

MAT223 AYRIK MATEMATİK

Fibonacci Sayıları

4. Bölüm

Emrah Akyar

Anadolu Üniversitesi
Fen Fakültesi Matematik Bölümü, ESKİŞEHİR

2014–2015 Öğretim Yılı

Fibonacci'nin Tavşanları

13. yüzyılda İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci aşağıdaki soruyu ortaya atmıştır:

Leonardo
Fibonacci



Soru

Bir çiftçi tavşan yetiştirciliği ile uğraşmaktadır. Her bir tavşan iki aylık olduğunda bir yavru vermektedir. Bu yavrular da aynı şekilde iki aylık olduğunda yine yavru vermektedir. Tavşanların hiç ölmeyeceği düşünür ve tüm tavşanların dişi olduğunu kabul edersek

n. ayın sonunda bu çiftçinin kaç tavşanı olacaktır?

n nin küçük değerleri için bu soruya cevap vermek kolaydır.

n	Tavşanlar	Sayı
1		1
2		1
3		2
4		3
5		5
6		8
7		13
:	:	:



Aslında tavşanların sayısının herhangi bir ay için nasıl arttığını belirlemek hiç de zor değildir.

- Açıktır ki, bir sonraki ayda doğacak (eklenecek) tavşan sayısı o aydaki en az iki aylık olan tavşanların sayısı kadardır.
- Bir başka ifadeyle, bir sonraki aydaki tavşan sayısını elde etmek için, önceki aydaki tavşanların sayısının eldeki tavşanların sayısına eklenmesi gereklidir.
- Böylece her bir aydaki tavşan sayısı

$$1, \quad 1+1=2, \quad 2+1=3, \quad 3+2=5, \quad 5+3=8, \quad 8+5=13, \quad \dots$$

elde edilir.



Yukarıdaki bağıntıyı formüle etmek için n . aydaki tavşan sayısını F_n ile gösterelim. Bu durumda $n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

yazabiliriz.

$F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$ olduğunu zaten gördük. Yukarıdaki formül ile daha fazlasını da hesaplayabiliriz.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368,

75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269, 2178309, 3524578, 5702887, 9227465, 14930352,

24157817, 39088169, 63245986, 102334155, 165580141, 267914296, 433494437, 701408733, 1134903170,

1836311903, 2971215073, 4807526976, 7778742049, 12586269025, 20365011074, 32951280099, 53316291173,

86267571272, 139583862445, 225851433717, 365435296162, 591286729879, 956722026041, 1548008755920,

2504730781961, 4052739537881, 6557470319842, 10610209857723, 17167680177565, 27777890035288,

44945570212853, 72723460248141, 117669030460994, 190392490709135, 308061521170129, 498454011879264,

806515533049393, 1304969544928657, 2111485077978050, 3416454622906707, 5527939700884757,

8944394323791464, 14472334024676221, 23416728348467685, 37889062373143906, 61305790721611591,

99194853094755497, 160500643816367088, 259695496911122585, 420196140727489673, 679891637638612258,

1100087778366101931, 1779979416004714189, 2880067194370816120, 4660046610375530309, . . .



Bu sayılara **Fibonacci Sayıları** denir.

Eğer

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

alınırsa,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

eşitliği ile birlikte Fibonacci sayıları tek türlü olarak elde edilir. Bu nedenle Fibonacci sayılarının tanımı bu şekilde verilebilir.

Yukarıdaki eşitlik doğrudan F_n sayısını vermek yerine, ilk iki Fibonacci sayısı ile başlayıp, önceki iki Fibonacci sayısı yardımıyla her bir Fibonacci sayısını vermektedir.

Bu şekildeki tanımlamalara yinelemeli (recurrence) tanımlama denir.



Soru

n basamaktan oluşan bir merdiveni her seferinde bir ya da iki basamak çıkmak koşuluyla kaç farklı şekilde çıkabilirsiniz?

Yine n nin bazı küçük değerleri için inceleyelim:

n	Çıkış şekli	Çıkış sayısı
1	1 adım	1
2	1 adım + 1 adım, 2 adım	2
3	1 adım + 1 adım + 1 adım, 2 adım + 1 adım, 1 adım + 2 adım	3
4	1+1+1+1, 1+1+2, 1+2+1, 2+1+1, 2+2	5
5	1+1+1+1+1, 1+1+1+2, 1+1+2+1, 1+2+1+1, 2+1+1+1, 1+2+2, 2+1+2, 2+2+1	8
:	:	:



- n basamaklı merdivenin J_n farklı şekilde çıkışlabildiğini kabul edelim.
- J_{n+1} sayısını J_k ($1 \leq k \leq n$) sayılarını kullanarak belirlemeye çalışalım.
- Eğer $n + 1$ basamaklı merdiveni *ilk başta bir adım* atarak çıkışmaya başlarsak, geriye n basamak kalır ve bu n basamağı J_n farklı şekilde çıkışabileceğimizi biliyoruz.
- Eğer merdiveni *ilk başta iki adım* atarak çıkışmaya başlarsak, geriye $n - 1$ basamak kalır ve bu $n - 1$ basamağı da J_{n-1} farklı şekilde çıkışabileceğimizi biliyoruz.
- Böylece olası iki durumu da incelemiş olduk. O halde

$$J_{n+1} = J_n + J_{n-1}$$

elde edilir.

Elde edilen bu formül ile Fibonacci sayılarını elde etmek için kullanılan formül aynı. Buradan $F_n = J_n$ diyebilir miyiz? Hayır! $2 = F_3 \neq J_3 = 3$. Ancak, $J_n = F_{n+1}$ yazabilirim.



Bazı Özdeşlikler

Soru

İlk n Fibonacci sayısının toplamı nedir?

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

$$0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$0 + 1 + 1 = 2$$

$$0 + 1 + 1 + 2 = 4$$

$$0 + 1 + 1 + 2 + 3 = 7$$

$$0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12$$

$$0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20$$

$$0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 = 33$$

Tahmini olan?



Varsayımlar/Sanı (Conjecture)

$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Kanıt.

Kanımı tümevarım yöntemini kullanarak yapalım:

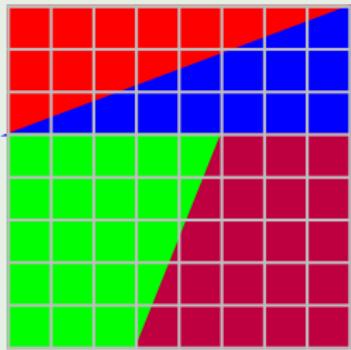
- $n = 0, 1, 2, 3$ için eşitliğin doğru olduğunu yukarıdan biliyoruz.
- $n - 1$ için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim. Yani,
 $F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} = F_{n+1} - 1$ olsun.
- Bu durumda eşitliğin n için de doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} + F_n &= (F_{n+1} - 1) + F_n \\ &= \underbrace{F_{n+1} + F_n}_{F_{n+2}} - 1 = F_{n+2} - 1 \end{aligned}$$

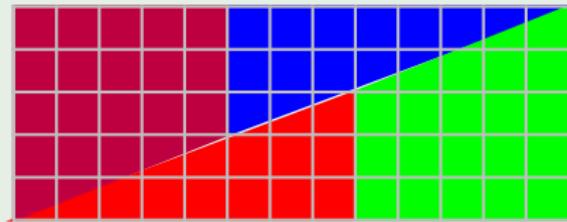
O halde tümevarım yöntemi gereği her n doğal sayısı için eşitlik doğru



Alıştırma (Alıştırma 4.2.9)



$$8 \times 8 = 64$$



$$5 \times 13 = 65$$

- $64 = 65$?
- Bunun Fibonacci sayıları ile ne ilgisi var?

- Öncelikle biraz hile yaptığımı itiraf edeyim. İlk kareden ikinci şekil elde edilemez.
- Şekilde geçen sayılar 5, 8 ve 13 Fibonacci sayılarıdır. $F_5 = 5$, $F_6 = 8$ ve $F_7 = 13$

$$8 \times 8 = 5 \times 13 - 1 \Rightarrow (F_6)^2 = F_5 \times F_7 - 1$$

Peki F_5, F_6, F_7 yerine F_6, F_7, F_8 için yazarsak?

$$\underbrace{(F_7)^2}_{169} = \underbrace{F_6 \times F_8}_{168}$$

Alıştırma (Alıştırma 4.2.3-d)

$$(F_{n+1})^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n$$

olduğunu gösteriniz.



Kanıt.

Kanımı yine tümevarım yöntemini kullanarak yapalım:

- $n = 0$ için $(F_1)^2 = 1 = F_0F_2 + (-1)^0 = 1 \quad \checkmark$
- n için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$(F_{n+1})^2 = F_nF_{n+2} + (-1)^n$$
 olsun.
- $n + 1$ için de eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. Yukarıdaki eşitliğinin her iki tarafına $F_{n+1}F_{n+2}$ eklersek,

$$(F_{n+1})^2 + F_{n+1}F_{n+2} = F_nF_{n+2} + (-1)^n + F_{n+1}F_{n+2}$$

$$\underbrace{F_{n+1}(F_{n+1} + F_{n+2})}_{F_{n+3}} = \underbrace{F_{n+2}(F_n + F_{n+1})}_{F_{n+2}} + (-1)^n$$

$$F_{n+1}F_{n+3} = (F_{n+2})^2 + (-1)^n$$

$$(F_{n+2})^2 = F_{n+1}F_{n+3} + (-1)^{n+1}$$

O halde tümevarım yöntemi gereği her n doğal sayısı için eşitlik doğrudur. □



Aşağıdaki özdeşliklerin de doğru olduğu yineleme formülü ve/veya tümevarım yöntemi kullanılarak gösterilebilir.

- $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
- $F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + \cdots - F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n-1} - 1$
- $F_0^2 + F_1^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$
- $F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}$
- $\binom{n}{0} F_0 + \binom{n}{1} F_1 + \binom{n}{2} F_2 + \cdots + \binom{n}{n} F_n = F_{2n}$



Fibonacci Sayıları İçin Bir Formül

Teorem

Fibonacci sayıları

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

eşitliğini sağlar.



Alıştırma 4.3.1.

Kanıtımı tümevarım yöntemi ile yapalım:

- $n = 0$ ve $n = 1$ için formülün doğru olduğu açıktır.
- $n - 1$ ($n \geq 2$) için formülün doğru olduğunu kabul edelim (tümevarım hipotezi).
- n için de formülün doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
 F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]
 \end{aligned}$$

O halde tümevarım yöntemi gereği formül her n doğal sayısı için doğrudur.



Önce bu formülün nasıl ortaya çıktığına deşinelim: Fibonacci sayılarının oldukça hızlı arttığını biliyoruz. Acaba bu sayılar hangi hızla artıyor? Ardışık Fibonacci sayılarının oranlarına bakalım:

$$\frac{1}{1} = 1, \quad \frac{2}{1} = 2, \quad \frac{3}{2} = 1.5, \quad \frac{5}{3} = 1.666666, \quad \frac{8}{5} = 1.600000,$$

$$\frac{13}{8} = 1.625000, \quad \frac{21}{13} = 1.615384615, \quad \frac{34}{21} = 1.619047619,$$

$$\frac{55}{34} = 1.617647059, \quad \frac{89}{55} = 1.618181818, \quad \frac{144}{89} = 1.617977528,$$

$$\frac{233}{144} = 1.618055556, \quad \frac{377}{233} = 1.618025751, \dots$$

İlk birkaç değeri göz ardı edersek ardışık Fibonacci sayılarının oranının **1.618** e çok yakın olduğunu görüyoruz. Bu bize Fibonacci sayılarının geometrik bir dizi olduğunu düşündürebilir.

Acaba Fibonacci sayıları ile aynı yineleme formülüne sahip bir geometrik dizi var mı bakalım.



G_n dizisi $G_n = cq^n$ şeklinde ($c, q \neq 0$)

$$G_{n+1} = G_n + G_{n-1}$$

yineleme formülünü sağlayan bir geometrik dizi olsun. Bu durumda G_n yerine değerini yazarsak,

$$cq^{n+1} = cq^n + cq^{n-1}$$

olur. Gerekli sadeleştirme yaparsak,

$$q^2 = q + 1$$

elde ederiz. Bu denklemi çözersek,

$$q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618034 \text{ ve } q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0.618034$$

olur.



O halde elimizde Fibonacci sayıları ile aynı yineleme formülüne sahip iki geometrik dizi var:

$$G_n = c \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad \text{ve} \quad G'_n = c \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Maalesef her iki dizi de bize Fibonacci sayılarını vermez. Gerçekten de, $n = 0$ için $F_0 = 0$ olmasına karşın $G_0 = G'_0 = c$ olur.

Ancak,

$$G_{n+1} - G'_{n+1} = (G_n + G_{n-1}) - (G'_n + G'_{n-1}) = (G_n - G'_n) + (G_{n-1} - G'_{n-1})$$

olduğundan $G_n - G'_n$ dizisi yineleme formülünü sağlar.

Ayrıca, $G_0 - G'_0 = 0 = F_0$ olur. Üstelik, $G_1 - G'_1 = c\sqrt{5}$ olur.

O halde $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$ seçilirse $G_1 - G'_1 = 1 = F_1$ elde edilir.



Böylece, aynı başlangıç değerlerine ve aynı yineleme formülüne sahip F_n ve $G_n - G'_n$ gibi iki dizî elde edilir. Öyleyse,

$$F_n = G_n - G'_n$$

olur. G_n ve G'_n yerine değerleri yazılırsa başlangıçta verilen formül elde edilir.

Verilen formülle başka çıkarımlar da yapabiliriz:

- $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618034 > 1$ olduğundan n arttığında G_n üstel olarak artar.
- $-1 < q_2 < 0$ olduğundan n artarken G'_n üstel olarak azalır.
- O halde yeterince büyük n sayıları için $F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$ alabilirmiz.



$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sayısı **Altın Oran** olarak adlandırılan meşhur sayıdır. Hiç beklenmedik yerlerde bu sayı ile karşılaşmak mümkündür. Örneğin, düzgün bir beşgenin köşegeninin kenarına oranı bu sayıyı verir. Ya da

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}},$$

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}} \quad \vdots$$

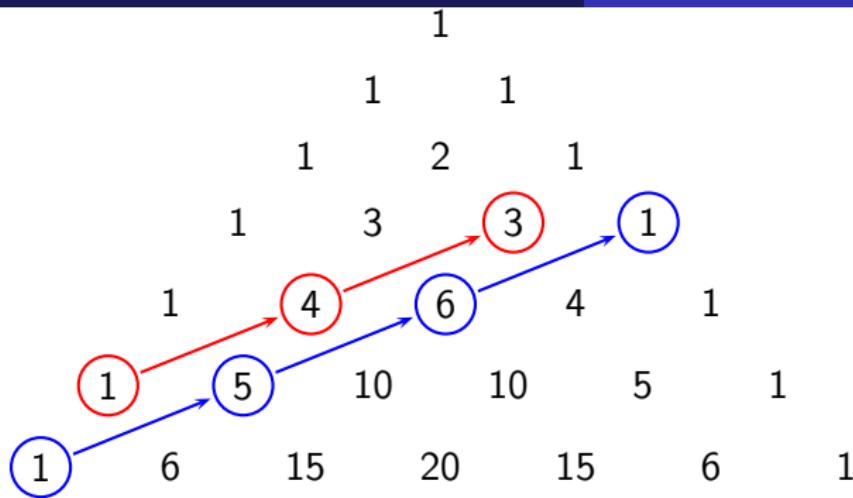


Alıştırmalar

Alıştırma

Pascal üçgeninin herhangi bir satırının soldan ilk elemanını işaretleyin. Daha sonra bu elemandan bir birim doğuya ve bir birim kuzey-doğuya gidip ulaştığınız elemani işaretleyin. Pascal üçgeninin dışına çıkana kadar bu işleme devam edip işaretlediğiniz elemanları toplayın. Farklı satırlar için bu işlemi tekrarladığınızda ne tür sayılar elde edersiniz. Bu işlemi formüle edip kanıtlayınız.





$$\begin{aligned} 1 + 4 + 3 &= 8 = F_6 \\ 1 + 5 + 6 + 1 &= 13 = F_7 \end{aligned}$$

Sanı

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n-k}{k} = F_{n+1}, \quad k = \lfloor n/2 \rfloor$$

Tümevarım yöntemi ve Pascal üçgeninin temel özelliği yardımıyla kolayca gösterilebilir.

- $n = 0$ ve $n = 1$ için doğru olduğunu açık.
- $n \geq 2$ için doğru olsun.
- $n + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim.

Genelliği bozmaksızın n nin tek olduğunu kabul edersek (n çift ise sadece son terimde bir farklılık olacaktır benzer şekilde kanıt yapılabilir),

$$\begin{aligned}
 & \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n-k}{k} \\
 &= 1 + \left[\binom{n-2}{0} + \binom{n-2}{1} \right] + \left[\binom{n-3}{1} + \binom{n-3}{2} \right] + \cdots + \left[\binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k-1}{k} \right] \\
 &= \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{n-k-1}{k} \right] + \left[\binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} \right. \\
 &\quad \left. + \binom{n-4}{2} + \cdots + \binom{n-k-1}{k-1} \right] \\
 &= F_n + F_{n-1} = F_{n+1}
 \end{aligned}$$

olduğundan $n + 1$ içinde doğru dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için eşitlik doğrudur.



Alıştırma

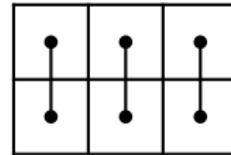
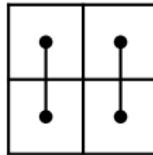
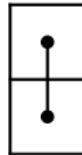
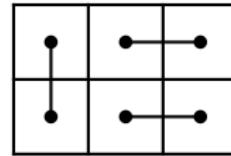
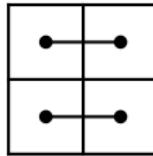
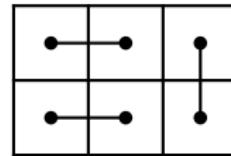
$2 \times n$ boyutlarındaki bir satranç tahtasını domino taşları ile kaç farklı şekilde örtebilirsiniz?

Domino taşı, dikdörtgen şeklinde, satranç tahtasının iki karesi boyutundadır ve domino taşları satranç tahtası üzerine bir beyaz ve bir siyah kareye denk gelecek şekilde yerleştirilebilir. Ayrıca domino taşları özdeş kabul edilecektir.



$2 \times n$ boyutlarındaki bir satranç tahtasını domino taşları ile F_{n+1} farklı şekilde örtebiliriz. Kanıtımı tümevarım ile yapalım:

- Aşağıda görüldüğü gibi $n = 1$ için satranç tahtasını "1", $n = 2$ için "2" ve $n = 3$ için "3" farklı şekilde örtebiliriz.



($n = 4$ için sayının "5" olacağını görünüz.)

- n için mümkün olan tüm farklı örtülüşlerin sayısını $G_n = F_{n+1}$ ile gösterelim.
- $n + 1$ için inceleyelim:
 - Eğer ilk adımda domino taşını dikey pozisyonda koyarsak, geriye n sütun kalır ve bunları G_n farklı şekilde örtebiliriz.
 - Eğer ilk adımda domino taşını yatay koyarsak bu durumda geriye $n - 1$ sütun kalır ve bunları G_{n-1} farklı şekilde örtebiliriz.

O halde $n + 1$ için $G_{n+1} = G_n + G_{n-1}$ olur.

O zaman $2 \times n$ boyutlarındaki bir satranç tahtasını domino taşları ile $G_n = F_{n+1}$ farklı şekilde örtebiliriz.



Alıştırma

F_n , n . Fibonacci sayısını göstermek üzere,

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$$

özdeşliğini kanıtlayınız.

Kanıtı m üzerinden tümevarım ile yapalım.

- $m = 1$ için $F_{n+1} = F_{n-1} \underbrace{F_1}_1 + F_n \underbrace{F_2}_1 = F_{n-1} + F_n \checkmark$
- $m = 2$ için

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n-1} \underbrace{F_2}_1 + F_n \underbrace{F_3}_2 \\ &= F_{n-1} + 2F_n \\ &= \underbrace{F_{n-1} + F_n}_{F_{n+1}} + F_n \\ &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$



- $m = k + 1$ için ifade doğru olsun.
- $m = k + 2$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$F_{n+k} = F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1}$$

ve

$$F_{n+k+1} = F_{n-1}F_{k+1} + F_nF_{k+2}$$

eşitliklerini taraf tarafı toplarsak,

$$F_{n+k+2} = F_{n-1}F_{k+2} + F_nF_{k+3}$$

eşitlik $m = k + 2$ için de doğru olur.

O halde tümevarım yöntemi gereği özdeşliğin doğruluğu elde edilir.



Alıştırma

Her pozitif tam sayının birbirinden farklı Fibonacci sayılarının toplamı olarak yazılabilceğini kanıtlayınız.

- $n = 1, 2, 3$ için doğru olduğu açık.
- n den küçük her tam sayı farklı Fibonacci sayılarının toplamı şeklinde yazılabilsin.
- n sayısının da farklı Fibonacci sayılarının toplamı şeklinde yazılabildiğini gösterelim:
 - n nin kendisi Fibonacci sayısı ise kanıtlanacak bir şey yok.
 - n Fibonacci sayısı olmasın. Bu durumda

$$F_i < n < F_{i+1}$$

olacak şekilde i sayısı vardır. Buradan

$$0 < n - F_i < F_{i+1} - F_i = F_{i-1}$$

olur.



Tümevarım hipotezinden, $n' = n - F_i$ pozitif tam sayısı da farklı Fibonacci sayılarının toplamı olarak yazılabilir.

Ayrıca, $n' < F_{i-1}$ olduğundan bu toplamdaki Fibonacci sayılarının her biri F_{i-1} Fibonacci sayısından daha küçük olacaktır.

Eğer,

$$n' = n - F_i = F_{i_1} + F_{i_2} + \cdots + F_{i_k}, \quad i_j < i-1, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

şeklinde ise

$$n = F_{i_1} + F_{i_2} + \cdots + F_{i_k} + F_i, \quad i_j < i-1, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

olacağından kanıt biter.



Alıştırma (Alıştırma 4.3.6)

$S = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin kaç alt kümesi ardışık iki tam sayı içermez?

Bazı n değerleri için ardışık iki eleman bulundurmayan alt kümelerin sayısını bulalım:

- $n = 0$ ise $S = \emptyset$ olduğundan ardışık iki eleman içermeyen 1 tane alt küme vardır (\emptyset).
- $n = 1$ ise ardışık iki eleman bulundurmayan alt kümeler 2 tanedir (\emptyset ve $\{1\}$).
- $n = 2$ ise ardışık iki eleman bulundurmayan alt kümeler 3 tanedir (\emptyset , $\{1\}$ ve $\{2\}$).
- $n = 3$ ise ardışık iki eleman bulundurmayan alt küme sayısı 5 olur (\emptyset , $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 3\}$).
- $n = 4$ ise ardışık iki eleman bulundurmayan alt küme sayısı 8 olur (\emptyset , $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$).
- :



Elde edilen sayılar Fibonacci sayılarıdır.

$S = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin ardışık iki eleman içermeyen alt kümelerinin sayısını A_n olsun. Kolay anlaşılabilir olması için önce $n = 4$ iken

$S = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin ardışık iki eleman bulundurmayan alt kümelerinin sayısını yani A_4 ü hesaplayalım. Bu alt kümeleri aşağıdaki gibi iki gruba ayıralım:

<p>“4” ü bulunduran ve ardışık eleman içermeyen alt kümeler</p> <p>$\underbrace{\{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}}_{A_2}$</p> <p>“4” kümelere ait olduğundan “3” ait olmamalı. Bu durumda $\{1, 2\}$ kümesinin ardışık iki sayı içermeyen her bir alt kümeye “4” ü ekliyoruz. Bunların sayısı ise varsayımlımızdan A_2 olur.</p>	<p>“4” ü bulundurmayan ve ardışık eleman içermeyen alt kümeler</p> <p>$\underbrace{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}}_{A_3}$</p> <p>Bu kümeler $\{1, 2, 3\}$ kümesinin ardışık iki eleman içermeyen alt kümeleri oluyor. Bunların sayısı da varsayımlımız gereği A_3 olur.</p>
---	--



Böylece

$$A_4 = A_2 + A_3$$

olur.

Yukarıda "4" yerine n alıp, diğer sayıları da $n - 1$ ve $n - 2$ ile değiştirirsek,

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$$

olur.

$A_0 = 1$ ve $A_1 = 2$ olduğundan $A_n = F_{n+2}$ olur.



Alıştırma

n digit uzunlığında ve "1" ile başlayan, "1" ler "1" ler ile, "0" lar "0" lar ile yan yana gelme koşuluyla ("0" ve "1" lerin yalnız kalmasını istemiyoruz!) kaç farklı binary string yazılabilir? Örneğin, $n = 8$ için bazı istenen ve istenmeyen durumlar aşağıda verilmiştir.

- | | |
|----------|---------------------------------|
| 11000111 | ✓ |
| 11100111 | ✓ |
| 10001111 | X en baştaki "1" yalnız kalmış. |
| 11011000 | X yalnız bir "0" var |
| 11001000 | X yalnız bir "1" var |
| 00011000 | X "1" ile başlamıyor |



Önce bazı n değerleri için elde edilen binary stringleri yazalım:

n	Binary String	A_n
1	-	0
2	11	1
3	111	1
4	1111, 1100	2
5	11111, 11100, 11000	3
6	111111, 111100, 111000, 110011, 110000	5
7	1111111, 1111100, 1111000, 1110011, 1110000, 1100111, 1100011, 1100000	8
:	:	:

Yukarıdaki tablodan elde edilen sayıların Fibonacci sayıları olduğu görüyoruz.



n karakter uzunluğunda ve verilen koşulları sağlayan binary string sayısının F_{n+1} olduğunu kanıtlayalım.

n karakter uzunluğunda ve verilen koşulları sağlayan farklı binary stringların sayısına A_n diyelim. Bu şekildeki binary stringlerin soldan üçüncü digit'i için iki durum söz konusudur:

- $\underbrace{111xxx\dots x}_{n \text{ tane}}$
- $\underbrace{1100xx\dots x}_{n \text{ tane}}$

Birinci durumu ele alırsak, soldan ilk digit'i attığımızda $n - 1$ digitli ve verilen koşulları sağlayan bir binary string elde ederiz ki bunların sayısı A_{n-1} olur.



İkinci durumda yani 3. digit “0” ise bu durumda koşullar gereği 4. digitte “0” olmak zorundadır.

Şimdi, ilk iki digit atılarak elde edilen $n - 2$ digit uzunluğunda, “00” ile başlayan ve istenen koşulları sağlayan binary stringleri düşünecek olursak bunların sayısı $n - 2$ digit uzunluğunda “11” ile başlayan ve istenen koşulları sağlayan binary stringlerin sayısı ile aynı ve A_{n-2} olur. Yani, “0” lar ile “1” leri değiştirmek bir şey değiştirmez.

O halde bu iki durumu birleştirirsek, $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ olur. Yukarıdaki tablodan $A_2 = 1$ ve $A_3 = 1$ olduğundan $A_n = F_{n+1}$ elde edilir.



Alıştırma

Sosyal yardım için sıradı bekleyen 10 vatandaşa kömür ve gıda yardımı yapılacaktır. Sırada bekleyen ardışık iki kişiye kömür vermemek ve sıradakilere yardımlardan sadece birini vermek koşuluyla bu dağıtım kaç farklı şekilde yapılabilir?

Önce problemi basitleştirip sıradı bekleyen 1,2,3,4 ve 5 kişi varken yardımların kaç farklı şekilde dağıtılabileceğini inceleyelim. Gösterimlerde kısalık açısından kömür yardımını K, gıda yardımını G ile gösterelim.



n	Dağıtımlar	A_n
1	K, G	2
2	KG, GK, GG	3
3	KGK, KGG, GGK, GKG, GGG	5
4	KGKG, KGGK, KGGG, GKGK, GKGG, GGKG, GGGK, GGGG	8
5	KGKGK, KGKGG, KGGKG, KGGGK, KGGGG, GKGKG, GKGGK, GKGGG, GGKGK, GGKGG, GGGKG, GGGGK, GGGGG	13
:	:	:

Elde edilen sayılar Fibonacci sayılarıdır.



Şimdi sırada n kişi varken dağıtımların sayısını A_n ile gösterelim.

- Buna göre sırada n kişi varken ilk kişiye kömür verildiyse ikinci kişiye gıda verilmek zorunda olduğundan bu şekildeki dağıtımların sayısı A_{n-2} olur.
- Eğer ilk kişiye gıda verilirse ikinci kişiye herhangi bir yardım verilebileceği için bu şekildeki dağıtımların sayısı A_{n-1} olur.

O zaman toplam dağıtım sayısı $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ elde edilir.

Yukarıdaki tablodan $A_1 = 2$ ve $A_2 = 3$ olduğundan $A_n = F_{n+2}$ diyebiliriz.

Böylece istenen cevap $A_{10} = F_{12} = 144$ elde edilir.

