

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AEROESPACIAL

Centro de Modelagem, Engenharia e Ciências Sociais Aplicadas

RODRIGO DANTAS DIAS

MODELAGEM DA DINÂMICA DE VOO DE UM QUADRICÓPTERO EM MODO
PAIRADO E IMPLEMENTAÇÃO DE TÉCNICA DE CONTROLE LINEAR

São Bernardo do Campo – SP

2019

Rodrigo Dantas Dias

MODELAGEM DA DINÂMICA DE VOO DE UM QUADRICÓPTERO EM MODO
PAIRADO E IMPLEMENTAÇÃO DE TÉCNICA DE CONTROLE LINEAR

Trabalho de Graduação apresentado ao
Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências
Sociais Aplicadas da Universidade Federal do
ABC, como requisito parcial à obtenção do título
de Graduado em Engenharia Aeroespacial. Linha
de pesquisa: Quadrirotor, modelagem dinâmica e
controle linear.

São Bernardo do Campo – SP

2019

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Dantas Dias, Rodrigo

Modelagem da Dinâmica de Voo de um Quadricóptero em
Modo Pairado e Implementação de Técnica de Controle Linear /
Rodrigo Dantas Dias – 2019.

67 fls. : il.

Orientador: Dr. Diego Paolo Ferruzzo Correa

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal do
ABC, Bacharelado em Engenharia Aeroespacial, São Bernardo do
Campo, 2019.

1. Quadricóptero. 2. Modelo Dinâmico. 3. Controle LQR. 4.
Efeito Integral. I. Ferruzzo Correa, Diego Paolo. II. Bacharelado em
Engenharia Aeroespacial, 2019. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pelos avaliadores, sob responsabilidade única do autor e com anuência de seu orientador.

São Bernardo do Campo, ____ de _____ de 2019.

Orientador: Dr. Diego Paolo Ferruzzo Correa

Avaliador 1: Dr. Leandro Baroni

Avaliador 2: Luiz de Siqueira Martins Filho

Autor: Rodrigo Dantas Dias

AGRADECIMENTOS

A minha família, em especial aos meus pais, pelo apoio incondicional desde o início da minha vida.

Ao professor Diego Paolo Ferruzzo Correa pela paciência e longas conversas esclarecendo dúvidas.

Aos amigos que me acompanharam desde o início e aos demais que conheci durante essa jornada que se tornou a graduação.

A Equipe Harpia Aerodesign UFABC por me permitir “colocar a mão na massa” em um projeto fascinante e enriquecedor.

Por fim, a Universidade Federal do ABC por fazer com que mais um estudante do ensino básico público tivesse a oportunidade de estudar em um lugar de excelência.

“As coisas são mais belas quando vistas de cima. O homem há de voar.” Santos Dumont.

RESUMO

O presente trabalho apresenta o estudo do modelo dinâmico de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadrirotor. Para que isso seja feito, são desenvolvidas primeiramente as equações de cinemática de translação e rotação e, também, de dinâmica de translação e rotação que governam o movimento geral desse tipo de veículo. O sistema é então linearizado ao redor de um ponto de equilíbrio na condição de voo pairado. Após a linearização aplica-se uma técnica de controle para sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas, o controlador LQR (*linear quadratic regulator*) com efeito integral. Simulações são realizadas usando o software Matlab / Simulink. O desempenho do controlador é avaliado para diferentes entradas de referência, analisando-se também trajetórias aleatórias. Por fim, são apresentados os resultados das simulações que comprovam a eficácia da técnica de controle proposta e validam o modelo matemático.

Palavras-chave: Quadrirotor, Modelo Dinâmico, Controle LQR, Efeito Integral.

ABSTRACT

The present work presents the study of the dynamic model of an unmanned aerial vehicle of quadrotor type. For this, the kinematics equations of translation and rotation and also the dynamics of translation and rotation that govern the general movement of this type of vehicle are developed first. The system is then linearized around an equilibrium point in the hovered flight condition. After linearization, a control technique is applied for multiple input and multiple output systems, the LQR controller (linear quadratic regulator) with integral effect. Simulations are performed using Matlab / Simulink software. The performance of the controller is evaluated for different reference inputs, also analyzing random trajectories. Finally, the results of the simulations prove the effectiveness of the proposed control technique and validate the mathematical model presented.

Keywords: Quadrirotor, Dynamic Model, LQR Control, Integral Effect.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{e}_{1I}, \mathbf{e}_{2I}, \mathbf{e}_{3I}$ = eixos do sistema inercial.

$\mathbf{e}_{1B}, \mathbf{e}_{2B}, \mathbf{e}_{3B}$ = eixos do sistema do corpo.

X, Y e Z = eixos do sistema girante.

ϕ = ângulo de rolamento (*roll*).

θ = ângulo de arfagem (*pitch*).

ψ = ângulo de guinada (*yaw*).

$\mathbf{C}_X(\phi)$ = Matriz de rotação em X.

$\mathbf{C}_Y(\theta)$ = Matriz de rotação em Y.

$\mathbf{C}_Z(\psi)$ = Matriz de rotação em Z.

\mathbf{C}_0^b = Matriz de transformação do sistema do corpo para o sistema inercial.

\mathbf{F}_b = Somatório das forças que atuam sobre o corpo.

\mathbf{Iden} = Matriz identidade.

m = massa do quadricóptero.

\mathbf{g} = vetor aceleração da gravidade.

g = aceleração da gravidade.

\mathbf{R} = vetor posição do centro de massa.

x = coordenada X do centro de massa.

y = coordenada Y do centro de massa.

z = coordenada Z do centro de massa.

v_x = velocidade coordenada X do centro de massa.

v_y = velocidade coordenada Y do centro de massa.

v_z = velocidade coordenada Z do centro de massa.

$\boldsymbol{\omega}_B$ = velocidade angular do corpo.

p = componente da velocidade angular ao redor de X no sistema do corpo.

q = componente da velocidade angular ao redor de Y no sistema do corpo.

r = componente da velocidade angular ao redor de Z no sistema do corpo.

I = matriz de inércia.

I_{xx} = momento de inércia em X.

I_{yy} = momento de inércia em Y.

I_{zz} = momento de inércia em Z.

\mathbf{M} = matriz com os momentos que agem sobre o corpo.

\mathbf{H} = momento angular total do corpo.

\mathbf{H}_B = Momento angular do corpo.

\mathbf{H}_H = Momento angular devido aos motores.

J_r = Momento de inércia do conjunto rotor, eixo e hélice.

Ω : velocidade nominal de rotação do motor.

\mathbf{T}_r = Matriz de transformações angulares.

sen = seno.

cos = cosseno.

tan = tangente.

sec = secante.

F_i = Força de sustentação gerada pelas hélices.

M_i = Momento gerado pela força de sustentação.

ρ = densidade do ar.

A = área da hélice.

C_T = coeficiente aerodinâmico de sustentação.

C_D = coeficiente aerodinâmico de arrasto.

r_h = raio da hélice

Ω_i = velocidade angular do i -ésimo motor.

K_f = Constante de força.

T = Força de tração total.

K_m = Constante de momento.

L = Momento de rolamento.

M = Momento de arfagem.

N = Momento de guinada.

l = braço de alavanca da força de tração.

\mathbf{X} = vetor de estados.

\mathbf{U} = vetor de entradas.

x_i = variáveis de estado.

$\bar{\mathbf{X}}$ = vetor de estados no ponto de equilíbrio.

$\bar{\mathbf{U}}$ = vetor de entradas para o ponto de equilíbrio.

\mathbf{A} = Matriz de estados.

\mathbf{B} = Matriz de entradas.

\mathbf{C} = Matriz de saídas.

\mathbf{Y} = Vetor de saídas.

\mathbf{K} = Matriz de ganhos.

J = Função custo.

\mathbf{Q} = Matriz de peso do controlador LQR.

\mathbf{R} = Matriz de peso do controlador LQR.

\mathbf{P} = Matriz solução da equação de Riccati.

t_d = tempo de atraso.

t_r = tempo de subida.

t_p = tempo de pico.

M_p = porcentagem de máximo sobressinal.

t_s = tempo de acomodação.

T = Constante de tempo para entrada rampa.

SUMÁRIO

1. Introdução	15
2. Modelagem do Sistema	17
2.1. Definições	17
2.2. Sistemas de Coordenadas	18
2.2.1. Sistema inercial	18
2.2.2. Sistema do corpo	18
2.3. Ângulos de Euler	19
2.4. Cinemática e Dinâmica	20
2.4.1. Dinâmica de Translação	21
2.4.1. Cinemática de Translação	21
2.4.2. Dinâmica de Rotação	21
2.4.3. Cinemática de Rotação	23
2.5. Forças e Momentos em um quadrirotor	24
2.5.1. Forças	24
2.5.2. Momentos	25
2.6. Modelo dinâmico do quadrirotor	26
3. Aplicação da Técnica de Controle	28
3.1. Modelagem para controle	28
3.2. Modelo linear	30
3.1.1. Ponto de equilíbrio	31
3.1.2. Modelo linearizado	31
3.3. Controlabilidade	33
3.4. Análise do modelo linear em malha aberta	33
3.5. Requisitos do sistema	35
3.6. Regulador Linear Quadrático	35
3.5.1. Definições matemáticas	36
3.7. Ação integral	38

3.8.	<i>Aplicações do controle</i>	39
3.9.	<i>Controle de atitude</i>	39
3.10.	<i>Controle de altitude</i>	43
3.11.	<i>Controle das posições X e Y</i>	45
4.	Resultados	49
4.1.	<i>Características do quadrirotor</i>	49
4.2.	<i>Respostas a entrada degrau</i>	49
4.2.1.	Atitude	51
4.2.2.	Altitude	52
4.2.3.	Posições X e Y	52
4.2.4.	Resumo dos resultados – entrada degrau	53
4.3.	<i>Resposta a entrada rampa</i>	53
4.3.1.	Atitude	54
4.3.2.	Altitude	55
4.3.3.	Posições X e Y	55
4.3.4.	Resumo dos resultados – entrada em rampa	56
4.4.	<i>Resposta a entrada senoidal</i>	56
4.4.1.	Atitude	57
4.4.2.	Altitude	58
4.4.3.	Posições X e Y	58
4.4.4.	Resumo dos resultados – entrada senoidal	59
4.5.	<i>Trajetória circular, helicoidal e helicoidal complexa</i>	59
5.	Conclusões	62
6.	Referências Bibliográficas	63
7.	Anexos	65

1. INTRODUÇÃO

Um veículo aéreo não tripulado (VANT) pode ser definido como qualquer tipo de aeronave que possa ser controlada e guiada sem a necessidade de pilotos no seu interior. Nos dias atuais, o uso de VANT's tem crescido em diversas áreas, como plataformas de pesquisa e desenvolvimento, aplicações militares e uso comercial.

Os VANT's podem ser divididos em dois grupos (SOUSA, H. L. 2017):

- **Veículos de asa fixa:** São adequados para uso em ar livre e podem cobrir grande área.
- **Veículos de asa rotativa:** Possuem grande manobrabilidade, decolagem e pouso vertical, voo pairado e atuam também em baixa altitude.

Uma aplicação com grande destaque, apresentada nesse trabalho, são as aeronaves de asa rotativa do tipo quadricóptero, ou helicóptero quadrirotor, que possuem um conjunto de quatro motores e hélices atuantes de forma independentes. Um par de hélice gira no sentido horário e o outro par no sentido anti-horário. A Figura 1 ilustra os movimentos possíveis, onde a largura das setas pretas é proporcional à velocidade dos motores e as setas vermelhas indicam as direções dos movimentos (SÁ, R. C. 2012).

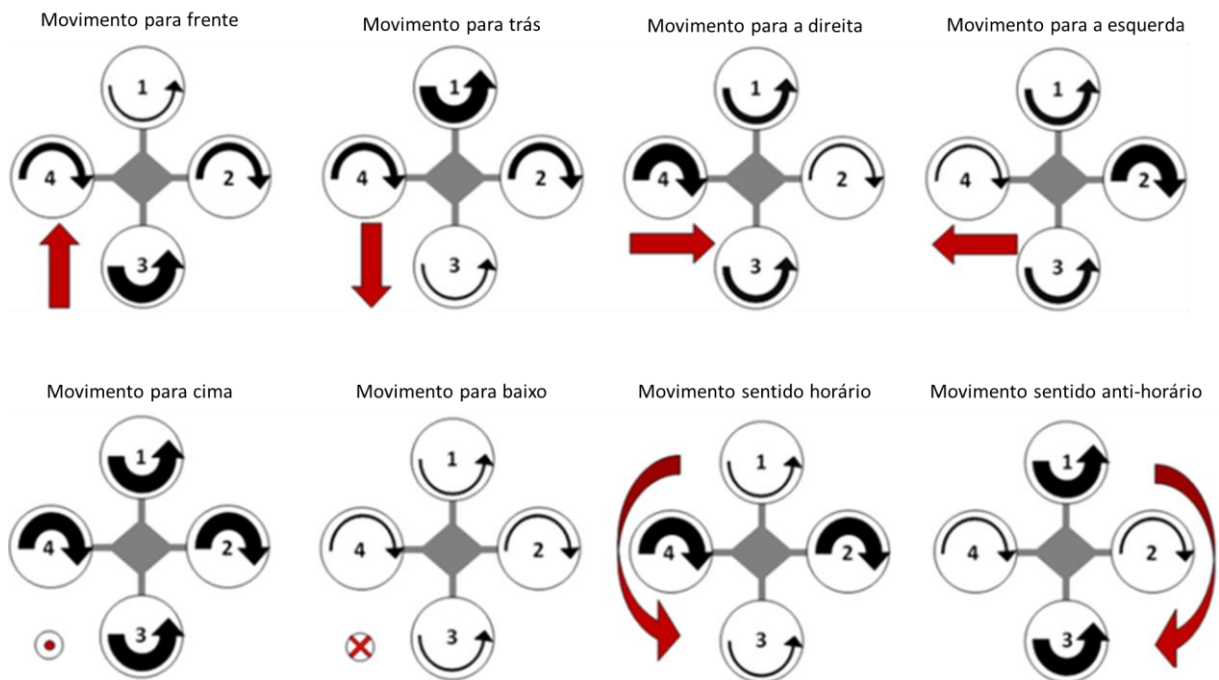


Figura 1: Movimento gerado pela variação de velocidade das hélices do quadrirotor.

(Adaptado de SÁ, R. C. 2012).

O presente trabalho trata da modelagem da mecânica de voo de um quadricóptero e aplicação de técnica de controle linear para determinação de sua posição final. São realizadas simulações usando o software Matlab / Simulink.

O capítulo 2 apresenta as equações da dinâmica do sistema, incluindo a cinemática e dinâmica de rotação e translação. Ao final são obtidas as 6 equações diferenciais que modelam a dinâmica do veículo.

No capítulo 3 ocorre a preparação das equações obtidas no capítulo anterior para a posterior aplicação da técnica de controle, isto é, as equações são linearizadas e escritas em função de variáveis de estado.

O capítulo 4 mostra os resultados obtidos para diferentes entradas de referência, com os valores característicos encontrados.

O capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho e sugestões para desenvolvimentos futuros.

2. MODELAGEM DO SISTEMA

Um quadricóptero pode ser modelado fisicamente como um corpo rígido, sendo necessário 6 equações de cinemática (3 para rotação e 3 para translação) e 6 equações de dinâmica (3 para rotação e 3 para translação). Essas equações são descritas e desenvolvidas no decorrer desse capítulo, sendo uma síntese dos trabalhos de (DA SILVA, A. L. 2012, HOFFMANN, G. 2007, e SABATINO, F. 2015).

2.1. Definições

A seguir são listadas convenções adotadas que ajudam nas deduções das equações do quadricóptero. A Figura 2.1 auxilia no entendimento das posições das hélices, dos sistemas de coordenadas envolvidos e das forças e momentos atuantes.

- As hélices ficam localizadas na parte superior do veículo;
- Olhando o VANT de cima para baixo, os motores são numerados de 1 a 4, no sentido horário;
- Os motores 2 e 4 giram no sentido horário e os motores 1 e 3 no sentido anti-horário;
- As quatro forças de tração geradas pelas hélices são paralelas entre si;
- O plano das hélices é definido como aquele onde atuam as forças de tração atuantes sobre quatro pontos coplanares;
- Os 4 motores são considerados idênticos, o mesmo acontece com as 4 hélices.

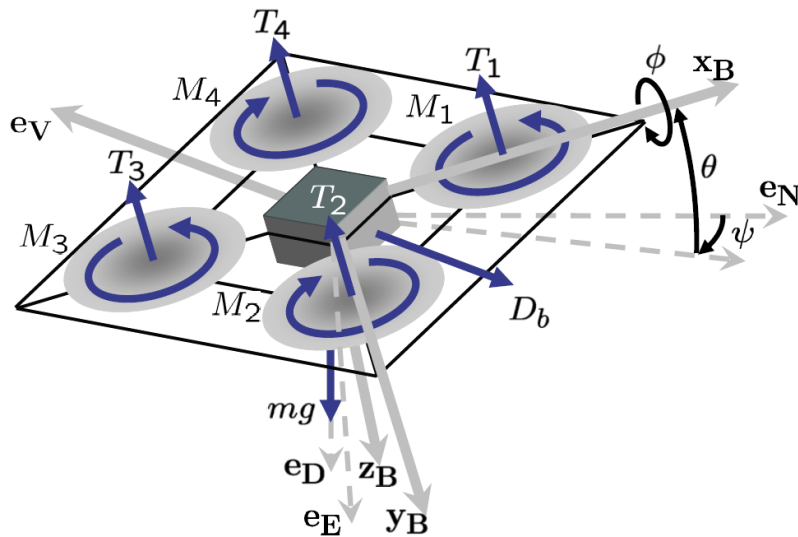


Figura 2.1: Convenções adotadas. Extraído de (HOFFMANN, G. 2007).

2.2. Sistemas de Coordenadas

Dois sistemas de coordenadas são utilizados no desenvolvimento do modelo de mecânica de voo, o sistema inercial (*inertial frame*) e o sistema do corpo (*body frame*), ambos mostrados na Figura 2.2.

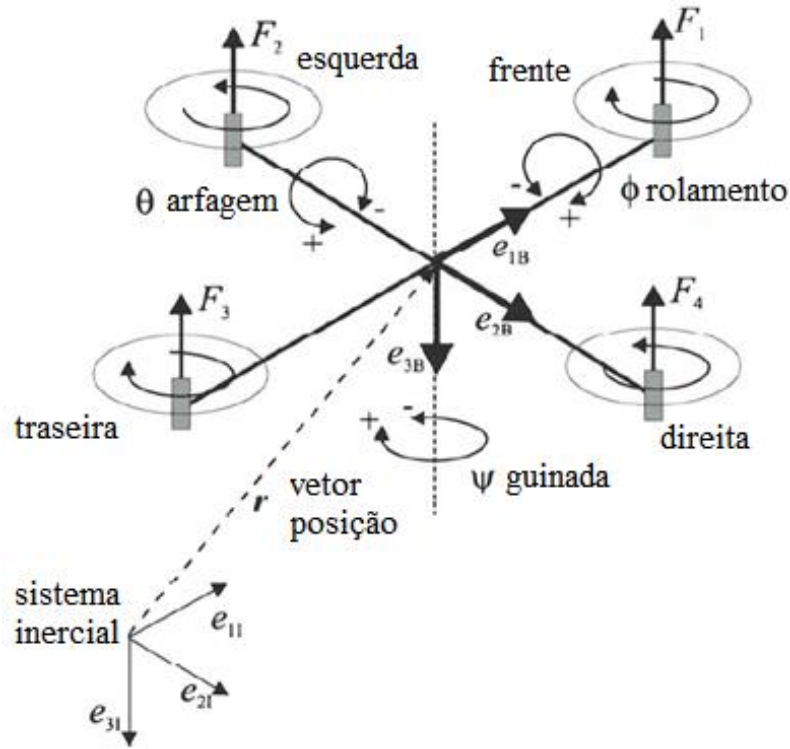


Figura 2.2: Sistema de coordenadas inercial e do corpo. Extraído de (Adaptado de BOLANDI, H. 2013).

2.2.1. Sistema inercial

A origem do sistema inercial é um ponto fixo de referência na terra, geralmente o próprio local de decolagem. Seguindo a Figura 2.2, o eixo e_{1I} aponta para o sentido do norte local, e_{2I} para o leste local e e_{3I} para o centro da terra. É o sistema utilizado para descrever as leis de Newton.

2.2.2. Sistema do corpo

É um sistema móvel, girante, que possui origem no centro de massa do quadricóptero. Os eixos e_{1B} e e_{2B} são paralelos ao plano das hélices, com e_{1B} na mesma direção do motor 1 e apontando para o mesmo. Completando o sistema, e_{3B} aponta para baixo.

2.3. Ângulos de Euler

A cinemática de rotação possui diferentes formas de ser representada variando de acordo com a parametrização de atitude desenvolvida. Nesse trabalho é considerado a parametrização por ângulos de Euler.

Os ângulos de Euler descrevem a orientação espacial de um corpo rígido. Para isso, utilizam-se os dois sistemas de coordenadas desenvolvidos na Seção 2.2. Três rotações são realizadas ao redor dos eixos X, Y e Z do sistema girante, como mostra a Figura 2.3. Essas rotações são apenas representações fictícias, não correspondendo necessariamente ao movimento de rotação que ocorreu (WATT, A. 1992).

Nesse trabalho, adotou-se a sequência de transformação de sistema de coordenadas 3-2-1 ($\psi - \theta - \phi$). Portanto, uma primeira rotação de um ângulo ψ é realizada ao redor do eixo Z do sistema inercial. Depois, acontece uma segunda rotação θ ao redor do eixo Y' do sistema intermediário 1. Por fim, uma terceira rotação ϕ é realizada ao redor do eixo X do sistema intermediário 2 (Sidi, M.J. 1997).

Os ângulos ϕ , θ e ψ são chamados de rolamento (*roll*), arfagem (*pitch*) e guinada (*yaw*), respectivamente.

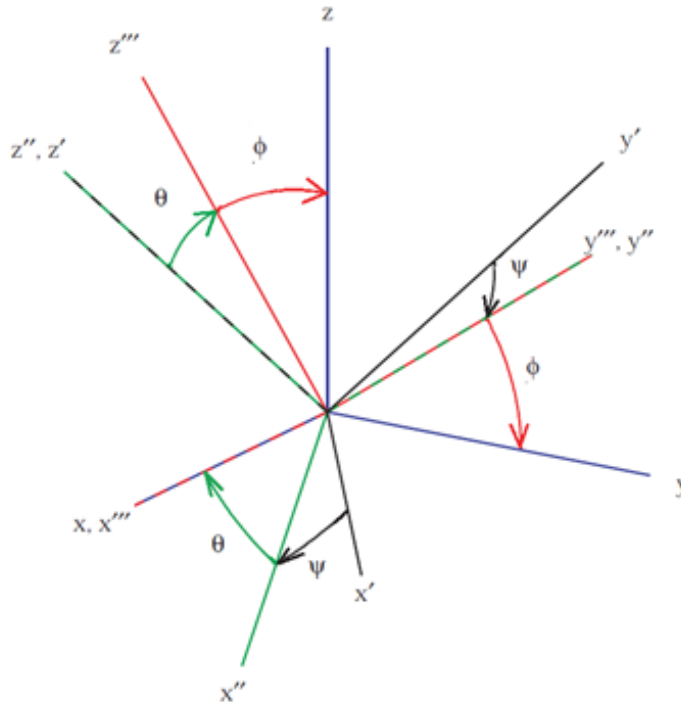


Figura 2.3: Ilustração da sequência de transformação ψ - θ - ϕ (3-2-1) dos ângulos de Euler. (Fonte: Próprio autor).

As transformações mencionadas acima começam de uma orientação padrão. Essa transformação é descrita pelas seguintes matrizes:

$$\mathbf{C}_X(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{C}_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{C}_Z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Assim, as coordenadas no sistema inercial e as coordenadas no sistema do corpo estão relacionadas pela matriz de rotação \mathbf{C}_0^b :

$$\mathbf{C}_0^b = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\theta & \sin\phi \cos\psi \sin\theta - \cos\phi \sin\psi & \cos\phi \cos\psi \sin\theta + \sin\phi \sin\psi \\ \sin\psi \cos\theta & \sin\phi \sin\psi \sin\theta + \cos\phi \cos\psi & \cos\phi \sin\psi \sin\theta - \sin\phi \cos\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi \cos\theta & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Tanto a matriz de transformação de coordenadas quanto a cinemática de rotação, que será apresentada na Seção 2.4.3, são regidas por funções não lineares dos ângulos de Euler, possuindo singularidades quando o ângulo de arfagem θ é igual a $\pm \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Devido a isso, é necessário impor restrições para os ângulos, de forma que $\phi \in]-\pi, \pi]$, $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $\psi \in]-\pi, \pi]$.

2.4. Cinemática e Dinâmica

O desenvolvimento dos modelos cinemáticos e dinâmicos do veículo é baseado nas seguintes considerações:

- A estrutura do quadrirotor é simétrica e rígida;
- O centro de gravidade do veículo coincide com a origem do sistema de coordenadas do corpo;
- A tração é proporcional ao quadrado da velocidade de rotação das hélices.

2.4.1. Dinâmica de Translação

Usando a segunda Lei de Newton, tem-se que a equação da dinâmica de translação para o quadricóptero é:

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{V}} = m\mathbf{g} + \mathbf{C}_0^b \mathbf{F}_b \quad (2.5)$$

A Equação 2.5 relaciona as forças externas aplicadas \mathbf{F} com as forças não gravitacionais \mathbf{F}_b que será desenvolvida na Seção 2.5.1. Para isso, utiliza-se a matriz de transformação de coordenadas apresentada na seção anterior. Ressalta-se, ainda, que \mathbf{g} é uma matriz linha de ordem 3 com o valor da aceleração da gravidade ($\mathbf{g} = [0 \ 0 \ g]^T$).

2.4.1. Cinemática de Translação

Tomando o vetor posição do centro de massa do quadricóptero $\mathbf{R} = [x \ y \ z]^T$ no referencial inercial, a equação de cinemática de translação é:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

2.4.2. Dinâmica de Rotação

Para o estudo da dinâmica do movimento rotacional é necessário estudar a equação de Euler. Para isso, são apresentadas algumas definições, todas no sistema do corpo.

A velocidade angular do corpo é dada pelo vetor $\boldsymbol{\omega}_B$:

$$\boldsymbol{\omega}_B = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Onde p , q e r são as magnitudes das velocidades angulares de acordo com os respectivos eixos, representados na Figura 2.2.

O tensor de inércia para um corpo simétrico é dado pela matriz diagonal \mathbf{I} :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Onde I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} são os momentos de inércia sobre os seus eixos principais.

Usando a Segunda Lei de Newton, a soma de todos os momentos que agem sobre o corpo é dada por:

$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}} \quad (2.9)$$

Com \mathbf{H} sendo o momento angular.

O momento angular total do quadrirotor possui duas partes. A primeira é relacionada a rotação do corpo e, a segunda, com o movimento de rotação dos motores. Sendo assim,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_B + \mathbf{H}_H \quad (2.10)$$

Onde \mathbf{H}_B é o momento angular do corpo e \mathbf{H}_H o momento angular devido aos motores. Esses momentos angulares são dados por:

$$\mathbf{H}_B = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_B \quad (2.11)$$

$$\mathbf{H}_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_r\Omega \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Onde J_r é o momento de inércia do conjunto rotor, eixo e hélice e Ω a velocidade nominal de rotação do motor. Sendo assim, a equação de Euler para a dinâmica de rotação fica completamente definida como:

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}_B = \mathbf{M} - \boldsymbol{\omega}_B \times (\mathbf{H}_B + \mathbf{H}_H) \quad (2.13)$$

Os termos $\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}_B$ e $\boldsymbol{\omega}_B \times (\mathbf{H}_B + \mathbf{H}_H)$ representam a taxa de variação do momento angular no sistema do corpo. A multiplicação com \times representa o produto vetorial.

2.4.3. Cinemática de Rotação

O vetor com as velocidades angulares no sistema inercial dado pela variação dos ângulos de Euler é:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

A relação entre as velocidades angulares no sistema inercial, Equação 2.14, e no sistema do corpo, Equação 2.7, é a seguinte:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{T}_r \boldsymbol{\omega}_B \quad (2.15)$$

Onde \mathbf{T}_r é a matriz de transformações angulares, definida como:

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi / \cos\theta & \cos\phi / \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Expandindo a Equação 2.15 chega-se a:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = p + (q \sin\phi + r \cos\phi) \tan\theta \\ \dot{\theta} = q \cos\phi - r \sin\phi \\ \dot{\psi} = r \cos\phi \sec\theta + q \sin\phi \sec\theta \end{cases} \quad (2.17)$$

Ou, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta + \sin\phi \sec\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi \sec\theta & \cos\phi \sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

As equações acima descrevem como os ângulos de Euler evoluem uma vez conhecida a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_B$.

2.5. Forças e Momentos em um quadrirotor

A rotação das hélices gerada pelos motores provoca o surgimento de forças de sustentação e, conseqüentemente, de momentos no quadrirotor, que podem ser obtidos por (AMIR, M. 2008):

$$F_i = \frac{1}{2} \rho A C_T r_h^2 \Omega_i^2 \quad (2.19)$$

$$M_i = \frac{1}{2} \rho A C_D r_h^2 \Omega_i^2 \quad (2.20)$$

2.5.1. Forças

Observando as Equações 2.19 e 2.20 nota-se que as forças e momentos atuantes dependem da geometria das hélices e da densidade do ar. Como a altitude é geralmente limitada, a densidade do ar pode ser considerada constante e a Equação 2.19 pode ser simplificada:

$$F_i = K_f \Omega_i^2 \quad (2.21)$$

Onde K_f é chamada de constante de força tal que:

$$K_f = \frac{1}{2} \rho A C_T r_h^2 \quad (2.22)$$

Como mencionado anteriormente, a força de arrasto é desprezada, e a única força não aerodinâmica que age sobre o quadricóptero é a dada pela Equação 2.21.

Assumindo que a força de tração seja paralela ao eixo z do sistema do corpo, a soma de forças atuantes fica:

$$\mathbf{F}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -K_f(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Fazendo,

$$T = K_f(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \quad (2.24)$$

Obtém-se

$$\mathbf{F}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -T \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Com T sendo a força de tração total gerada pelas quatro hélices presentes no veículo.

2.5.2. Momentos

De acordo com as hipóteses discutidas, dois momentos atuam sobre um quadrirotor:

- Momentos provocados pelo braço de alavanca das forças F_i de cada motor com respeito ao centro de massa;
- Momentos aerodinâmicos de reação em cada hélice, devido ao arrasto que atua nas mesmas.

Uma melhor visualização desses momentos é mostrada na Figura 2.1.

O momento de guinada, N , é gerado a partir da soma dos momentos de reação devido aos arrastos nas hélices. As hélices 1 e 3 geram momentos positivos e as hélices 2 e 4, negativos. Esses momentos podem ser modelados da seguinte maneira usando as simplificações discutidas na Seção 2.5.1:

$$M_i = K_m \Omega_i^2 \quad (2.26)$$

Onde K_m é a constante de momento ou torque que, assim como K_f , depende principalmente da geometria da hélice.

$$K_m = \frac{1}{2} \rho A C_D r_h^2 \quad (2.27)$$

Logo, os momentos atuantes podem ser organizados na seguinte matriz

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Sendo assim, o momento de guinada N é dado por:

$$N = M_1 - M_2 + M_3 - M_4 \quad (2.29)$$

Portanto,

$$N = K_m(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \quad (2.30)$$

A partir da geometria do problema, os momentos provocados pelo braço de alavanca são os de rolamento (L) e os de arfagem (M), dados por:

$$L = F_4 l - F_2 l = K_f l (\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \quad (2.31)$$

$$M = F_1 l - F_3 l = K_f l (\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \quad (2.32)$$

Onde l é a distância do centro de cada hélice até o centro de massa, tomada ao longo do plano das hélices.

Após as formulações realizadas acima, percebe-se que as variáveis de controle dos movimentos de rotação e translação são $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ e Ω_4 , por gerarem a força de tração T e os movimentos de rolamento, arfagem e guinada.

2.6. Modelo dinâmico do quadrirotor

O modelo dinâmico é obtido ao se expandir as Equações 2.5 e 2.13, onde a seguinte consideração foi feita para pequenos ângulos de movimento $[p \ q \ r]^T = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ (SUBBARAO, K. 2009).

$$\begin{cases}
\ddot{x} = -(\cos \phi \cos \psi \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \psi) \frac{T}{m} \\
\ddot{y} = -(\cos \phi \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \phi \cos \psi) \frac{T}{m} \\
\ddot{z} = g - \cos \phi \cos \theta \frac{T}{m} \\
\ddot{\phi} = \frac{-\dot{\theta} \dot{\psi} (I_{zz} - I_{yy}) - \dot{\theta} J_r \Omega}{I_{xx}} + \frac{L}{I_{xx}} \\
\ddot{\theta} = \frac{-\dot{\phi} \dot{\psi} (I_{xx} - I_{zz}) + \dot{\phi} J_r \Omega}{I_{yy}} + \frac{M}{I_{yy}} \\
\ddot{\psi} = \frac{-\dot{\phi} \dot{\theta} (I_{yy} - I_{xx})}{I_{zz}} + \frac{N}{I_{zz}}
\end{cases} \quad (2.33)$$

3. APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE CONTROLE

3.1. Modelagem para controle

O modelo dinâmico do quadrirotor descrito pelo conjunto de Equações 2.33 pode ser reescrito na forma de espaço de estados $\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ com \mathbf{X} sendo o vetor de estados e \mathbf{U} o vetor de entradas. Esses vetores são escolhidos tal que:

$$\mathbf{X} = [x \ y \ z \ v_x \ v_y \ v_z \ \phi \ \theta \ \psi \ p \ q \ r]^T \quad (3.1)$$

$$\mathbf{U} = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4]^T \quad (3.2)$$

Onde as entradas são dadas pelos torques descritos pelas Equações 2.24, 2.30, 2.31 e 2.32.

$$\begin{cases} U_1 = K_f(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ U_2 = K_f l(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ U_3 = K_f l(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \\ U_4 = K_m(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \end{cases} \quad (3.3)$$

As variáveis de estado do sistema são escolhidas como:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x}_1 = v_x \\ x_3 = y \\ x_4 = \dot{x}_3 = v_y \\ x_5 = z \\ x_6 = \dot{x}_5 = v_z \\ x_7 = \phi \\ x_8 = \dot{x}_7 = p \\ x_9 = \theta \\ x_{10} = \dot{x}_9 = q \\ x_{11} = \psi \\ x_{12} = \dot{x}_{11} = r \end{cases} \quad (3.4)$$

Portanto, o modelo no espaço de estados para o quadrirotor fica da seguinte forma:

$$f(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = \begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \\ \dot{v}_x = -(\cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi) \frac{U_1}{m} \\ \dot{v}_y = -(\cos \phi \sin \psi \sin \theta - \sin \phi \cos \psi) \frac{U_1}{m} \\ \dot{v}_z = g - \cos \phi \cos \theta \frac{U_1}{m} \\ \dot{\phi} = p + (q \sin \phi + r \cos \phi) \tan \theta \\ \dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi \\ \dot{\psi} = r \cos \phi \sec \theta + q \sin \phi \sec \theta \\ \dot{p} = \frac{-qr(I_{zz} - I_{yy}) - qJ_r\Omega}{I_{xx}} + \frac{U_2}{I_{xx}} \\ \dot{q} = \frac{-pr(I_{xx} - I_{zz}) + pJ_r\Omega}{I_{yy}} + \frac{U_3}{I_{yy}} \\ \dot{r} = \frac{-pq(I_{yy} - I_{xx})}{I_{zz}} + \frac{U_4}{I_{zz}} \end{cases} \quad (3.5)$$

Observando o conjunto de Equações 3.5, nota-se que os ângulos e suas derivadas não dependem das componentes do movimento translacional. Por outro lado, as componentes translacionais dependem dos ângulos. O sistema como um todo pode ser dividido em dois subsistemas, um para as rotações angulares e o outro para as translações lineares, como mostra a Figura 3.1.

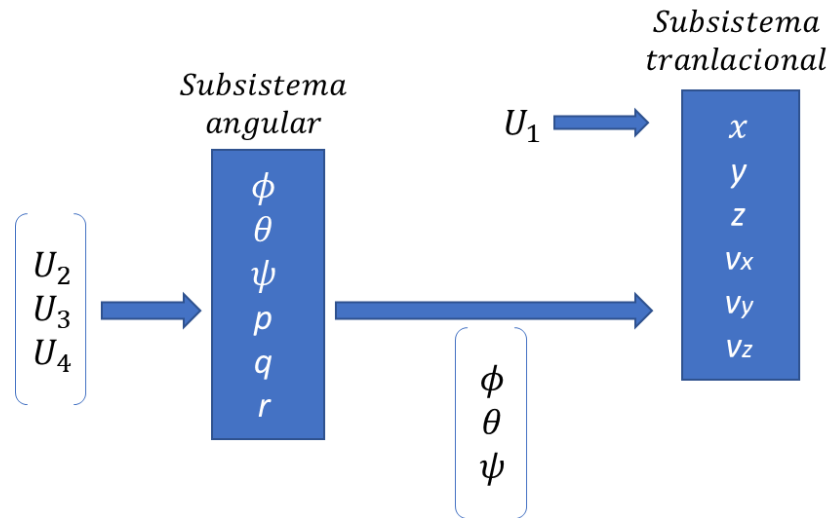


Figura 3.1: Relação entre o subsistema angular e o subsistema translacional
(Adaptado de BOUABDALLAH, S. 2007).

3.2. Modelo linear

O processo de linearização é desenvolvido ao redor de um ponto de equilíbrio $\bar{\mathbf{X}}$, no qual para uma entrada fixa $\bar{\mathbf{U}}$ é a solução do sistema algébrico:

$$f = (\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{U}}) = 0 \quad (3.6)$$

Como a função f é não linear, problemas relacionados com a existência de singulares da solução da Equação 3.6 aparecem. Por essa razão, a linearização é realizada em modelo simplificado de pequenas oscilações (SABATINO, F. 2015). A simplificação é feita da seguinte forma para um ângulo α qualquer, válida para pequenas oscilações ao redor do ponto de equilíbrio:

$$\begin{cases} \sin \alpha = \alpha \\ \cos \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

Aplicando as simplificações da Equação 3.7 no modelo de espaço de estados da Equação 3.5 obtêm-se:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \\ \dot{v}_x = -(\theta + \phi\psi) \frac{U_1}{m} \\ \dot{v}_y = -(\psi\theta - \phi) \frac{U_1}{m} \\ \dot{v}_z = g - \frac{U_1}{m} \\ \dot{\phi} = p + (q\phi + r)\theta \\ \dot{\theta} = q - r\phi \\ \dot{\psi} = r + q\phi \\ \dot{p} = \frac{-qr(I_{zz} - I_{yy}) - qJ_r\Omega}{I_{xx}} + \frac{U_2}{I_{xx}} \\ \dot{q} = \frac{-pr(I_{xx} - I_{zz}) + pJ_r\Omega}{I_{yy}} + \frac{U_3}{I_{yy}} \\ \dot{r} = \frac{-pq(I_{yy} - I_{xx})}{I_{zz}} + \frac{U_4}{I_{zz}} \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial f(\mathbf{X}, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \bigg|_{\substack{\mathbf{X}=\bar{\mathbf{X}} \\ \mathbf{U}=\bar{\mathbf{U}}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

E o modelo linear é:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (3.13)$$

A matriz de saída do sistema fica:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} \quad (3.14)$$

Com a matriz C dada por:

$$\mathbf{C} = \text{Iden}_{\{12 \times 12\}} \quad (3.15)$$

Onde

\mathbf{A}	Matriz de estado ($\in \mathfrak{R}^{n \times n}$)
\mathbf{B}	Matriz de entrada ($\in \mathfrak{R}^{n \times m}$)
\mathbf{C}	Matriz de saída ($\in \mathfrak{R}^{n \times n}$)
\mathbf{X}	Vetor de estados contendo n números de estados
\mathbf{U}	Vetor de entrada contendo m entradas

Portanto, obtêm-se o modelo linear do quadrirotor no espaço de estados.

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \\ \dot{v}_x = -g\theta \\ \dot{v}_y = g\phi \\ \dot{v}_z = -U_1/m \\ \dot{\phi} = p \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{\psi} = r \\ \dot{p} = -J_r\Omega q/I_{xx} + U_2/I_{xx} \\ \dot{q} = J_r\Omega p/I_{yy} + U_3/I_{yy} \\ \dot{r} = U_4/I_{zz} \end{cases} \quad (3.16)$$

3.3. Controlabilidade

De maneira geral, um sistema é dito controlável se os estados desse sistema podem ser controlados a partir de suas entradas (CORON, J-M. 1956).

O modelo linear apresentado na Equação 3.13 é dito controlável se para qualquer estado inicial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ e qualquer estado final \mathbf{X}_1 , existe uma entrada $\mathbf{U}(t)$ que leva \mathbf{X}_0 para \mathbf{X}_1 em um tempo finito.

A matriz de controlabilidade é dada por:

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}.\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2.\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}.\mathbf{B}] \in \mathbb{R}^{n \times nm} \quad (3.17)$$

Onde o sistema será controlável se, e somente se, a matriz de controlabilidade tem posto completo, isto é, a matriz resultante da Equação 3.17 tiver todas as linhas linearmente independentes.

3.4. Análise do modelo linear em malha aberta

As funções de transferência de interesse para a análise do sistema descrito pelo conjunto de Equações 3.16 são mostradas abaixo.

$$\begin{cases} \frac{x(s)}{\theta(s)} = -\frac{g}{s^2} \\ \frac{y(s)}{\phi(s)} = \frac{g}{s^2} \\ \frac{z(s)}{U_1(s)} = -\frac{1}{ms^2} \\ \frac{\phi(s)}{U_2(s)} = \frac{1}{I_{xx}s^2} \\ \frac{\theta(s)}{U_3(s)} = \frac{1}{I_{yy}s^2} \\ \frac{\psi(s)}{U_4(s)} = \frac{1}{I_{zz}s^2} \end{cases} \quad (3.18)$$

A equação característica para os sistemas dados pelo conjunto de Equações 3.18 tem a seguinte forma, usando como exemplo a altitude $z(s)$:

$$ms^2 = 0 \quad (3.19)$$

Percebe-se que as equações características do sistema são de segunda ordem com dois polos localizados na origem, Figura 3.2.

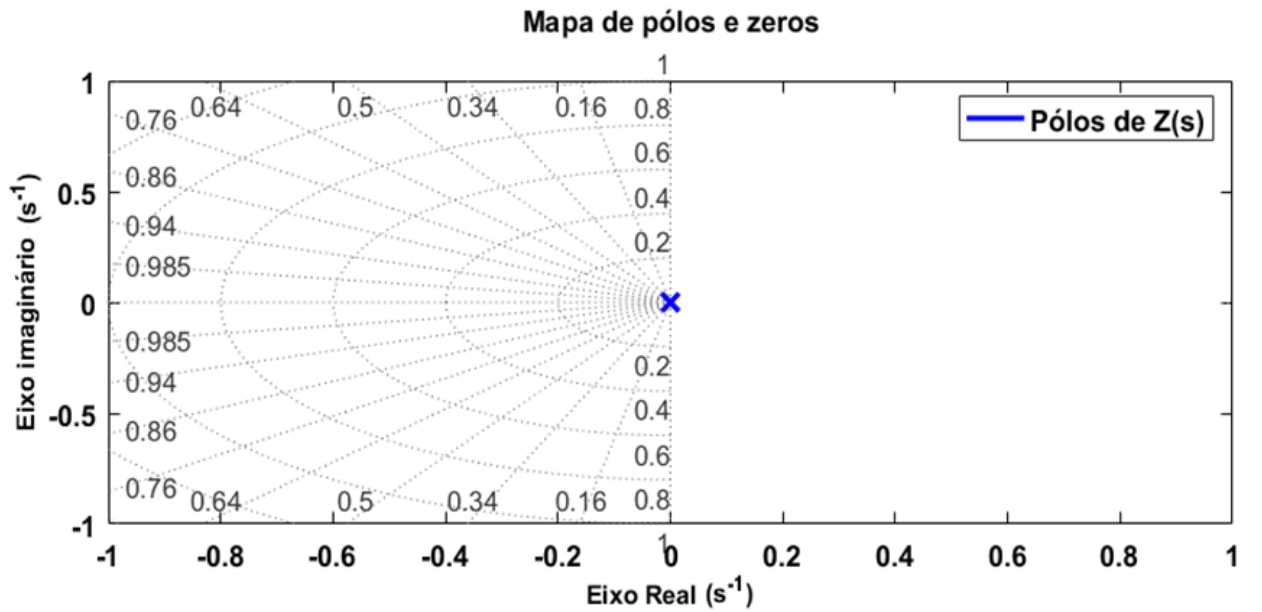


Figura 3.2: Mapa de polos e zeros para a altitude do sistema em malha aberta.

A presença desses polos faz com que o sistema descrito seja instável (OGATA, K. 2011). A resposta de uma das equações do sistema para uma entrada de degrau unitário é indicada na Figura 3.3, que mostra a relação entre a altitude z e a entrada U_1 .

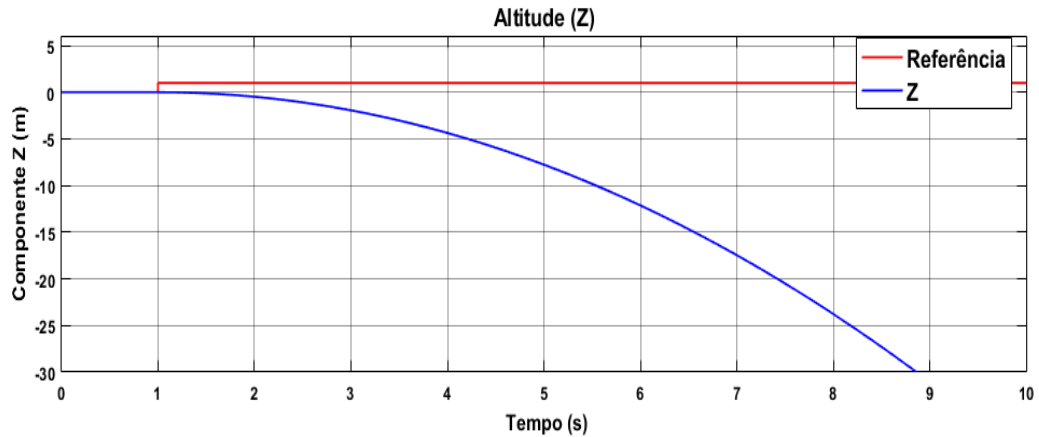


Figura 3.3: Resposta instável da altitude para o sistema em malha aberta.

3.5. Requisitos do sistema

A Tabela 3.1 mostra duas características desejadas para a atitude e a posição do quadricóptero e que devem ser respeitadas para uma entrada do tipo degrau.

Tabela 3.1: Limites de resposta desejada para o sistema.

Componente	Máximo sobressinal (%)	Tempo de subida (s)
Ângulo de rolamento (ϕ)	≤ 5	≤ 2
Ângulo de arfagem (θ)	≤ 5	≤ 2
Ângulo de guinada (ψ)	≤ 5	≤ 4
Posição x	≤ 5	≤ 2
Posição y	≤ 5	≤ 2
Posição z	≤ 5	≤ 4

3.6. Regulador Linear Quadrático

O regulador linear quadrático (LQR) é um controlador ótimo de simples implementação e excelente desempenho utilizado em diversas aplicações, desde controle de mecanismos robóticos a controle de navios e veículos espaciais (MALKAPURE, H. 2014).

O objetivo de um controle LQR é o de determinar um conjunto de ganhos de modo que, em realimentação, o sistema minimize uma função de custo quadrática definida previamente, assegurando máxima performance e mantendo os sinais de controle dentro das especificações desejadas.

3.5.1. Definições matemáticas

Considerando um sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas, linear, contínuo, variante no tempo e controlável:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) \\ \mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{X}(t) \end{cases} \quad (3.20)$$

A função custo que deve ser minimizada de forma a limitar a energia dos estados e da ação de controle é dada pela equação abaixo (NAIDU, D. S. 1940):

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{X}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{U}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t))dt + \frac{1}{2} \mathbf{X}^T(t_f)\mathbf{F}(t_f)\mathbf{X}(t_f) \quad (3.21)$$

Onde $\mathbf{Q}(t)$ e $\mathbf{F}(t_f)$ são matrizes simétricas, positivas e semidefinidas, e $\mathbf{R}(t)$ é uma matriz positiva definida. Analisando a Equação 3.21, percebe-se que a matriz $\mathbf{Q}(t)$ está ligada diretamente ao custo dos estados e $\mathbf{R}(t)$ pondera o sinal de controle $\mathbf{U}(t)$.

O problema do controlador LQR consiste em encontrar a matriz de ganhos \mathbf{K} tal que

$$\mathbf{U}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}^*(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{X}(t) \quad (3.22)$$

O vetor de ganhos $\mathbf{K}(t)$ apresentado na equação acima é obtido da seguinte forma:

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) \quad (3.23)$$

Nota-se que, assumindo a lei de controle da Equação 3.22, a dinâmica que descreve o comportamento dos estados fica:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t))\mathbf{X}(t) \quad (3.24)$$

Onde o sistema será estável caso os autovalores da matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ tenham todos parte real negativa (OGATA, K. 2011).

\mathbf{P} é uma matriz simétrica positiva definida e solução algébrica da equação diferencial de Riccati.

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) \quad (3.25)$$

Satisfazendo a condição final:

$$\mathbf{P}(t = t_f) = \mathbf{F}(t_f) \quad (3.26)$$

Para sistemas lineares invariantes no tempo, a Equação 3.25 pode ser reduzida da seguinte maneira, conhecida como Equação Algébrica de Riccati:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = 0 \quad (3.27)$$

As localizações dos polos de malha fechada são alteradas variando-se as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} , o que modifica a performance do sistema. As matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} podem ser escolhidas inicialmente baseadas na regra de Bryson, que consiste em (ISMAIL, N. A.):

$$\mathbf{Q}_i = \frac{1}{x_{im}^2} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{R}_j = \frac{1}{u_{jm}^2} \quad (3.29)$$

Onde x_{im} é o valor máximo desejado para o $i_{ésimo}$ estado e u_{jm} é o máximo valor desejado para a $j_{ésima}$ entrada e pode ser escolhida para ser o valor de saturação do sinal de entrada.

3.7. Ação integral

Uma atuação integral incorporada no controlador LQR é colocada com o objetivo de eliminar o erro de estado estacionário (MALKAPURE, H. 2014). Consiste em acrescentar um estado extra que é relacionado com a integral do erro, isto é:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{d}(0) = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Construindo o sistema inteiro levando em consideração esse novo estado, tem-se que o novo sistema tem como vetor de estado.

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \mathbf{d}(t) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Onde o sistema fica definido por:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{X}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{X}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{X}}(t) \\ \tilde{\mathbf{X}}(0) = [\mathbf{x}_{e0}^T \ 0]^T \end{cases} \quad (3.32)$$

Com

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{d}} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = [\mathbf{C} \ 0] \quad (3.36)$$

Sendo assim, o novo sistema de controle irá convergir tanto em $\mathbf{X}(t)$ quanto em $\mathbf{d}(t)$. Como consequência, a saída do sistema irá alcançar o ponto desejado sem erro estacionário.

Nota-se que o novo sistema $\tilde{X}(t)$ deve ser levado em consideração na construção do controle LRQ, isto é, deve-se obter as matrizes \tilde{K} , \tilde{P} e \tilde{Q} (não há modificação em R porque o número de entradas não é alterado).

A representação de um sistema em diagrama de blocos de controle LQR com efeito integral é mostrada na Figura 3.4.

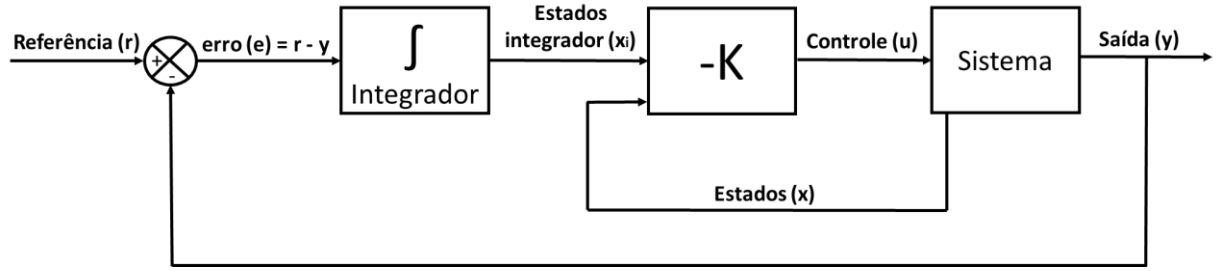


Figura 3.4: Diagrama de blocos do sistema de controle LQR com efeito integral.
(Fonte: Próprio autor).

3.8. Aplicações do controle

O controle aplicado no quadricóptero foi dividido em três partes: controle de atitude, altitude e das posições nos eixos X e Y. Como os ângulos ϕ e θ estão relacionados diretamente com as posições x e y , foi adotado que a entrada de referência para esses ângulos são essas posições, respectivamente. Todas as simulações foram realizadas no software Matlab/Simulink.

3.9. Controle de atitude

Para o controle de atitude, o modelo no espaço de estados considera os seguintes estados:

$$\tilde{X}_{ati} = [v_x \ v_y \ \phi \ \theta \ \psi \ p \ q \ r \ d_\phi \ d_\theta \ d_\psi]^T \quad (3.37)$$

Considerando apenas os estados acima, a matriz de estado e de entrada para o controle de atitude são:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{ati} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_r\Omega/I_{xx} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_r\Omega/I_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{ati} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Consequentemente, o vetor de saída e o sinal de controle são, respectivamente:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{ati} = [\phi \ \theta \ \psi \ d_\phi \ d_\theta \ d_\psi]^T \quad (3.40)$$

$$\mathbf{U}_{ati} = [L \ M \ N]^T \quad (3.41)$$

As matrizes $\tilde{\mathbf{Q}}$ e \mathbf{R} selecionadas para o controle de atitude são dadas abaixo:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{ati} = \text{diag}[\tilde{\mathbf{Q}}_{ati_1}; \tilde{\mathbf{Q}}_{ati_2}; \dots; \tilde{\mathbf{Q}}_{ati_{11}}] \quad (3.42)$$

Onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{Q}_{ati_1} = 0,1296 \\ \tilde{Q}_{ati_2} = 0,1296 \\ \tilde{Q}_{ati_3} = 32,828 \\ \tilde{Q}_{ati_4} = 32,828 \\ \tilde{Q}_{ati_5} = 0,0253 \\ \tilde{Q}_{ati_6} = 0,1013 \\ \tilde{Q}_{ati_7} = 0,1013 \\ \tilde{Q}_{ati_8} = 0,1013 \\ \tilde{Q}_{ati_9} = 3282,8 \\ \tilde{Q}_{ati_{10}} = 3282,8 \\ \tilde{Q}_{ati_{11}} = 3282,8 \end{array} \right.$$

$$\mathbf{R}_{ati} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

A matriz de ganho \mathbf{K} com os ganhos integrais para o rolamento, guinada e arfagem podem então ser obtidos:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{ati} = \begin{bmatrix} -5,95 \times 10^{-4} & -0,2215 & 6,89 \times 10^{-9} \\ 0,0443 & -0,0030 & -1,49 \times 10^{-8} \\ 19,1443 & -1,2220 & 1,16 \times 10^{-15} \\ 0,2444 & 86,1041 & -1,36 \times 10^{-16} \\ -3,94 \times 10^{-15} & -6,58 \times 10^{-15} & 1,1508 \\ 1,0245 & -0,0418 & -1,56 \times 10^{-17} \\ -0,0016 & 3,5991 & -3,42 \times 10^{-18} \\ -1,05 \times 10^{-16} & -5,93 \times 10^{-16} & 0,4081 \\ -114,36 & 7,6863 & 1,46 \times 10^{-7} \\ -1,5373 & -571,82 & 6,76 \times 10^{-8} \\ 4,75 \times 10^{-15} & 5,19 \times 10^{-15} & -1,5915 \end{bmatrix}^T \quad (3.44)$$

A Tabela 3.2 mostra os polos de malha fechada da matriz de feedback para o controle de atitude dado pela Equação 3.23. Nota-se que todos os polos se localizam no lado esquerdo do semi-plano s , como é possível observar na Figura 3.5.

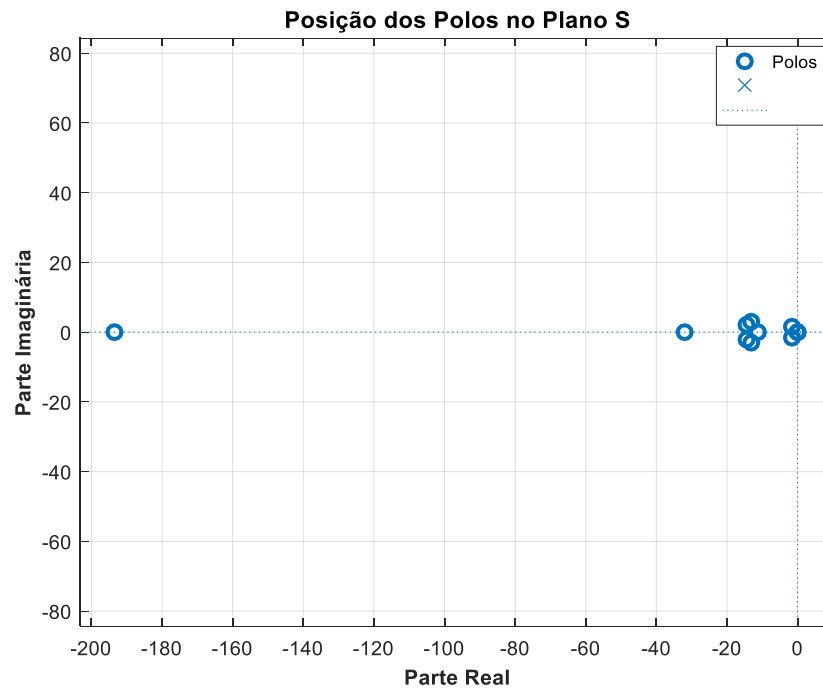


Figura 3.5. Polos de malha fechada para atitude no plano S .

Tabela 3.2: Polos de malha fechada para atitude.

Polos
$-193,48 + 0i$
$-31,97 + 0i$
$-13,11 + 3,01i$
$-13,11 - 3,01i$
$-14,45 + 2,11i$
$-14,45 - 2,11i$
$-11,22 + 0i$
$-1,58 + 1,57i$
$-1,58 - 1,57i$
$-5,70 \times 10^{-8} + 0i$
$-3,90 \times 10^{-8} + 0i$

O diagrama de blocos para essa parte da simulação é apresentado na Figura 3.6.

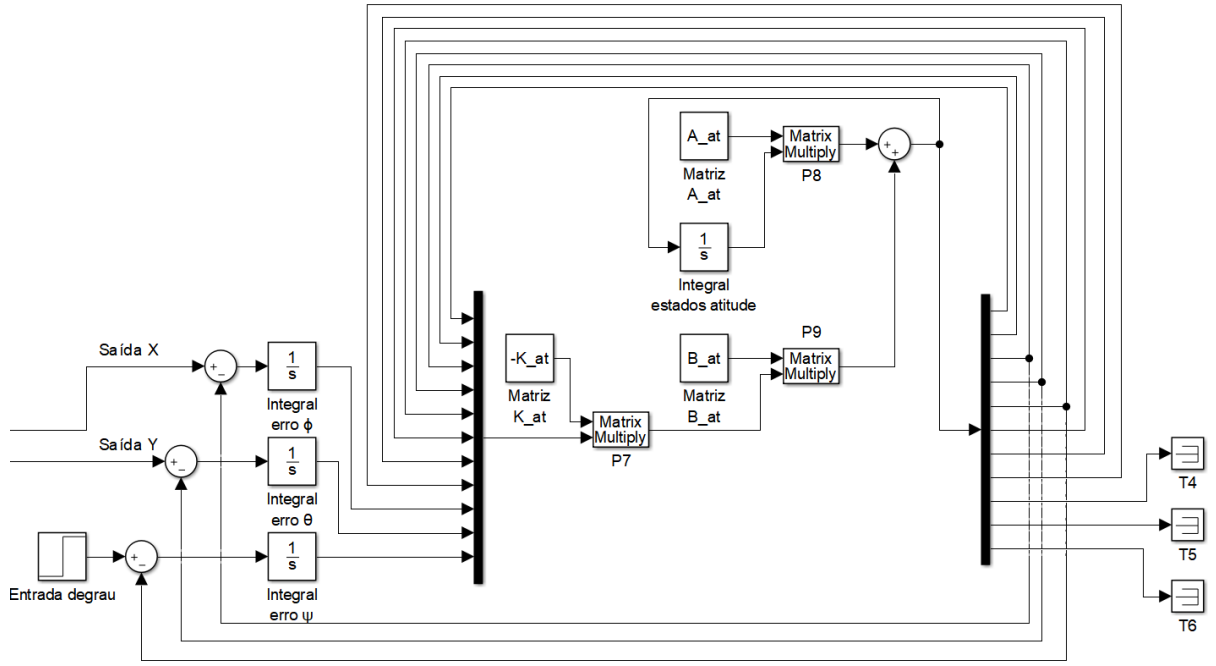


Figura 3.6: Diagrama de blocos para a simulação de atitude realizado no Matlab/Simulink.

3.10. Controle de altitude

Para o controle de altitude, o modelo no espaço de estados considera os seguintes estados:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{alt} = [z \ v_z \ d_z]^T \quad (3.45)$$

Considerando apenas os estados acima, a matriz de estado e de entrada para o controle de altitude são:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{alt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{alt} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Consequentemente, o vetor de saída e o sinal de controle são, respectivamente:

$$\tilde{\mathbf{y}}_{alt} = [\mathbf{z} \ \mathbf{d}_z] \quad (3.48)$$

$$\mathbf{u}_{alt} = [T] \quad (3.49)$$

As matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} seleccionadas para o controle de atitude são dadas abaixo:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{alt} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0,1296 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{alt} = [0,01] \quad (3.51)$$

A matriz de ganho \mathbf{K} com os ganhos integrais para a altitude é:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{alt} = [-45,43 \quad -10,32 \quad 100] \quad (3.52)$$

A Tabela 3.3 mostra os polos de malha fechada da matriz de feedback para o controle de altitude dado pela Equação 3.23. Note-se que todos os polos se localizam no lado esquerdo do semi-plano s , como é possível observar na Figura 3.7.

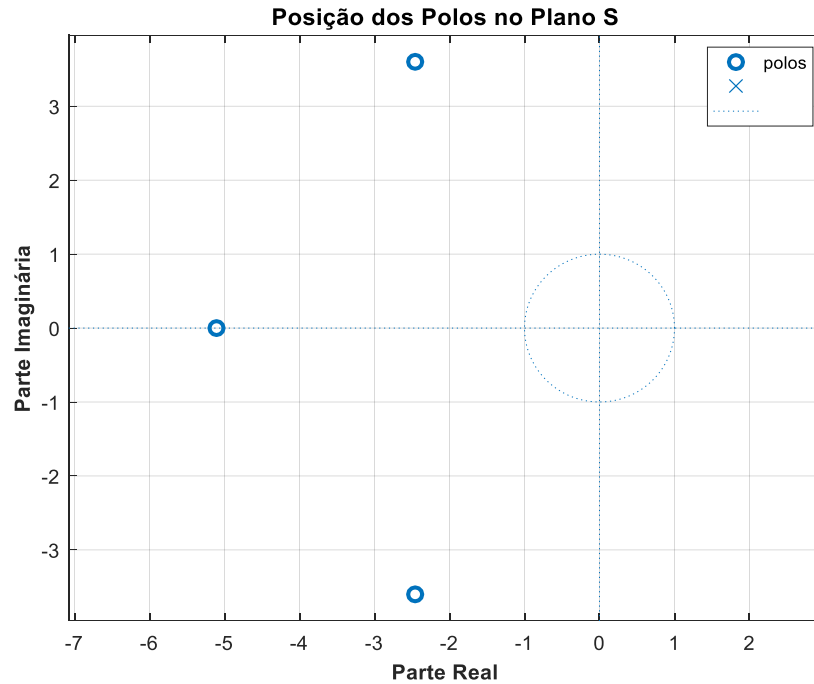


Figura 3.7. Polos de malha fechada para altitude no plano S .

$$\tilde{\mathbf{A}}_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -g \\ g & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Consequentemente, o vetor de saída e o sinal de controle são, respectivamente:

$$\tilde{\mathbf{y}}_{xy} = [\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{d}_x \ \mathbf{d}_y]^T \quad (3.56)$$

$$\mathbf{u}_{xy} = [\phi \ \theta]^T \quad (3.57)$$

As matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} selecionadas para o controle das posições x e y são dadas abaixo:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{xy} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32,82 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32,82 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{R}_{xy} = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

A matriz de ganho $\mathbf{K}_{e_{xy}}$ e o ganhos integrais para as posições x e y podem então ser obtidos:

$$\tilde{K}_{xy} = \begin{bmatrix} -1,01 \times 10^{-13} & -340,28 \\ 340,28 & -1,49 \times 10^{-12} \\ 3,78 \times 10^{-15} & -57,89 \\ 57,89 & -3,78 \times 10^{-15} \\ -2,34 \times 10^{-12} & 1000 \\ -1000 & 4,91 \times 10^{-12} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

A Tabela 3.4 mostra os polos de malha fechada da matriz de feedback para o controle de atitude dado pela Equação 3.23. Note-se que todos os polos se localizam no lado esquerdo do semi-plano s , como é possível observar na Figura 3.9.

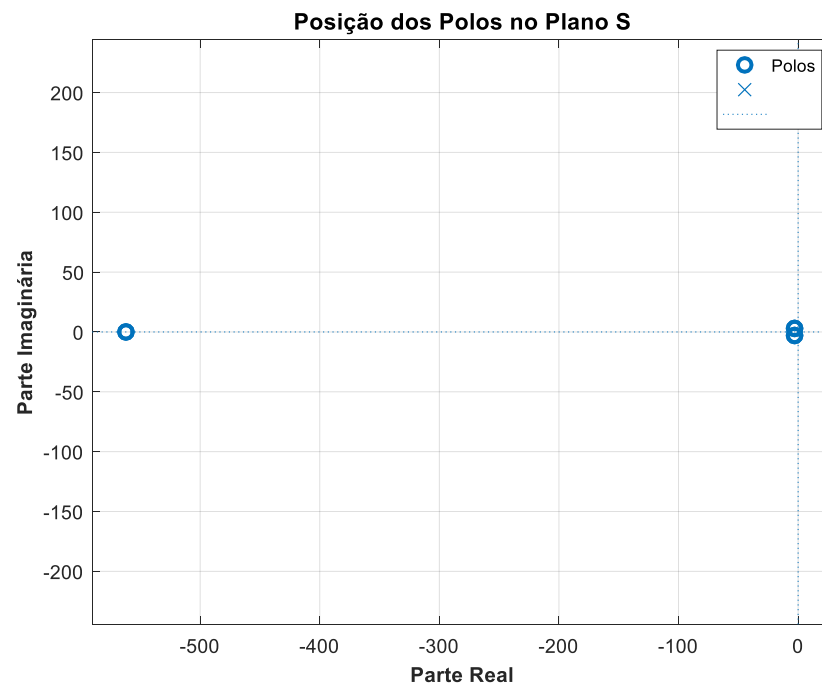


Figura 3.9. Polos de malha fechada para as posições X e Y no plano S .

Tabela 3.4: Polos de malha fechada para as posições X e Y .

Polos
$-562,07 + 0i$
$-562,07 + 0i$
$-2,95 + 2,95i$
$-2,95 - 2,95i$
$-2,95 + 2,95i$
$-2,95 - 2,95i$

O diagrama de blocos para essa parte da simulação é apresentado na Figura 3.10.

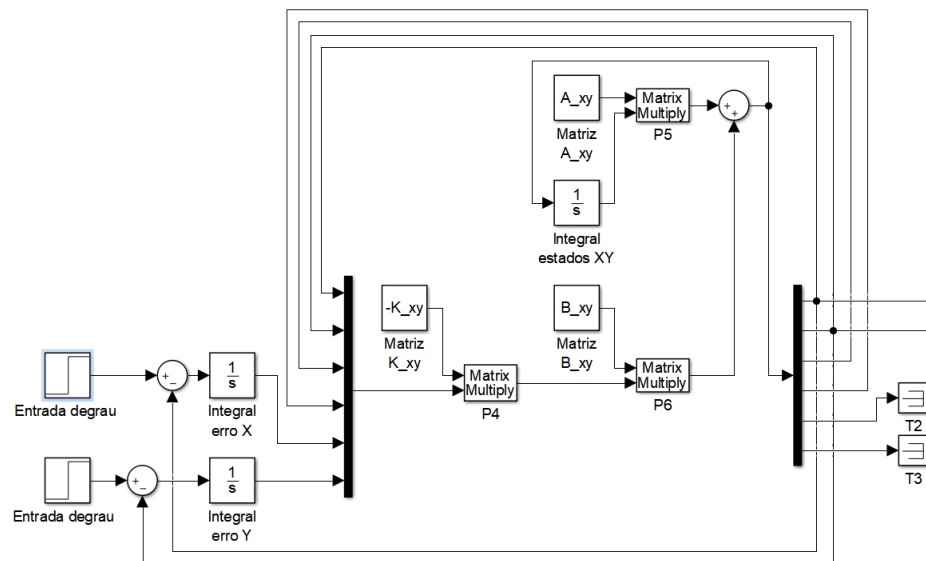


Figura 3.10: Diagrama de blocos para a simulação das posições X e Y realizado no Matlab/Simulink.

4. RESULTADOS

Foram simuladas diferentes respostas do quadrirotor para entradas degrau, rampa, senoidal e trajetórias distintas. Embora o controlador seja linear, também foi analisado o modelo não linear do sistema.

4.1. Características do quadrirotor

As características do quadrirotor simulado são mostradas na Tabela 4.1 (DA SILVA, A. L. 2012).

Tabela 4.1: Características do quadrirotor.

Parâmetro	Valor
Massa (m)	1,03 Kg
Braço de momento (l)	0,26 m
Momento principal de inércia eixo X (I_{xx})	$16,83 \times 10^{-3} \text{ Kg m}^2$
Momento principal de inércia eixo Y (I_{yy})	$16,83 \times 10^{-3} \text{ Kg m}^2$
Momento principal de inércia eixo Z (I_{zz})	$28,34 \times 10^{-3} \text{ Kg m}^2$
Constante de força (K_f)	$1,4351 \times 10^{-5} \text{ N/(rad/s)}^2$
Constante de torque (K_m)	$2,4086 \times 10^{-7} \text{ Nm/(rad/s)}^2$
Momento inércia conjunto rotor, eixo e hélice (J_r)	$5 \times 10^{-5} \text{ Kg m}^2$
Velocidade nominal de rotação dos motores (Ω)	250 rad/s

4.2. Respostas a entrada degrau

O desempenho em regime transitório de um sistema pode ser avaliado, em geral, pela resposta temporal do sistema a uma entrada do tipo degrau (OGATA, K. 2011). Uma resposta típica a um degrau unitário é apresentada na Figura 4.1.

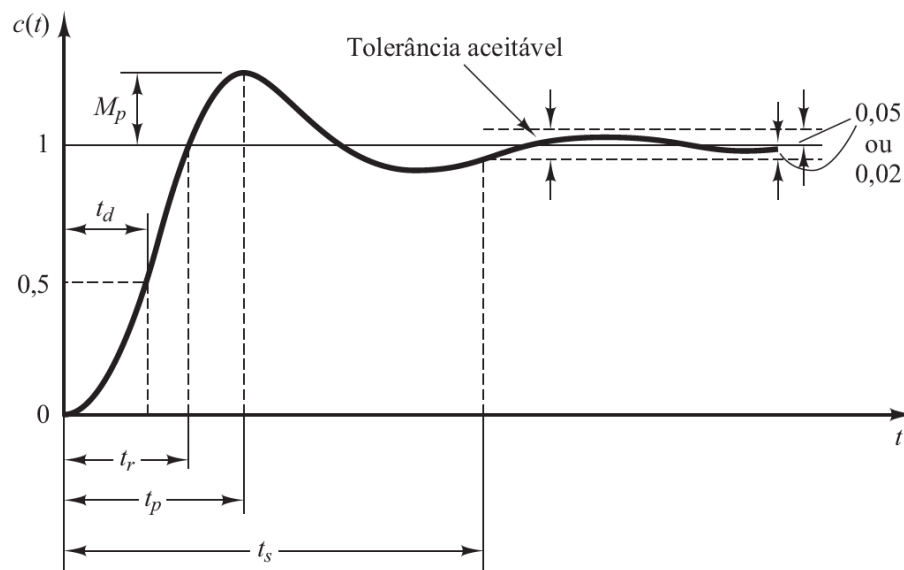


Figura 4.1: Curva de resposta a uma entrada em degrau unitário. (Extraído de OGATA, K. 2011).

O desempenho do sistema é avaliado pelo valor das seguintes grandezas:

t_d (tempo de atraso)	Tempo necessário para que a resposta alcance metade de seu valor final pela primeira vez.
t_r (tempo de subida)	Tempo necessário para que a resposta passe de 10% a 90%, ou de 5% a 95%, ou de 0% a 100% do valor final.
t_p (tempo de pico)	Tempo para que a resposta atinja o primeiro pico de sobressinal.
M_p (porcentagem de máximo sobressinal)	Valor máximo de pico da curva de resposta, medido a partir do valor final do sinal de referência.
t_s (tempo de acomodação)	Tempo necessário para que a curva de resposta alcance valores em uma faixa (geralmente 2% ou 5%) próxima do valor final.

4.2.1. Atitude

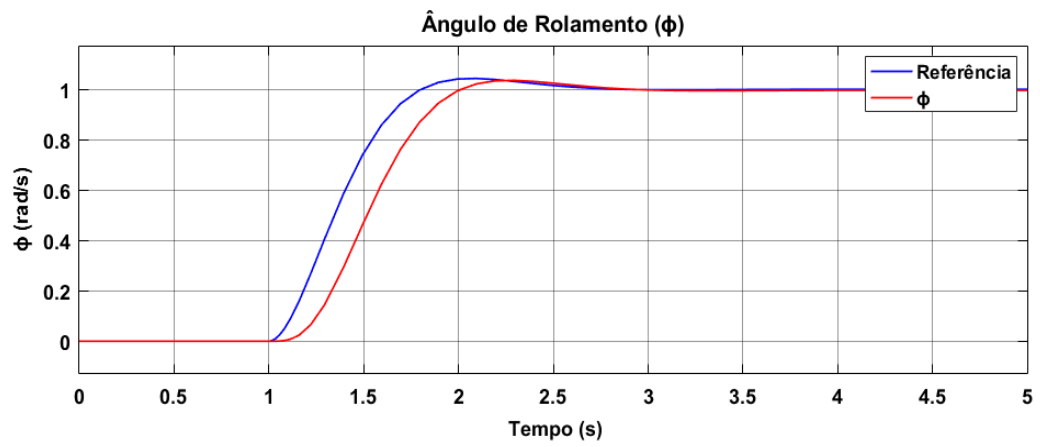


Figura 4.2: Resposta do ângulo ϕ ao degrau unitário.

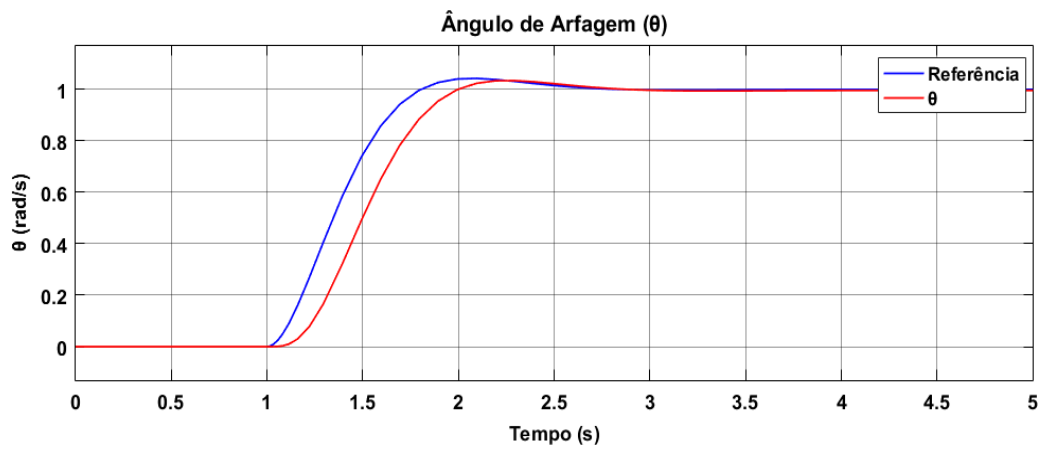


Figura 4.3: Resposta do ângulo θ ao degrau unitário.

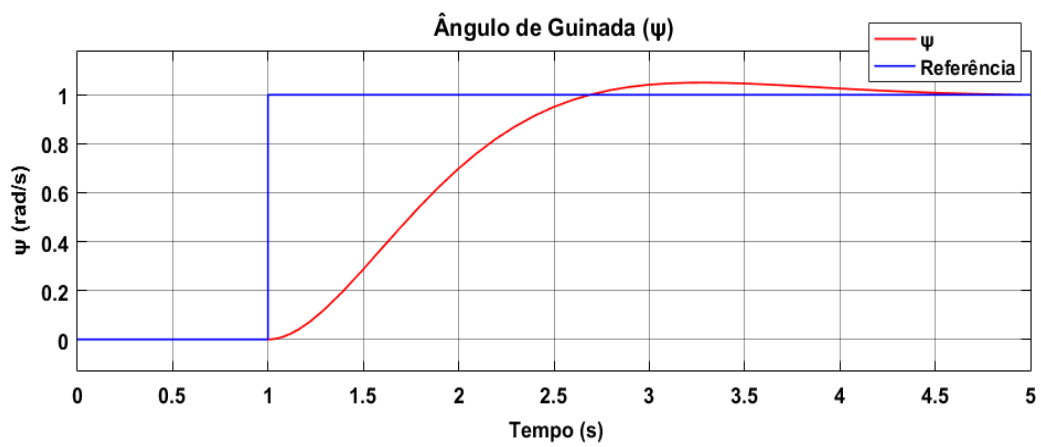


Figura 4.4: Resposta do ângulo ψ ao degrau unitário.

4.2.2. Altitude

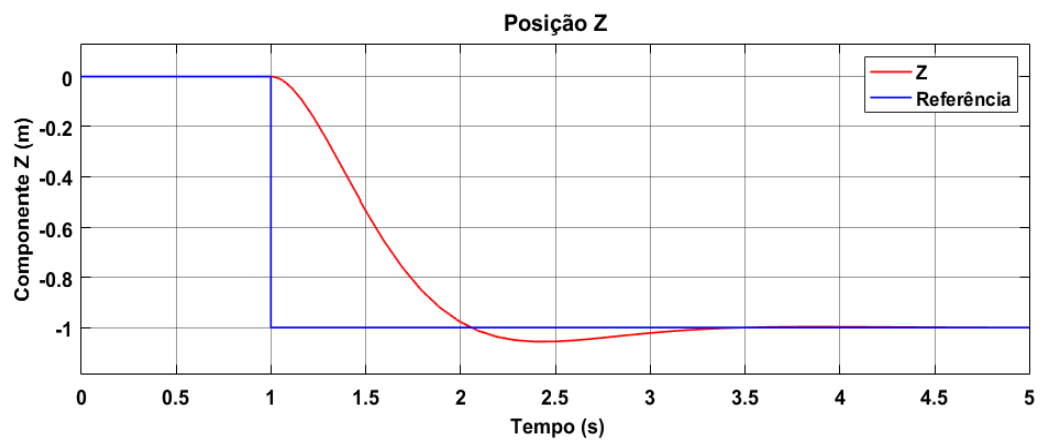


Figura 4.5: Resposta da coordenada Z ao degrau unitário.

4.2.3. Posições X e Y

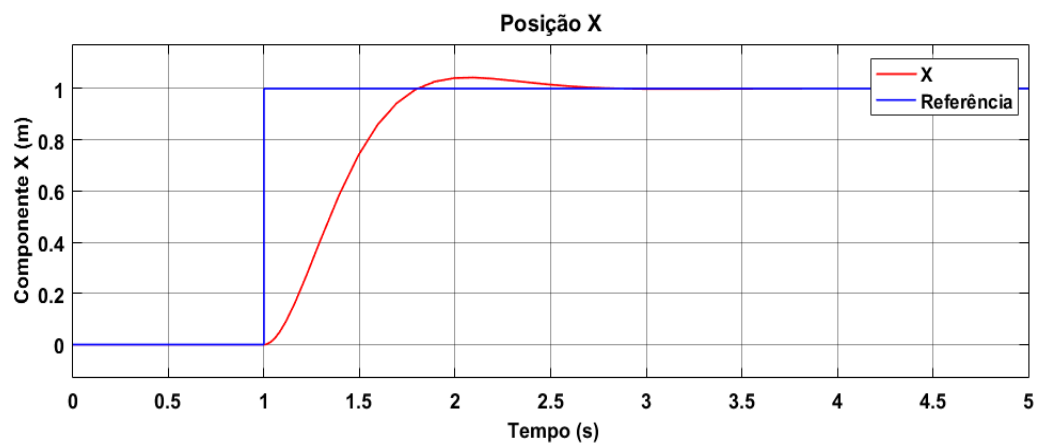


Figura 4.6: Resposta da coordenada X ao degrau unitário.

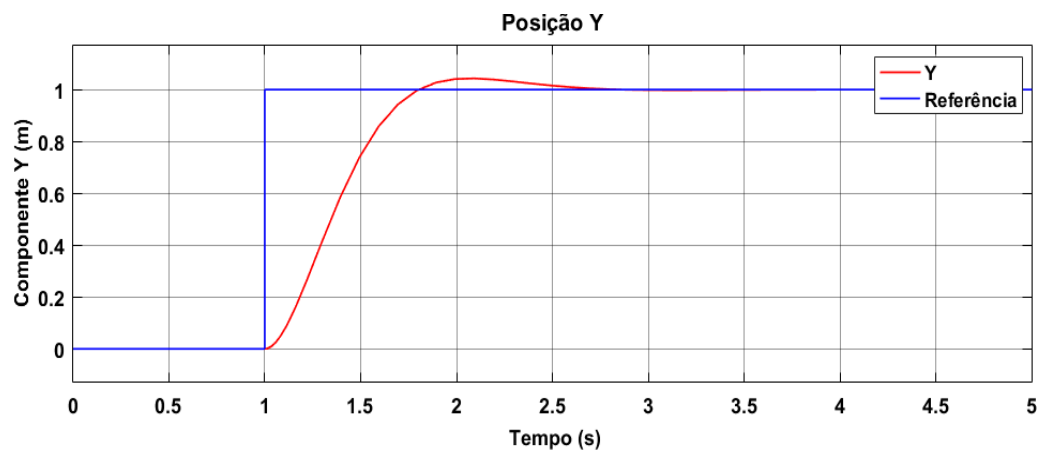


Figura 4.7: Resposta da coordenada Y ao degrau unitário.

4.2.4. Resumo dos resultados – entrada degrau

De maneira resumida, os valores obtidos para a entrada degrau são mostrados na Tabela 4.2. O tempo de acomodação é baseado em 2% do valor final.

Tabela 4.2: Resultados para entrada degrau.

Componente	Tempo de atraso (s)	Tempo de subida (s)	Tempo de pico (s)	Máximo sobressinal (%)	Tempo de acomodação (s)
ϕ	0,65	1,02	1,30	3,38	1,55
θ	0,66	1,03	1,33	3,28	1,54
ψ	1,16	1,72	2,32	4,76	3,14
x	0,54	0,8	1,07	4,24	1,45
y	0,54	0,8	1,07	4,26	1,46
z	0,67	1,06	1,35	4,92	3,02

4.3. Resposta a entrada rampa

O sinal de entrada em rampa é obtido integrando-se a entrada em degrau, para um sistema linear invariante no tempo (DORF, R.C. 2001). Uma resposta típica a entrada em rampa é apresentada na Figura 4.8, com T sendo uma constante de tempo.

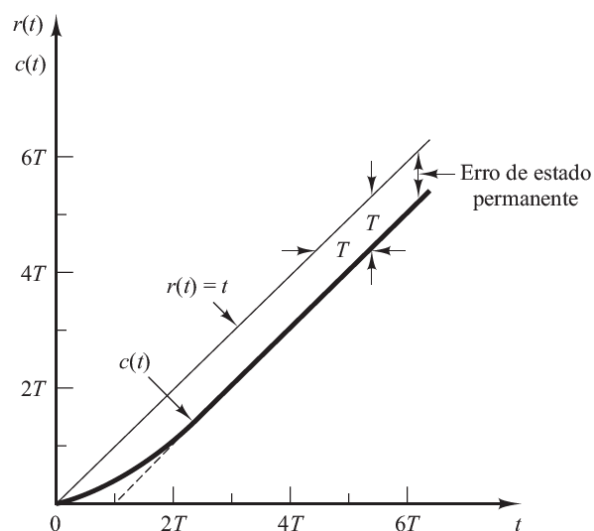


Figura 4.8: Curva de resposta a uma entrada em rampa. (Extraído de OGATA, K. 2011).

4.3.1. Atitude

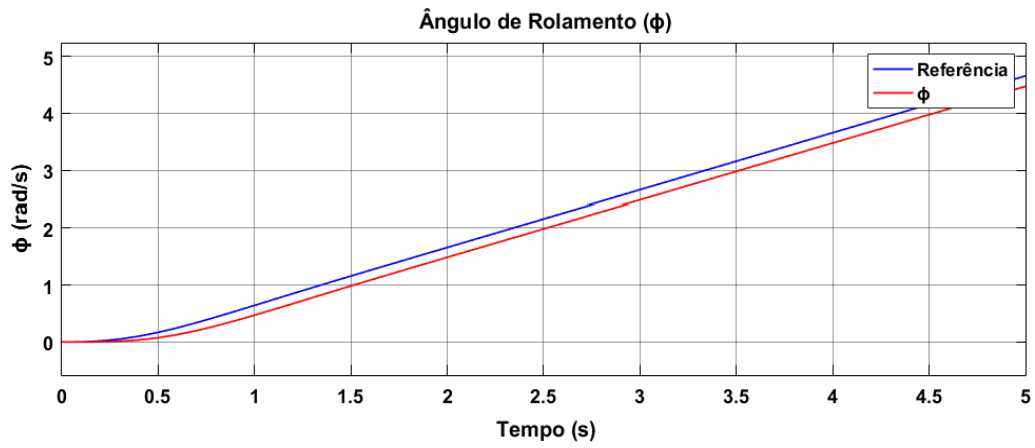


Figura 4.9: Resposta do ângulo ϕ a rampa unitária.

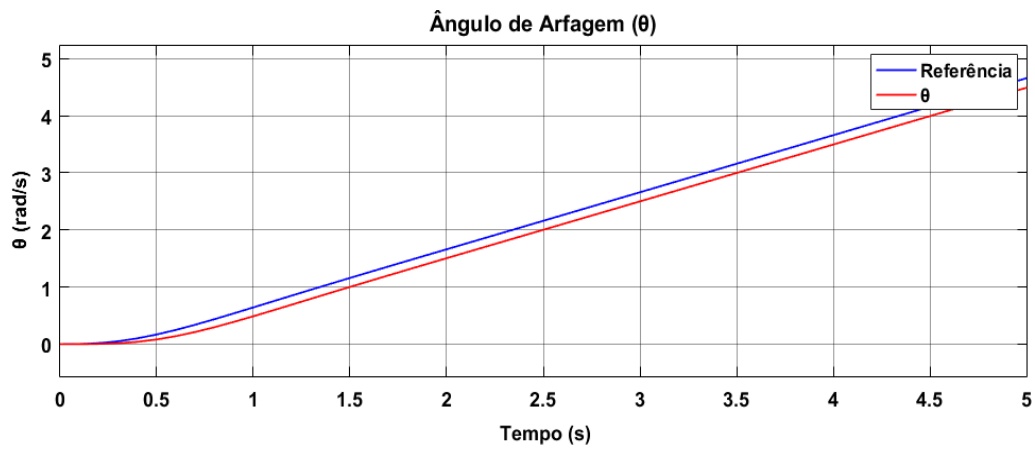


Figura 4.10: Resposta do ângulo θ a rampa unitária.

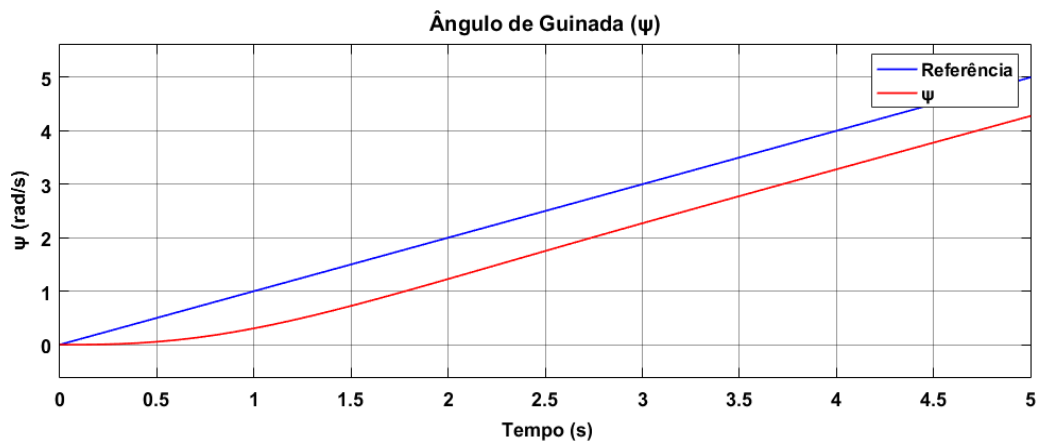


Figura 4.11: Resposta do ângulo ψ a rampa unitária.

4.3.2. Altitude

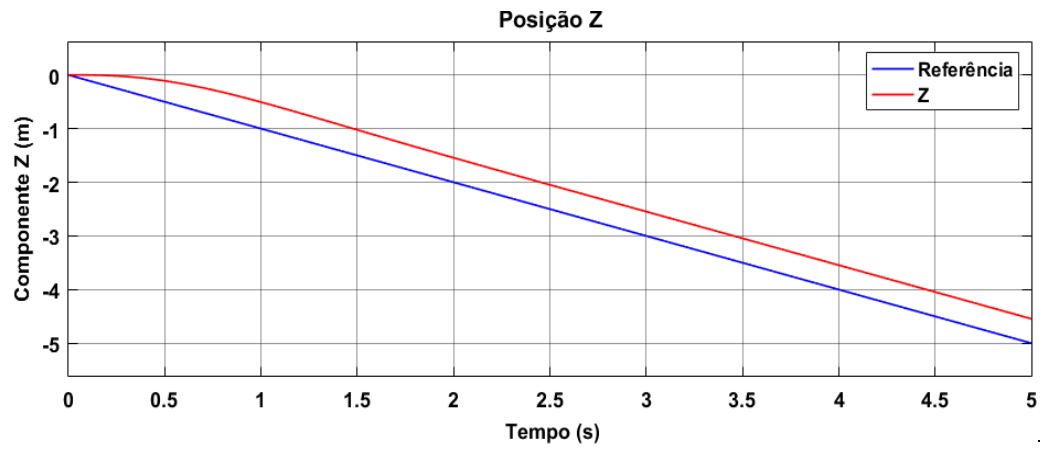


Figura 4.12: Resposta da coordenada Z a rampa unitária.

4.3.3. Posições X e Y

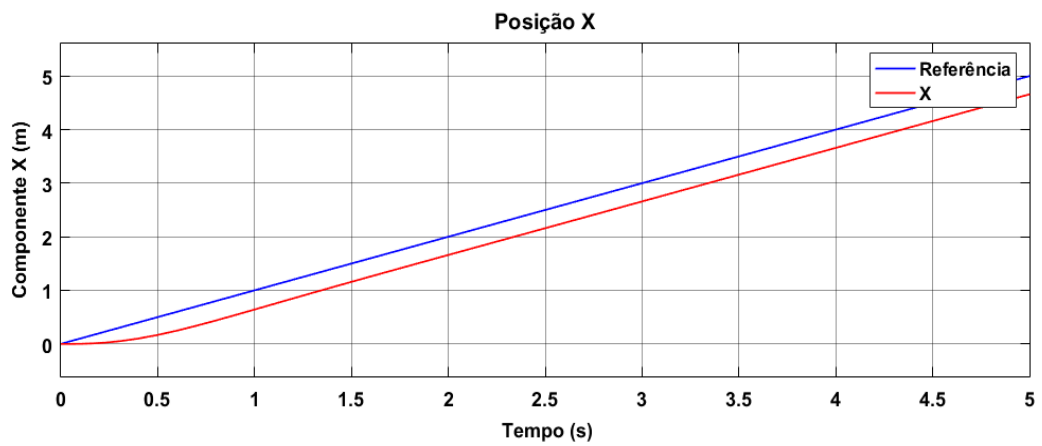


Figura 4.13: Resposta da coordenada X a rampa unitária.

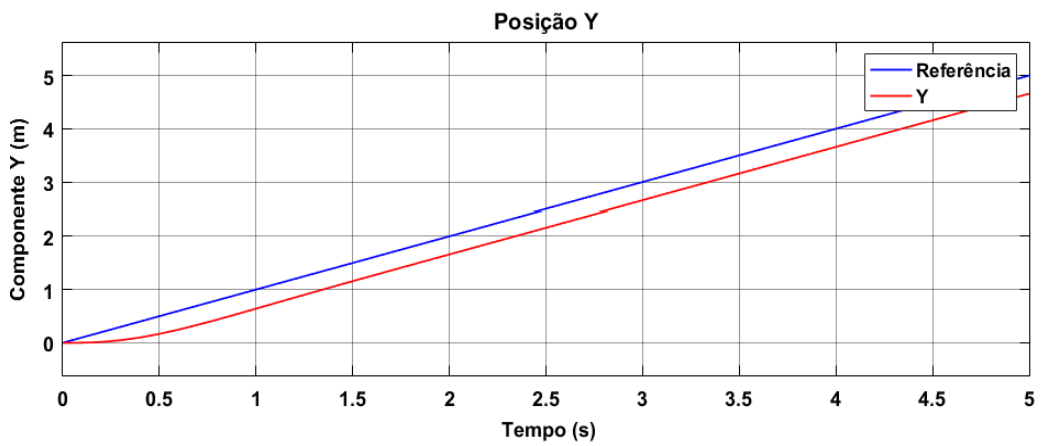


Figura 4.14: Resposta da coordenada Y a rampa unitária.

4.3.4. Resumo dos resultados – entrada em rampa

De maneira resumida, os valores obtidos para a entrada em rampa são mostrados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Resultados para entrada em rampa.

Componente	Erro estado estacionário – Constante T (s)
ϕ	0,21
θ	0,19
ψ	0,72
x	0,34
y	0,34
z	0,45

4.4. Resposta a entrada senoidal

Para um sistema linear estável e invariante no tempo submetido a uma entrada de referência senoidal, a saída do sistema também será senoidal, porém pode ter amplitude e fase diferente da entrada, como mostra a Figura 4.15 (NISE, N.S. 2012).

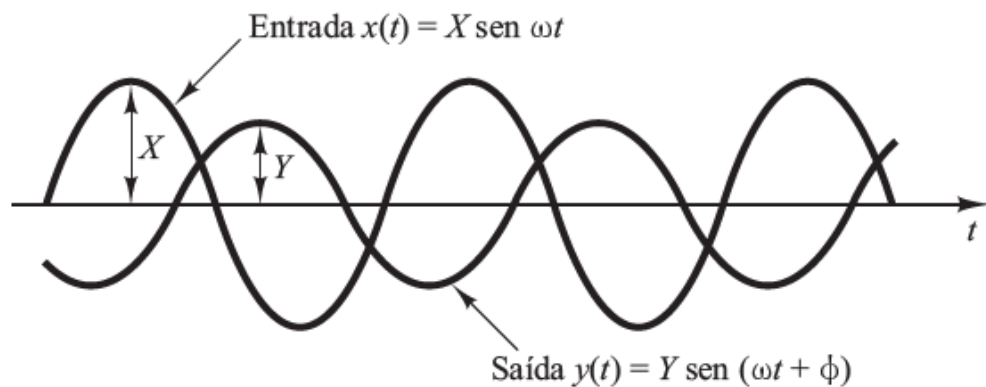


Figura 4.15: Curva de resposta a uma entrada senoidal. (Extraído de OGATA, K. 2011).

4.4.1. Atitude

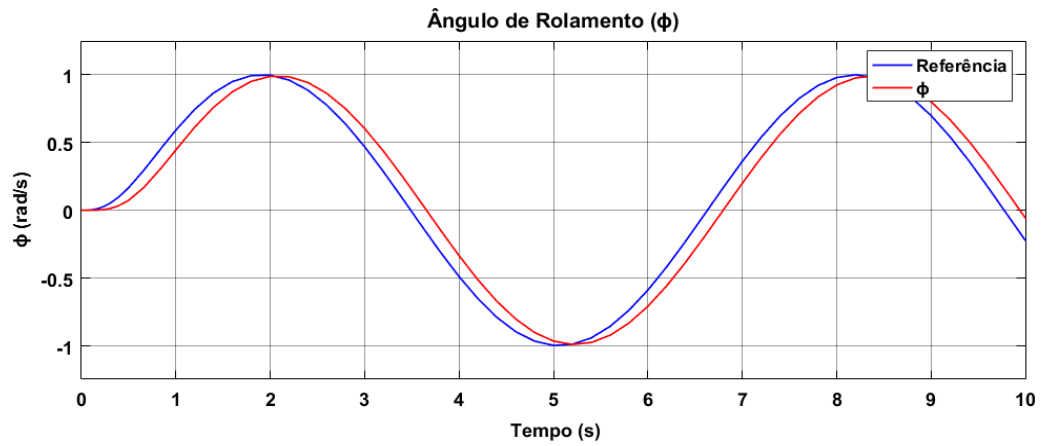


Figura 4.16: Resposta do ângulo ϕ a entrada senoidal.

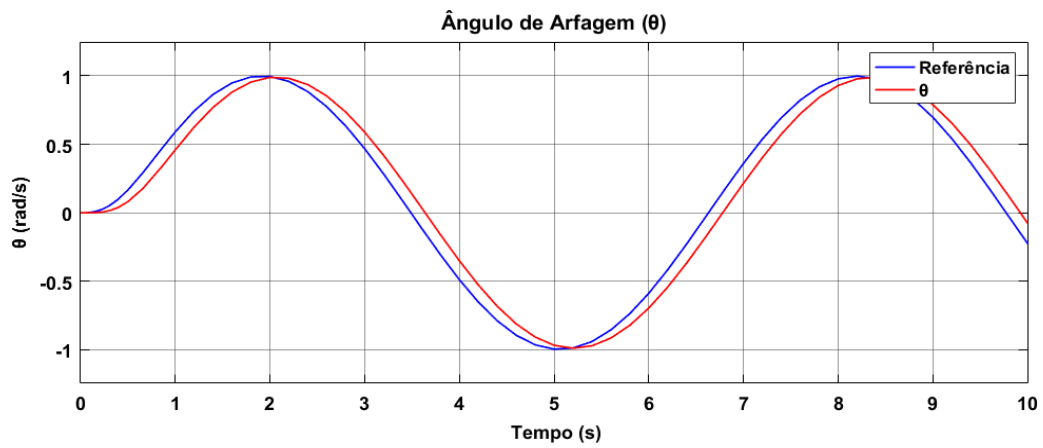


Figura 4.17: Resposta do ângulo θ a entrada senoidal.

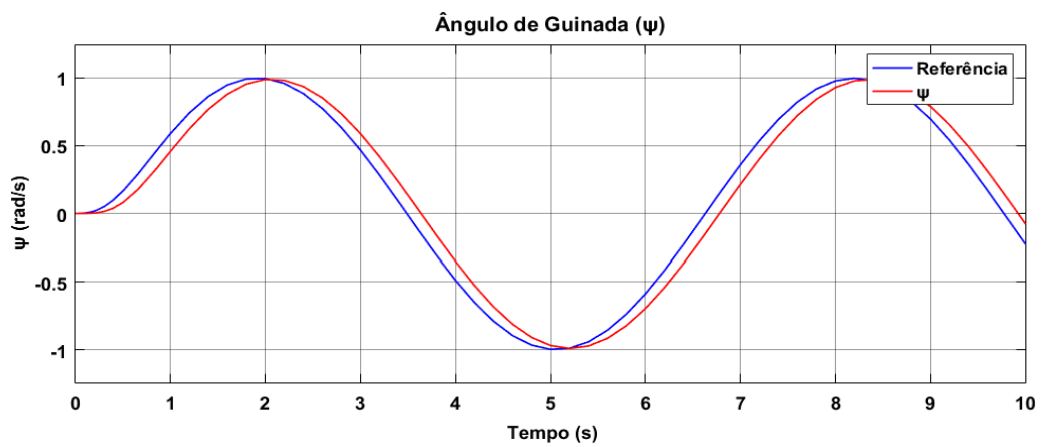


Figura 4.18: Resposta do ângulo ψ a entrada senoidal.

4.4.2. Altitude

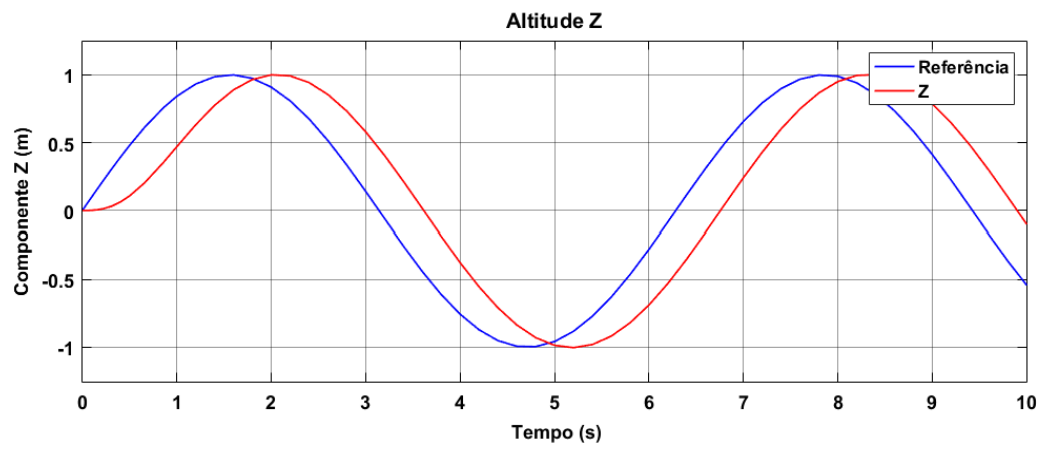


Figura 4.19: Resposta da coordenada Z a entrada senoidal.

4.4.3. Posições X e Y

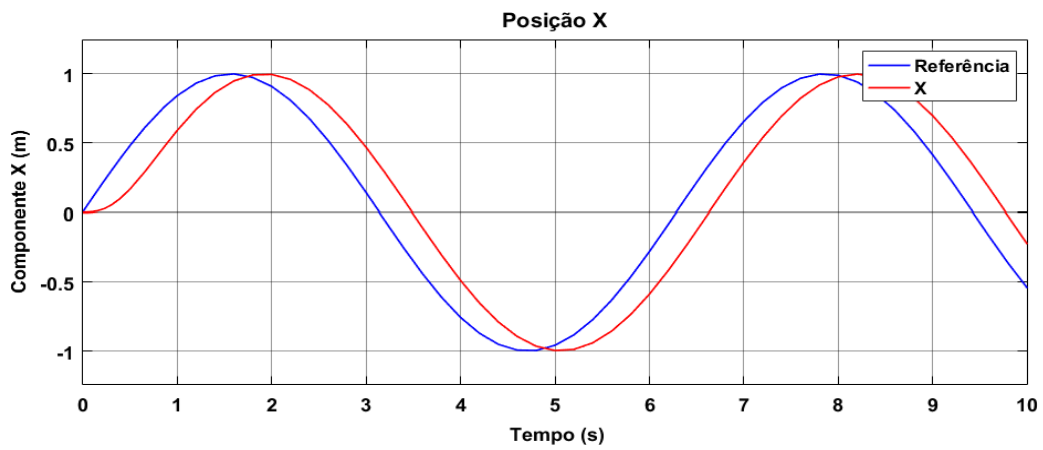


Figura 4.20: Resposta da coordenada X a entrada senoidal.

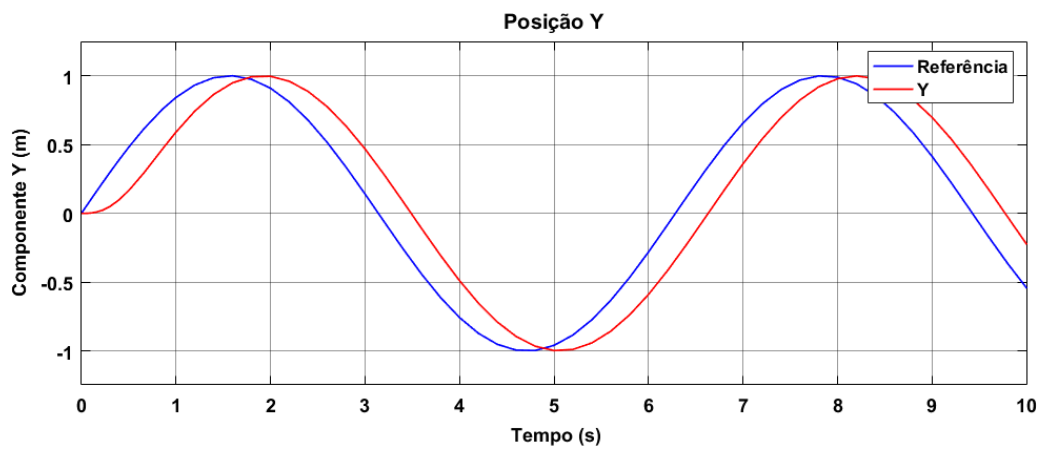


Figura 4.21: Resposta da coordenada Y a entrada senoidal.

4.4.4. Resumo dos resultados – entrada senoidal

De maneira resumida, os valores obtidos para a entrada senoidal são mostrados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4: Resultados para entrada senoidal.

Componente	Razão amplitude saída e entrada	Diferença de fase (rad)
ϕ	0,68	0,21
θ	0,72	0,21
ψ	0,1	0,76
x	0,55	0,32
y	0,55	0,31
z	0,37	0,54

4.5. Trajetória circular, helicoidal e helicoidal complexa

O sistema também foi submetido a entradas aleatórias do tipo circular, helicoidal e helicoidal complexa. Para a trajetória circular, os sinais de referência são dados pela Equação 4.1 e a resposta apresentada na Figura 4.22.

$$\begin{cases} x = \text{sen}(0,1t) \\ y = \text{sen}\left(0,1t + \frac{\pi}{2}\right) \\ z = -20t \end{cases} \quad (4.1)$$

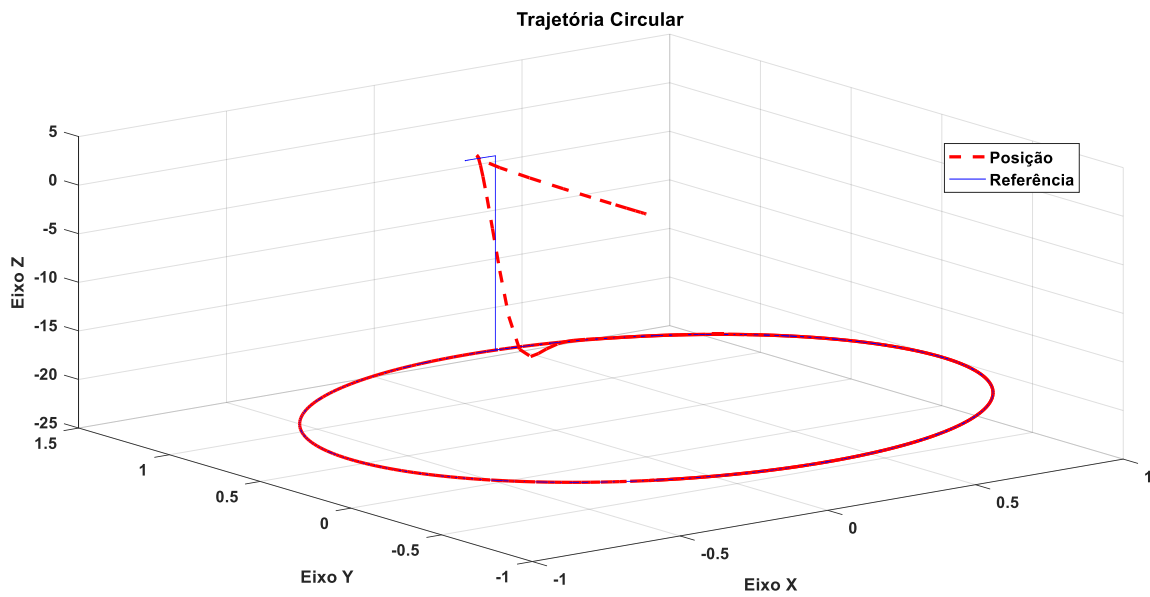


Figura 4.22: Posição em trajetória circular.

Para a trajetória helicoidal, os sinais de referência são dados pela Equação 4.2 e a resposta apresentada na Figura 4.23.

$$\begin{cases} x = \text{sen}(0.1t) \\ y = \text{sen}\left(0.1t + \frac{\pi}{2}\right) \\ z = -0,3t \end{cases} \quad (4.2)$$

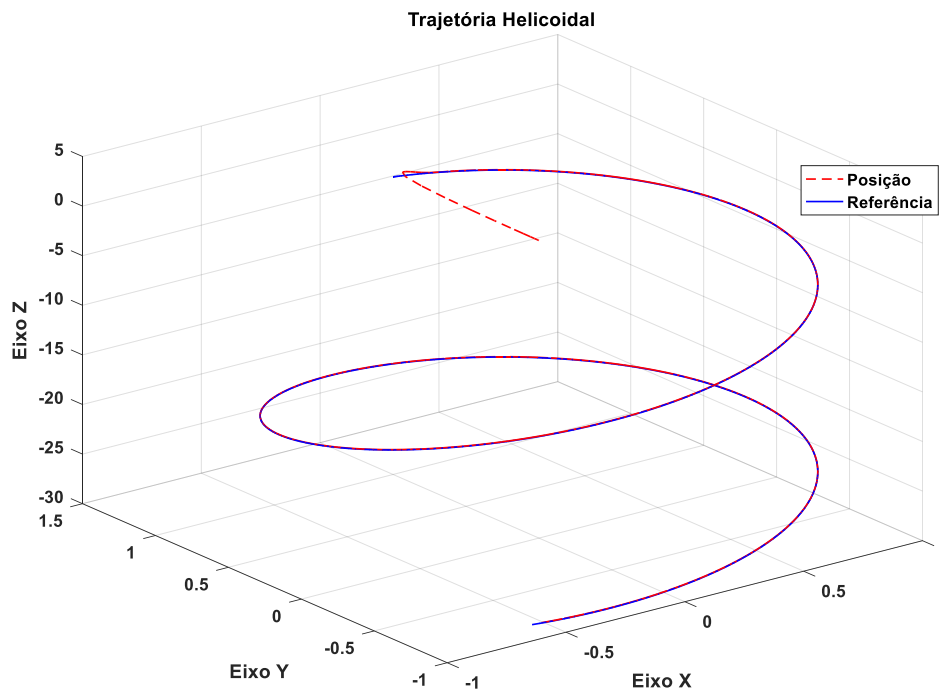


Figura 4.23: Posição em trajetória helicoidal.

Por fim, para a trajetória helicoidal complexa os sinais de referência são dados pela Equação 4.3 e a resposta apresentada na Figura 4.24.

$$\begin{cases} x = \text{sen}\left(0,05t + \frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}^3\left(0,05t + \frac{\pi}{2}\right) \\ y = \text{sen}(0,05t) - \text{sen}^3(0,05t) \\ z = -0,3t \end{cases} \quad (4.3)$$

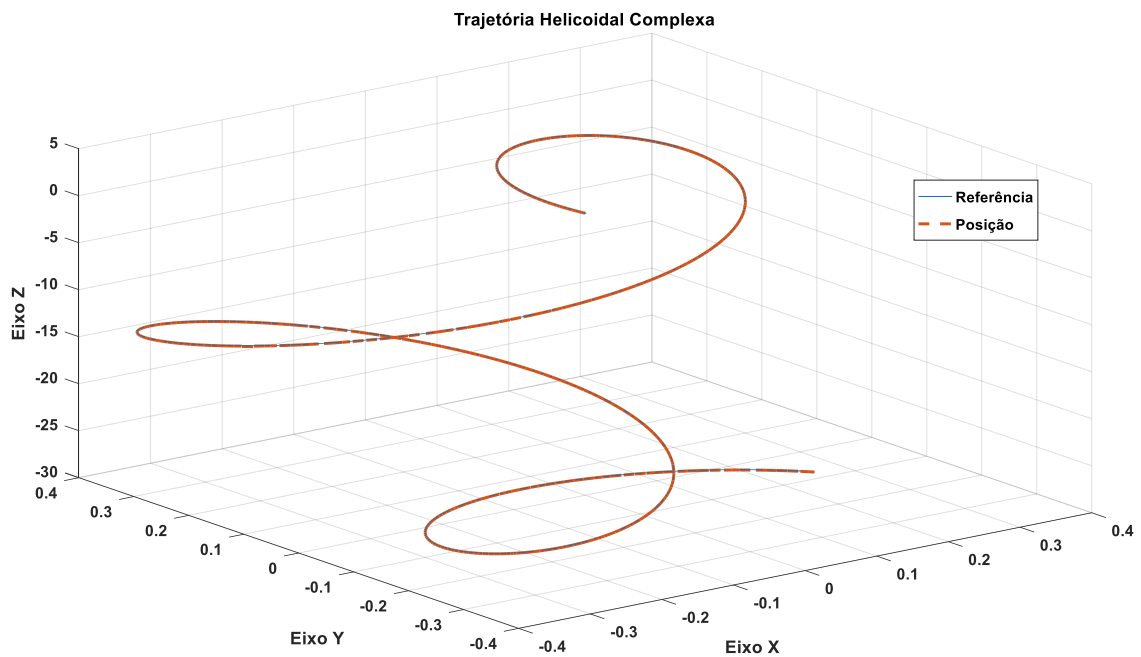


Figura 4.24: Posição em trajetória helicoidal complexa.

5. CONCLUSÕES

As seções anteriores mostraram a performance do controlador LQR com efeito integral aplicado ao modelo linearizado do quadrirotor. A validação do modelo e aplicação da técnica linear de controle foram realizadas no software Matlab / Simulink.

As simulações mostraram, como previsto, que as especificações de performance são atendidas escolhendo-se de maneira adequada as matrizes de peso \mathbf{Q} e \mathbf{R} . A regra de Bryson deu os valores iniciais de teste para essas matrizes.

No regime transiente e entrada de referência degrau o máximo sobressinal obtido foi de 4,92%, o que está de acordo com as premissas de projeto impostas na Seção 3.4. Para as entradas em rampa e senoidal o sistema se comportou de maneira estável e dentro de bons limites de operação.

No regime estacionário e entrada de referência degrau o erro de estado estacionário é nulo, como previsto com a implementação da parte integral do controlador.

De maneira geral, o controlador LQR com efeito integral forneceu estabilidade e boa performance ao sistema em todos os pontos de operação, o que pode ser notado nas Figuras 4.22, 4.23 e 4.24 para as trajetórias circular, helicoidal e helicoidal complexa.

Para trabalhos futuros, sugere-se implementar o controle estudado em um quadrirotor real, obtendo-se dados em tempo real para validação do modelo e simulação.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMIR, M.; ABBASS, V. Modeling of quadrotor helicopter dynamics. In: IEEE. Smart Manufacturing Application, 2008. ICSMA 2008. International Conference on. Gyeonggi-do, Korea, 2008. p. 100{105. Doi:10.1109/ICSMA.2008.4505621.

BOLANDI, H., REZAEI, M., MOHSENIPOUR, R. NEMATI, H., SMAILZADEH, S. M. Attitude Control of a Quadrotor with Optimized PID Controller. Intelligent Control and Automation, 2013, 4, 335-342.

BOUABDALLAH, S. Design and control of quadrotors with application to autonomous flying. École Polytechnique Fédérale de Lausanne. Thèse n° 3727 – 2007.

CORON, J-M. Control and nonlinearity. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data. Mathematical surveys and monographs, ISSN 0076-5376; v.136 - 1956.

DA SILVA, A. L. Voo autônomo de veículo aéreo não tripulado tipo quadrirotor / André Luís da Silva. Universidade de São Paulo, Escola Politécnica – Departamento de Telecomunicações e Controle. Relatório de Pós Doutorado – 2012.

DORF, R.C., BISHOP, R. H., Sistemas de controle modernos. 8ª edição. Rio de Janeiro, RJ : LTC, 2001.

HOFFMANN, G. et al. Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment. In: AIAA (Ed.). AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit. Hilton Head, South Carolina: [s.n.], 2007. AIAA-2007-6461.

ISMAIL, N. A., OTHMAN, N. L., ZAIN, Z.M., PEBRIANTI, D., BAYUAJI, L. Attitude control of quadrotor. ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences – 2015.

OGATA, K. Engenharia de Controle Moderno – 5ª edição. São Paulo, SP : Pearson Education do Brasil, c.2011.

MALKAPURE, H. G., CHIDAMBARAM, M. Comparison of two methods of incorporating an integral action in linear quadratic regulator. Third International Conference on Advances in Control and Optimization of Dynamical Systems March 13-15, 2014.

NAIDU, D. S. (Desineni S.) – Optimal control systems / by Desineni Subbaram Naidu. P. cm. – (Electrical engineering textbook series). 1940.

NISE, N.S. Engenharia de sistemas de controle. 6ª edição. Rio de Janeiro, RJ : LTC, c2012.

SÁ, R. C. Construção, modelagem dinâmica e controle PID para estabilidade de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadrirotor. Universidade Federal do Ceará, Departamento de Engenharia de Teleinformática. Programa de Pós-Graduação / Rejane Cavalcante Sá. – 2012.

SABATINO, F. Quadrotor control: modeling, nonlinear control design and simulation. Master's Degree Project. KTH Electrical Engineering. Francesco Sabatino – 2015.

SIDI, M. J. Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

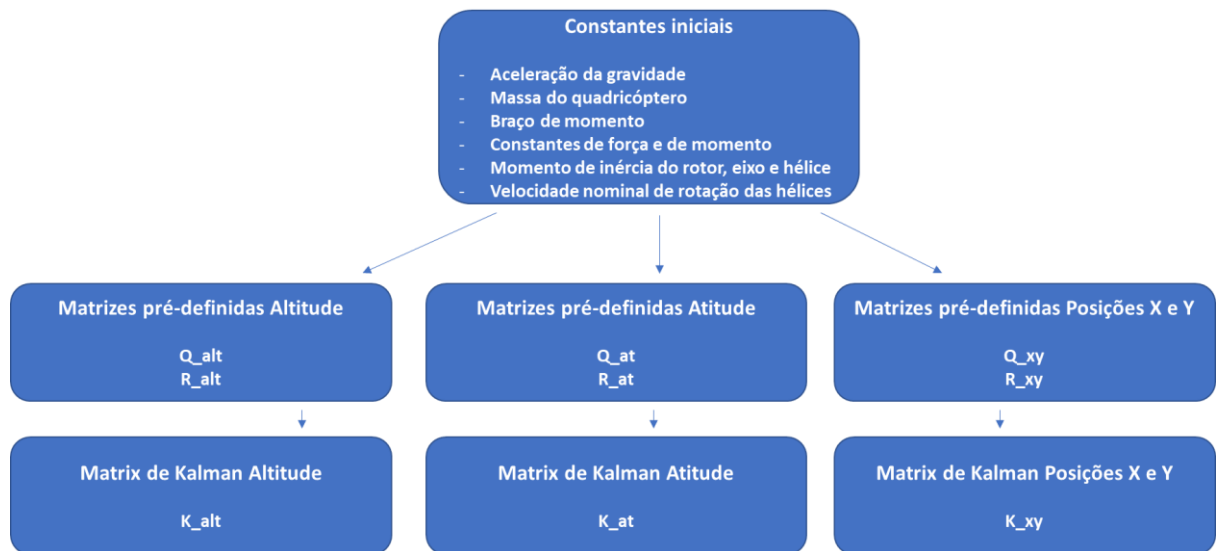
SOUSA, H. L. Sensoriamento Remoto com VANTs: uma nova possibilidade para a aquisição de geoinformações. R. bras. Geom., Curitiba, v. 5, n. 3, p. 326-342, jul/set. 2017. Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbgeo>>. Acesso em: 01/10/2018.

SUBBARAO, K., DAS, A., K., LEWIS, F. Dynamic inversion with zero-dynamics stabilization for quadrotor control. Control Theory & Applications, IET, 3(3):303–314, 2009.

WATT, A., WATT, M. Advanced animation and rendering techniques – theory and practice – ACM Press, New York - 1992.

7. ANEXOS

O código a seguir, criado no Matlab, realiza o carregamento das constantes e obtenção dos valores de interesse. O fluxograma abaixo ilustra a lógica utilizada.



```

clear all
clc

%%Constantes iniciais

%Aceleração da gravidade
g = 9.81; %m/s^2

%Momentos de inércia dos eixos x, y e z, respectivamente
Ixx = 0.01683;
Iyy = 0.01638;
Izz = 0.02834;

%Massa
m = 1.03; %kg

%braço de momento
l = 0.26; %m

%Constante de força
kf = 0.000014351;

%Constante de momento
km = 0.00000024086;

%Momento de inércia do conjunto rotor, eixo e hélice
Jr = 5*10^-5;
  
```

```

%Velocidade nominal de rotação
omega = 250;

%%Matrizes LQR

%Altitude
A_alt = [0 1 0
         0 0 0
         -1 0 0];

B_alt = [0
         -1/m
         0];

C_alt = [1 0 0];

D_alt = [0;0;0];

Q_alt = diag([1/(1000)^2 1/(10/3.6)^2 1/(1*0.1)^2]);

R_alt = diag([1/(10^2)]);

%Matriz de feedback K para altitude
[K_alt,P_alt,e_alt]=lqr(A_alt,B_alt,Q_alt,R_alt);

%Atitude
A_at = [0 0 0 -g 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 g 0 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 -Jr*omega/Ixx 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 Jr*omega/Iyy 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0];

B_at = [0 0 0
        0 0 0
        0 0 0
        0 0 0
        1/Ixx 0 0
        0 1/Iyy 0
        0 0 1/Izz
        0 0 0
        0 0 0
        0 0 0];

```

```

Q_at = diag([1/(10/3.6)^2 1/(10/3.6)^2 1/(pi*10/180)^2
1/(pi*10/180)^2 1/(pi*360/180)^2 1/(pi)^2 1/(pi)^2 1/(pi)^2
1/(pi*10*0.1/180)^2 1/(pi*10*0.1/180)^2
1/(pi*360*0.1/180)^2]);

R_at = diag([1/(2^2) 1/(10^2) 1/(1^2)]);

%%Matriz de feedback K para attitude
[K_at,P_at,e_at]=lqr(A_at,B_at,Q_at,R_at);

%%Posição XY
A_xy = [0 0 1 0 0 0
        0 0 0 1 0 0
        0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0
        -1 0 0 0 0 0
        0 -1 0 0 0 0];

B_xy = [0 0
        0 0
        0 -g
        g 0
        0 0
        0 0];

Q_xy = diag([1/(100)^2 1/(100)^2 1/(pi*10/180)^2
1/(pi*10/180)^2 1/(1*0.01)^2 1/(1*0.01)^2]);

R_xy = diag([1/(10)^2 1/(10)^2]);

%%Matriz de feedback K para as posições x e y
[K_xy,P_xy,e_xy]=lqr(A_xy,B_xy,Q_xy,R_xy);

```