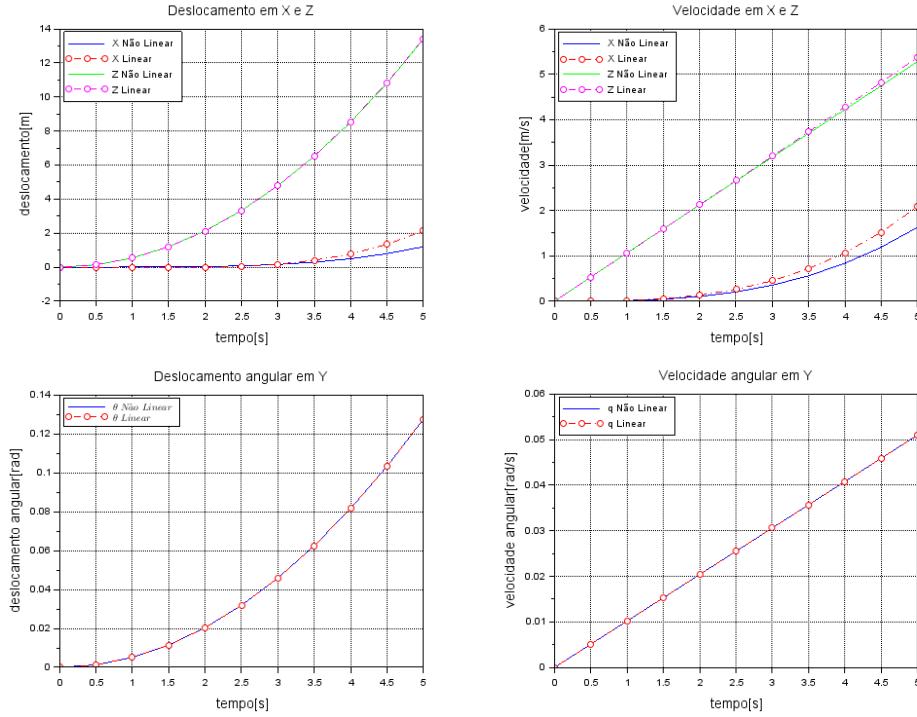


Figura 29: Movimento Apenas em X

5.0.4 Situação 4 - Voo em X e em Z



O objetivo deste caso é analisar o movimento do quadricóptero quando sobre a influência de um torque de 10^{-4} N/m. Esse torque é causado pela diferença do empuxo dos motores, resultando em um movimento de arfagem (pitch), como demonstrado pela figura 30. Considerando também a entrada da Força como o empuxo da rotação máxima dos motores, tem-se um movimento de translação tanto no eixo X como no eixo Z. Além disso a linearização para θ ficou em $\theta_0 = 2^\circ$, considerando que a inclinação do corpo será pequena após a ação do torque. Por fim a linearização das demais variáveis se manteve em torno de 0, pois o movimento a ser analisado consiste na reação de um quadricóptero em voo pairado, a um torque e uma força.

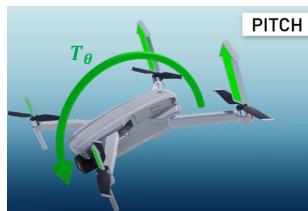


Figura 30: Ação do Torque em θ no Quadricóptero

É perceptível a diferença entre o comportamento das velocidades nos eixos X e Z, de modo que a curva da velocidade em Z se comporta de forma linear e em X se comporta de forma exponencial, além da maior magnitude em Z. Isso se explica primeiramente pelos pequenos ângulos da inclinação, chegando a 8° após 5 segundos, e o comportamento da velocidade em X se explica pela aceleração que se forma através da decomposição da Força máxima após a inclinação. Além disso é possível notar a pequena diferença entre os modelos linear e não linear que começa a surgir a partir dos 3 segundos de movimento, por isso essa situação do modelo deve ser analisada considerando os primeiros 5 segundos de reação do quadricóptero, onde a diferença é inexpressiva, de forma que a simulação será imprecisa caso contrário.

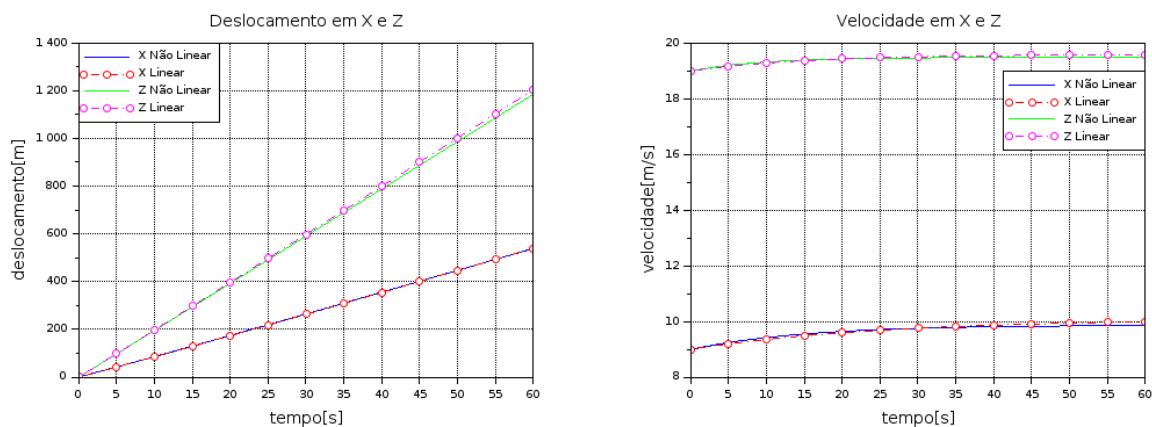
5.0.5 Situação 5 - Voo com Arrasto

Com o objetivo de considerar a influência da força de arrasto na movimentação do quadricóptero, foi considerado o movimento a partir de velocidades iniciais, com 9 m/s para a velocidade em u, e 19 m/s para a velocidade em w. Com isso o processo de linearização por séries de Taylor foi refeito para os pontos de operação u_0 em 2.8 m/s e w_0 em 5.7 m/s, que correspondem a aproximadamente 30% das velocidades iniciais estabelecidas. Além disso a linearização foi realizada em torno de um ângulo inicial de arfagem (pitch), que no caso analisado foi estimado como 2º. Esses valores foram baseados no drone Phantom 4 DJI, mostrado na figura 31.



Figura 31: Phantom 4 DJI

Com isso é possível realizar as simulações utilizando a força máxima disponível através dos motores, cujo valor é de cerca de 8,277 N.



A partir dos gráficos analisados, percebe-se que o quadricóptero tende a estabilizar sua velocidade tanto no eixo x quanto no eixo z. No eixo z a velocidade se estabiliza em valores próximos a 19.5 m/s tanto para o modelo linear como para o não linear, observa-se que a curva apresenta um leve acidente e se estabiliza após esse aumento de velocidade. Essa estabilização é decorrente da força de arrasto que aumenta proporcionalmente à velocidade, tornando nula a força resultante nesse caso, após o aumento da velocidade. No eixo x, o modelo também sofre um pequeno acréscimo em sua velocidade, mostrando o mesmo comportamento da curva referente à velocidade no eixo z, porém se estabilizando próximo a 10 m/s.

5.1 Funções de Transferência - SEM ARRASTO

Com auxilio do Scilab depreendeu-se do modelo em estudo sem a presença do arrasto algumas funções de transferência (representadas pela matriz abaixo), as quais irão mostrar a relação entrada-saída para este sistema. Haverá 18 funções de transferência ao todo devido à existência de 6 variáveis de espaço e 3 entradas.

$$\begin{bmatrix} x(s) \\ z(s) \\ u(s) \\ w(s) \\ \theta(s) \\ q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{49.05}{s^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1.31}{0.067s+s^2} & \frac{-9.81}{s^2} \\ \frac{49.05}{s^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1.31}{0.067+s} & \frac{-9.81}{s} \\ \frac{5}{s^2} & 0 & 0 \\ \frac{5}{s} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_\theta(s) \\ F(s) \\ 1(s) \end{bmatrix} \quad (65)$$

5.1.1 Entrada T_θ

Tabela 7: Funções de Transferência - Entrada T_θ

Saida	Função de Transferência
$G_{T_\theta,x}$	$\frac{49,05}{s^4}$
$G_{T_\theta,u}$	$\frac{49,05}{s^3}$
$G_{T_\theta,\theta}$	$\frac{5}{s^2}$
$G_{T_\theta,q}$	$\frac{5}{s}$

As demais saídas das entradas de T para todos os parâmetros [y, z, v, w, φ , ψ , p, r] são nulas, assim podemos analisar que com uma entrada em T_θ temos a criação de movimentos de rotação em , gerando uma velocidade em q, assim como ocorre movimento de translação em x e variação da velocidade u.

5.1.2 Entrada F

Tabela 8: Funções de Transferência - Entrada F

Saída	Função de Transferência
$G_{F,z}$	$\frac{1.31}{s^2}$
$G_{F,w}$	$\frac{1.31}{s}$

As saídas das entradas de F para todos os parâmetros $[x, y, u, v, \varphi, \theta, \psi, p, q, r]$ são nulas, assim podemos observar que a força F causa efeito na translação e na velocidade no eixo z, representados pelas saídas z e w.

5.1.3 Entrada Unitária

Tabela 9: Funções de Transferência - Entrada Unitária

Saída	Função de Transferência
$G_{1,z}$	$\frac{-9.81}{s^2}$
$G_{1,w}$	$\frac{-9.81}{s}$

As saídas das entradas de unitária para todos os parâmetros $[x, y, u, v, \varphi, \theta, \psi, p, q, r]$ são nulas, assim vemos a partir das funções de transferência apresentadas anteriormente que temos mudança na translação em z assim como na velocidade referente ao mesmo eixo, a velocidade w.

5.2 Funções de Transferência - COM ARRASTO

Com auxilio do software Scilab obteve-se as funções de transferencia com a presença do arrasto ja atribuido o valor de u_0 e w_0 como 2.8 m/s e 5.7 m/s respectivamente, e θ_0 como 2° (explicitado na 5^a Análise do Quadricóptero). Assim como no caso sem a presença do arrasto obteve-se 18 funções de transferência visto que há 6 variáveis de estado e 3 entradas, oque resultou no seguinte equacionamento:

$$\begin{bmatrix} x(s) \\ z(s) \\ u(s) \\ w(s) \\ \theta(s) \\ q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3.06+44.12s-57.94s^2}{0.003s^3+0.1s^4+s^5} & \frac{-0.046}{0.064s+s^2} & \frac{0.017+0.41s+0.20s^2}{0.0025s+0.10s^2+s^3} \\ \frac{0.21+5.25s+25.99s^2}{0.003s+0.1s^4+s^5} & \frac{1.31}{0.064s+s^2} & \frac{-0.38-9.60s+0.2s^2}{0.003s+0.1s^2+s^3} \\ \frac{49.05-28.5s}{0.039s^2+s^3} & 0 & \frac{0.055}{0.039+s} \\ \frac{1.71+14s}{0.064s^2+s^3} & \frac{1.31}{0.064+s} & \frac{-9.63}{0.064+s} \\ \frac{5}{s^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_\theta(s) \\ F(s) \\ 1(s) \end{bmatrix} \quad (66)$$

5.2.1 Entrada T_θ

Tabela 10: Funções de Transferência - Entrada T_θ

Saída	Função de Transferência
$G_{T_\theta,x}$	$\frac{3.06+44.12s-57.94s^2}{0.003s^3+0.1s^4+s^5}$
$G_{T_\theta,z}$	$\frac{0.21+5.25s+25.99s^2}{0.003s+0.1s^4+s^5}$
$G_{T_\theta,u}$	$\frac{49.05-28.5s}{0.039s^2+s^3}$
$G_{T_\theta,w}$	$\frac{1.71+14s}{0.064s^2+s^3}$
$G_{T_\theta,\theta}$	$\frac{5}{s^2}$

No caso da entrada T_θ , que se trata do torque aplicado no eixo y, nota-se que são geradas respostas translacionais nos eixos x e z, ocasionando também respostas nas saídas v e w que são as velocidades correspondentes a esses deslocamentos gerados, ademais também percebe-se resposta na saída θ devido ao momento ocasionado no eixo y.

5.2.2 Entrada F

Tabela 11: Funções de Transferência - Entrada F

Saída	Função de Transferência
$G_{F,x}$	$\frac{-0.046}{0.064s+s^2}$
$G_{F,z}$	$\frac{1.31}{0.067+s}$
$G_{F,w}$	$\frac{1.31}{0.064s+s^2}$

Nota-se que a força F aplicada atua apenas no eixo z, gerando respostas nas saídas z e w, enquanto as outras são nulas.

5.2.3 Entrada Unitária

Tabela 12: Funções de Transferência - Entrada Unitária

Saída	Função de Transferência
$G_{1,x}$	$\frac{0.017+0.41s+0.20s^2}{0.0025s+0.10s^2+s^3}$
$G_{1,z}$	$\frac{-0.38-9.60s+0.2s^2}{0.003s+0.1s^2+s^3}$
$G_{1,u}$	$\frac{0.055}{0.039+s}$
$G_{1,w}$	$\frac{-9.63}{0.064+s}$

A entrada unitária corresponde aos outros parâmetros incluídos na análise como a força de arrasto e a gravidade, nota-se que são originadas saídas em x, z, u e w, em que a saída em x e u existe devido a força de arrasto, enquanto as saídas em z e w são resultado da ação do arrasto e da gravidade combinados.

5.3 Diagrama de Bode - SEM ARRASTO

Com o objetivo de obter os diagramas de Bode das funções de transferência apresentadas nos itens 4.1 e 4.2, foi utilizado novamente o software Scilab, isolando em um gráfico único os diagramas das funções de cada entrada, primeiramente para o caso sem influência do arrasto no sistema.

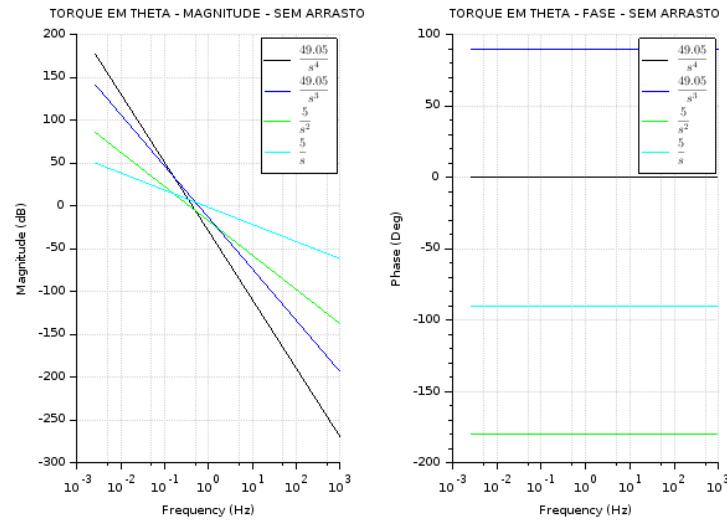


Figura 32: Diagrama de Bode para entrada T_θ , caso sem arrasto

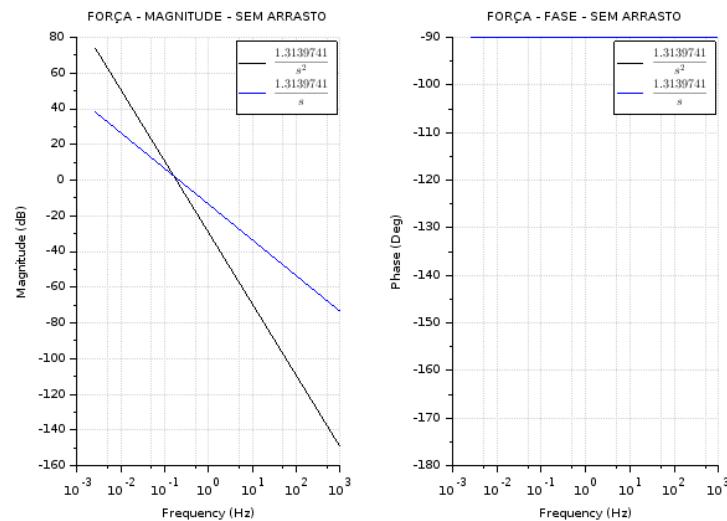


Figura 33: Diagrama de Bode para entrada F, caso sem arrasto

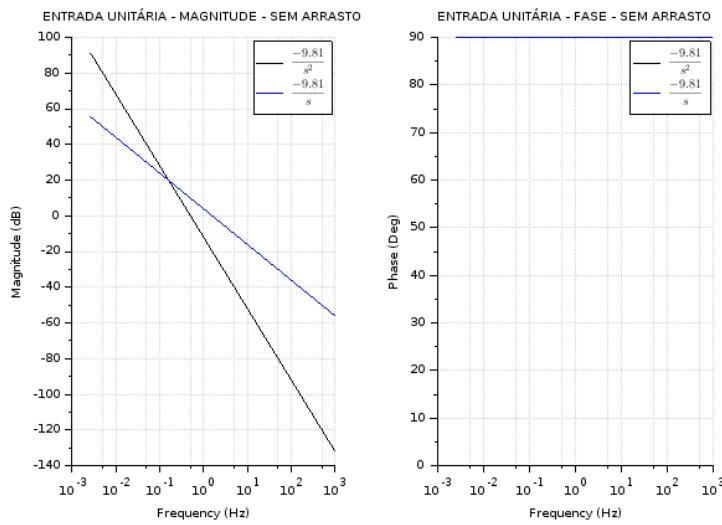


Figura 34: Diagrama de Bode para entrada Unitária, caso sem arrasto

Nas entradas analisadas as funções de transferência possuem apenas polos, variando em grau, o que resulta em um declive para todas as funções na magnitude, sendo que quanto maior o grau do polo maior o declive. No caso da fase, os polos com multiplicidade par apresentam comportamento constante em 90° ou -90° , já os de multiplicidade ímpar apresentam o mesmo comportamento, porém em 0° e -180° .

5.4 Diagrama de Bode - COM ARRASTO

Para o caso considerando a influência do arrasto no sistema foram utilizadas as funções de transferência relativas ao modelo linearizado em torno dos pontos u_0 , w_0 e θ_0 , com os valores de 2.8 m/s, 5.7 m/s e 2°, respectivamente. Portanto os diagramas de Bode obtidos através dessas funções de transferência serão analisados a seguir.

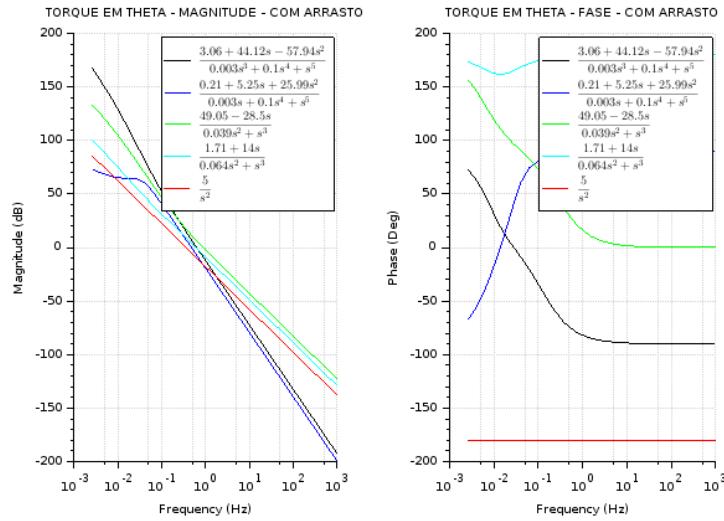


Figura 35: Diagrama de Bode para entrada T_θ , caso com arrasto

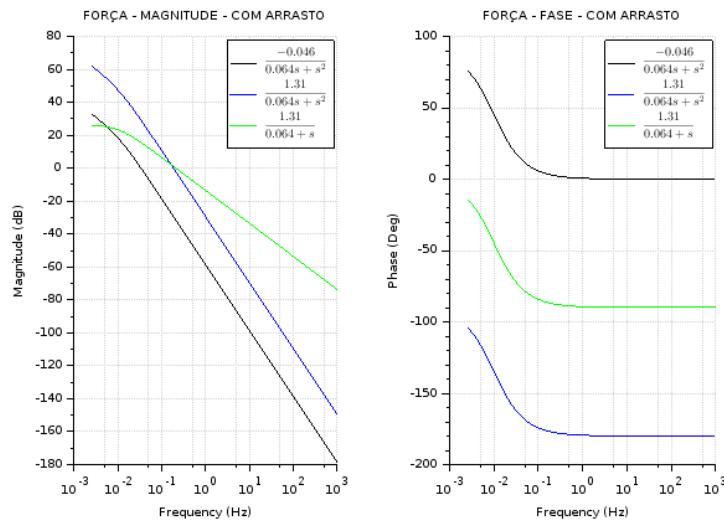


Figura 36: Diagrama de Bode para entrada F, caso com arrasto

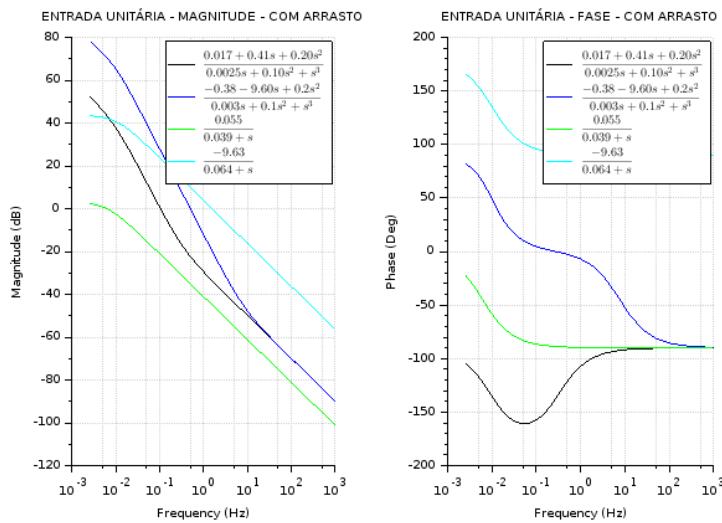


Figura 37: Diagrama de Bode para entrada Unitária, caso com arrasto

É notável, na magnitude dos diagramas das figuras 30, 31 e 32, o comportamento próximo ao caso sem considerar a influência do arrasto, porém com poucas variações, o que é esperado por causa do maior número de polos quando comparado ao número de zeros presentes nas funções de transferência. Além disso a presença de múltiplos polos no denominador causam um declive na fase, ocorrendo um acidente quando, em determinada frequência, o número de zeros supera o número de polos.

5.5 Polos das Funções de Transferência

É possível analisar a estabilidade deste sistema apenas estudando os polos das funções de transferência obtidas neste trabalho. Examina-se portanto estes polos observando em que situação os mesmos se encontram, as quais estas podem ser representadas pela tabela abaixo.

Tabela 13: Estabilidade do Sistema

Situação	Condição
Todos os polos tem parte real negativa	Sistema Estável
Ao menos um polo tem parte real positiva	Sistema Instável
Polos imaginários puros com parte real positiva não múltiplos	Marginalmente Estável
Polos múltiplos com parte real nula	Sistema Instável

Verifica-se portanto que o sistema em questão é instável visto a multiplicidade de polos zeros as quais as funções de transferência obtidas nos itens 5.1 e 5.2 possuem.

5.6 Critério de Routh Hurwitz

Para também discernir sobre a estabilidade do quadricóptero modelado utilizou-se o critério de Routh Hurwitz. O critério se baseia na análise do denominador das funções de transferência, a qual está na forma polinomial.

Este critério supracitado é representado pela Tabela de Routh-Hurwitz, a qual configura-se da seguinte maneira:

Sendo P um polinômio tal que:

$$P(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (67)$$

Constrói-se a seguinte tabela:

Tabela 14: Tabela de Routh-Hurwitz

Linha				
1	s^n	a_0	a_2	a_4
2	s^{n-1}	a_1	a_3	a_5
3	s^{n-2}	b_1	b_2	b_3
4	s^{n-3}	c_1	c_2	c_3
5	s^{n-4}	d_1	d_2	d_3
:	:	:	:	:
$n - 1$	s^1	y_1	y_2	
n	s^0	z_1		

De acordo com este critério caso exista coeficientes nulos no Polinômio a ser analisado ($a_i = 0$), pode-se considerar o sistema instável. Isto ocorre em todas as funções de transferência analisadas.

6 Conclusão

A proposição deste trabalho referiu-se à simulação de um quadrirotor que teria movimentos translacionais no plano vertical xz e rotacionais em no qual o ângulo de arfagem seria de no máximo 2° , fato que proporciona uma simplificação trigonométrica, trabalhando-se por fim com pequenos ângulos.

Observou-se que a linearização não é satisfatória quando a mesma busca contemplar uma grande gama de movimentos, uma vez que o sistema linearizado se torna muito dessemelhante do comportamento previsto no sistema não linearizado. Isso faz com que qualquer tentativa de manejo do sistema por meio de comandos aplicados ao sistema linearizado não seja previsível no sistema não linearizado.

Dessa forma se torna necessário a partição de movimentações complexas em parcelas menores, capazes de serem analisadas individualmente, com o intuito de se buscar a linearização de cada um dos submovimentos para que se possa, com a combinação dos mesmos, criar um modelo que comtemple as principais movimentações.

Consequentemente a análise passa a ser feita baseada na partição dos complexos movimentos em situações menores como foi descrito durante o capítulo 4. Cada uma das situações demanda a construção da simulação baseando-se nos seus conjuntos individuais de parâmetros, assim como as simplificações atuantes em cada um.

As simulações pertinentes ao voo com arrasto mostram a importância de uma linearização ao redor de um movimento específico uma vez que a análise de um conjunto muito amplo de movimentos e a adição da linearização da força de arrasto acabam por criar situações onde os sistemas diferem de maneira relevante. sendo assim necessário a linearização e análise da movimentação para pequenas parcelas, fazendo com que as simulações referentes ao sistema linearizado entrem em concordância com o que é esperado do sistema não linearizado.

A variação entre sistema com arrasto e sem arrasto também causa a variação nas funções de transferência, porém a análise das funções de transferência baseada na observação do comportamento dos polos acaba por desencadear o mesmo resultado, uma vez que a multiplicidade de polos zeros é observada em ambos conjuntos de funções garantindo que o sistema analisado é instável nos dois casos. Essa conclusão é reforçada ao se observar o comportamento pelo critério de Routh Hurwitz.

7 Referencias Bibliográficas

BRESCIANNO, T. **Modelling, Identification and Control of a Quadcopter Helicopter.** 2008. 180f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica). Department of Automatic Control, Lund University, Lund.

BALLAS, C. **Modelling and Linear Control of a Quadrotor.** Cranfield University, 2007. 138 p.

CARLOS ESPIÚCA MONTEIRO, João. **Modelagem e Controle de um Veículo Quadrirroto**r. Orientador: Liu Hsu. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Engenharia de Controle e Automação) - Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, [S. l.], 2015.

CAVALLARO, Silvio Luis Hori. **Modelagem, simulação e controle de um VANT do tipo quadricóptero.** 2019. 153 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3152/tde-01032019-155058/pt-br.php>. Acesso em: 9 nov. 2020.

GEISERT, M.; MANSARD, N. **Trajectory Generation for Quadrotor Based Systems using Numerical Optimal Control**. International Conference of Robotics and Automation, 2016. 10 p.

H. HUANG, G. M. HOFFMANN, S. L. WASLANDER, and C. J. TOMLIN, “**Aerodynamics and control of autonomous quadrotor helicopters in aggressive maneuvering**” IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 3277–3282, May 2009

KOKRON RODRIGUES, Henrique. **Elaboração de Projeto para Construção de Quadricóptero Autônomo Eficiente.** Orientador: Prof. Dr. Roberto Spinola Barbosa. 2014. Relatório (Graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade de São Paulo, [S. l.], 201-.

LIMA, Gabriela Vieira; DE SOUZA, Rafael M.J.; DE MORAIS, Aniel Silva; DE MORAIS, Josué Silva. **Modelagem dinâmica de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadricóptero**. Uberlândia, MG, Brasil, Julho 2014.

PHILLIPS, W. F. **Mechanics of Flight**. Chichester: John Wiley Sons Ltd, 2009. 1152 p.

SHUKLA, Dhwani; KOMERATH, Narayanan. **Multirotor Drone Aerodynamic Interaction Investigation**. School of Aerospace Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, [S. l.], p. 1-13, 3 dez. 2018.

T. MADANI and A. BENALLEUE, “**Backstepping control for a quadrotor helicopter**”. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 3255–3260, 2006.

Apêndice A

```
1 clear
2 clc
3 xdel(winsid())
4 // Massa do quadrotor
5 mt=0.76105;
6
7 // Momentos de inercia
8 Ix=2*mt*0.0806^2;
9 Iy=2*mt*0.0806^2;
10 Iz=4*mt*0.0806^2;
11
12 // Gravidade
13 g=-9.81;
14
15 // Areas frontal (Ax) e lateral
16 Ax=0.008553265;
17 Ay=Ax;
18 Az=0.0131505375;
19
20 // Coeficientes de arrasto
21 Cdx=0.52;
22 Cdy=Cdx;
23 Cdz=0.27;
24
25 // Densidade do ar
26 ro=1.2041;
27
28 // Forcas
29 Fsus=7.4659005 // Forca de sustentacao
30 Fmax=8.277 // Forca maxima
31
32 // Tempo
33 t0 = 0;
34 tfinal = 60;
35 tpasso = 5;
36
37 t = [t0:tpasso:tfinal];
38
39
40 // Condi es iniciais
41 x0 = 0
42 y0 = 0
43 z0 = 0
44 u0 = 9
45 v0 = 0
46 w0 = 19
47 phi0 = 0
48 theta0 = 2*pi/180
49
50 psi0 = 0
51 p0 = 0
52 q0 = 0
53 r0 = 0
54
55 // Sistema Nao Linear
56
57 // Torques e Forca
```

```

58 F = Fmax
59 Tphi=0
60 Ttheta= 0
61 Tpsi=0
62
63 funcprot(0);
64     function dy=drone(t,Y);
65         dy(1) = Y(4)+Y(9)*Y(5)-Y(8)*Y(6)
66         dy(2) = (Y(9)+Y(7)*Y(8))*Y(4)+(1+Y(7)*Y(8)*Y(9))*Y(5)+Y(7)*Y(6)
67         dy(3) = (Y(7)*Y(9)+Y(8))*Y(4)+(-Y(7)+Y(8)*Y(9))*Y(5)+Y(6)
68         dy(4) = (-1/(2*mt))*ro*Ax*Cdx*(Y(4)^2)-g*Y(8)+(Y(12)*Y(5)-Y(11)*
Y(6))
69         dy(5) = (-1/(2*mt))*ro*Ay*Cdy*(Y(5)^2)+g*Y(7)+(Y(10)*Y(6)-Y(12)*
Y(4))
70         dy(6) = (-1/(2*mt))*ro*Az*Cdz*(Y(6)^2)+g+(F/mt)+(Y(11)*Y(4)-Y
(10)*Y(5))
71         dy(7) = Y(10)+(Y(11)*Y(7)+Y(12))*Y(8)
72         dy(8) = Y(11)-Y(12)*Y(7)
73         dy(9) = Y(11)*Y(7)+Y(12)
74         dy(10) = (1/Ix)*(Tphi+(Iy-Iz)*Y(11)*Y(12))
75         dy(11) = (1/Iy)*(Ttheta+(Iz-Ix)*Y(10)*Y(12))
76         dy(12) = (1/Iz)*(Tpsi+(Ix-Iy)*Y(10)*Y(11))
77     endfunction;
78 y=ode([x0;y0;z0;u0;v0;w0;phi0;theta0;psi0;p0;q0;r0],0,t,drone);
79
80 // Variaveis
81 X = y(1,:);
82 Y = y(2,:);
83 Z = y(3,:);
84 u = y(4,:);
85 v = y(5,:);
86 w = y(6,:);
87 phi = y(7,:);
88 theta = y(8,:);
89 psi = y(9,:);
90 p = y(10,:);
91 q = y(11,:);
92 r = y(12,:);

93 // Sistema Linear
94
95 // Condicoes iniciais da lineariza o
96 U0 = 2.8
97 W0 = 5.7
98 Theta0 = 2*%pi/180
99
100 // Matriz A
101
102
103 A= [0 0 0 cos(Theta0) 0 -sin(Theta0) 0 -(U0*sin(Theta0)+W0*cos(Theta0))
0 0 0 0;
104 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
105 0 0 0 sin(Theta0) 0 cos(Theta0) 0 (U0*cos(Theta0)-W0*sin(Theta0)) 0
0 0 0;
106 0 0 0 -2*U0*ro*Ax*Cdx/mt 0 0 0 -g 0 0 -W0 0;
107 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
108 0 0 0 0 0 -2*W0*ro*Az*Cdz/mt 0 -g*sin(Theta0) 0 0 U0 0;
109 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
110 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0;

```

```

111      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
112      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
113      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
114      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
115
116 // Matriz B
117
118 B=[
119 0 0 0 0 Theta0*(W0*cos(Theta0)+U0*sin(Theta0));
120 0 0 0 0 0;
121 0 0 0 0 Theta0*(W0*cos(Theta0)-U0*sin(Theta0));
122 0 0 0 0 (U0^2)*ro*Ax*Cdx/mt;
123 0 0 0 0 0;
124 0 0 0 1/mt (W0^2)*ro*Az*Cdz/mt+g*(Theta0)*sin(Theta0)+g*cos(Theta0);
125 0 0 0 0 0;
126 0 0 0 0 0;
127 0 0 0 0 0;
128 0 0 0 0 0;
129 0 1/Iy 0 0 0;
130 0 0 0 0 0;
131 ]
132
133 // Matriz C
134
135 C = [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
136      0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
137      0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
138      0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
139      0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
140      0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0;
141      0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;
142      0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;
143      0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;
144      0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0;
145      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0;
146      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
147
148 // Matriz D
149
150 D=[0 0 0 0 0;
151      0 0 0 0 0;
152      0 0 0 0 0;
153      0 0 0 0 0;
154      0 0 0 0 0;
155      0 0 0 0 0;
156      0 0 0 0 0;
157      0 0 0 0 0;
158      0 0 0 0 0;
159      0 0 0 0 0;
160      0 0 0 0 0;
161      0 0 0 0 0];
162
163 // Definicao do Sistema linear
164 sistema = syslin('c',A,B,C,D);
165 G1=ss2tf(sistema);
166 disp(G1)
167
168 // Entradas

```

```
169 // Torque em phi
170 u1=zeros (t);
171 u1(:)=0;
172
173 // Torque em theta
174 u2=zeros (t);
175 u2(:)=0;
176
177 // Torque em psi
178 u3=zeros (t);
179 u3(:)=0;
180
181 // Forca
182 u4=zeros (t);
183 u4(:)=Fmax;
184
185 // Entrada unitaria
186 u5=zeros (t);
187 u5(:)=1;
188
189 // Matriz U
190 U = [u1; u2; u3; u4; u5];
191
192 // Condicoes iniciais
193 x0e = [x0;y0;z0;u0;v0;w0;phi0;theta0;psi0;p0;q0;r0];
194
195 // Simulacao
196 [y,x] = csim (U, t, sistema, x0e);
197
198 // Variaveis
199 Xlin = x(1,:);
200 Ylin = x(2,:);
201 Zlin = x(3,:);
202 ulin = x(4,:);
203 vlin = x(5,:);
204 wlin = x(6,:);
205 philin = x(7,:);
206 thetalin = x(8,:);
207 psilin = x(9,:);
208 plin = x(10,:);
209 qlin = x(11,:);
210 rlin = x(12,:);
211
212
213
214 // Plot
215 // Deslocamento
216 f10=scf(1);
217 plot(t,X);
218 plot(t,Xlin,"r-o")
219 plot(t,Z,"green");
220 plot(t,Zlin,"m-o");
221 title("Deslocamento em X e Z","fontsize", 3);
222 xlabel("tempo[s]","fontsize",3);
223 ylabel("deslocamento[m]","fontsize",3);
224 legend("X N o Linear","X Linear","Z N o Linear","Z Linear",
         "in_upper_left");
225 xgrid
```

```

226 // Velocidade
227 f10=scf(2);
228 plot(t,u);
229 plot(t,ulin,"r-.o");
230 plot(t,w,"green");
231 plot(t,wlin,"m-.o");
232 title("Velocidade em X e Z","fontsize", 3);
233 xlabel("tempo[s]","fontsize",3);
234 ylabel("velocidade[m/s]","fontsize",3);
235 legend("X N o Linear","X Linear","Z N o Linear","Z Linear",
         "in_upper_right")
236 xgrid
237 /*
238 // Deslocamento angular
239 f10=scf(3);
240 plot(t,theta);
241 plot(t,thetalin,"r-.o");
242 title("Deslocamento angular em Y","fontsize", 3);
243 xlabel("tempo[s]","fontsize",3);
244 ylabel("deslocamento angular[rad]","fontsize",3);
245 legend("${\backslash}theta \ N o \ Linear${\backslash}theta \ Linear$","in_upper_left"
         ")
246 xgrid
247 /*
248 // Velocidade angular
249 f10=scf(4);
250 plot(t,q);
251 plot(t,qlin,"r-.o");
252 title("Velocidade angular em Y","fontsize", 3);
253 xlabel("tempo[s]","fontsize",3);
254 ylabel("velocidade angular[rad/s]","fontsize",3);
255 legend("q N o Linear","q Linear","in_upper_left")
256 xgrid
257 */
258 /*
259 s = %s
260
261 //FUNCOES DE TRANSFERENCIA (SEM ARRASTO) - DIGRAMA DE BODE
262
263 //ENTRADA TORQUE EM THETA
264 h1sem = syslin('c', (49.05)/(s^4));
265 h2sem = syslin('c', (49.05)/(s^3));
266 h21sem = syslin('c', (5)/(s^2));
267 h22sem = syslin('c', (5)/(s));
268 //ENTRADA FORCA
269 h3sem = syslin('c', (1.3139741)/(s^2));
270 h4sem = syslin('c', (1.3139741)/(s));
271 //ENTRADA UNITARIA
272 h5sem = syslin('c', (-9.81)/(s^2));
273 h6sem = syslin('c', (-9.81)/(s));
274
275 f10 = scf(5)
276 subplot(121)
277 title("TORQUE EM THETA - MAGNITUDE - SEM ARRASTO");
278 gainplot([h1sem;h2sem;h21sem;h22sem],0.001, 1e3, ..
279 ['$\frac{49.05}{s^4}$';
280 '$\frac{49.05}{s^3}$';

```

```

282 "$\frac{5}{s^2}$";
283 "$\frac{5}{s}$")
284
285 subplot(122)
286 title("TORQUE EM THETA - FASE - SEM ARRASTO");
287 phaseplot([h1sem;h2sem;h21sem;h22sem],0.001, 1e3, ...
288 ["$\frac{49.05}{s^4}$";
289 "$\frac{49.05}{s^3}$";
290 "$\frac{5}{s^2}$";
291 "$\frac{5}{s}$"])
292
293 f10 = scf(6)
294 subplot(121)
295 title("FORCA - MAGNITUDE - SEM ARRASTO");
296 gainplot([h3sem;h4sem],0.001, 1e3, ...
297 ["$\frac{1.3139741}{s^2}$";
298 "$\frac{1.3139741}{s}$"])
299
300 subplot(122)
301 title("FORCA - FASE - SEM ARRASTO");
302 phaseplot([h3sem;h4sem],0.001, 1e3, ...
303 ["$\frac{1.3139741}{s^2}$";
304 "$\frac{1.3139741}{s}$"])
305
306 f10 = scf(7)
307 subplot(121)
308 title("ENTRADA UNITARIA - MAGNITUDE - SEM ARRASTO");
309 gainplot([h5sem;h6sem],0.001,1e3, ...
310 ["$\frac{-9.81}{s^2}$";
311 "$\frac{-9.81}{s}$"])
312
313 subplot(122)
314 title("ENTRADA UNITARIA - FASE - SEM ARRASTO");
315 phaseplot([h5sem;h6sem],0.001,1e3, ...
316 ["$\frac{-9.81}{s^2}$";
317 "$\frac{-9.81}{s}$"])
318
319
320
321 //FUNCOES DE TRANSFERENCIA (COM ARRASTO) - DIAGRAMA DE BODE
322 //ENTRADA TORQUE EM THETA
323 h1com = syslin('c', (3.06+44.12*s-57.94*s^2)/(0.003*s^3 + 0.1*s^4+s^5));
324 h2com = syslin('c', (0.21+5.25*s+25.99*s^2)/(0.003*s + 0.1*s^4+s^5));
325 h3com = syslin('c', (49.05-28.5*s)/(0.039*s^2 + s^3));
326 h4com = syslin('c', (1.71 +14*s)/(0.064*s^2+s^3));
327 h5com = syslin('c', (5)/(s^2));
328
329 //ENTRADA FORCA
330 h6com = syslin('c', (-0.046)/(0.064*s +s^2));
331 h7com = syslin('c', (1.31)/(0.064*s + s^2));
332 h71com = syslin('c', (1.31)/(0.064+s));
333 //ENTRADA UNITARIA
334 h8com = syslin('c', (0.017 +0.41*s +0.20*s^2)/( 0.0025*s +0.10*s^2 +s^3)
   );
335 h9com = syslin('c', (-0.38 -9.60*s +0.2*s^2)/(0.003*s +0.1*s^2 +s^3));
336 h10com = syslin('c', (0.055)/(0.039 + s));
337 h11com = syslin('c', (-9.63)/(0.064 + s));
338

```

```

339
340 f10 = scf(8)
341 subplot(121)
342 title("TORQUE EM THETA - MAGNITUDE - COM ARRASTO");
343 gainplot([h1com;h2com;h3com;h4com;h5com],0.001, 1e3, ..
344 ["$\\frac{3.06+44.12s-57.94s^2}{0.003s^3 + 0.1s^4+s^5}$";
345 "$\\frac{0.21+5.25s+25.99s^2}{0.003s +0.1s^4+s^5}$";
346 "$\\frac{49.05-28.5s}{0.039s^2 + s^3}$";
347 "$\\frac{1.71 +14s}{0.064s^2+s^3}$";
348 "$\\frac{5}{s^2}$"])
349
350 subplot(122)
351 title("TORQUE EM THETA - FASE - COM ARRASTO");
352 phaseplot([h1com;h2com;h3com;h4com;h5com],0.001, 1e3, ..
353 ["$\\frac{3.06+44.12s-57.94s^2}{0.003s^3 + 0.1s^4+s^5}$";
354 "$\\frac{0.21+5.25s+25.99s^2}{0.003s +0.1s^4+s^5}$";
355 "$\\frac{49.05-28.5s}{0.039s^2 + s^3}$";
356 "$\\frac{1.71 +14s}{0.064s^2+s^3}$";
357 "$\\frac{5}{s^2}$"])
358
359 f10=scf(9)
360 subplot(121)
361 title("FORCA - MAGNITUDE - COM ARRASTO");
362 gainplot([h6com;h7com;h71com],0.001,1e3, ..
363 ["$\\frac{-0.046}{0.064s +s^2}$";
364 "$\\frac{1.31}{0.064s + s^2}$";
365 "$\\frac{1.31}{0.064+s}$"])
366
367 subplot(122)
368 title("FORCA - FASE - COM ARRASTO");
369 phaseplot([h6com;h7com;h71com],0.001,1e3, ..
370 ["$\\frac{-0.046}{0.064s +s^2}$";
371 "$\\frac{1.31}{0.064s + s^2}$";
372 "$\\frac{1.31}{0.064+s}$"])
373
374 f10 = scf(10)
375 subplot(121)
376 title("ENTRADA UNITARIA - MAGNITUDE - COM ARRASTO");
377 gainplot([h8com;h9com;h10com;h11com],0.001, 1e3, ..
378 ["$\\frac{0.017 +0.41s +0.20s^2}{0.0025s +0.10s^2 +s^3}$";
379 "$\\frac{-0.38 -9.60s +0.2s^2}{0.003s +0.1s^2 +s^3}$";
380 "$\\frac{0.055}{0.039 + s}$";
381 "$\\frac{-9.63}{0.064 + s}$"])
382
383 subplot(122)
384 title("ENTRADA UNITARIA - FASE - COM ARRASTO");
385 phaseplot([h8com;h9com;h10com;h11com],0.001, 1e3, ..
386 ["$\\frac{0.017 +0.41s +0.20s^2}{0.0025s +0.10s^2 +s^3}$";
387 "$\\frac{-0.38 -9.60s +0.2s^2}{0.003s +0.1s^2 +s^3}$";
388 "$\\frac{0.055}{0.039 + s}$";
389 "$\\frac{-9.63}{0.064 + s}$"])

```