Resumo Notação O, Ω e Θ

Rodrigo Richard Gomes

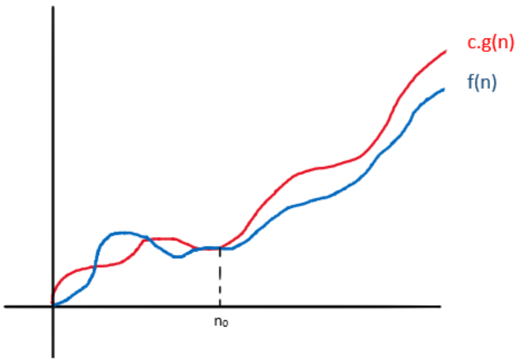
Agosto/2022

1 Notação O

- Limite assintótico superior
- A notação O indica limite superior. Logo, se uma função é $O(n^2)$, ela também será limitada assintoticamente por funções de graus superiores.
- $f(n) = O(g(n))$ significa que $f(n)$ **cresce NO MÁXIMO tão rapidamente quanto** $g(n)$.
- $g(n)$ é um limite superior assintótico para $f(n)$.
- $f(n)$ pode atingir $g(n)$, mas nunca ultrapassá-la.
- Significa que $g(n)$ limita $f(n)$ por cima.

$$O(g(n)) = \{f(n) | \exists\, c > 0, n_0 > 0, \quad 0 \leq f(n) \leq c.g(n) \quad \forall n \geq n_0\} \tag{1}$$

Figura 1: $f(n)$ limitada assintoticamente por $O(g(n))$



1.1 Exemplo 1

Prove que $n^2 + 10 = O(n^2)$

- $f(n) = n^2 + 10$
- $g(n) = n^2$
- $c = 2$

Agora precisamos descobrir um valor para n_0 que valida a inequação $0 \leq n^2 + 10 \leq 2n^2$.

- $n_0 = 1 : 0 \leq 11 \leq 2$ (falso)
- $n_0 = 2 : 0 \leq 14 \leq 8$ (falso)
- $n_0 = 3 : 0 \leq 19 \leq 18$ (falso)
- $n_0 = 4 : 0 \leq 26 \leq 32$ (verdadeiro)

Portanto, os valores $c = 2$ e $n_0 = 4$ provam que $f(n) = n^2 + 10 = O(n^2)$.

1.2 Exemplo 2

Para cada função abaixo, identifique o limite superior O.

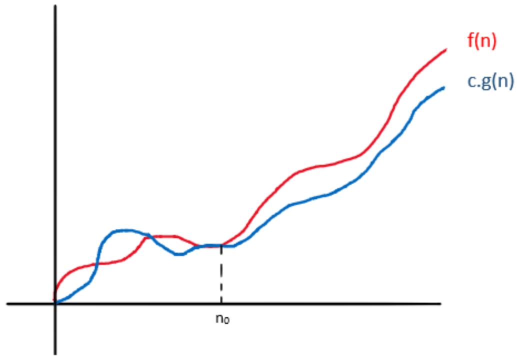
- $f(n) = 3n^2 + 1 = O(n^2)$, $O(n^3), O(2^n)$...
- $f(n) = 2n^3 + \lg n = O(n^3)$, $O(n^4), O(2^n)$...
- $f(n) = 5n \lg n + 2n = O(n \lg n)$, $O(n^2)$, $O(n^3)$, $O(2^n)$...
- $f(n) = 21 = O(1), O(\lg n), O(n), O(n \lg n)$... *Obs: As constantes não dependem do tamanho da entrada (n). Assim, convencionou-se que* $O(constante) = O(1)$
- $f(n) = \lg n + 3\ n = O(n)$, $O(n^2)$, $O(n^3)$, $O(2^n)$...
- $f(n) = \lg n + 2 = O(\lg n)$, $O(n)$, $O(n \lg n)$, $O(n^2)$, $O(n^3)$, $O(2^n)$...

2 Notação Ω

- Limite assintótico inferior
- A notação Ω indica limite inferior. Logo, se uma função é $\Omega(n^2)$, ela também será limitada assintoticamente por funções de graus inferiores.
- $f(n) = \Omega(g(n))$ significa que $f(n)$ **cresce NO MÍNIMO tão lentamente quanto** $g(n)$.
- $g(n)$ é um limite inferior assintótico para $f(n)$.
- Significa que $g(n)$ limita $f(n)$ por baixo.

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) |\, \exists\, c > 0, n_0 > 0, \quad 0 \leq c.g(n) \leq f(n) \quad \forall n \geq n_0\} \tag{2}$$

Figura 2: $f(n)$ limitada assintoticamente por $\Omega(g(n))$



2.1 Exemplo 1

Prove que $n^2 + 10 = \Omega(n^2)$

- $f(n) = n^2 + 10$
- $g(n) = n^2$
- $c = 1$

Agora precisamos descobrir um valor para n_0 que valida a inequação $0 \leq n^2 \leq n^2 + 10$.

- $n_0 = 1 : 0 \leq 1 \leq 11$ (verdadeiro)
- $n_0 = 2 : 0 \leq 4 \leq 14$ (verdadeiro)
- $n_0 = 3 : 0 \leq 9 \leq 19$ (verdadeiro)
- $n_0 = 4 : 0 \leq 16 \leq 26$ (verdadeiro)

Nesse exemplo, com $c = 1$, qualquer valor para n_0 que seja maior ou igual a zero, prova que $f(n) = n^2 + 10 = \Omega(n^2)$.

2.2 Exemplo 2

Para cada função abaixo, identifique o limite inferior Ω.

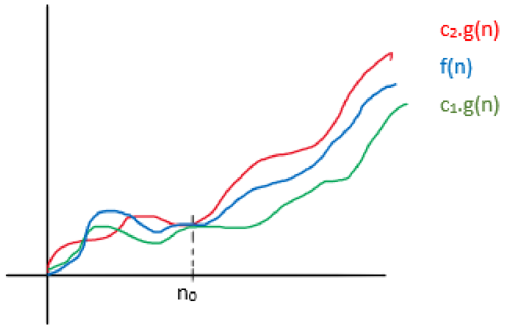
- $f(n) = 3n^2 + 1 = \Omega(n^2)$, $\Omega(n \lg n), \Omega(n)$, $\Omega(\lg n)$, $\Omega(1)$
- $f(n) = 2n^3 + \lg n = \Omega(n^3)$, $\Omega(n^2), \Omega(n)$, $\Omega(\lg n)$, $\Omega(1)$
- $f(n) = 5n \lg n + 2n = \Omega(n \lg n)$, $\Omega(n)$, $\Omega(\lg n)$, $\Omega(1)$
- $f(n) = 21 = \Omega(1)$ *Obs: As constantes não dependem do tamanho da entrada (n). Assim, convencionou-se que* $\Omega(constante) = \Omega(1)$
- $f(n) = \lg n + 3\, n = \Omega(n)$, $\Omega(\lg n)$, $\Omega(1)$
- $f(n) = \lg n + 2 = \Omega(\lg n)$, $\Omega(1)$

3 Notação Θ

- Limite assintótico justo
- $f(n) = \Theta(g(n))$ significa que $f(n)$ **cresce tão rapidamente e, ao mesmo tempo, tão lentamente quanto** $g(n)$.
- $g(n)$ é um limite assintótico restrito para $f(n)$.
- Significa que $g(n)$ limita $f(n)$ tanto por cima quanto por baixo.
- $g(n)$ limita superiormente e inferiormente $f(n)$

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) | \exists\, c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 > 0, \quad 0 \leq c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n) \quad \forall n \geq n_0\} \tag{3}$$

Figura 3: $f(n)$ limitada assintoticamente por $\Theta(g(n))$



3.1 Exemplo 1

Prove que $n^2 + 10 = \Theta(n^2)$

- $f(n) = n^2 + 10$
- $g(n) = n^2$
- $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$

Agora precisamos descobrir um valor para n_0 que valida a inequação $0 \leq n^2 \leq n^2 + 10 \leq 2n^2$.

- $n_0 = 1 : 0 \leq 1 \leq 11 \leq 2$ (falso)
- $n_0 = 2 : 0 \leq 4 \leq 14 \leq 8$ (falso)
- $n_0 = 3 : 0 \leq 9 \leq 19 \leq 18$ (falso)
- $n_0 = 4 : 0 \leq 16 \leq 26 \leq 32$ (verdadeiro)

Portanto, os valores $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ e $n_0 = 4$ provam que $f(n) = n^2 + 10 = \Theta(n^2)$.

3.2 Exemplo 2

Para cada função abaixo, identifique o Θ.

- $f(n) = 3n^2 + 1 = \Theta(n^2)$
- $f(n) = 2n^3 + \lg n = \Theta(n^3)$
- $f(n) = 5n \lg n + 2n = \Theta(n \lg n)$
- $f(n) = 21 = \Theta(1)$ *Obs: As constantes não dependem do tamanho da entrada (n). Assim, convencionou-se que* $\Theta(constante) = \Theta(1)$
- $f(n) = \lg n + 3\,n = \Theta(n)$
- $f(n) = \lg n + 2 = \Theta(\lg n)$