IHDCB331 - Algorithmique II

Devoir 2

Cédric Evrard

October 26, 2019

1 Calcul de postconditions

1.1 Question 1

$P \equiv \{z < y + 50\}$

```
x = x - 43;
```

$Q \equiv \{z > y * 50 \wedge x = z - 43\}$

1.2 Question 2

$P \equiv \{x - y \geq 0\}$

```
y = y + x;
```

$$
\begin{aligned}
&\equiv x - y' \geq 0 \wedge y = y' + x \\
&\equiv y' = y - x \wedge x - y' \geq 0 \\
&\equiv x - y - x \geq 0
\end{aligned}
$$

$Q \equiv \{-y \geq 0\}$

1.3 Question 3

$P \equiv \{x \geq 3\}$

```
x = x + 1;
```

$$
\begin{aligned}
&\equiv x = x' + 1 \wedge x' \geq 3 \\
&\equiv x - 1 = x' \wedge x' \geq 3 \\
&\equiv x \geq 4
\end{aligned}
$$

```
x = x * x;
```

$$
\begin{aligned}
&\equiv x = x' * x' \wedge x' \geq 4 \\
&\equiv x' = sqrt(x) \wedge x' \geq 4 \\
&\equiv sqrt(x) \geq 4 \\
&\equiv x \geq 16
\end{aligned}
$$

$Q \equiv \{x \geq 16\}$

1.4 Question 4

Cette question a été réalisée en cours.

2 Calcul de précondition

2.1 Question 1

$Q \equiv \{x > 3\}$

```
x = y + 3;
```

$P \equiv \{y > 0\}$

2.2 Question 2

$Q \equiv \{y > 5\}$

```
y = x + 2;
```

$\equiv \{y > 7\}$

```
y = y - 2;
```

$\equiv \{x > 5\}$

$P \equiv \{x > 5\}$

2.3 Question 3

$Q \equiv \{y > 0\}$

```
if (x > 2)
  y = 1;
else
  y = -1;
```

$P \equiv \{x > 2\}$

3 Preuves par l'invariant

3.1 Question 1

$I \equiv 0 < i \leq n + 1 \land k = 2^{i-1}$

3.1.1 Avant la boucle

$\equiv 0 < i \leq n + 1 \land k = 2^{i-1} \land i = 1 \land k = 1$
$\equiv 0 < 1 \leq n + 1 \land k = 2^{0} = 1 \land i = 1 \land k = 1$

$Q \Rightarrow I$

3.1.2 Boucle

$I \wedge B \equiv 0 < i \leq n+1 \wedge k = 2^{i-1} \wedge i \leq n$

```
k = 2 * k;
```

$Q_1 \equiv 0 < i \leq n+1 \wedge k' = 2^{i-1} \wedge i \leq n \wedge k = 2 * k'$
$\Rightarrow k' = k/2$
$Q_1 \equiv 0 < i \leq n+1 \wedge k/2 = 2^{i-1} \wedge i \leq n$

```
i++;
```

$Q_2 \equiv 0 < i' \leq n+1 \wedge k/2 = 2^{i'-1} \wedge i' \leq n \wedge i = i'+1$
$\Rightarrow i' = i-1$
$Q_2 \equiv 0 < i-1 \leq n+1 \wedge k/2 = 2^{i-2} \wedge i-1 \leq n$
$Q_2 \equiv 1 < i \leq n+2 \wedge k/2 = 2^{i-2} \wedge i \leq n+1$

$Q_2 \Rightarrow I$

3.1.3 Terminaison de la boucle

$V = n - i$
$V = 0 \equiv n - i = 0 \Rightarrow n = i$
V diminue à chaque passage de boucle car i augmente

3.2 Question 2

$I \equiv x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y = x_0 - x$

3.2.1 Avant la boucle

$\equiv x \geq 0 \wedge y = 0 \wedge x = x_0$
$\equiv x \geq 0 \wedge y = 0 \wedge x = x_0 \wedge y = x_0 - x = 0$
$Q \Rightarrow I$

3.2.2 Boucle

$I \wedge B \equiv x > 0 \wedge y \geq 0 \wedge x = x_0 \wedge y = x_0 - x$

```
x = x - 1;
```

$Q_1 \equiv x > 0 \wedge y \geq 0 \wedge x' = x_0 \wedge y = x_0 - x' \wedge x = x' - 1$
$\Rightarrow x' = x + 1$
$Q_1 \equiv x > 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + 1 = x_0 \wedge y = x_0 - (x+1)$

```
y = y + 1;
```

$Q_2 \equiv x > 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + 1 = x_0 \wedge y' = x_0 - (x+1) \wedge y = y' + 1$
$\Rightarrow y' = y - 1;$
$Q_2 \equiv x > 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + 1 = x_0 \wedge y - 1 = x_0 - (x+1)$
$Q_2 \equiv x > 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + 1 = x_0 \wedge y = x_0 - x + 2$
$Q_2 \Rightarrow I$

3.2.3 Terminaison de la boucle

Comme x est supérieur à 0 et diminue de 1 à chaque boucle, celui-ci sera un moment égale à 0 et donc la boucle se terminera.

3.3 Question 3

$I \equiv a = a_0 \wedge 0 \leq i \leq n \wedge \exists k, \forall j : 0 \leq k \leq i \wedge 0 \leq j \leq i : a[k] \leq a[i] \wedge r = k$

3.3.1 Avant la boucle

$P \equiv \{n > 0\}$

```
i = 0;
r = 0;
```

$Q_1 \equiv n > 0 \wedge i = 0 \wedge r = 0 \wedge a = a_0$
$Q_1 \equiv 0 \leq 0 < n \wedge a = a_0 \wedge \exists k, \forall j : 0 \leq 0 \leq 0 : 0 \leq 0 \leq 0 : a[0] \leq a[0] \wedge r = k$
$Q_1 \Rightarrow I$

3.3.2 Boucle

$I \wedge B \equiv 0 \leq i \leq n \wedge \exists k, \forall j : 0 \leq k \leq i \wedge 0 \leq j \leq i : a[k] \leq a[i] \wedge r = k \wedge i < n$
$I \wedge B \equiv 0 \leq i < n \wedge \exists k, \forall j : 0 \leq k \leq i \wedge 0 \leq j \leq i : a[k] \leq a[i] \wedge r = k$

```
if (a[i] < a[r]) r = i;
```

Si la condition B est vraie.
$Q_1 \equiv 0 \leq i < n \wedge \exists k, \forall j : 0 \leq k \leq i \wedge 0 \leq j \leq i : a[k] \leq a[i] \wedge r = k \wedge a[i] < a[r]$
$Q_1 \equiv 0 \leq i < n \wedge \exists k, \forall j : 0 \leq k \leq i \wedge 0 \leq j \leq i : a[k] = a[i] \wedge r = k = i$

```
i = i + 1;
```

$Q_2 \equiv 0 \leq i < n \wedge \exists k, \forall j : 0 \leq k \leq i' \wedge 0 \leq j \leq i' : a[k] = a[i'] \wedge r = k = i' \wedge i = i' + 1$
$\Rightarrow i' = i - 1$
$Q_2 \equiv 0 \leq i < n \wedge \exists k, \forall j : 0 \leq k \leq i - 1 \wedge 0 \leq j \leq i - 1 : a[k] = a[i - 1] \wedge r = k = i - 1$
$Q_2 \Rightarrow I$

Si la condition B est fausse.
$Q_1 \equiv 0 \leq i < n \wedge \exists k, \forall j : 0 \leq k \leq i \wedge 0 \leq j \leq i : a[k] \leq a[i] \wedge r = k$

```
i = i + 1;
```

$Q_2 \equiv 0 \leq i < n \wedge \exists k, \forall j : 0 \leq k \leq i' \wedge 0 \leq j \leq i' : a[k] \leq a[i'] \wedge r = k \wedge i = i' + 1$
$\Rightarrow i' = i - 1$
$Q_2 \equiv 0 \leq i < n \wedge \exists k, \forall j : 0 \leq k \leq i - 1 \wedge 0 \leq j \leq i - 1 : a[k] \leq a[i - 1] \wedge r = k$
$Q_2 \Rightarrow I$

3.3.3 Terminaison de la boucle

$V = n - 1$
$V = 0 \equiv n - i = 0 \Rightarrow n = i$
V diminue à chaque passage de boucle étant donné que i augmente et que n est constant.

4 Complexité

1. Simplification : $2log_2n + n^2 + nlog_24 + nlog_2n$
   $= 2log_2n + n^2 + 2n + nlog_2n$
   $\Rightarrow \mathcal{O}(n^2)$

2. Classement : $n^{1/3} < 100n < nlogn < (log_2n)^{100} < logn < n^2/log_2n < 35n^2 < n^{10} < n^3 * 2^n < 4^n < n!$

3. $\mathcal{O}(n)$

4. $\mathcal{O}(nlog_2n)$

5. $\mathcal{O}(n^2)$

6. $\mathcal{O}(n^3)$

7. $\mathcal{O}(n^2)$

8. $\mathcal{O}(n^2)$