Numarası :

Adı Soyadı :

SORULAR

1. $(2x + 2y + 2z - 3)^6$ ifadesinin açılımında
   (a) Kaç terim vardır? (5 P.)
   (b) x^2y^2 nin katsayısını hesaplayınız. (10 P.)

2. F_n, n. Fibonacci sayısını göstermek üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

   eşitliğini kanıtlayınız. (15 P.)

3. $X = \{1, 2, 3\}$ ve $Y = \{a, b, c\}$ olmak üzere, X kümesinden Y kümesine
   (a) Kaç farklı fonksiyon tanımlanabilir? (5 P.)
   (b) Kaç farklı *örten fonksiyon* tanımlanabilir? (5 P.)

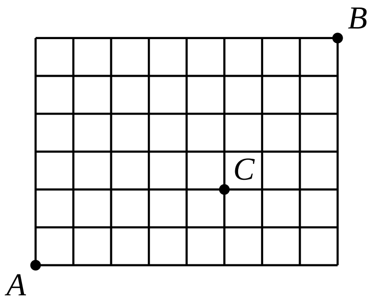
4. $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ kümesinin tüm alt kümelerini belirleyeceğiniz bir yöntem ile 0., 1., 2., ..., $(2^8 - 1)$. gibi 0'dan $(2^8 - 1)$.'ye kadar numaralandırınız. Belirlediğiniz yöntemi açıklayarak bu yönteme göre S kümesinin 201. alt kümesini yazınız. (10 P.)

5. 8 basamaklı negatif olmayan kaç farklı *tek tamsayı* vardır? (10 P.)

6. Kenar uzunlukları 2 birim olan bir eşkenar üçgen içerisinde işaretlenen 5 nokta içinden en az iki tanesi arasındaki uzaklık, her zaman 1 birimden daha küçük olur. Kanıtlayınız. (15 P.)

7. 20 *özdeş* top 4 farklı kutuya her kutuda *çift sayıda* top olmak üzere kaç farklı şekilde dağıtılabilir? (15 P.)

8. Yandaki şekle göre A noktasından B noktasına, C noktasından geçmek koşuluyla her seferinde 1 birim sağa ya da 1 birim yukarıya gidilerek kaç farklı şekilde ulaşılabilir? (10 P.)



- Sınav süresi 90 dakikadır.
- Başarılar dilerim.

Prof. Dr. Emrah AKYAR

ÇÖZÜMLER

1. (a) Cevap, 6 özdeş objenin, 4 farklı kutuya tüm farklı dağılımlarının sayısıdır (bazı kutular boş kalabilir). Böylece $(2x + 2y + 2z - 3)^6$ ifadesinin açılımında,

$$\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!\,6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$$

terim olduğu bulunur.

(b) Multinomial Teoremden

$$\begin{aligned}\binom{6}{2,2,0,2}(2x)^2\,(2y)^2\,(2z)^0\,(-3)^2 &= \frac{6!}{2!\,2!\,0!\,2!}2^2 2^2(-3)^2x^2y^2\\ &= \frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}4\cdot 4\cdot 9x^2y^2\\ &= 12960x^2y^2\end{aligned}$$

olur. O halde istenen katsayı “12960” dir.

$$\begin{aligned}(2x+2y+2z-3)^6 \quad = \quad & 64x^6 + 384x^5y + 384x^5z + 960x^4y^2 + 1920x^4yz + 960x^4z^2 + 1280x^3y^3 + 3840x^3y^2z + 3840x^3yz^2 + 1280x^3z^3 + 960x^2y^4 + 3840x^2y^3z\\ & +5760x^2y^2z^2 + 3840x^2yz^3 + 960x^2z^4 + 384xy^5 + 1920xy^4z + 3840xy^3z^2 + 3840xy^2z^3 + 1920xyz^4 + 384xz^5 + 64y^6 + 384y^5z + 960y^4z^2\\ & +1280y^3z^3 + 960y^2z^4 + 384yz^5 + 64z^6 - 576x^5 - 2880x^4y - 2880x^4z - 5760x^3y^2 - 11520x^3yz - 5760x^3z^2 - 5760x^2y^3 - 17280x^2y^2z\\ & -17280x^2yz^2 - 5760x^2z^3 - 2880xy^4 - 11520xy^3z - 17280xy^2z^2 - 11520xyz^3 - 2880xz^4 - 576y^5 - 2880y^4z - 5760y^3z^2 - 5760y^2z^3\\ & -2880yz^4 - 576z^5 + 2160x^4 + 8640x^3y + 8640x^3z + \mathbf{12960\,x^2y^2} + 25920x^2yz + 12960x^2z^2 + 8640xy^3 + 25920xy^2z + 25920xyz^2 + 8640xz^3\\ & +2160y^4 + 8640y^3z + 12960y^2z^2 + 8640yz^3 + 2160z^4 - 4320x^3 - 12960x^2y - 12960x^2z - 12960xy^2 - 25920xyz - 12960xz^2\\ & -4320y^3 - 12960y^2z - 12960yz^2 - 4320z^3 + 4860x^2 + 9720xy + 9720xz + 4860y^2 + 9720yz + 4860z^2 - 2916x - 2916y - 2916z + 729\end{aligned}$$

2. Kanıtı tümevarım yöntemi ile yapabiliriz.

- $n = 1$ ise $\sum_{i=1}^{1} F_i = F_1 = 1 = F_{1+2} - 1 = 2 - 1$ olduğundan eşitlik geçerlidir.
- n için eşitlik geçerli olsun. Yani $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$ olsun (Tümevarım hipotezi).
- $n + 1$ için de eşitliğin geçerli olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} F_i &= \sum_{i=1}^{n} F_i + F_{n+1}\\ &= F_{n+2} - 1 + F_{n+1} \qquad \text{(Tümevarım hipotezinden)}\\ &= F_{n+3} - 1 \qquad (F_{n+1} + F_{n+2} = F_{n+3} \text{ olduğundan})\end{aligned}$$

olduğundan istenen sonuç elde edilir.

O halde tümevarım yöntemi gereği her n doğal sayısı için verilen eşitlik geçerlidir.

3.

(a) $|X| = 3$ ve $|Y| = 3$ olduğundan X kümesinden Y kümesine tanımlanabilecek farklı fonksiyon sayısı $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$ olur.

(b) **I YOL:** Yine X ve Y nin eleman sayısı aynı olduğu için X kümesinden Y kümesine tanımlanabilecek birebir fonksiyonların sayısıyla, örten fonksiyonların sayısı eşit olur. Buradan cevap $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ elde edilir.

II YOL: Soru içerme-dışlama prensibiyle de çözülebilir: S kümesi X'den Y'ye tanımlı olan tüm fonksiyonların kümesi olsun. $i = 1, 2, 3$ olmak üzere $c_i \subset S$ ile X kümesinden $Y - \{i\}$ kümesine tanımlı olan tüm fonksiyonların kümesini gösterirsek,

$$|c_1| = |c_2| = |c_3| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8, \quad |c_1 c_2| = |c_1 c_3| = |c_2 c_3| = 1, \quad |c_1 c_2 c_3| = 0$$

olduğundan cevap

$$\begin{aligned} |\overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}| &= |S| - (|c_1| + |c_2| + |c_3|) + (|c_1 c_2| + |c_1 c_3| + |c_2 c_3|) - |c_1 c_2 c_3| \\ &= 27 - (8 + 8 + 8) + (1 + 1 + 1) - 0 \\ &= 6 \end{aligned}$$

elde edilir.

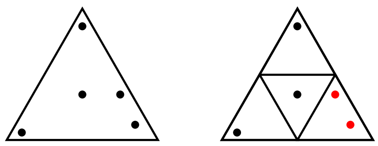
4. Bir kümenin alt kümelerini numaralandırmak için çok çeşitli yöntemler verilebilir. Ancak sorunun devamında verilen kümenin 201. alt kümesi istendiğinden verilecek yöntem doğrudan 201. alt kümeyi yazabilmelidir. Bunun için derste kullanılan ve alt kümeleri "0" ve "1" karakterleriyle kodlayan yöntem kullanılabilir. O halde 201 sayısı ikilik sistemde yazılacak olursa, 11001001 karakterler dizisi elde edilir. Bu koda karşılık gelen alt küme de $\{a, b, e, h\}$ olur.

5. Sayının 8 basamaklı olması için soldaki rakam "0" hariç geriye kalan 9 rakamdan birisi olmalıdır. Aynı şekilde sayının tek sayı olması istendiğinden en sağdaki rakam, 1, 3, 5, 7, 9 rakamlarından birisi olmalıdır. Sayının diğer basamakları ise 10 rakamdan herhangi birisi olabilir. Böylece cevap,

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 45 \cdot 10^6$$

elde edilir.

6. Eşkenar üçgenin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek aşağıdaki gibi kenar uzunlukları 1 birim olan 4 eşkenar üçgen elde edilebilir.



Keyfi işaretlenen 5 noktanın en az 2 tanesi aynı küçük eşkenar üçgenin içerisinde olmalıdır (*Güvercin Yuvası İlkesi*). Aynı küçük eşkenar üçgenin içerisinde yer alan noktalar arasındaki uzaklık 1 birimden daha küçük olacağından (neden?) kanıt biter.

7. 20 özdeş topu ikişer ikişer gruplandırırsak ve elimizde 10 özdeş top varmış gibi düşünürsek, problem 10 özdeş topun hiç bir koşul olmadan 4 farklı kutuya dağılım problemi olur. Bu problemin çözümünün de

$$\binom{10 + 4 - 1}{4 - 1} = \binom{13}{3} = \frac{13!}{3!\,10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 2 \cdot 11 = 286$$

olduğunu biliyoruz.

8. A noktasından C noktasına ulaşmak için 5 kez sağa, 2 kez de yukarıya gitmek gerekir. O halde A noktasından C noktasına farklı rotaların sayısı S, S, S, S, S, Y, Y harflerinin tüm farklı dizilimlerinin sayısı kadardır. Bu sayının da $\frac{7!}{5!\,2!} = 21$ olduğunu biliyoruz. Benzer şekilde C noktasından B noktasına ulaşmak için de 3 kez sağa, 4 kez yukarıya gitmek gerekir. Yani C noktasından B noktasına $\frac{7!}{3!\,4!} = 35$ farklı şekilde gidilebilir. Buradan cevap $21 \cdot 35 = 735$ elde edilir.