24 Mayıs 2017

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

MAT 340 AYRIK MATEMATİK DERSİ FİNAL SORULARI

Süre: 110 dk. Notlar: Kapalı Başarılar dilerim, Prof.Dr. Sezai TOKAT

SORU 1) Prüfer kodu (1, 1, 1, 1, 6, 5) olan ağacı çiziniz.

b) Düzlemsel kodu "111011101001000100" olan ağacı çiziniz.

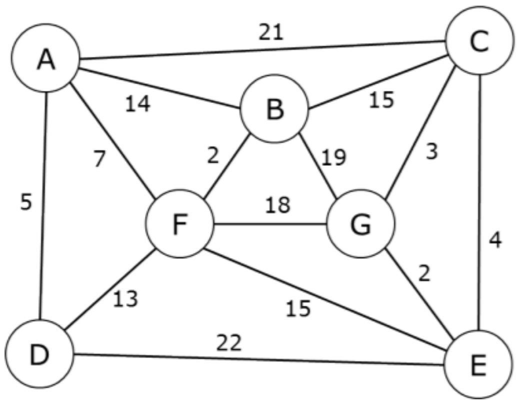
Düzlemsel kod 18 karakter uzunluğunda olduğundan ve ağacın her kenarı için iki karakter eklendiğinden ağacın 18/2=9 kenarı vardır. 9 kenarı olan bir ağacın da 10 köşe noktası vardır.

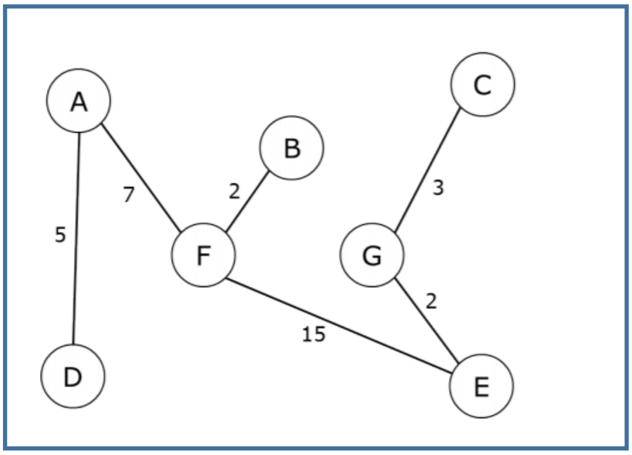
SORU 2) m adet düğümü olan bir ağacın her bir düğümünün derecesi sırası ile 6, 5, 4, 3, 2, 1, . . . , 1 şeklindedir. m değerini bulunuz.

If there are k 1's in the sequence, then there are k + 5 vertices in the tree, and so there are k + 4 edges. The sum of the degrees is 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + k = 20 + k. Then, because the sum of the degrees is twice the number of edges, we know 20 + k = 2(k + 4), or k = 12.

m=k+5=17

SORU 3) Aşağıda verilen grafa Kruskal algoritmasını uygulayarak minimum tarama ağacını (minimum spanning tree) elde ediniz. Yandaki boşluğa MST'yi düğümler aynı yere gelecek şekilde çiziniz. Tabloya da her adımda eklediğiniz düğümü, maliyetini ve o adıma kadar toplam maliyeti yazınız. Algoritmada aynı ağırlıkta iki kenar arasında seçim yapmak gerektiğinde alfabetik olarak sonda olana öncelik verilecektir (örneğin E-F'yi B-C'den önce, A-F'yi A-B'den önce seçiniz.)





Edge Added	Edge Cost	Running Cost	Disjoint Sets
–	–	0	(A) (B) (C) (D) (E) (F) (G)
E—G	2	2	(A) (B) (C) (D) (E G) (F)
B—F	2	4	(A) (B F) (C) (D) (E G)
C—G	3	7	(A) (B F) (D) (C E G)
A—D	5	12	(A D) (B F) (C E G)
A—F	7	19	(A B D F) (C E G)
E—F	15	34	(A B C D E F G)

SORU 4) 21 noktası (düğüm, vertex) olan keyfi bir ağacın tüm noktalarının dereceleri toplamı nedir? Açıklayınız.

El sıkı¸sma teoremine göre herhangi bir çizgede tüm noktalarının dereceleri toplamı, kenar sayı- sının iki katına e¸sittir. 21 noktalı bir agacın da 20 tane kenarı oldu ˘ gundan cevap, 20 ˘ × 2 = 40 olur.

SORU 5)

x1 > 4 olmak üzere, x1 + x2 + x3 + x4 = 20 denkleminin pozitif tamsayılarda kaç farklı çözümü vardır? Neden?

Soru, 20 özdeş objenin 4 farklı kutuya birinci kutuda en az 5 obje ve diğer kutular boş değilken dağılım problemidir. O halde 20 özdeş objenin 5 tanesini biri ˘ nci kutuya birer tanesini de diğer kutulara ˘ koyalım. Kalan 12 özdeş objeyi de hiçbir koşul olmadan 4 farklı kutuya dağıtalım. 12 objenin koşul ˘ olmaksızın 4 farklı kutuya dağılımlarının sayısı ˘ 12 + 4 − 1 4 − 1 ! = 15 3 ! = 15! 12! 3! = 15 · 14 · 13 3 · 2 = 455 olduğundan cevap elde edilmiş olur.

SORU 6) 10 köşe noktalı ve tüm köşe noktalarının derecesi 1 olan noktaları adlandırılmış kaç farklı çizge vardır? Açıklayınız.

Çizgenin tüm köşe noktalarının derecesinin 1 olması istendiginden her köşe noktası sadece bir köşe noktasına bağlanmalıdır. Buna göre ilk köşe noktasının (10 köşe noktasından herhangi biri) baglanabileceği 9 köşe noktası vardır. Geriye kalan köşe noktasından herhangi birini seçtiğimizde onun bağlanabileceği 7 köşe noktası vardır. Böyle devam edecek olursak cevap

$9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 945$ elde edilir.

SORU 7) K_n için kaç farklı Hamilton döngüsü vardır? n değerine bağlı olarak elde ediniz.

SORU 8) Yan yana dizilmiş 10 koltukta 10 kişi oturmaktadır. Bu kişilerin hepsi koltuklarından kalkıp, ilk oturdukları koltuğa ya da ilk oturdukları koltuğun her iki yanındaki koltuktan birine oturmak koşuluyla kaç farklı şekilde yerlerini değiştirebilirler? (Not: En baştaki ve sondakiler sadece kalktıkları koltuklara ya da bir yanlarındaki koltuklara oturabilir; döngüsel değildir.)

Soruyu 10 koltuk için değil de n koltuk için çözelim.

• Eğer $n = 1$ ise cevap 1 olur.

• Eğer $n = 2$ ise ikisi de aynı koltuğa geri oturabilir ya da koltukları karşılıklı değişebilirler cevap 2 olur.

• Eğer $n = 3$ ise koltukları ve kişileri soldan başlayarak 1,2,3 şeklinde numaralandıralım. Bu durumda herkes aynı koltuğa geri oturabilir, 1. kişi ortadaki koltuğa 2. kişi 1. koltuğa ve 3. kişi tekrar aynı koltuğa oturabilir ve son olarak 3. kişi ortadaki koltuğa, 1. kişi tekrar aynı koltuğa ve ikinci kişi 3. koltuğa oturabilir. Yani cevap 3 olur.

• . . . Dikkat edilecek olursa, elde edilen sayılar Fibonacci sayılarıdır. ¸Simdi bunu kanıtlayalım. İstenen şekilde n koltuğa farklı oturuşların sayısı A_n olsun. Yukarıdan $A_1 = 1$, $A_2 = 2$ ve $A_3 = 3$ olur. Şimdi n koltuk varken son n. koltuğu düşünelim. İki durum söz konusudur: Bu koltuğa n. kişi tekrar oturabilir ya da $n - 1$. kişi bu koltuğa oturabilir. • E ˘ger n. koltu ˘ga n. ki¸si tekrar oturursa geriye $n - 1$ koltuk kalır ve bu $n - 1$ koltu ˘ga A_{n-1} farklı ¸sekilde oturulabilir. • E ˘ger n. koltu ˘ga $(n - 1)$. ki¸si oturursa mecburen n. ki¸si $(n - 1)$. koltu ˘ga oturaca- ˘gından geriye $n - 2$ koltuk kalır ve $n - 2$ koltu ˘ga A_{n-2} farklı ¸sekilde oturulabilir. Böylece bu iki durumu birle¸stirirsek,

$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ olur. $A_1 = 1$ ve $A_2 = 2$ oldu ˘gundan $A_{10} = F_{11} = 89$ elde edilir.

SORU 9) 75 bilgisayar mühendisliği öğrencisi aynı anda yapılan üç farklı sunumu dinlemeye gidecektir.

a) Eğer her sunuma 25 öğrenci dağıtılacak olursa Find the number of ways to assign 75 students to 3 discussion sections (a) if each section must have 25 students;

(b) if there can be any number of students (including zero) in each section. 3 75

SORU 10) A, B, ve C bağımsız olaylardır ve P(A) = 1/3, P(B) = 2/5, ve P(C) = 3/4 olduğu bilinmektedir:

a) P(A ∪ C) hesaplayınız.

Solution: A and C are independent, so P(A ∪ C) = P(A) + P(C) − P(A ∩ C) = 1/3 + 3/4 – 1/3 × 3/4 = 5/6 .

b) P(A ∪ (B ∩ C)) hesaplayınız.

Solution: We first work out P(B ∩ C) = P(B)P(C) = 2/ 5 × 3/ 4 = 3/ 10 . Then P(A ∪ (B ∩ C)) = P(A) + P(B ∩ C) − P(A ∩ B ∩ C) = 1 3 + 3 10 − 1 3 × 3 10 = 8 15 .

6. (5 pts each) Find the number of ways to assign 75 students to 3 discussion sections
(a) if each section must have 25 students;

$$\binom{75}{25,\ 25,\ 25} = \frac{75!}{(25!)^3}$$

(b) if there can be any number of students (including zero) in each section.

$$3^{75}$$