Aufgabe 3

$n \in \mathbb{N}$, $a, b, a \cdot b \in [-2^{n-1}, \dots\dots, 2^{n-1}-1]$

zu Zeigen: $d_n(a \cdot b) = s_n(d_n(a) \cdot d_n(b))$

Beweis für verschiedene Fälle:

Fall 1, $a, b \geq 0$, somit $a \cdot b \geq 0$, Ergebnis positiv oder Null

$$s_n(d_n(a) \cdot d_n(b)) = s_n(a \cdot b) = d_n(a \cdot b) = a \cdot b$$

$\Rightarrow$ Beide Zahlen positiv, man braucht keine Abschneidefunktion s_n, bei positiven Zahlen soll ja der Übertrag behalten werden. qed

Fall 2, $a < 0$, $b \geq 0$ | auch $a \geq 0$, $b < 0$, wegen Kommutativität

$$a < 0 \rightarrow d_n(a) = 2^n - |a|$$

$$s_n(d_n(a) \cdot d_n(b)) = s_n((2^n - |a|) \cdot b)$$

$$= s_n((2^n + a) \cdot b) = s_n(2^n \cdot b + a \cdot b)$$

(1) $a \cdot b = 0 \Rightarrow a \cdot b = d_n(a \cdot b)$

(2) $a \cdot b < 0 \Rightarrow 2^n - |a \cdot b| = d_n(a \cdot b)$ qed

Fall 3: $a, b < 0$, $a \cdot b \in [-2^{n-1}, \dots 2^{n-1}-1]$, $a \cdot b > 0$

$$s_n(d_n(a) \cdot d_n(b)) = s_n((2^n - |a|) \cdot (2^n - |b|))$$

$$= s_n(2^{2n} - 2^n \cdot |b| - 2^n |a| + |a| \cdot |b|)$$

$$= s_n(2^n + 2^n b + 2^n \cdot a + a \cdot b) = s_n(2^{2n} + 2^n(a+b) + a \cdot b)$$

$$= s_n(\underbrace{2^n(a+b)}_{} + a \cdot b) = s_n(a \cdot b) = a \cdot b = d_n(a \cdot b)$$

vielfaches von 2^n wird abgeschnitten von s_n da $(a+b) < 0$.

qed