

MAT223 AYRIK MATEMATİK

Kombinatoryal Olasılık

5. Bölüm

Emrah Akyar

Anadolu Üniversitesi
Fen Fakültesi Matematik Bölümü, ESKİŞEHİR

2014–2015 Öğretim Yılı

Olaylar ve Olasılıklar

- Karşılaşılması düşünülen tüm sonuçların oluşturduğu kümeye **örnek uzayı** (sample space) denir. Örnek uzayı genellikle S ile göstereceğiz.

Örneğin, yazı–tura atıldığında $S = \{Y, T\}$, zar atıldığında ise $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olacaktır.

- Örnek uzayın her alt kümesine bir **olay** (event) denir.

Örneğin, zar atıldığında $E = \{2, 4, 6\} \subset S$ kümesi zarın çift gelme olayı olarak düşünülebilir. Benzer şekilde, $L = \{4, 5, 6\} \subset S$ alt kümesi de zarın 3 ten büyük olma olayına karşılık gelir.

- İki kümenin arakesiti ise her iki olayın da ortaya çıkma olayına karşılık gelir. Örneğin, $L \cap E = \{4, 6\}$ alt kümesi zarın hem çift hem de ortalamadan daha büyük olma olayına karşılık gelir.



- Eğer A ve B olayları (yani S nin alt kümeleri) için $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B olaylarına **ayrık (exclusive) olaylar** denir. Örneğin, $O = \{1, 3, 5\}$ zarın tek gelme olayı ise $E \cap O = \emptyset$ olduğundan E ve O olayları ayrık olaylar olur.
- $A \cup B \subset S$ alt kümesi (olayı) ise A ya da B olaylarından en az birisinin ortaya çıkma olayına karşılık gelecektir. Örneğin, $L \cup E = \{2, 4, 5, 6\} \subset S$ alt kümesi zarın çift ya da 3 ten büyük gelme olayına karşılık gelir.



$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ kümesi bir rassal deney¹ sonucu karşılaşılabilecek sonuçlar kümesi (örnek uzayı) olsun.

$s_i \in S$ için s_i nin ortaya çıkma olasılığı $P(s_i)$ ile gösterilir ve

- Her $s_i \in S$ için $P(s_i) \geq 0$,
- $P(s_1) + P(s_2) + \dots + P(s_k) = 1$

koşullarını sağlar. Bu olasılıklar ile birlikte S ye **olasılık uzayı** denir.

- Yazı–Tura: $P(Y) = P(T) = \frac{1}{2}$
- Zar: $P(i) = \frac{1}{6}$

Her bir sonucun ortaya çıkma olasılığı aynı ise bu olasılık uzayına **düzgün olasılık uzayı** denir. Biz bu derste sadece bu tip uzaylar ile ilgileneceğiz.

Eğer havanın yağmurlu ya da yağmurlu olmaması ile ilgileniyorsak, $S = \{\text{Yağmurlu}, \text{Yağmurlu değil}\}$ olur. Elbette bunların olasılıkları aynı olmadığı için bu uzay düzgün olasılık uzayı değildir.

¹Bir deneyin bütün olası sonuçlarını biliyorsak, Deney uygulandığında onun hangi sonuçla sonuçlanacağını bilmiyorsak ve Deney aynı koşullar altında tekrarlanabiliyorsa bu bir rassal deneydir.



$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ kümesi bir rassal deney sonucu karşılaşılabilecek sonuçlar kümesi (örnek uzayı) olsun. $A \subset S$ olayının meydana gelme olasılığı $P(A)$ ile gösterilir ve düzgün olasılık uzayında

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{|A|}{k}$$

ile tanımlanır. Yani $P(A)$, A daki her bir öğenin ortaya çıkma olasılıklarının toplamı olur. Kolayca gösterilebilir ki,

- A ve B ayrık olaylar ise $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$,
- Herhangi iki A ve B olayı için

$$P(A \cap B) + P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

olur. (Alıştırma 5.1.4 ve 5.1.5)



Bir rassal deney aynı koşullar altında n defa tekrarlınsın. Bunu tek bir deney şeklinde düşünmek de mümkündür. Bu durumda sonuç, S örnek uzayının elemanlarından oluşan n bileşenli bir dizi gibi düşünülebilir.

n defa tekrar eden bu olayın örnek uzayını

$$S \times S \times \cdots \times S = S^n$$

ile gösterebiliriz. Buradan, ortaya çıkabilecek sonuçların sayısı k^n olur. O halde $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S^n$ sonucunun ortaya çıkma olasılığı,

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{k^n}$$

olur.

Örneğin, iki defa yazı–tura atılsın. Bu durumda $S = \{Y, T\}$ iken $S^2 = S \times S = \{YY, YT, TY, TT\}$ olur. Böylece her bir sonucun ortaya çıkma olasılığı $\frac{1}{4}$ elde edilir.



İki veya daha fazla olayın her birinin ortaya çıkması bir diğerine bağlı değilse bunlara **bağımsız olaylar** denir.

Formal olarak, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ise A ve B olayları bağımsız olaylardır.

Örneğin, yine iki kez yazı–tura atıldığını düşünelim. A olayı ilk paranın tura gelmesi, B olayı ise ikinci paranın tura gelmesi olsun. Bu durumda

$$P(A) = P(TT) + P(TY) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P(TT) + P(YT) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(TT) = \frac{1}{4}$$

olur.

$$\frac{1}{4} = P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

olduğundan A ve B (beklendiği gibi) bağımsız olaylardır.



Aynı anda hem yazı–tura hem de zar atılsın. Bu durumda örnek uzay

$$S = \{T1, T2, T3, T4, T5, T6, Y1, Y2, Y3, Y4, Y5, Y6\}$$

olur.

Paranın tura gelme olasılığı, $P(T) = \frac{1}{2}$ olur. Zarın 5 ya da 6 olma olayı K ile gösterilirse, $P(K) = \frac{1}{3}$ olur.

Paranın tura ve zarın 5 ya da 6 olma olasılığı ise örnek uzayın eleman sayısı 12 olduğundan ve bunlardan sadece ikisinde ($T5$ ve $T6$) para tura, zar 5 veya 6 olduğundan $P(T \cap K) = \frac{1}{6}$ olur.

Ayrıca,

$$P(H \cap K) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = P(H)P(K)$$

olduğundan H ve K olayları bağımsız olaylardır.



Büyük Sayılar Kanunu

Birbirinden bağımsız olarak n kez yazı–tura atıldığını düşünelim.

İşlemlerde kolaylık olması açısından n nin çift sayı olduğunu kabul edeceğiz. Bu durumda m bir tam sayı olmak üzere $n = 2m$ yazabiliriz.

Her bir sonucu

$$YTTYYYTYTYYYTTTTYTYTYTYTYTYT \quad (n = 30)$$

şeklinde ‘Y’ ve ‘T’ karakterlerinden oluşan n karakter uzunluğunda bir karakter dizisi gibi düşünebiliriz.

Kabaca büyük sayılar kanunu, bir çok kez yazı–tura atıldığında yazıların sayısı ile turaların sayısının birbirine yakın olduğunu ifade eder. Bunu daha kesin olarak nasıl ifade edebiliriz? Elbette bu ifade her zaman doğru olmayabilir; aşırı şanslı (ya da şanssız) bir kişi çok sayıda tura (ya da yazı) atabilir. Ayrıca, turaların sayısının yazıların sayısına eşit olacağını da iddia edemeyiz. Ancak, bunların sayısının birbirine yakın olabileceğini söyleyebiliriz.



“ n defa yazı–tura atıldığında turların sayısının %49 ile %51 arasında olma olasılığı $n \rightarrow \infty$ için 1 e yaklaşır.”

Bu ifade %49, %49.9 ile ve %51, %50.1 ile değiştirildiğinde de doğrudur. Bu durumda büyük sayılar kanununun en basit halini aşağıdaki teorem ile verebiliriz.

Teorem

ε yeterince küçük bir sayı olmak üzere n defa yazı–tura atıldığında turların sayısının $0.5 - \varepsilon$ ile $0.5 + \varepsilon$ arasında olma olasılığı $n \rightarrow \infty$ iken 1 e yaklaşır.



Soru

n sayısını kaç almalıyız ki, %99 ihtimalle turların sayısı %49 ile %51 arasında olsun?

Aşağıdaki teorem Pascal üçgeni yardımıyla bu sorunun cevabını vermektedir.

Teorem

$0 \leq t \leq m$ olsun. Bu durumda $2m$ kez yazı-tura atıldığında turların sayısının $m - t$ den az ya da $m + t$ den çok olma ihtimali en fazla $e^{-t^2/(m+t)}$ olur.

Dikkat ederseniz bu teorem turların sayısının bir aralıkta olmama ihtimalinden bahsetmektedir.



Bu teorem ile sorulan sorunun yanıtını vermek kolaydır:

$n = 2m$ atışın %49'unun $m - t$ olmasını istiyoruz. Buradan,

$$\frac{49}{100}(2m) = m - t \Rightarrow 98m = 100m - 100t \Rightarrow 100t = 2m \Rightarrow t = \frac{m}{50}$$

elde edilir. O halde

$$\frac{-t^2}{m+t} = -\frac{\left(\frac{m}{50}\right)^2}{m + \frac{m}{50}} = -\frac{m}{2550}$$

olduğundan ve

$$e^{-m/2550} < 0.01$$

olması istendiğinden $m \geq 11\,744$ olmalıdır.

Yani, $2 \times 11\,744 = 23\,488$ veya daha fazla kez yazı-tura atılırsa, %99 ihtimalle turların sayısı atış sayısının %49'u ile %51'i arasında olur.



Şimdi teoremin kanıtını verelim.

Kanıt.

n defa yazı–tura atıldığında tam olarak k tane tura gelme olayını A_k ile gösterelim. A_k ’nın ortaya çıkma sayısı n karakter uzunluğundaki string ifadede k karakterin “T”, $n - k$ karakterin ise “Y” olma sayısına eşittir. Buradan, A_k kümesinin eleman sayısı $\binom{n}{k}$ olur. Tüm mümkün sonuçların sayısı da 2^n olduğundan A_k olayının meydana gelme olasılığı

$$P(A_k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

olur.

$k = 1, 2, \dots, n$ için A_k olayları ayrık olaylar olduğundan $n = 2m$ atışta turların sayısının $m - t$ den az ve $m + t$ den çok olma olasılığı

$$\frac{1}{2^{2m}} \left[\binom{2m}{0} + \binom{2m}{1} + \dots + \binom{2m}{m-t-1} + \binom{2m}{m+t+1} + \dots + \binom{2m}{2m-1} + \binom{2m}{2m} \right] \text{ olur.}$$



$0 \leq k \leq m$ ve $c = \binom{2m}{k} / \binom{2m}{m}$ olmak üzere

$$\binom{2m}{0} + \binom{2m}{1} + \cdots + \binom{2m}{k-1} < \frac{c}{2} 2^{2m}$$

olduğunu biliyoruz (bakınız Lemma 3.8.2). $k = m - t$ alırsak,

$$\binom{2m}{0} + \binom{2m}{1} + \cdots + \binom{2m}{m-t-1} < 2^{2m-1} \frac{\binom{2m}{m-t}}{\binom{2m}{m}}$$

elde ederiz. 3. Dersimizde Pascal üçgeninin n . satırının ortadaki elemanıyla bu elemandan t kadar solda (veya sağda) olan elamanların oranı için verdiğimiz değerlendirmeyi kullanırsak,

$$\frac{\binom{2m}{m-t}}{\binom{2m}{m}} < e^{-t^2/(m+1)}$$

yazabiliriz.



Buradan,

$$\binom{2m}{0} + \binom{2m}{1} + \cdots + \binom{2m}{m-t-1} < 2^{2m-1} e^{-t^2/(m+1)}$$

olur. Pascal üçgeni simetrik olduğundan

$$\binom{2m}{m+t+1} + \cdots + \binom{2m}{2m-1} + \binom{2m}{2m} < 2^{2m} e^{-t^2/(m+1)}$$

olur.

O halde turaların sayısının $m - t$ den az ve $m + t$ den çok olma olasılığı

$$e^{-t^2/(m+t)}$$

den küçük olur.



Küçük Sayılar ve Çok Büyük Sayılar Kanunu

Kabaca küçük sayılar kanunu, küçük sayılar için ilginç fakat büyük sayılar için geçerli olmayan kuralların keşfedilebileceğinden bahseder.

Örneğin, “her tek sayı asal sayıdır” ifadesi sadece ilk üç tek sayı için geçerlidir (3, 5 ve 7). Daha ilginç bazı örnekler aşağıda sıralanmıştır:

- ❶ “Her $p > 0$ tam sayısı için n^p nin basamakları toplamı n olacak şekilde bir $n > 1$ tam sayısı vardır.”

$$p = 1 \text{ için} \quad n = 2 \text{ alınabilir. } 2^1 = 2$$

$$p = 2 \text{ için} \quad n = 9 \text{ alınabilir. } 9^2 = 81 \quad 8 + 1 = 9$$

$$p = 3 \text{ için} \quad n = 8 \text{ alınabilir. } 8^3 = 512 \quad 5 + 1 + 2 = 8$$

$$p = 4 \text{ için} \quad n = 7 \text{ alınabilir. } 7^4 = 2401 \quad 2 + 4 + 0 + 1 = 7$$

$$p = 5 \text{ için} \quad n = 28 \text{ alınabilir. } 28^5 = 17210368 \\ 1 + 7 + 2 + 1 + 0 + 3 + 6 + 8 = 28$$

⋮

$$p = 104 \text{ için} \quad \text{doğru}$$

$$p = 105 \text{ için} \quad \text{doğru değil!}$$

$$p = 106 \text{ için} \quad \text{doğru}$$



2

$$41, \underbrace{41 + 2 \cdot 1}_{43}, \underbrace{43 + 2 \cdot 2}_{47}, \underbrace{47 + 2 \cdot 3}_{53}, \underbrace{53 + 2 \cdot 4}_{61}, \dots \text{ asal sayıdır.}$$

$n = 40$ için doğru değil! $1601 + 2 \cdot 40 = 1681$ asal sayı değil!

3 “ $n > 2$ sayısı asal sayıdır ancak ve ancak $n^2 \mid \binom{2n-1}{n-1} - 1$.”

$n = 3$ için $9 \mid 9$

$n = 5$ için $25 \mid 125$

$n = 7$ için $49 \mid 1715$

$n = 11$ için $121 \mid 352715$

\vdots

$n = 16843^2$ için doğru değil! (bu sayıya kadar doğru)

$n = 16843^2$ sayısı asal değildir. Ancak $n^2 \mid \binom{2n-1}{n-1} - 1$.

4 Alıştırma: “Bir çemberin üzerinde $n + 1$ farklı nokta işaretleyip, bu noktaları ikiye ikiye birleştirin, ortaya çıkan şekil çemberi 2^n parçaya ayırır.” $n = 1, 2, 3, 4, 5$ için kontrol ediniz.



Çok büyük sayılar kanunu, çok büyük sayıda veri içerisinde ilginç tesadüflerin olabileceğini ifade eder.

Örneğin bir arkadaşımız

Yıl başında doğmuş iki kişi tanıyorum. İkisi de hem doğum günleri hem de yılbaşı için bir tek hediye almaktan şikayetçiler...

derse, bu gerçekten ilginçtir. Acaba yıl başında doğanların sayısı diğer günlerde doğanların sayısından daha mı fazladır?

Elbette hayır! Bu arkadaşımızın tanıdığı kişi sayısı 400 olsun. Kişilerin yıl başında doğmuş olma olasılığı $1/365$ (artık yılları saymıyoruz) olduğuna göre, bir ya da iki kişinin yıl başında doğmuş olması gayet mümkündür. Ancak, durumun ilginç olması ve bu kişilerin sadece bir hediye almaktan şikayetçi olmaları onları hatırlanır kılmaktadır.



Sekreter Problemi

Önce problemin ifadesini verelim:

Bir şirketin sekreter pozisyonu için aşağıdaki koşullarla bir eleman alınmak isteniyor.

- 100 aday başvurusu var ve bu adaylarla birer görüşme yapılacak.
- Ancak, adaylarla hangi sıra ile görüşüleceği belli değil. Adaylar, rastgele bir sıra ile teker teker çağrılacak ve tüm adaylara eşit davranılacak.
- Görüşülen her adaya herhangi bir sınır dahilinde olmaksızın bir not verilecek. Adayın kabul edilip edilmediği o ana kadar görüşülen adaylara verilen notlara göre belirlenip adaya hemen söylenecek.
- Gönderilen bir adayın tekrar çağrılması mümkün değil.

Soru

Bu şartlar altında “nasıl bir yöntem izlenmeli ki en yüksek olasılık ile en iyi aday seçilsin?”



1. **Yöntem** Belki de akla gelen ilk yöntem adaylar arasından rastgele birini seçmektir. Bu durumda en iyi adayı seçme olasılığı $\frac{1}{100}$ olur.
2. **Yöntem** Doğru bir karar verebilmek için birkaç aday ile görüşme yapıp, daha sonra bu adaylardan daha iyi olan ilk adayı işe almak da bir başka yöntemdir. “Peki birkaç aday tam olarak kaç kişidir?”

Önce adayların yarısıyla yani 50 tanesi ile görüşülüp, hiçbiri işe alınmayıp her birine birer not verildikten sonra 51. kişiden itibaren ilk 50 kişiden daha iyi not alan birisi olursa o aday işe alınsın. Bu yöntemle en iyi adayı işe alma olasılığını hesaplayalım.



Bu yöntem ile en iyi adayı seçme olasılığı $P(S)$ ile gösterilsin. $P(S_i)$, ($i = 1, 2, \dots, 100$) ise i . adayın doğru aday olma ve i . aday doğru aday iken bu yöntemle i . adayın seçilme olasılığı olsun.

Bu durumda

$$P(S) = \sum_{i=1}^{100} P(S_i)$$

olur.

Önce $P(S_i)$ yani i . adayın doğru aday olma **ve** i . adayın doğru aday iken bu yöntemle onun seçilme olasılığını bulalım. Elbette $i = 1, 2, \dots, 100$ için i . adayın doğru aday olma olasılığı $\frac{1}{100}$ olur. Peki bu yöntem ile bu adayın seçilme olasılığı nedir?



Bu yöntemle göre,

- $i = 1, 2, \dots, 49, 50$ için bu olasılık 0 dır.
- 51. adayın doğru aday olma ve 51. aday doğru aday iken 51. adayın bu yöntemle seçilme olasılığını hesaplayalım.
 - Yine 51. adayın doğru aday olma olasılığı $\frac{1}{100}$ olur.
 - 51. aday doğru aday iken 51. adayın seçilme olasılığı ilk 50 adayın *seçilmeme* olasılığına eşittir.
 - Yöntem gereği ilk 50 aday zaten seçilmediğinden 51. aday doğru aday iken 51. adayın seçilme olasılığı 1 olur.

O halde

$$P(S_{51}) = \frac{1}{100} \cdot 1$$

bulunur.



- 52. adayın doğru aday olma ve 52. aday doğru aday iken bu yöntemle 52. adayın seçilme olasılığı hesaplanacak olursa, benzer şekilde
 - $\frac{1}{100}$ olasılıkla 52. aday doğru aday olabilir.
 - 52. aday doğru aday iken 52. adayın seçilmesi için ya ilk 50 (bu zaten mümkün değil) ya da 51. adayın *seçilmemesi* gerekir.
 - İlk 51 adayından birinin seçilmesi $\frac{1}{51}$ olasılık ile mümkündür. O halde ilk 51 adayın *seçilmeme* olasılığı (yani 52. adayın seçilme olasılığı)

$$1 - \frac{1}{51} = \frac{50}{51}$$

olacaktır.

Böylece,

$$P(S_{52}) = \frac{1}{100} \cdot \frac{50}{51}$$

elde edilir.



- 53. adayın doğru aday olma ve 53. aday doğru aday iken bu yöntemle 53. adayın seçilme olasılığı da benzer şekilde hesaplanabilir.
 - Yine 53. adayın doğru aday olma olasılığı $\frac{1}{100}$ olur.
 - 53. adayın seçilmesi için 51. ve 52. adayların *seçilmemesi* gerekir.
 - İlk 52 aday içerisinde 51. veya 52. adayların seçilme olasılığı $\frac{2}{52}$ olduğundan
 - 53. adayı seçme olasılığı $1 - \frac{2}{52} = \frac{50}{52}$ elde edilir.

Buradan

$$P(S_{53}) = \frac{1}{100} \cdot \frac{50}{52}$$

bulunur.

• \vdots



- 100. adayın doğru aday olma ve 100. adayın seçilme olasılığını bulalım.
 - Yine 100. adayın doğru aday olma olasılığı $\frac{1}{100}$ olur.
 - Şimdi 100. aday doğru aday iken 100. adayı seçme olasılığını bulalım.
 - 100. adayın seçilebilmesi için 51., 52., ..., 99. adayların seçilmemiş olması gerekir.
 - Bu adaylardan birini seçme olasılığı $\frac{99 - 51 + 1}{99} = \frac{49}{99}$ olduğuna göre, 100. adayı seçme olasılığı $1 - \frac{49}{99} = \frac{50}{99}$ elde edilir.

Buradan

$$P(S_{100}) = \frac{1}{100} \cdot \frac{50}{99}$$

olur.

Böylece,

$$P(S) = \sum_{i=1}^{100} P(S_i) = \frac{1}{100} \left(1 + \frac{50}{51} + \frac{50}{52} + \cdots + \frac{50}{99} \right) \approx 0.3490860897$$

olur. O halde bu yöntem kullanılırsa, yaklaşık yüzde 35 olasılıkla en iyi aday seçilebilir.



Acaba yukarıdaki yöntem en iyi yöntem midir? Önce adayların yarısıyla değil de, daha fazlasıyla ya da daha azıyla görüşülseydi daha iyi bir sonuç elde edebilir miydi?

Aşağıdaki yöntem problemi genelleyerek bu soruya cevap vermektedir.

100 aday yerine n tane aday olduğunu kabul edelim ve önce bunların 50 tanesi ile değil, m tanesi ile görüşülüp sadece notları kaydedilip hiçbirisi seçilmesin. $(m + 1)$. adaydan itibaren ilk m adaydan daha iyi olan ilk aday seçilsin. Bu yöntemle göre en iyi sonuç verecek m sayısını belirlemeye çalışalım.

Bu yöntem ile en iyi adayın seçilme olasılığı $P(S(n, m))$, i . adayın en iyi aday olma ve i . adayın bu yöntem ile seçilme olasılığı ise $P(S_i(n, m))$ ile gösterilsin.



O zaman yukarıdaki hesaplamalara benzer şekilde

$$\begin{aligned}P(S(n, m)) &= \sum_{i=1}^n P(S_i(n, m)) \\&= \sum_{i=m+1}^n P(S_i(n, m)) \\&= \frac{1}{n} \left(1 + \frac{m}{m+1} + \frac{m}{m+2} + \cdots + \frac{m}{n-1} \right) \\&= \frac{m}{n} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right)\end{aligned}$$

bulunur.



En yüksek olasılığın elde edileceği m sayısı arandığından

$$P(S(n, m)) > P(S(n, m-1)) \quad (1)$$

ve

$$P(S(n, m)) > P(S(n, m+1)) \quad (2)$$

olmalıdır. Bu eşitsizlikleri kullanarak m sayısını bulmaya çalışalım.

(1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \frac{m}{n} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) \\ & > \frac{m-1}{n} \left(\frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Her iki taraftan n sadeleştirilirse,

$$\begin{aligned} & m \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) \\ & > (m-1) \left(\frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) \end{aligned}$$

Eşitsizliğin sağındaki ilk çarpma işlemi yapılırsa,

$$\begin{aligned}
 & m \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) \\
 & > \frac{m-1}{m-1} + (m-1) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) \\
 & = 1 + (m-1) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right)
 \end{aligned}$$

bulunur. İfadeler eşitsizliğin bir tarafında toplanırsa,

$$\begin{aligned}
 0 & > 1 + (m-1) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) \\
 & \quad - m \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirilmeler yapılırsa,

$$1 < \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) \quad (3)$$

sonucuna ulaşılır.



Benzer şekilde (2) eşitsizliği ile başlanarak

$$1 > \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) \quad (4)$$

sonucu da elde edilebilir.

(3) ve (4) eşitsizliklerinden

$$\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) < 1 < \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) \quad (5)$$

bulunur.

Bu son eşitsizlik yardımıyla farklı n değerlerine karşılık aranan m sayısı belirlenebilir mi?



Örneğin, 5 aday varsa yani $n = 5$ ise

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} < 1 < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

olduğundan $m = 2$ olur. Yani ilk iki aday ile görüşüp bu adaylardan daha iyi olan ilk aday işe alınmalıdır.

Eğer $n = 8$ ise

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} < 1 < \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

olduğundan $m = 3$ olur.

Peki ya 100 aday varsa? Bu durumda elle hesap yapmak neredeyse imkansızdır.

$$f(n, m) = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right)$$

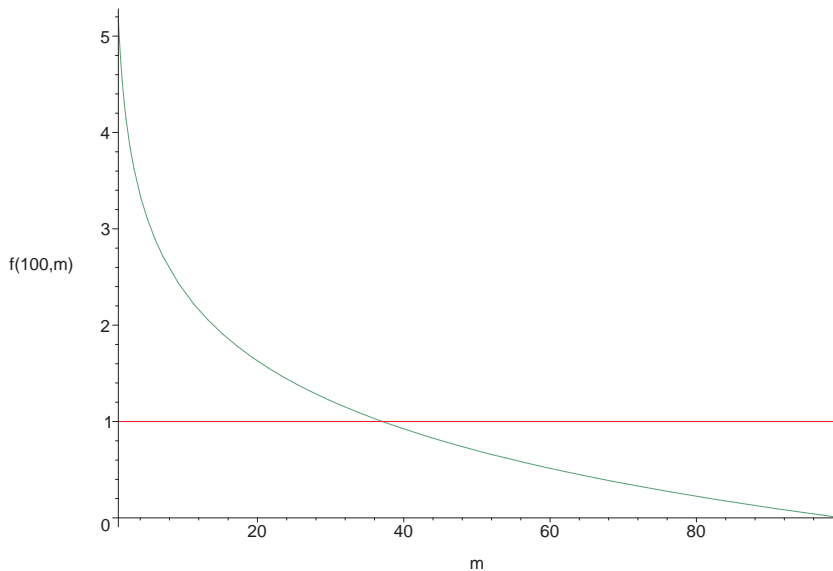
fonksiyonunu tanımlayıp m nin bazı değerleri için $f(100, m)$ değerleri bilgisayar yardımıyla listeleyelim:



m	$f(100, m)$
\vdots	
35	1.059167527
36	1.030596099
37	1.002818321
38	0.9757912938
39	0.9494755043
\vdots	

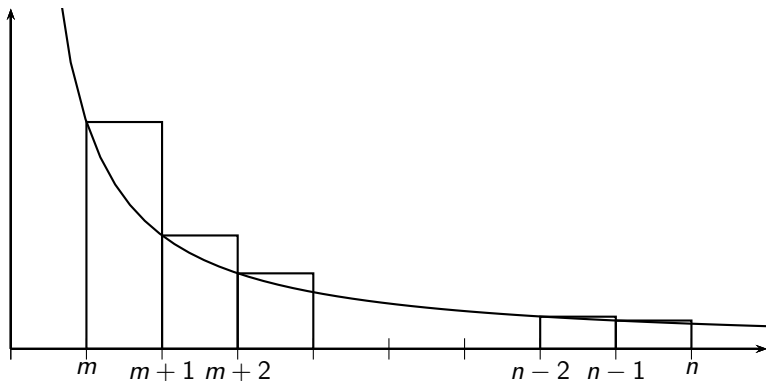
Yukarıdaki tablodan 1 e en yakın değer $m = 37$ için elde edildiğinden $m = 37$ alınmalıdır.





Şekil: $f(100, m)$ fonksiyonunun grafiği

n değerleri büyüdükçe aranan m değerinin n nin yüzde 37 sine karşılık geldiği gözlemlenebilir. Şimdi bunun nedenini açıklayalım.



Şekil: $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun P bölüntüsüne göre üst toplamı

$f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $P = \{m, m+1, \dots, n-1, n\}$ bölüntüsüne göre üst toplamı

$$U(f, P) = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

olur (bakınız şekil 3).

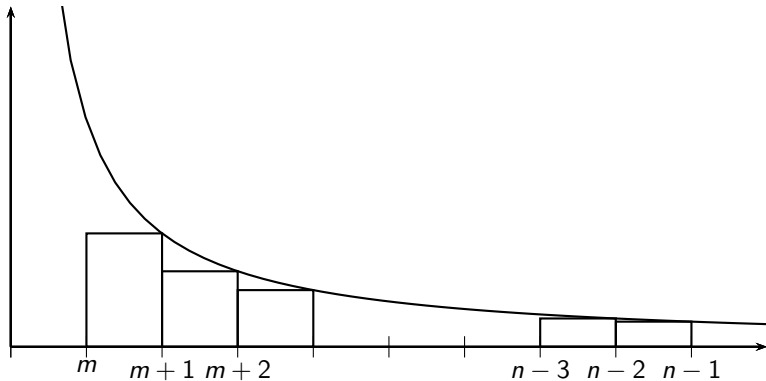
$$\int_m^n \frac{1}{x} dx \leq U(f, P)$$

olduğundan integral hesaplanırsa,

$$\ln \frac{n}{m} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

bulunur.





Şekil: $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun P' bölüntüsüne göre alt toplamı

$f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $P' = \{m, m+1, \dots, n-1\}$ bölüntüsüne göre alt toplamı ise

$$L(f, P') = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

olur (bakınız şekil 4) ve

$$\int_m^{n-1} \frac{1}{x} dx \geq L(f, P)$$

olduğundan integral alınırsa,

$$\ln \frac{n-1}{m} \geq \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

elde edilir.



Bu eşitsizlikler birleştirilirse,

$$\begin{aligned}\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n-1} &\leq \ln \frac{n-1}{m} < \ln \frac{n}{m} \\ &< \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\end{aligned}$$

bulunur.

n ve m nin yeterince büyük değerleri için $\frac{n-1}{m} \approx \frac{n}{m}$ olduğundan ve (5) eşitsizliğinden

$$\ln \frac{n}{m} \approx 1$$

olmalıdır. Buradan

$$\frac{n}{m} \approx e \Rightarrow m \approx \frac{n}{e} \approx 0.3679n$$

sonucuna ulaşılır.



Bu m değeri $P(S(n, m))$ ifadesinde yerine yazılır ve (5) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} P(S(n, m)) &= \frac{m}{n} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots \frac{1}{n-1} \right) \\ &\approx \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e} \approx 0.3678794412 \end{aligned}$$

elde edilir.

O halde bu yöntem ile yaklaşık yüzde 37 ihtimalle doğru adayın seçilebileceği sonucu ortaya çıkar.



Ağıştırmalar

Ağıştırma

4 zar aynı anda atıldığında zarlardan en az birisi “6” gelirse oyuncu kaybetmektedir. Buna göre oyuncunun *kaybetmeme* olasılığı nedir?

1. Yol Oyuncunun kaybetmemesi için zarların dördünün de “6” hariç diğeri 5 rakamdan herhangi biri olması gerektiğinden cevap

$$\frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1296} [= 0.4822530864]$$

olur.



II. Yol 4 Zar aynı anda atıldığında ortaya çıkabilecek tüm sonuçların kümesini S ile gösterelim. Bu durumda $|S| = 6^4$ olur.

c_i ile ($i = 1, 2, 3, 4$) i . zarın “6” olduğu sonuçların kümesini gösterelim. O zaman $|c_i| = 6^3$ olur.

c_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$ $i \neq j$) ise i . ve j . zarların “6” olduğu sonuçların kümesi ise $|c_{ij}| = 6^2$ olur.

Benzer şekilde c_{ijk} aynı anda i ., j . ve k . zarların “6” olduğu sonuçların kümesi ise $|c_{ijk}| = 6$ olur.

Tüm zarların “6” olduğu sonuçların kümesi c_{1234} ile gösterilirse $|c_{1234}| = 1$ olur.

Böylece içerme–dışlama prensibinden

$$|\overline{C_1} \overline{C_2} \overline{C_3} \overline{C_4}| = 6^4 - (4 \cdot 6^3) + (6 \cdot 6^2) - (4 \cdot 6) + 1 = 625$$

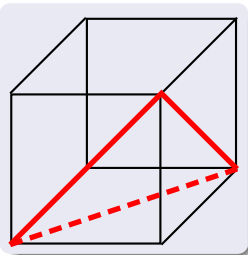
olduğundan cevap $\frac{625}{6^4} = \frac{625}{1296}$ bulunur.



Ağıştırma

Bir küpün rastgele seçilen 3 farklı köşesinin ikişer ikişer birleştirilmesiyle oluşturulan   genin eşkenar üçgen olma olasılığı nedir?

Küpün 8 köşesi olduğuna göre oluşturulabilecek tüm üçgenlerin sayısı $\binom{8}{3} = 56$ olur.   genlerin eşkenar üçgen olabilmesi için seçilen   genin her bir kenarının küpün ayrı bir yüzünde ve o yüzün köşegeni olması gerekir. Küpün her bir köşesi 3 farklı yüzün köşegenine aittir. Eşkenar   gen oluşturmak için bir köşeden çıkan bu 3 köşegenin 2 sinin kullanılması gereklidir. Bu işlem $\binom{3}{2} = 3$ farklı şekilde yapılabilir. 8 tane k  emiz olduğundan 3×8 eşkenar üçgen seçebiliriz. Ancak, bu durumda her bir   geni 3 kez saymış oluruz. O halde eşkenar üçgenlerin sayısı $\frac{3 \times 8}{3} = 8$ olmalıdır. Böylece istenen cevap $\frac{8}{56}$ elde edilir.



Ağıştırma

Özdeş olmayan n top rastgele olarak k kutuya ($n \leq k$) dağıtılırsa, her kutuda en fazla 1 top bulunma olasılığı nedir?

Bu soruyu doğum günü problemi gibi düşünebiliriz (k tane gün n tane öğrenci). Hiç bir koşul olmaksızın n tane farklı top k tane kutuya $\underbrace{k \cdot k \cdots k}_{n \text{ tane}} = k^n$ farklı biçimde dağıtılabilir. Şimdi n tane topu bir kutuda iki tane olmayacak şekilde dağıtalım: İlk topu k kutudan herhangi birine, ikinci topu kalan $k - 1$ kutudan herhangi birine, ve böyle devam edecek olursak, n . topu kalan $k - n + 1$ kutudan herhangi birine koyarsak hiç bir kutuda iki top olmaz. Böylece cevap

$$\frac{k \cdot (k - 1) \cdots (k - n + 1)}{k^n}$$

olur.

