
Michal Červeňák

dátum merania: 21.11. 2016

skupina: 4

Klasifikace:

1 Pracovní úkol

1. Změřte tuhost pružiny statickou metodou a vypočtěte vlastní úhlovou frekvenci pro dvě různá závaží.
2. Změřte časový průběh tlumených kmitů pro dvě závaží, ověřte platnost rovnice (14) proložením dat a z parametrů proložení vypočtěte vlastní frekvenci volného oscilátoru.
3. Změřte závislost amplitudy vynucených kmitů na frekvenci vnější síly v okolí rezonance pro dvě závaží a proložením dat ověřte platnost vztahu (19), z parametrů proložení vypočtěte vlastní frekvenci volného oscilátoru.
4. Porovnejte výsledky vlastní frekvence ze všech tří předchozích úkolů
5. Ověřte, že (10) je řešením pohybové rovnice Pohlova kyvadla, nalezněte řešení pro polohovou a rychlostní podmínku a nakreslete jejich průběh.
6. Naměřte časový vývoj výchylky kmitů kyvadla pro netlumené kmity a určete vlastní frekvenci Pohlova kyvadla.
7. Změřte koeficient útlumu pro jednu hodnotu tlumícího proudu z intervalu $(0,5 - 1,5)A$.
8. Experimentálně nalezněte hodnotu tlumícího proudu, pro který nastává kritický útlum. Realizujte polohovou i pohybovou podmínku a za pomoci domácího úkolu a úkolu 2. zjistěte, zda platí podmínka $\omega_0 = \delta$.
9. Bonus: Vytvořte v DataStudiosu fázový diagram. Prozkoumejte, jak vypadá pohyb kyvadla ve fázovém diagramu za různých podmínek (netlumený, tlumený, kriticky tlumený). Grafy přiložte k protokolu a diskutujte je

2 Pomôcky

Experimentální stojan s pružinou a motorkem, tlumící magnety, rotační pohybové senzory Pasco, sada závaží, regulovatelný zdroj $0 - 20\text{ V}$, voltmetr, digitální tachometr CEM AT-6, PC, programy DataStudio a gnuplot, Pohlovo kyvadlo, nastavitelný zdroj $0 - 3\text{ A}$, rotační senzor PASCO, PC, program DataStudio.

3 Teória

Pohľovo kyvadlo je tvorené medeným kotúčom a k menu pripevnená špirálovitá pružina, ktorá sa pri otáčaní skracuje alebo predlžuje. [2] *voľná citácia*

Podľa Hookovho zákona platí

$$F = -kx, \quad (1)$$

kde F je sila pôsobiaca na pružinu v našom prípade $F = mg$, kde m je hmotnosť závaží, g je tiažové zrýchlenie a x je výchylka.

Závislosť uhlovej frekvencie ω_0 na tuhosti k platí vzťah

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (2)$$

kde m je hmotnosť závažia.

Závislosť amplitúdy B kmitov od frekvencie γ budiacej sily môžeme vyjadriť ako

$$B(\gamma) = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2) + 4\lambda^2\gamma^2}}, \quad (3)$$

kde ω_0 je vlastná uhlová frekvencia oscilátoru a λ je priame tlmenie oscilátoru.

Označme ω_0 vlastnú uhlovú frekvenciu oscilátoru, ω uhlovú frekvenciu tlmeného oscilátora a γ útlm oscilátora. Potom medzi nimi platí nasledujúci vzťah

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \gamma^2}. \quad (4)$$

Celá teória spolu s odvodením dostupná na [1] a [2].

3.0.1 Spracovanie chýb merania

Označme $\langle t \rangle$ aritmetický priemer nameraných hodnôt t_i , a Δt hodnotu $\langle t \rangle - t$, pričom

$$\langle t \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i, \quad (5)$$

a chybu aritmetického priemeru

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \langle t \rangle)^2}{n(n-1)}}, \quad (6)$$

pričom n je počet meraní.

4 Postup merania

1. Na digitálnych váhach boli odvážené jednotlivé časti protizávaží a samotné závažia kyvadla.
2. Pomocou senzoru Pasco boli odmerané jednotlivé rozdiely polôh pre rôzne hmotnosti závaží zavesených na oscilácii.
3. Oscilátor bol potiahnutím závaží nadol uvedený do pohybu a pomocou senzoru bol zaznamenávaný priebeh výchylky na čas

4. Elektromotor bol pripojený k zdroji napätia a pomocou tachometru odmeraná závislosť otáčiek na napätí.
5. Motorček bol pripojený k oscilátoru, tak aby budil kmity. Pomocou senzoru Pasco bola zaznamenávaná veľkosť výchylky.
6. Pohľové kyvadlo bolo vychýlením z rovnovážnej polohy uvedené do pohybu, opäť bola zaznamenávaná veľkosť výchylky na čas
7. Pre prúdy v rozsahu $I = 0,5 - 1,5$ A boli opäť namerané závislosti podľa predchádzajúceho bodu.
8. Pre rôzne prúdy sa kyvadlo vychýlilo a hľadal sa prúd, v ktorom nastane kritický útlm.
9. Do kyvadla sa v rovnovážnej polohe buchlo tak aby to spôsobilo výchylku a opäť sa hľadal prúd kedy nastane kritický útlm.

5 Výsledky merania

5.1 Statická metóda

V Tab. 1 sú zaznamenané hmotnosti závažia a im prislúchajúcu hodnotu predĺženia. A vypočítaná tuhosť a vlastné frekvencie. Na oscilátore okrem závaží sú zavesené aj iné predmety; menovite hliníková tyčka o hmotnosti $m_h = 21,84$ g a kovový hák na zavesenie závaží o hmotnosti $m_t = 21,16$ g, pričom celková hmotnosť

$$m_0 = m_t + m_h = 43,0 \text{ g}.$$

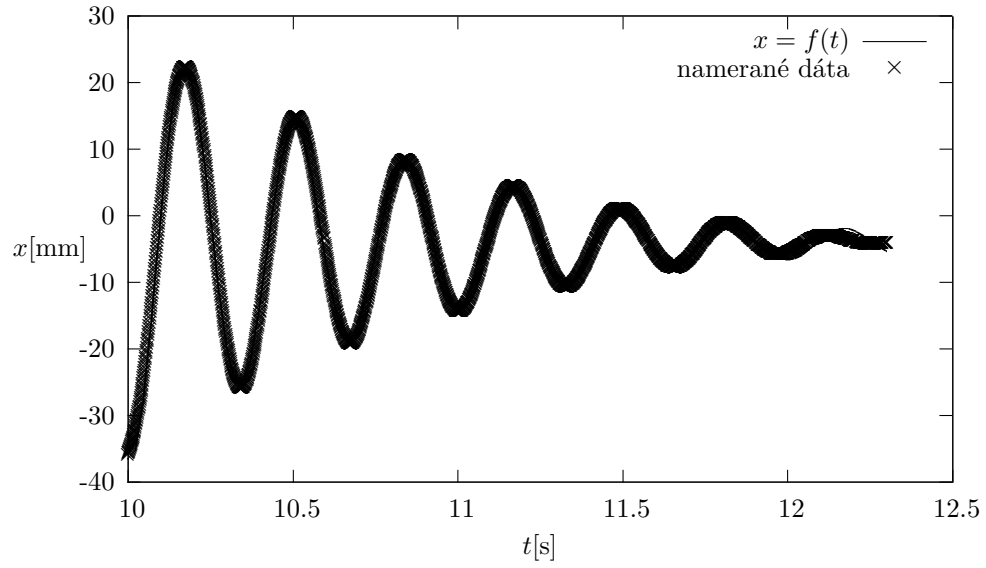
typ	$\Delta x [\text{mm}]$	$m [\text{g}]$	$k [\text{kg s}^{-2}]$	$\omega_0 [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$
Malé	3.9 ± 0.01	10.29	28.88 ± 0.2	23.34
Stredné	7.56 ± 0.01	22.30	28.93 ± 0.2	21.09
Veľké	17.78 ± 0.01	45.56	25.14 ± 0.2	16.90

Tab. 1: Namerané hodnoty výchylky x , na hmotnosti závažia m , vypočítaná tuhosť pružiny k podľa vzťahu 1 a vlastná uhlová frekvencia ω_0 podľa vzťahu 2

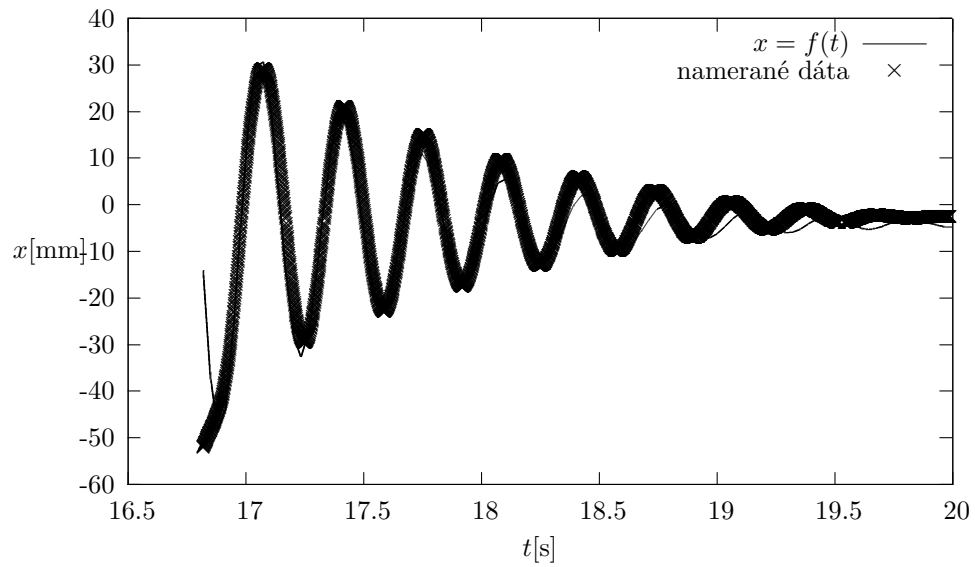
5.2 Tlmené kmity

Do grafov Obr. 1 a Obr. 2 boli vynesené namerané hodnoty tlmeného kmitania pre stredné závažie. Tie boli preložené fitmi, a z nich boli získané postupne hodnoty $\omega_0 = (18,88 \pm 0,007) \text{ rads}^{-1}$ a $\omega_0 = (18,24 \pm 0,02) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

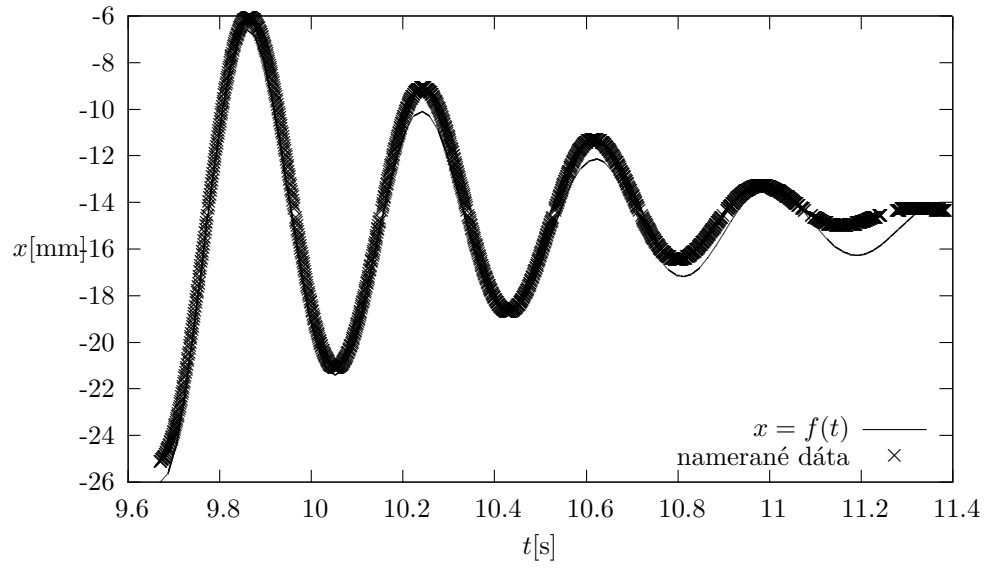
Pre veľké závažia bol postup ekvivalentný, grafy boli vynesené do Obr. 3 a Obr. 4 a získané hodnoty $\omega_0 = (16,56 \pm 0,02) \text{ rads}^{-1}$ a $\omega_0 = (16,30 \pm 0,01) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



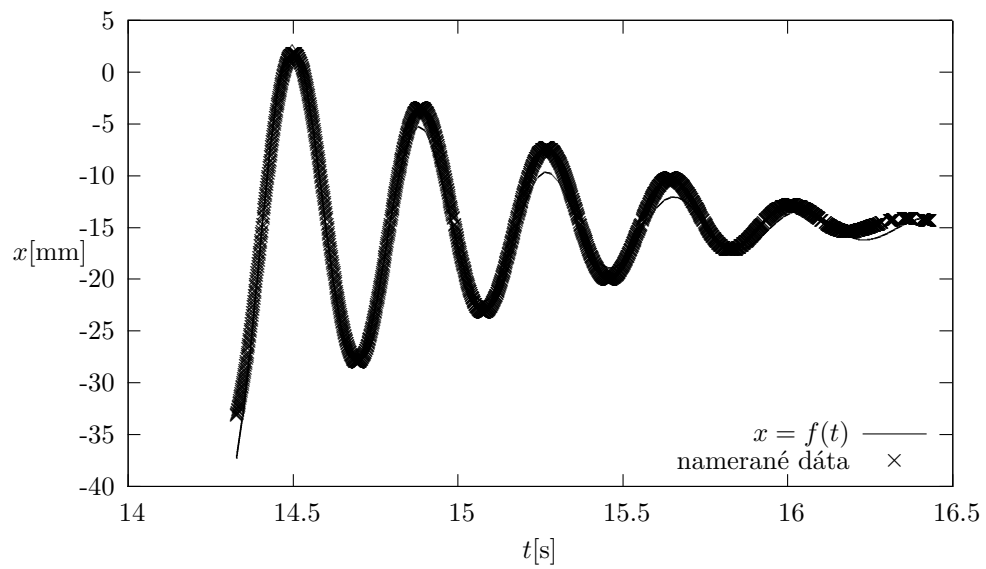
Obr. 1: Závislosť polohy x v čase t , preložené funkciou $x = (1 \cdot 10^7 \pm 6.7 \cdot 10^5) e^{-(1.26 \pm 0.01)t} \sin((18.88 \pm 0.01)t + (15.2 \pm 0.07))$



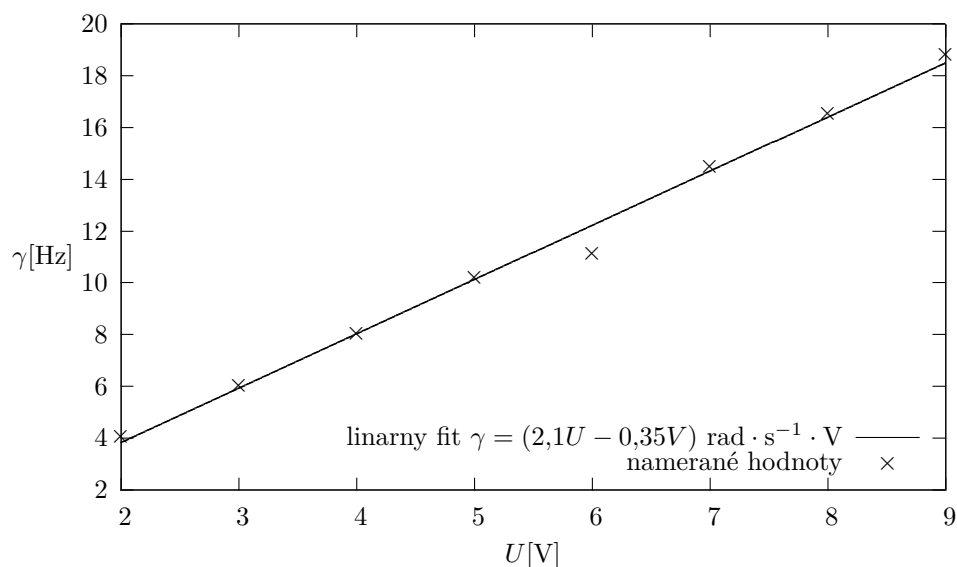
Obr. 2: Závislosť polohy x v čase t , preložené funkciou $x = (1 \cdot 10^{11} \pm 2.8 \cdot 10^{10}) e^{-(1.28 \pm 0.02)t} \sin((18.24 \pm 0.02)t + (34.23 \pm 0.29))$



Obr. 3: Závislosť polohy x v čase t , preložené funkciou $x = (1 \cdot 10^7 \pm 1.5 \cdot 10^6) e^{-(1.14 \pm 0.02)t} \sin((16.56 \pm 0.02)t + (37.7 \pm 0.12))$



Obr. 4: Závislosť polohy x v čase t , preložené funkciou $x = (1 \cdot 10^{11} \pm 1.97 \cdot 10^{10}) e^{-(1.55 \pm 0.01)t} \sin((16.30 \pm 0.01)t + (58.8 \pm 0.19))$



Obr. 5: Kalibračná krivka k prevodu napätia U na otáčky motorčeka γ

5.3 Nútené a tlmené kmity

V grafe Obr. 5 je vynesená kalibračná krivka otáčiek motoru na vstupnom napätí. Z toho bola získaný vzťah

$$\gamma = (2,1U - 0,35) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}/\text{V}, \quad (7)$$

kde U je úbytok napätie na motorčeku.

V grafe Obr. 6 bola vynesená závislosť maximálnej amplitúdy B na frekvencií budiacej sily γ , pre veľké závažie preložená závislosťou 3.

Frekvencia γ bola vypočítaná pomocou kalibračného vzťahu 7 z napätia. Maximum nastalo pre $\gamma = 25,28 \text{ Hz}$.

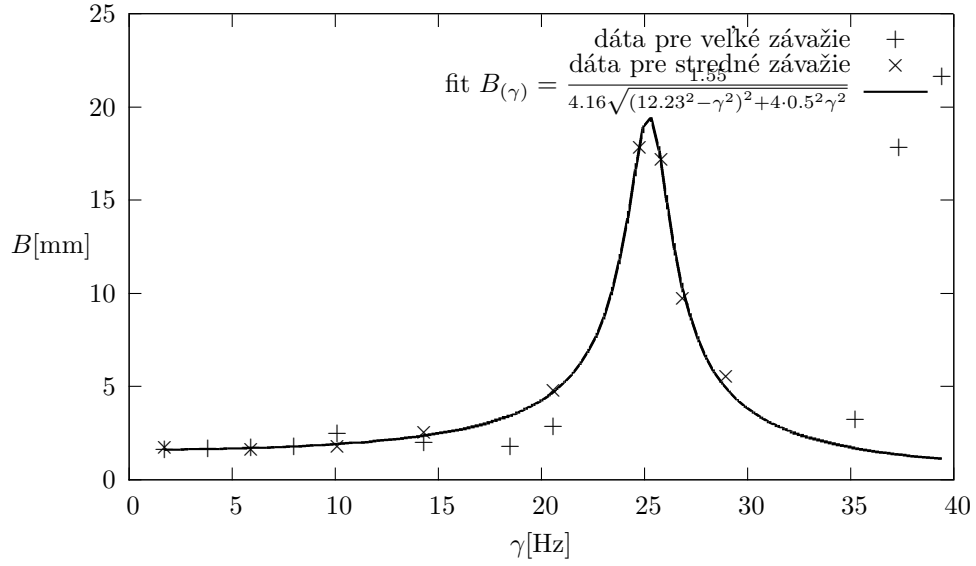
6 Pohlovo kyvadlo

Pre pohlové kyvadlo bez tlmenia boli namerané dáta vynesené do grafov napr. Obr. 7. Pre ostatné merania sa postupovalo rovnako a fitnuté parametre boli vynesené do tabuľky Tab. 2

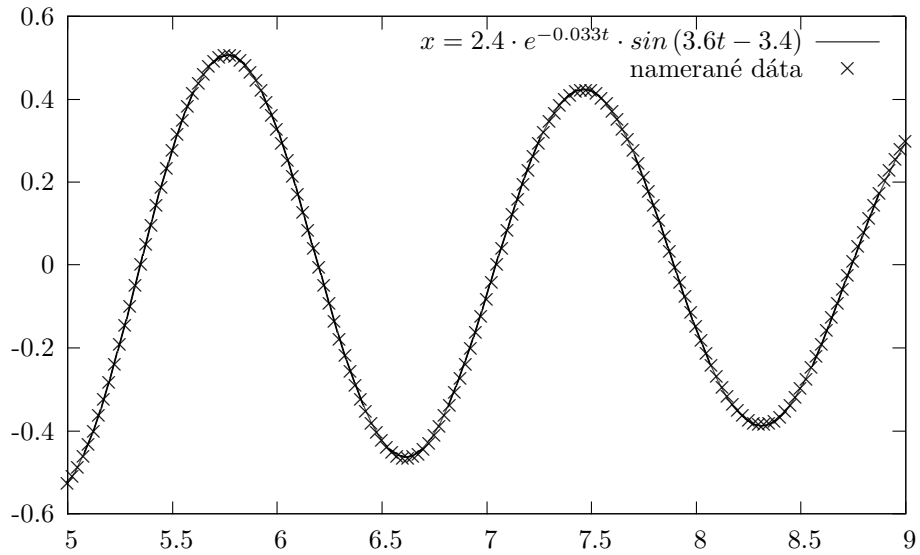
A z nich spočítaná podľa vzťahu 4 a vzťahu 5 hodnota

$$\omega_0 = (3,69 \pm 0,01) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pre menovité prúdy $I = 0,5 \text{ A}$, $I = 1 \text{ A}$ a $I = 1,5 \text{ A}$ boli namerané dáta vynesené postupne do grafov postupn 8, 9 a 10. A z fitov získané postupne hodnoty $\gamma = \{0.17, 0.40, 0.90\} \text{ Hz}$.



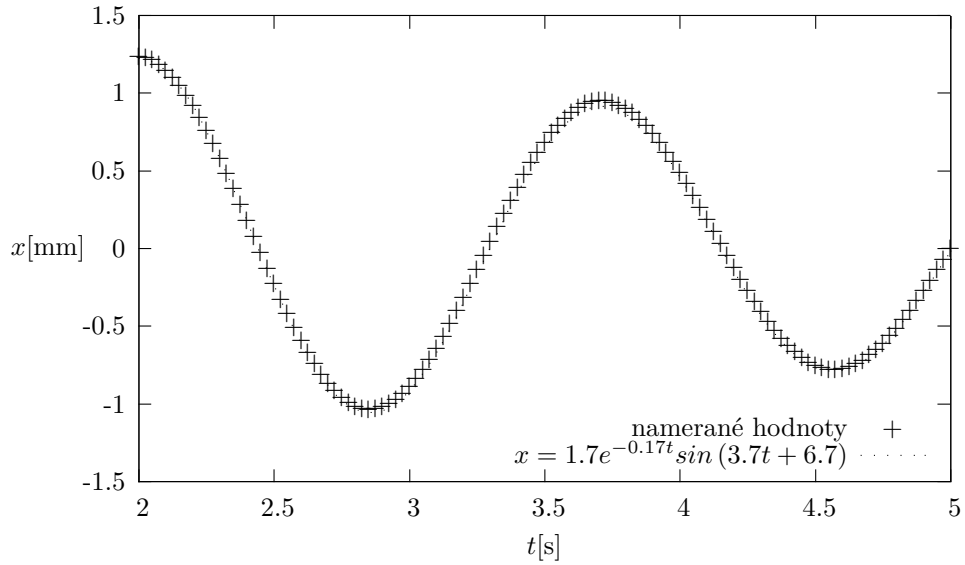
Obr. 6: Závislost amplitúdy B od frekvencia budiacej sily γ , pre stredné a veľké závaží preložená, a pre stredné závaží funkciou $B_{(\gamma)} = \frac{1.55}{4.16 \sqrt{(12.23^2 - \gamma^2)^2 + 4 \cdot 0.5^2 \gamma^2}}$



Obr. 7: Namerané hodnoty závislosti výchylky x na čase t , preložené závislosťou $x = 2.4 \cdot e^{-0.033t} \cdot \sin(3.6t - 3.4)$

$\gamma[\text{Hz}]$	$\omega[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$	$\omega_0[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$
0.10 ± 0.02	3.70 ± 0.2	3.70 ± 0.2
0.04 ± 0.01	3.68 ± 0.2	3.68 ± 0.2
0.05 ± 0.01	3.68 ± 0.2	3.68 ± 0.2
0.03 ± 0.01	3.70 ± 0.2	3.70 ± 0.2
0.03 ± 0.01	3.70 ± 0.2	3.70 ± 0.2

Tab. 2: Namerané hodnoty výchylky x , na hmotnosti závažia m , vypočítaná tuhosť pružiny k podľa vzťahu 1 a vlastná uhlová frekvencia ω_0 podľa vzťahu 2



Obr. 8: Závislosť výchylky x na čase t preložená závislosťou $x = 1.7e^{-0.17t} \sin(3.7t + 6.7)$ pre tlmiaci prúd $I = 0,5 \text{ A}$

6.1 Polohová podmienka

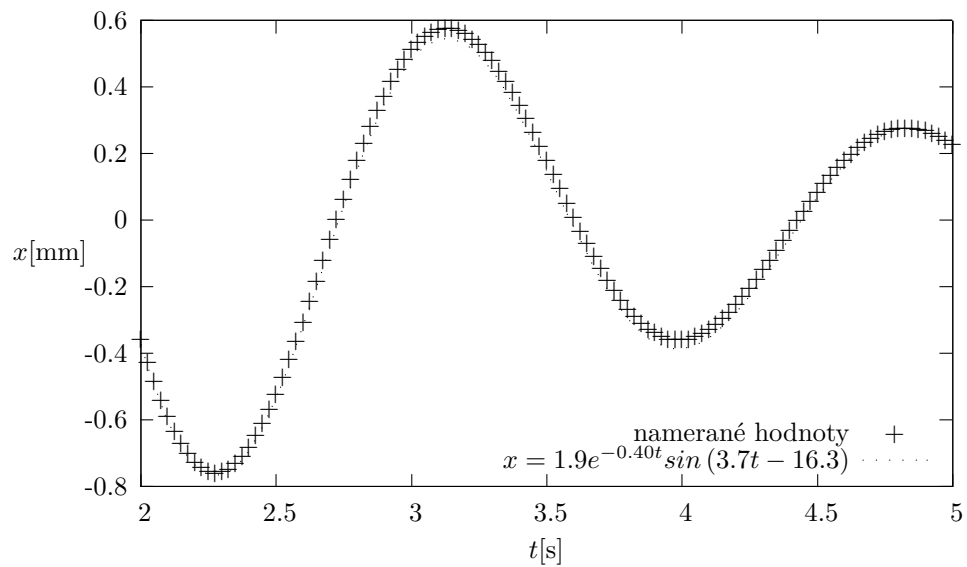
Pre polohovú podmienku boli pre jednotlivé prúdy zaznamenané výchylky kyvadla na čase a vynesené do grafu Obr. 11. Z grafu je vidieť že kritický útlm nastáva pre prúd $I = (2,6 - 3 \pm 0,2) \text{ A}$.

6.2 Pohybová podmienka

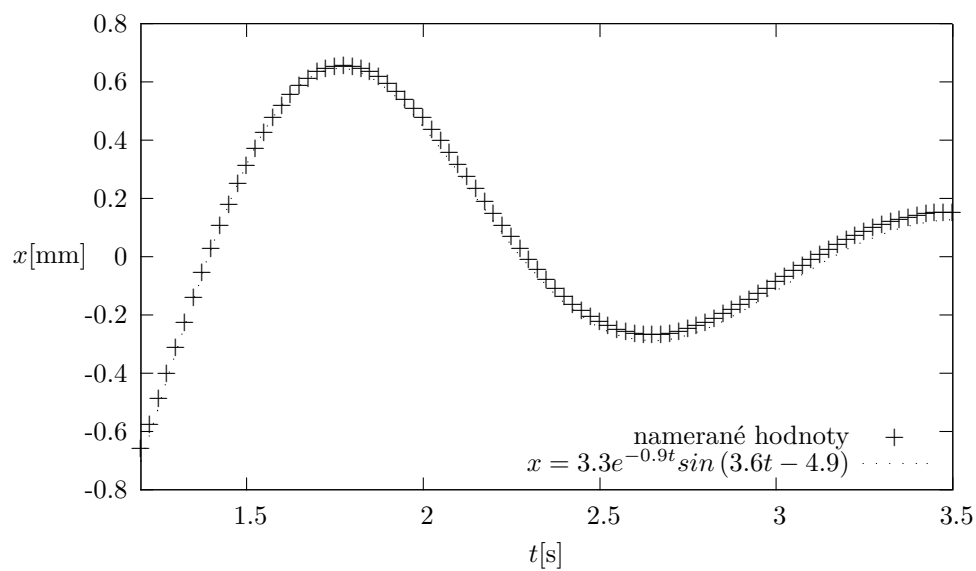
Pre pohybovú podmienku boli namerané dáta vynesené do grafu Obr. 12, tu nastáva útlm približne pre $I = (2,8 \pm 0,2) \text{ A}$

7 Diskusia

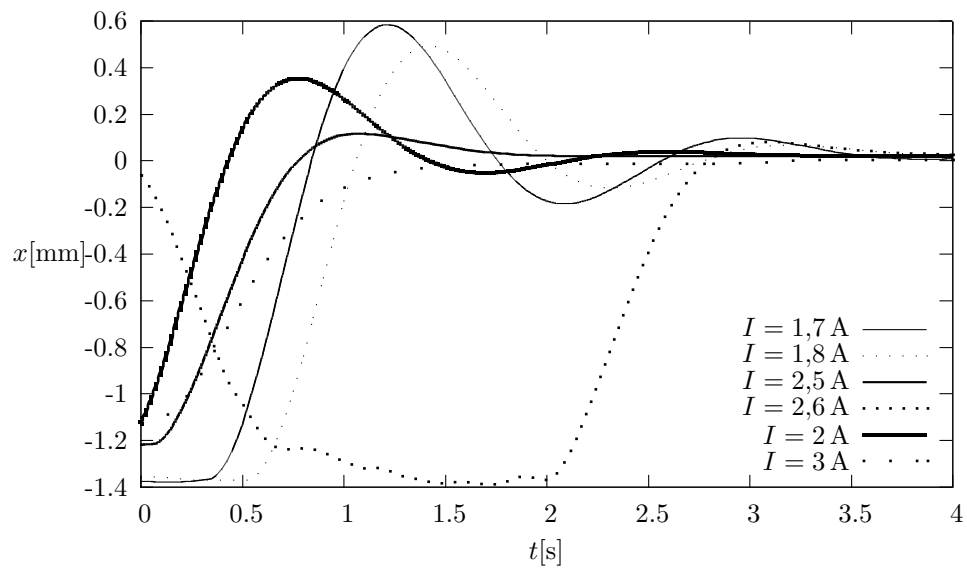
Meranie LHO pre stredné závažie ukazuje, že hodnoty ω_0 sa pre jednotlivé spôsoby odlišujú. Ak porovnáme veľké závažie pre statickú metódu a tlmené



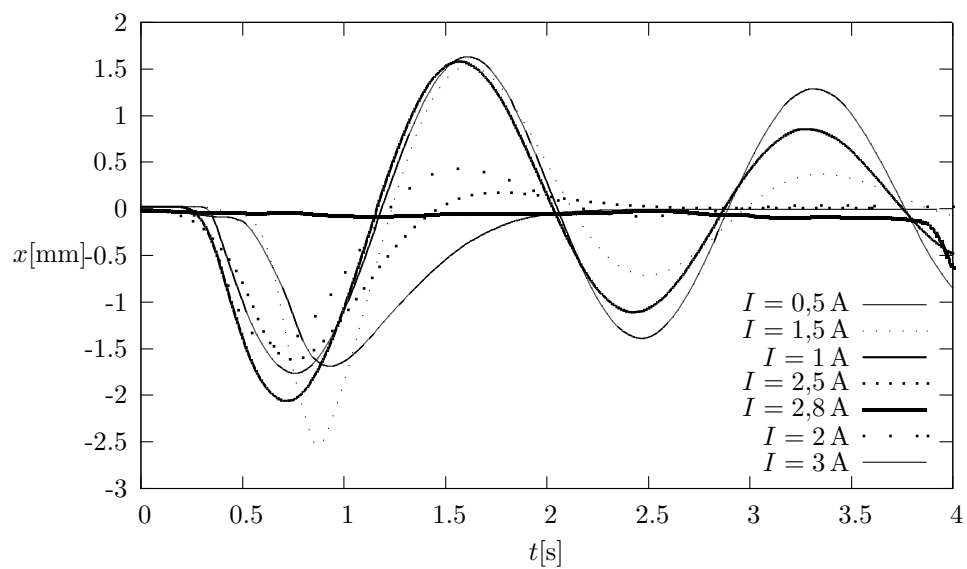
Obr. 9: Závislosť výchylky x na čase t preložená závislosťou $x = 1.9e^{-0.40t} \sin(3.7t - 16.3)$ pre tlmiaci prúd $I = 1,0$ A



Obr. 10: Závislosť výchylky x na čase t preložená závislosťou $x = 3.3e^{-0.9t} \sin(3.6t - 4.9)$ pre tlmiací prúd $I = 1,5$ A



Obr. 11: Namerané časové závislosti výchylky x pre jednotlivé prúdy I pre polohovú podmienku



Obr. 12: Namerané časové závislosti výchylky x pre jednotlivé prúdy I pre pohybovú podmienku

kmity tak vidíme, že sa výsledné hodnoty podobajú, čo však neplatí pre stredné závažie.

Ako zdroj chýba je hlavne veľká nepresnosť fitu, pre a , ďalej vidíme aj postupnú zmenu pri útlme kmitov. Obe nepresnosti prisudzujem, zásahom meradla, ktoré má istý nenulový moment zotrvačnosti.

Pri kalibrovaní táčok motorčeku sa pre napätie väčšie ako $U = 11V$ používala lineárna extrapolácia, čo môže byť zdrojom ďalších chýb, keďže nevieme či otáčky motorčeku naozaj závisia lineárne na napätí.

Pri určovaní kritického útlmu pohľovho kyvadla, je nepresnosť určovania prúdu v úrovni 10%, pretože sa hlavne pri prúdoch nad 2 A nedalo presne a dlhodobo udržať stabilný prúd v obvode.

Na presné nájdenie kritického útlmu by sme potrebovali zdroj ktorý nám dokáže dlhodobo dodávať min. prúd $I = 3\text{ A}$. A cievku ktorá by bola schopná dlhodobo takýto prúd zniesť.

8 Záver

V prvej časti bola statickou metódou určená tuhosť

$$k = 27.5 \pm 0.7,$$

a vlastná uhlová frekvencia lineárne harmonického oscilátoru pre rôzne závažia (postupne malé, stredné, veľké)

$$\omega_0 = 23,34 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\omega_0 = 21,09 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\omega_0 = 16,90 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Metódou tlmených kmitov bola určená vlastná frekvencia pre stredné závažie ako $\omega_0 = (18,88 \pm 0,007) \text{ rads}^{-1}$ a $\omega_0 = (18,24 \pm 0,02) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ a pre veľké $\omega_0 = (16,56 \pm 0,02) \text{ rads}^{-1}$ a $\omega_0 = (16,30 \pm 0,01) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pri budených tlmených kmitoch bola učená vlastná frekvencia ako $\gamma = 25,28 \text{ Hz}$.

Pri pohľovom kyvadle bola určená vlastná $\omega_0 = (3,69 \pm 0,01) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. A kritické tlmenie nastáva pri prúde v rozmedzí $I = 2,6 - 3\text{ A}$.

Reference

- [1] Lineární harmonický oscilátor [cit. 29.11.2016]Dostupné po přihlášení z Kurz: Fyzikální praktikum I:https://praktikum.fjfi.cvut.cz/pluginfile.php/129/mod_resource/content/7/LH0-navod_160927.pdf
- [2] Pohlovo kyvadlo [cit. 29.11.2016]Dostupné po přihlášení z Kurz: Fyzikální praktikum I:https://praktikum.fjfi.cvut.cz/pluginfile.php/130/mod_resource/content/10/PohlovoKyvadlo_161102.pdf