



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

Усович Алексей Игоревич

Метод Латис-Больцмана решения задачи теплопроводности

КУРСОВАЯ РАБОТА

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

В. М. Головизнин

Соруководитель:

аспирант, мл.науч.сотр.

Н.А. Афанасьев

Москва, 2022

Содержание

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Введение | 3 |
| 2 | Уравнение диффузии | 3 |
| 2.1 | Одномерный случай | 3 |
| 2.2 | Термическая диффузия | 3 |
| 3 | Метод Латис-Больцмана | 4 |
| 3.1 | Метод Латис-Больцмана для задачи теплопроводности | 5 |
| 4 | Модельная задача | 5 |
| 4.1 | Тепловая диффузия в слое, подверженному воздействию постоянной температуры | 5 |
| 4.2 | Граничные условия | 6 |
| 4.2.1 | Постоянство температуры | 6 |
| 4.2.2 | Адиабатический процесс | 6 |
| 5 | Результаты моделирования | 7 |
| 6 | Заключение | 8 |

1 Введение

2 Уравнение диффузии

2.1 Одномерный случай

Рассмотрим одномерное уравнение диффузии:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (1)$$

Где ϕ зависимая величина, например температура или импульс.

Коэффициент α влияет на скорость диффузии. В зависимости от спецификации уравнения он может являться коэффициентом термической диффузии, массовой диффузии, кинетической вязкости и тд. Чем больше α , тем выше скорость диффузии.

2.2 Термическая диффузия

Уравнение диффузии для задачи теплопроводности в одномерном случае можно записать как:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (2)$$

где T - температура, ρ - плотность, C - удельная теплоемкость, k - удельная теплопроводность. В данном случае коэффициент диффузии принимает следующий вид:

$$\alpha = \frac{k}{\rho C} \quad (3)$$

Не трудно заметить, что величина α зависит только от характеристик среды. Таким образом, скорость протекания диффузии в среде зависит только от свойств самой среды.

Если подставить коэффициент α в (2), то уравнение теплопроводности можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4)$$

3 Метод Латис-Больцмана

Кинетическое уравнение для функции распределения температуры, можно записать как:

$$\frac{\partial f_k(x, t)}{\partial t} + c_k \frac{\partial f_k(x, t)}{\partial x} = \Omega_k \quad (5)$$

$k = 1, 2$ для одномерного случая (D1Q2)

В левой части уравнения представлен поточный процесс(streaming) распределения функции по сетке со скоростью $c_k = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

В правой части располагается скорость изменения функции распределения в процессе столкновения(collision).

Также правую часть можно представить, как:

$$\Omega_k = -\frac{1}{\tau}(f_k(x, t) - f_k^{eq}(x, t)) \quad (6)$$

где τ - время релаксации до равновестного состояния(f_k^{eq})

Применяя BGK аппроксимацию, с использованием (6) можем дискретизировать уравнение (5) как:

$$\frac{f_k(x, t + \Delta t) - f_k(x, t)}{\Delta t} + c_k \frac{f_k(x + \Delta x, t + \Delta t) - f_k(x, t + \Delta t)}{\Delta x} = -\frac{1}{\tau}(f_k(x, t) - f_k^{eq}(x, t)) \quad (7)$$

Заметив, что $\Delta x = c_k \Delta t$, перепишем уравнение (7), как:

$$f_k(x + \Delta x, t + \Delta t) - f_k(x, t) = -\frac{\Delta t}{\tau}((f_k(x, t) - f_k^{eq}(x, t))) \quad (8)$$

Таким образом, получаем основное уравнение для задачи диффузии в одномерном пространстве. Пусть время релаксации $\omega = \frac{\Delta t}{\tau}$, тогда имеем:

$$f_k(x + \Delta x, t + \Delta t) = f_k(x, t)(1 - \omega) + \omega f_k^{eq}(x, t) \quad (9)$$

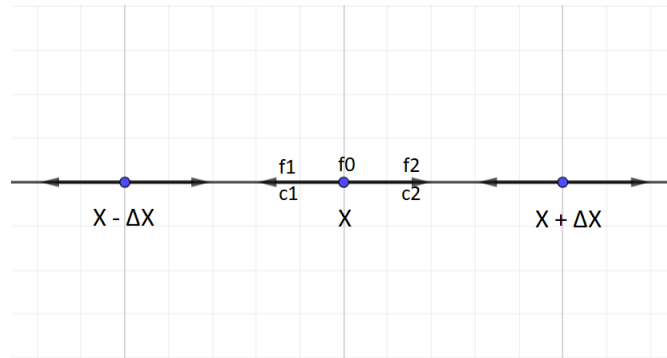


Рис. 1: Решетка для одномерной задачи

Переменная ϕ из уравнения (1) может быть связана с функцией распределения f_i следующим образом:

$$\phi(x, t) = \sum_{k=1}^2 f_k(x, t) \quad (10)$$

Функцию равновестного распределения f_k^{eq} рассмотрим в виде:

$$f_k^{eq} = \omega_k \phi(x, t) \quad (11)$$

где ω_k означает вес распределения в направлении k , который должен удовлетворять простому критерию: $\sum_{k=1}^n = 1$ в общем виде, в нашем случае $\omega_1 + \omega_2 = 1$.

3.1 Метод Латис-Больцмана для задачи теплопроводности

Используя основные утверждения из прошлой главы, для одномерной задачи с двумя направлениями на сетке (Рис 1), можем выразить температуру:

$$T(x, t) = \sum_{i=1}^2 f_i(x, t) = f_1(x, t) + f_2(x, t) \quad (12)$$

и через температуру - равновестное распределение

$$f_i^{eq} = \omega_i T(x, t) \quad (13)$$

Сумируем обе части получим следующее:

$$f_1^{eq} + f_2^{eq} = \omega_1 T(x, t) + \omega_2 T(x, t) \quad (14)$$

4 Модельная задача

Слой длиной L с коэффициентом температуропроводности α нагрет до температуры T_0 . Левую часть слоя подвергают высокой температурой T_l . Необходимо рассчитать распределение температуры в слое в момент времени t_r .

4.1 Тепловая диффузия в слое, подверженному воздействию постоянной температуры

Рассмотрим конфигурацию системы, где $L=1\text{м}$, $T_0 = 0$, $T_l = 1$, $\alpha = 0.25$, тогда

$$T(x, t) = \sum_{k=1}^2 f_k(x, t) \quad (15)$$

$$f_k^{eq}(x, t) = \omega_k T(x, t) \quad (16)$$

Метод состоит из двух основных шагов, в данном случае шаг коллизии принимает вид:

$$f_k(x, t + \Delta t) = f_k(x, t)(1 - \omega) + \omega f_k^{eq}(x, t) \quad (17)$$

А поточный шаг:

$$f_k(x + \Delta x, t + \Delta t) = f_k * (x, t + \Delta t) \quad (18)$$

4.2 Граничные условия

4.2.1 Постоянство температуры

Тепловой баланс на границе $x = 0$ для одномерной задачи(D1Q2):

$$f_1^{eq}(0, t) + f_2^{eq}(0, t) = f_1(0, t) + f_2(0, t) \quad (19)$$

$$f_1^{eq} = \omega_1 T(0, t) = 0.5T(0, t) \quad (20)$$

$$f_2^{eq} = \omega_2 T(0, t) = 0.5T(0, t) \quad (21)$$

Таким образом, имеем:

$$f_1(0, t) = T_b - f_2(0, t) \quad (22)$$

$$f_2(0, t) = T_b - f_1(0, t) \quad (23)$$

4.2.2 Адиабатический процесс

Градиент температуры равен 0, поэтому $T(m) = T(m - 1)$, где m - последний узел решетки. Таким образом:

$$f_1(m) + f_2(m) = f_1(m - 1) + f_2(m - 1) \quad (24)$$

или

$$f_1(m) = f_1(m - 1) \quad (25)$$

$$f_2(m) = f_2(m - 1) \quad (26)$$

5 Результаты моделирования

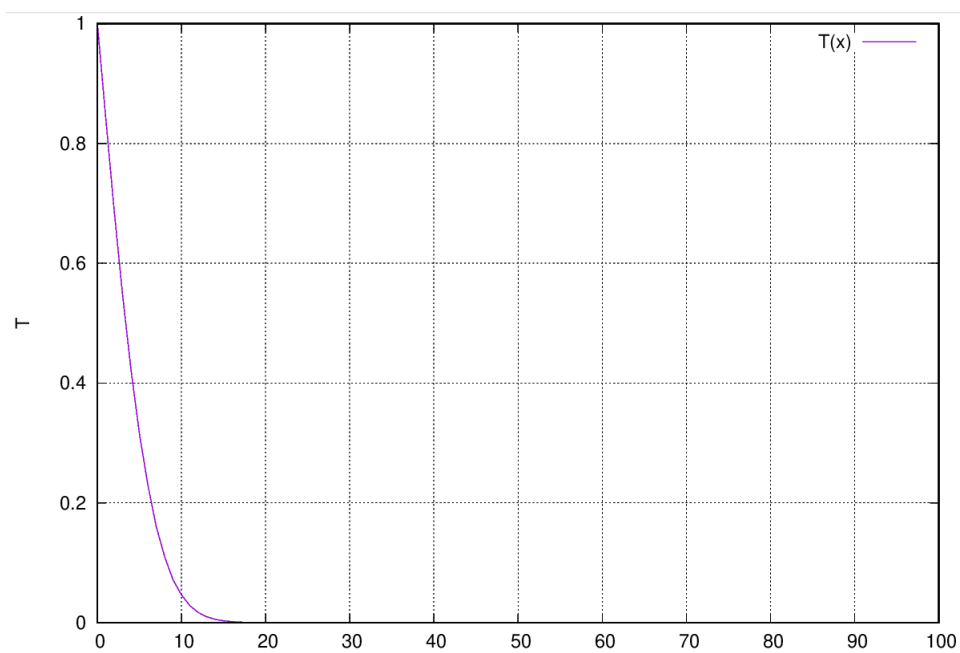


Рис. 2: Модельная задача в момент времени $t=50$

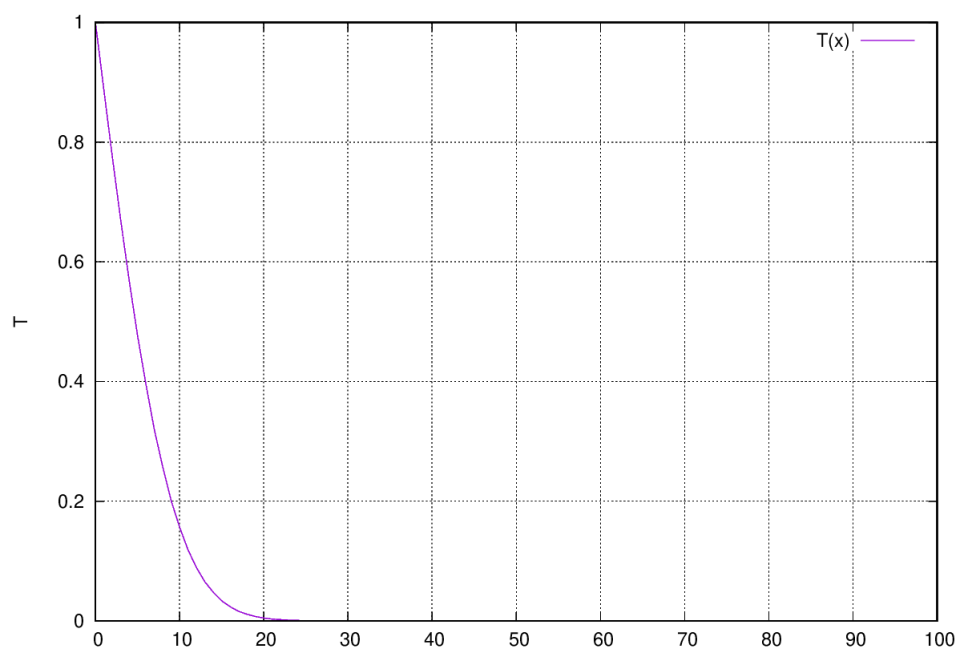


Рис. 3: Модельная задача в момент времени $t=100$

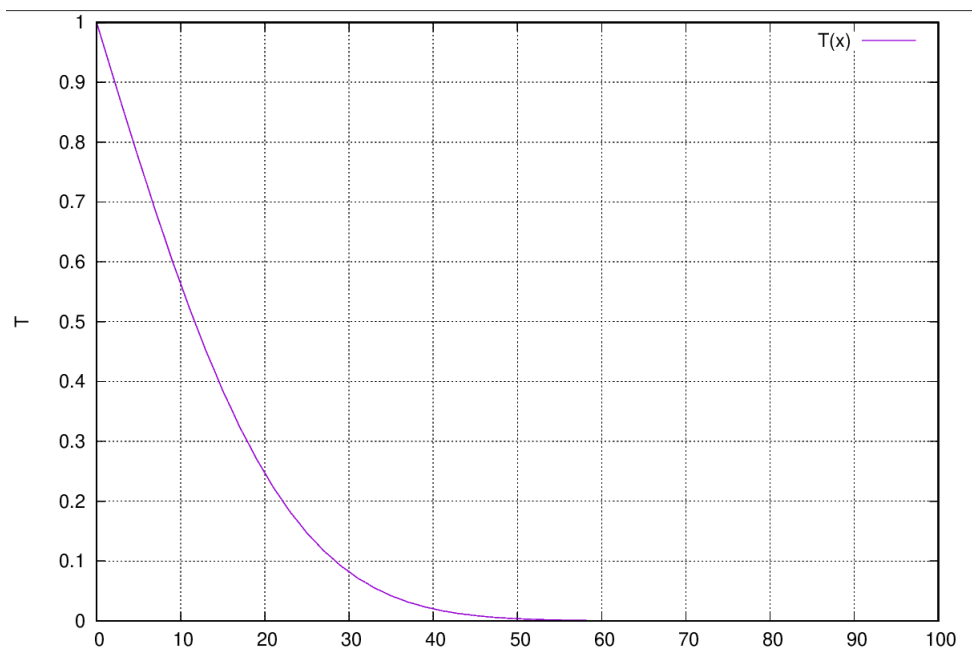


Рис. 4: Модельная задача в момент времени $t=600$

6 Заключение