Numarası : **CEVAP**

Adı Soyadı : **ANAHTARI**

SORULAR

1. $\left(x - \dfrac{2}{x^3}\right)^9$ ifadesinin açılımında varsa sabit terim nedir?

2. *Kombinatoryal argümanlarla* her n pozitif tamsayısı için

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

eşitliğini kanıtlayınız.

Uyarı: $\binom{n}{k}$ ifadesinin formülünü yazıp, cebirsel olarak eşitliği göstermeye çalışmayınız. Bunun yerine eşitliğin, aynı kümenin öğelerinin farklı şekillerde sayılmasıyla elde edilebileceğini göstermeye çalışınız.

3. Okulun tiyatro kulübünün m, dans kulübünün ise n üyesi bulunmaktadır. Yaklaşan bir etkinlik için her iki kulüpten de en az bir kişinin yer aldığı k kişilik bir komite oluşturulması gerekmektedir. Eğer her iki kulübe birden üye olan r kişi varsa, bu komite kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

4. Aşağıda üzerinde 4 tane 'A', 4 tane 'B', 4 tane 'C' ve 4 tane de 'D' harfinin ve üzerinde 1'den 5'e kadar rakamların yer aldığı butonlar bulunan, çocuklar için üretilmiş bir oyuncak yer almaktadır.

A	B	C	C
A	D	D	C
B	D	B	A
B	A	D	C

1 2 3 4 5

   (a) 'A','B','C' ve 'D' harfleri kaç farklı şekilde bu oyuncak üzerinde görüntülenebilir?

   (b) 1,2,3,4 ve 5 ile numaralandırılan butonlara aynı butona art arda iki kez basmamak koşuluyla n kez kaç farklı şekilde basılabilir? (Örneğin, $(\underbrace{1,2,1,2,\ldots,5}_{n \text{ kez}})$, $(\underbrace{1,2,3,2,\ldots,1}_{n \text{ kez}})$, ... gibi)

   (c) Üzerinde rakamlar bulunan butonlardan her birisine basıldığında harflerin yeri rastgele olmayan belli bir algoritmaya göre değişmektedir. Buna göre butonlara 32 kez basılmasıyla ortaya çıkacak tüm sonuçlar içerisinden en az iki tanesinin aynı olduğunu gösteriniz.

5. Rakamları toplamı 9 olan ve sadece '1' ve '2' rakamlarından oluşan kaç farklı sayı yazabilirsiniz? İddianızı kanıtlayınız. (Örneğin, $22221, 121212, 1111122, \ldots$)

6. Her n doğal sayısı için

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

- 4. soru 20, diğer sorular 16 puandır.
- Sınavda ders notlarının kullanımı serbest ancak alış-verişi yasaktır.
- Sınav süresi 90 dakikadır.
- Başarılar dilerim.

Doç.Dr. Emrah AKYAR

ÇÖZÜMLER

1. $\left(x - \dfrac{2}{x^3}\right)$ ifadesinin açılımında *sabit terim yoktur.* Gerçekten de Binom Teoremine göre

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{2}{x^3}\right)^9 &= \sum_{k=0}^{9}\left[\binom{9}{k}x^{9-k}\left(\frac{-2}{x^3}\right)^k\right]\\ &= \sum_{k=0}^{9}\left[\binom{9}{k}x^{9-k}\left(-2\right)^k\left(x\right)^{-3k}\right]\end{aligned}$$

olur. Bu ifadede sabit terimin olması için x in kuvvetlerinin toplamının 0 olması gerekir. Yani,

$$(9-k)+(-3k)=0$$

olmalıdır. Oysa, k tamsayı olduğundan $(9-k)+(-3k)=0 \Rightarrow 9-4k=0$ denkleminin çözümü yoktur.

2. Eşitliğin sol tarafı "$2n$ elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısıdır". Bir başka ifadeyle $\{1,2,3,\ldots,2n\}$ kümesinden seçilebilecek iki elemanlı alt kümelerin sayısıdır.

   Bu iki elemanlı alt kümelerin tümü şöyle de elde edilebilir:

   - Elemanın birisi $\{1,2,\ldots,n\}$ kümesinden biri de $\{n+1,n+2,\ldots,2n\}$ kümesinden seçilebilir. Bu durumda $\binom{n}{1}+\binom{n}{1}=n+n=2n$ farklı şekilde 2 elemanlı alt kümeler elde edilebilir.
   - Her iki eleman da $\{1,2,\ldots,n\}$ kümesinden seçilebilir. Bu durumda $\binom{n}{2}$ farklı şekilde 2 elemanlı alt kümeler elde edilebilir.
   - Her iki eleman da $\{n+1,n+2,\ldots,2n\}$ kümesinden seçilebilir. Bu durumda da $\binom{n}{2}$ farklı şekilde 2 elemanlı alt kümeler elde edilebilir.

   O halde tüm bu durumları toplarsak,

$$\binom{2n}{2} = 2n + \binom{n}{2} + \binom{n}{2} = 2\binom{n}{2} + 2n$$

   sonucu elde edilir.

3. k kişi $m+n-r$ kişi arasından seçilecektir. Hiç bir koşul olmasaydı (komitede her iki kulüpten de en az bir kişi isteniyor) $\binom{m+n-r}{k}$ farklı şekilde bu komite oluşturulabilirdi. Bu sayıdan istenmeyen durumları çıkarırsak,

$$\binom{m+n-r}{k} - \underbrace{\binom{m-r}{k}}_{\substack{\text{Tiyatro kulübün-}\\ \text{den kimsenin bu-}\\ \text{lunmadığı durum-}\\ \text{ların sayısı}}} - \underbrace{\binom{n-r}{k}}_{\substack{\text{Dans kulübün-}\\ \text{den kimsenin}\\ \text{bulunmadığı}\\ \text{durumların sayısı}}}$$

   cevabı elde edilir.

4. (a) 4 tane 'A', 4 tane 'B', 4 tane 'C' ve 4 tane de 'D' harfinin $\dfrac{16!}{4!\,4!\,4!\,4!}$ farklı şekilde sıralanabileceğini derslerimizden biliyoruz.

   (b) İlk basılacak buton 5 butondan herhangi birisi olabilir. Ancak, aynı butona art arda iki kez basılamayacağından ikinci ve sonraki sırada basılacak butonlar için ilk basılan hariç geriye kalan 4 butondan birisi olabilir. Böylece cevap

$$5\cdot\underbrace{4\cdot 4\cdots 4}_{n \text{ tane}} = 5\cdot 4^{n-1}$$

   olur.

(c) Bu soruyu 'Güvercin Yuvası İlkesi' ni kullanarak çözebiliriz. Yukarıdan, aynı butona art arda iki kez basmamak koşuluyla butonlara 32 kez basıldığında $5 \cdot 4^{31}$ farklı sonuç ortaya çıkacağını biliyoruz. Diğer taraftan, $5 \cdot 4^{31} > 4 \cdot 4^{31} = 4^{32} = 16^{16}$ olduğu açıktır (güvercinlerin sayısı).
Yine sorunun a şıkkından olası tüm durumların sayısının

$$\frac{16!}{4!\,4!\,4!\,4!} < 16!$$

olduğunu biliyoruz (güvercin yuvalarının sayısı).
Diğer taraftan, $16^{16} > 16!$ eşitsizliğinden

$$\text{Güvercinlerin Sayısı} = 16^{16} < 16! = \text{Güvercin Yuvalarının Sayısı}$$

olur. Böylece butonlara 32 kez basıldığında ortaya çıkabilecek tüm sonuçlar içerisinden en az iki tanesi aynı olmak zorundadır.

5. Önce 9 yerine rakamları toplamı 1,2,3,4 ve 5 eden sayıları belirlemeye çalışalım:

- Rakamları toplamı 1 eden ve sadece '1' ve '2' rakamlarından oluşan **1** tane sayı vardır: 1.
- Rakamları toplamı 2 eden ve sadece '1' ve '2' rakamlarından oluşan **2** tane sayı vardır: 11 ve 2.
- Rakamları toplamı 3 eden ve sadece '1' ve '2' rakamlarından oluşan **3** tane sayı vardır: 12,21 ve 111.
- Rakamları toplamı 4 eden ve sadece '1' ve '2' rakamlarından oluşan **5** tane sayı vardır: 22, 112, 121, 211 ve 1111.
- Rakamları toplamı 5 eden ve sadece '1' ve '2' rakamlarından oluşan **8** tane sayı vardır: 122, 212, 221, 1121, 1211, 1112, 11111 ve 2111.
- $\vdots$

Dikkat edilirse ortaya çıkan sayılar Fibonacci sayılarıdır.

İddia: Rakamları toplamı $n-1$ eden ve sadece '1' ve '2' rakamlarından oluşan F_n tane sayı vardır.

Kanıt: Rakamları toplamı $n-1$ eden ve sadece '1' ve '2' rakamlarından oluşan A_n tane sayı olduğunu kabul edelim. Bu sayılardan birler basamağında 1 olanların sayısına A_n^1, 2 olanların sayısına da A_n^2 dersek, $A_n = A_n^1 + A_n^2$ olur.

Diğer taraftan, A_n^1, sadece '1' ve '2' rakamlarından oluşan ve rakamları toplamı $n-2$ eden sayıların sayısıdır. Yani, $A_n^1 = A_{n-1}$ dir.

Benzer olarak, A_n^2, sadece '1' ve '2' rakamlarından oluşan ve rakamları toplamı $n-3$ eden sayıların sayısıdır. Yani, $A_n^1 = A_{n-2}$ dir.

Böylece Fibonacci sayılarıyla aynı yineleme formülüne sahip, ve başlangıç değerleri aynı olan bir sayı dizisi elde edilir.

O halde cevap $F_{10} = 55$ olur.

6. Verilen eşitliğin doğruluğunu tümevarım yöntemiyle kanıtlayabiliriz:

- $n = 1$ ise $\sum_{i=1} 1 i \cdot i! = 1 \cdot 1! = (1+1)! - 1$ eşitlik doğrudur.
- n için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim. Yani, $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$ olsun (tümevarım hipotezi).
- $n+1$ için d eşitliğin geçerli olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! &= \sum_{i=1}^{n} i \cdot i! + [(n+1) \cdot (n+1)!] \\
&= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \qquad \text{(Tümevarım hipotezinden)} \\
&= (n+1)!\,[1 + (n+1)] - 1 \\
&= (n+1)!(n+2) - 1 \\
&= (n+2)! - 1
\end{aligned}$$

O halde eşitlik $n + 1$ için de geçerlidir. Böylece tümevarım yöntemi gereği her n doğal sayısı için bu eşitlik geçerli olur.