

# MAT223 AYRIK MATEMATİK

Çizgeler  
7. Bölüm

Emrah Akyar

Anadolu Üniversitesi  
Fen Fakültesi Matematik Bölümü, ESKİŞEHİR

2014–2015 Öğretim Yılı

## Çift ve Tek Dereceler

## Soru

*51 kişinin katıldığı bir davette tanıdığı kişi sayısı çift sayı olan en az bir davetli var mıdır?*

Burada  $A$  kişisi  $B$  kişisini tanıyorsa,  $B$  kişinin de  $A$  kişisini tanıdığı kabul edilecektir. Ayrıca kişilerin kendilerini tanıması ya da tanımaması durumlarını dikkate almayacağız.

Nasıl çözeceğiniz hakkında bir fikriniz yoksa deneme yanılma yöntemini kullanmayı düşünebilirsiniz. Ancak, 51 kişinin ismini bir yere yazıp daha sonra her bir kişinin tanıdığı kişileri gösterir listeler yapmaya çalışmak neredeyse imkansızdır.



O zaman 51 yerine daha az sayıda kişi alarak aynı yöntemi deneyebilirsiniz.

Örneğin, 51 yerine 50 alınsa iddia doğru olur mu? Herkesin birbirini tanıdığı düşünülürse, bu durumda 50 kişi hepsi de 49 ar kişi tanımış olur ve tanıdığı kişi sayısı çift sayı olan kimse olmaz.

O halde 51 davetli yerine 50 davetli için bu sorunun yanıtı kesinlikle hayır olur.

Aynı şeyleri davetli sayısı herhangi bir çift sayı olduğunda da söyleyebiliriz.

O halde soruyu aşağıdaki şekilde genelleyerek değiştirelim.

### Soru

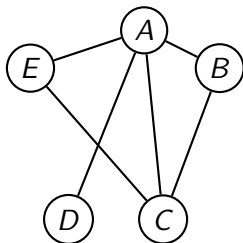
*Tek sayıda davetlinin katıldığı bir davette her zaman çift sayıda kişiyi tanıyan en az bir davetli var mıdır?*



Bu soruyu az sayıda davetlinin katıldığı bir durum için inceleyelim.

5 davetlimiz olsun ve bunları  $A, B, C, D$  ve  $E$  diye adlandıralım. Kabul edelim ki,  $A$  herkesi tanısin.  $B, C$  ve  $A$  yı tanısin.  $C, B, E$  ve  $A$  yı tanısin.  $D$  sadece  $A$  yı tanısin.  $E$  ise  $B$  ve  $A$  yı tanısin.

Sadece bu beş kişi için dahi kişileri ve bu kişilerin tanıdığı kişileri listelemek oldukça zordur. Bununla birlikte aşağıdaki grafik gösterim işleri oldukça kolaylaştırır.



Şekil: Davetliler arasındaki tanışıklık durumunu gösteren grafik

Her bir davetliyi düzlemde bir noktayla kişiler arasındaki tanışıklığı da bu noktalar arasında çizeceğimiz çizgiler ile gösterelim.

Bu şekle bir **çizge** adı verilir. Daha kesin tanımıyla çizge, **noktalar** ve bu noktaları birleştiren **kenarlar** kümesinden oluşur.

Bir  $G$  çizgesinin noktalarının kümesi genellikle  $V$ , kenarlarının kümesi ise  $E$  ile gösterilir. Bu durumda  $G = (V, E)$  şeklinde yazılır.

Çizgenin her bir kenarı  $V$  kümesinin iki elemanlı bir alt kümesi gibi düşünülebilir. Örneğin,  $G$  nin  $u$  ve  $v$  gibi iki noktasını birleştiren kenar,  $\{u, v\}$  kümesi olarak düşünülebilir. Ancak, biz bu yazım şekli yerine kenarı  $uv$  şeklinde göstereceğiz.



Bir kenarın iki uç noktasına ise **komşu noktalar** denir.

Bir çizgenin iki noktası arasında birden fazla kenarın olmasına, ya da bir noktadan kendisine bir kenar çizilmesine de izin verilebilir.

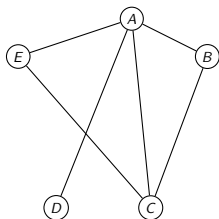
Ancak, biz bu ders kapsamında iki nokta arasında birden fazla kenarın bulunmasına çoğunlukla izin vermeyeceğiz.

Ayrıca, bir kenarın her zaman iki farklı noktayı birleştirdiğini düşüneceğiz. Bu şekildeki çizgelere **basit çizge** denir.



Tekrar sorumuza geri dönelim:

İlgilendiğimiz konu davetlilerin tanıdığı kişi sayısı. Bu sayı çizgede her bir noktadan çıkan kenar sayısına karşılık gelir ve bu sayıya o noktanın **derecesi** denir. Bir  $v$  noktasının derecesi  $d(v)$  ile gösterilir.



Buna göre yanda verilen çizgede  $A$  nın derecesi 4,  $B$  nin derecesi 2,  $C$  nin derecesi 3,  $D$  nin derecesi 1 ve  $E$  nin derecesi 2 olur.

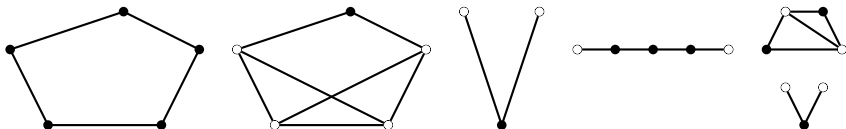
O halde sorumuzu çizge kuramının dilinde

### Soru

*Tek sayıda noktası olan bir çizgede derecesi çift olan bir nokta her zaman var mıdır?*

şeklinde ifade edebiliriz.

Nokta sayısı tek olan bazı çizgeler için olası farklı durumları inceleyelim:



**Şekil:** Nokta sayısı tek olan bazı çizgeler. Siyah noktalar derecesi çift olan noktaları göstermektedir.

Yukarıdaki şekilden derecesi çift olan en az bir noktanın olduğu görülmekle birlikte *böyle noktaların sayısının da tek sayı olduğu* gözlenmektedir.



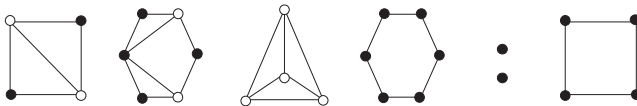
O halde başlangıçtaki sorumuzu kanıtlanması daha kolay, fakat daha genel olan aşağıdaki soru ile değiştirelim.

### Soru

*Tek sayıda noktası olan bir çizgede derecesi çift olan noktaların sayısı tektir.*

(Çizgenin nokta sayısı tek sayı ve derecesi çift olan noktaların sayısı tek sayı olduğuna göre, tek sayıda noktası olan bir çizgede derecesi tek olan noktaların sayısının çift olması gerekir)

Benzer olarak nokta sayısı çift olan bazı çizgeler için olası durumları inceleyelim.



**Şekil:** Nokta sayısı çift olan bazı çizgeler. Siyah noktalar derecesi çift olan noktaları göstermektedir.

Şekil 3 den ise derecesi çift olan noktaların sayısının da çift sayı olduğu izlenimi edinilebilir. Buradan şu soruyu sorabiliriz:

### Soru

*Çift sayıda noktası olan bir çizgede derecesi çift olan noktaların sayısı çift midir?*

(Çizgenin nokta sayısı çift ve derecesi çift olan noktaların sayısı da çift olduğundan çift sayıda noktası olan bir çizgede derecesi tek olan noktaların sayısının da çift olması gerekir.)



Bu iki soruya da olumlu cevap vermeyi sağlayan aşağıdaki teoremi verelim.

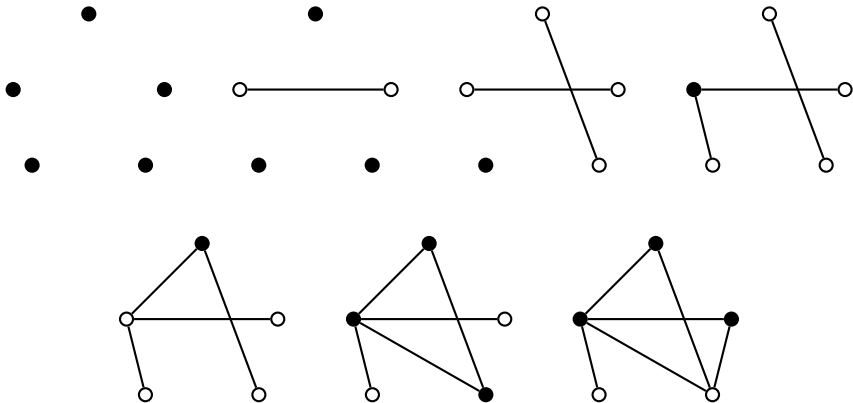
### Teorem

Herhangi bir çizgede derecesi tek olan noktaların sayısı çifttir.

**KANIT:** Keyfi sayıda noktası olan bir çizge alalım.

Başlangıçta çizgenin hiç bir kenarı olmasın. Daha sonra bu çizgeye aşağıda Şekil 4 olduğu gibi her seferinde yeni bir kenar ekleyelim.





**Şekil:** Her seferinde yeni bir kenar ekleyerek elde edilen çizgeler. Siyah noktalar derecesi çift olan noktaları göstermektedir.

Şekilden de görüldüğü gibi çizgeye yeni bir kenar eklendiğinde derecesi tek olan noktaların sayısı

- ya 2 azalır (eğer eklenen kenarın uç noktalarının derecesi tek ise),
- ya 2 artar (eğer eklenen kenarın uç noktalarının derecesi çift ise),
- ya da değişmez (eğer eklenen kenarın uç noktalarının birinin derecesi tek diğerinin çift ise).

Başlangıçta derecesi tek olan noktaların sayısı sıfır yani, çift olduğundan ve her bir kenar eklendiğinde bu noktaların sayısı çift kalmaya devam ettiğinden, herhangi bir çizgede derecesi tek olan noktaların sayısı çifttir.

Böylece kanıt biter.



## Alıştırma (Alıştırma 7.1.2)

- Noktalarının derecesi 2,3,3,3,3,3 olan 6 noktalı bir çizge var mıdır?

Derecesi tek olan noktaların sayısı çift olmadığından böyle bir çizge yoktur.

- Noktalarının derecesi 0,1,2,3,4,5 olan 6 noktalı bir çizge var mıdır?

6 noktalı bir çizgede derecesi hem 0 hem de 5 olan iki nokta olamaz. Bu nedenle böyle bir çizge yoktur.

- 10 noktalı bir çizgede maksimum kenar sayısı nedir?

Kenarlar çizgenin noktalarının 2 elemanlı alt kümeleri olarak düşünülürse, 10 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı  $\binom{10}{2}$  olduğundan cevap  $\binom{10}{2}$  olur.



### Alıştırma (Alistirma 7.1.6)

20 noktalı kaç farklı çizge vardır?

Yukarıdan 20 noktalı bir çizgenin maksimum kenar sayısının  $\binom{20}{2}$  olduğunu biliyoruz.

Her bir kenar için iki durum söz konusudur:

- Kenar ya çizgeye aittir
- ya da çizgeye ait değildir.

O halde cevap

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{\binom{20}{2} \text{ tane}} = 2^{\binom{20}{2}}$$

olur.



Her bir kenar iki nokta ile belirlendiğinden her bir kenar aslında çizgenin iki noktası ile eşlenmiş olur.

Diğer taraftan bir noktadan çıkan kenar sayısı o noktanın derecesini gösterdiğinden aşağıdaki teoremi elde etmiş oluruz.

### Teorem

Bir çizgedeki tüm noktaların derecelerinin toplamı çizgedeki kenar sayısının iki katına eşittir. Yani  $G = (V, E)$  çizgesinde

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

olur.





Bu teoremi kullanarak,

- herhangi bir çizgede tüm noktaların derecelerinin toplamının çift sayı olduğunu söyleyebiliriz.
- Benzer olarak herhangi bir çizgede derecesi tek olan noktaların derecelerinin toplamının da çift sayı olduğunu söylenebilir.

Bu ise derecesi tek olan noktaların sayısı çift iken mümkündür. Bu da az önce kanıtlanan Teorem 1.1 den başka bir şey değildir.



## Yollar, Döngüler ve Tekparça Çizgeler

Önce özel tipte olan bazı çizgeleri ele alalım.

En basit çizge hiç bir kenarı olmayıp, sadece noktalardan oluşan çizgedir.

Bir diğer basit çizge ise  $n$  tane noktası ve bu noktaların herhangi ikisi arasında bir kenarın olduğu çizgelerdir. Bu çizgelere **tam çizge** denir.

$n$  noktalı bir tam çizge genellikle  $K_n$  simgesiyle gösterilir.  $K_n$  tam çizgesinin kenar sayısı  $\binom{n}{2}$  olur.

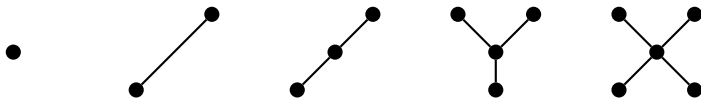
Çizgelerin bir bağıntıyı temsil ettiğini düşünürsek, bir çizgenin iki noktası arasında bir kenar varsa, bu noktalar bağıntılı noktalar olacaktır. Buradan, bir  $G$  çizgesi verildiğinde bu çizge yardımıyla aynı nokta kümesine sahip ve  $G$  de bağıntılı olmayan iki noktayı bağıntılı, bağıntılı iki noktayı da bağıntısız hale getirerek yeni bir  $\bar{G}$  çizgesi elde edilebilir.

$\bar{G}$  çizgesine  $G$  çizgesinin **tümleyeni** denir.



Eğer  $n$  noktalı bir çizgede bir noktadan diğer tüm noktalara kenar varsa bu çizgeye **yıldız çizge** denir.

Açıktır ki,  $n$  noktalı bir yıldız çizgenin kenar sayısı  $n - 1$  olur. Şekil 5 de bazı  $n$  değerleri için yıldız çizgeleri verilmiştir.



Şekil:  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  için yıldız çizgeleri

Bir  $G$  çizgesi verilsin.  $G$  nin kenarlarının

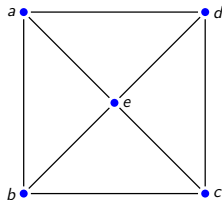
$$v_0 v_1, v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{m-1} v_m$$

şeklindeki sonlu bir dizisine  $G$  içinde bir **tur** (walk) denir.  $G$  içindeki bir tur

$$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-1} \rightarrow v_m$$

şeklinde ya da ardışık noktalar komşu olmak üzere  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_m$  şeklinde de gösterilebilir. Bu durumda  $v_0$  noktasına turun *başlangıç noktası*,  $v_m$  noktasına da turun *bitiş noktası* denir. Böyle bir tura da  $v_0$  noktası ile  $v_m$  noktasını *birleştiriyor* denir.

Bir turun kenar sayısına da o *turun uzunluğu* denir.



Yandaki çizgede

$$ad, de, ec, cb, ba, ae$$

kenarlar dizisi  $a$  ve  $e$  noktalarını birleştiren ve uzunluğu 6 olan bir turdur.

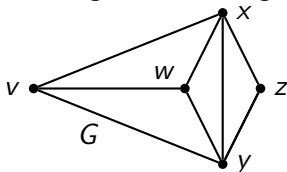


$v_0, v_1, v_2, \dots, v_m$ ,  $G$  çizgesinde bir tur olsun. Eğer turun tüm  $v_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) noktaları farklıysa bu tura  $G$  içinde bir **yol** (path) denir.

O halde tur bir noktadan birçok kez geçebilmesine karşın, yol bir noktadan en fazla bir kez geçebilir.

- Eğer bir turun başlangıç ve bitiş noktası aynı ise bu tura  $G$  içinde bir **kapalı tur** denir.
- Eğer bir yolun başlangıç ve bitiş noktaları aynı ise bu yola  $G$  içinde bir **döngü** denir.

Uzunluğu  $k$  olan döngüye (yola) kısaca  $k$ -döngü (yol) denir.



$v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z$ ,  $G$  içinde bir yol olur.

$v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow v$ ,  $G$  içinde bir döngü olur.

$v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow v$ ,  $G$  içinde bir kapalı tur olur.

### Alıştırma (Alıştırma 7.2.3)

Hem kendisi hem de tümleyeni

- a. yol olan
- b. döngü olan

tüm çizgeleri bulunuz.

$n$  noktalı bir çizgenin tüm kenarlarının sayısı  $\binom{n}{2}$  ve yolun kenar sayısı  $n - 1$  olduğuna göre

$$(n - 1) + (n - 1) = \binom{n}{2}$$

eşitliğinden  $n = 1$  ve  $n = 4$  elde edilir.

O halde hem kendisi hem de tümleyeni yol olan sadece iki çizge vardır.



Benzer şekilde  $n$  noktadan oluşan bir döngünün kenar sayısı da  $n$  olduğundan

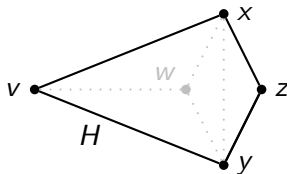
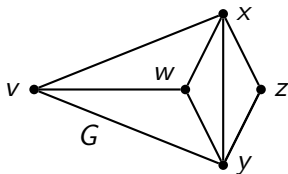
$$n + n = \binom{n}{2}$$

denkleminde  $n = 5$  elde edilir. Her iki çizgede aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



**Şekil:** Hem kendileri hem de tümleyenleri yol ve döngü olan çizgeler

Bir  $G$  çizgesinin bazı kenarları ve noktaları silinerek elde edilen  $H$  çizgesine  $G$  nin **alt çizgesi** denir (Elbette  $G$  nin bir noktası siliniyorsa bu noktanın bulunduğu kenarın da silinmesi gerekir).

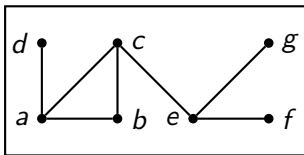




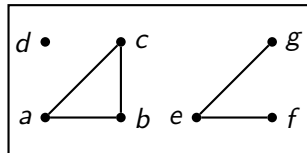
Bir  $G$  çizgesinin keyfi iki noktası  $G$  deki bir yol ile birleştirilebiliyorsa,  $G$  çizgesine **tekparça** (bağlantılı) çizge denir.

Bir başka ifadeyle  $G$  nin keyfi  $u$  ve  $b$  noktaları için, uç noktaları bu noktalar olan ve  $G$  nin alt çizgesi olan bir yol varsa  $G$  ye tekparça çizge denir.

Bir  $G$  çizgesinin maksimal tekparça alt çizgesine  $G$  nin tekparça bileşeni denir. Bir başka ifadeyle,  $H$  tekparça ve  $H$  yi bulunduran diğer alt çizgeler tekparça değil ise  $H$  ye  $G$  nin tekparça bileşeni denir.



tekparça bir çizge örneği



tekparça olmayan bir çizge örneği  
(Üç tane tekparça olan bileşeni var)

### Alıştırma (Alıştırma 7.2.11)

$n$  noktalı ve kenar sayısı  $\binom{n-1}{2}$  den fazla olan  $G$  çizgesi tekparçadır. Gösteriniz.

Kabul edelim ki,  $G$  tekparça olmasın. Bu durumda  $G$  nin  $H$  gibi  $k$  noktalı bir tekparça bileşeni vardır.

$k$  noktalı bu  $H$  tekparça bileşeninin kenar sayısı en fazla  $\binom{k}{2}$  olabilir.

Diğer taraftan, geriye kalan çizge de en fazla  $\binom{n-k}{2}$  kenarlı olabilir. Buradan

$$\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} = \binom{n-1}{2} - (k-1)(n-k-1) \leq \binom{n-1}{2}$$

elde edilir.

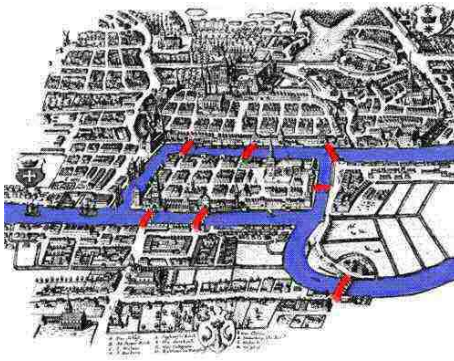
Bu ise  $G$  nin kenar sayısının  $\binom{n-1}{2}$  den fazla olması ile çelişir.

O halde  $G$  tekparça olmak zorundadır.



## Euler Turu ve Hamilton Döngüleri

Çizge kuramına ait belkide en eski sonuç 18. yüzyılda Leonhard Euler tarafından keşfedilmiştir. Bu sonuç Königsberg (şimdiki adıyla Kaliningrad) da yaşayan halkın ortaya attığı bir soru üzerine elde edilmiştir. Şehir Pregel nehrinin kolları ile dört farklı bölgeye ayrılmaktaydı ve nehrin üzerinde yer alan yedi köprü ile bu bölgeler birbirine bağlanmaktaydı (bakınız Şekil 7).



Şekil: Euler zamanında Königsberg köprüleri

Her köprüden sadece bir kez geçilen bir turun olup olmadığı sorusu bize bu önemli sonucu vermiştir.

Euler 1736 yılında yayımladığı bir makalesinde böyle bir turun *mümkün olmadığını* kanıtlamıştır.

Euler in kanıtı oldukça basitti: Böyle bir turun var olduğunu kabul edelim. Şehrin herhangi dört bölgesinden birini ele alalım. Örneğin, Kneiphoff adasını ele alalım ve turun bu adadan *başlamadığını* kabul edelim. Bu adayı diğer bölgelerle birleştiren köprülerin sayısı beş olduğundan turun bu adada bitmesi gerekir. Ancak, aynı durum diğer üç bölge içinde geçerlidir. Yani, bir bölgeden başlamayan bir turun o bölgede bitmesi gerekir (her bir bölgeye çıkan köprülerin sayısı tek olduğundan). Bu ise mümkün değildir.



Euler mümkün tüm turları listeleyip, istenen koşulu sağlayan turun bu turlar içerisinde olup olmadığını kontrol etmek yerine genel durumu formüle etmiştir.

Bir çizgede her kenardan bir kez geçilen bir tura **Euler turu** denir (tur kapalı olmak zorunda değil).

### Teorem

- 1 Tekparça bir çizgede derecesi tek olan noktaların sayısı ikiden fazla ise bu çizgede Euler turu yoktur.
- 2 Tek dereceli nokta sayısı iki olan tekparça bir çizgede Euler turu vardır ve tur, bu noktalardan birinde başlayıp diğerinde biter.
- 3 Tek dereceli noktası olmayan bir tekparça çizgede kapalı Euler turu vardır.

Bu teorem bize bir  $v$  noktası tek dereceli ise varsa Euler turunun ya  $v$  de başladığını ya da  $v$  de bittiğini,  $v$  noktasının derecesi çift ise varsa Euler turunun ya  $v$  de başlayıp bittiğini ya da  $v$  den başka bir noktada başlayıp bittiğini söylemektedir.



**KANIT:**  $v$  herhangi bir nokta olsun.  $v$  den başlayıp  $v$  de biten ve her kenarı en fazla bir kez kullanan kapalı turu ele alalım.

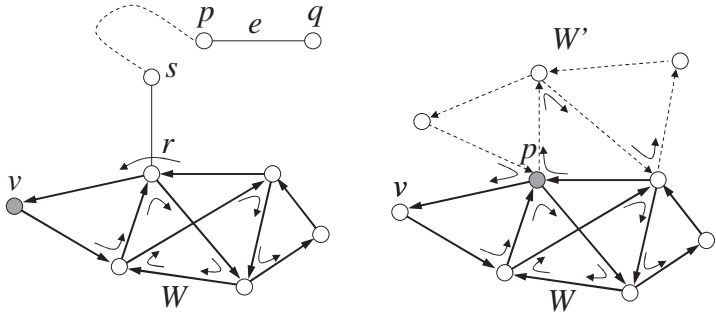
Böyle bir tur her zaman vardır (En azından sadece  $v$  den oluşan tur böyle bir turdur).

Ancak, bu çok kısa tur yerine  $v$  de başlayan ve her kenardan en fazla bir kez geçen en uzun kapalı  $W$  turunu arıyoruz.

Amacımız bu şekildeki bir  $W$  turunun bir Euler turu olduğunu göstermek.

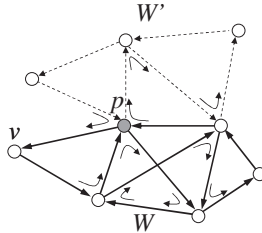
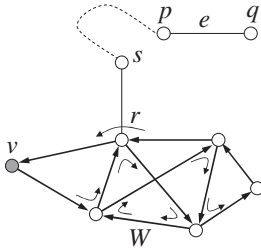


Kabul edelim ki bu  $W$  turu Euler turu olmasın. O zaman  $W$  tarafından kullanılmayan bir  $e$  kenarı vardır.



**Şekil:**  $W$  de olmayan fakat  $W$  ile kesişen bir kenar bulmak ve  $W$  ile  $W'$  nün birleşimi

Önce, bu  $e$  kenarının bir noktası  $W$  de bulunacak şekilde seçilebileceğini gösterelim.



Eğer  $p$  ve  $q$  noktaları  $e$  kenarının uç noktaları ise  $W$  her iki noktayı da bulundurmaz.

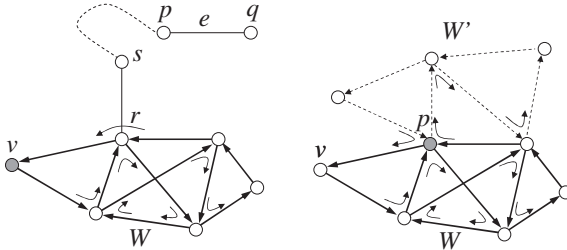
Ancak, çizge tekparça olduğundan  $p$  noktasından  $v$  noktasına bir yol her zaman vardır.

$r$  noktası bu yolun  $W$  ile kesiştiği ilk nokta olsun. Bu durumda  $e' = sr$  alırsak,  $e'$  kenarı yolun  $r$  noktasından hemen önceki kenarı olur.

$s$  noktası  $W$  turunda olmadığından  $W$ ,  $e'$  kenarı bulundurmaz.

Böylece,  $e$  ve  $e'$  kenarlarını değiştirirsek, bir noktası  $W$  da olan fakat  $W$  da bulunmayan bir  $e$  kenarı elde etmiş oluruz.





Şimdi  $e$ ,  $W$  de bulunmayan fakat  $p$  noktası  $e$  kenarının uç noktalarından biri olmak üzere  $W$  ya ait olsun. Bu  $p$  noktasından  $e$  kenarı ile başlayarak

yenı bir  $W'$  turu oluşturalım. Ancak  $W'$  turunda  $W$  nun kenarları kullanılmasın ve her bir kenar sadece bir kez kullanılsın.

Nokta sayısı sonlu olduğundan bu  $W'$  turu eninde sonunda bir noktada son bulacaktır. Fakat, hangi noktada son bulacaktır?

$W'$  turunun son bulduğu noktayı  $u$  ile gösterelim ve  $u \neq p$  olsun. Bu durumda  $u$  noktasının derecesi tek olur. Oysa bir çizgede derecesi tek olan noktaların sayısı çift sayıdır.

O halde  $W'$  turunun son bulacağı tek nokta  $p$  noktasıdır. Yani  $W'$  turu da bir kapalı tur olur.

Bu iki kapalı turun Şekil 8 deki gibi birleşimi bize istenen Euler turunu verir.



Böylece Teoremin 3. şikkını tamamlamış olduk. 1. ve 2. şıklarda benzer şekilde kanıtlanabilir.

Eulerin bu sonucu, 'Tek parça bir çizgede kapalı Euler turunun olması için gerek ve yeter koşul her noktanın derecesinin çift olmasıdır' şeklinde formüle edilebilir.

Königsberg Köprülerine benzer bir problem 1856 yılında ünlü matematikçi Hamilton tarafından ortaya atılmıştır. Bir çizgenin tüm noktalarını kullanan bir döngüye **Hamilton döngüsü** denir.

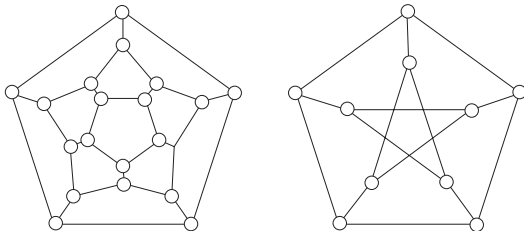
Acaba bir çizgede ne zaman bir Hamilton döngüsü vardır?



Hamilton döngüsü Euler turuna benzer gözükmese karşı, Hamilton döngüsü ile ilgili bilgilerimiz Euler turundan daha azdır.

Euler bize verilen bir çizgede Euler turunun olup olmadığını kontrol etmek için bir teorem vermesine karşı, verilen bir çizgede Hamilton döngüsünün olup olmadığını kontrol etmek için kullanışlı bir yöntem yoktur.

Sadece aşağıdaki iki çizge bile Hamilton döngüsünün varlığını araştırmanın ne kadar zor olduğunu göstermektedir.



**Şekil:** Dodecahedron ve Petersen çizgeleri. İlkinde Hamilton döngüsü yokken ikincisinde Hamilton döngüsü vardır.

# Tek Hamlede Çizilen Çizgeler

