Disciplina: Matemática financeira aplicada e análise de investimentos

Autores: D.ra. Roberta Paye Bara

Revisão de Conteúdos: Esp. Irajá Luiz da Silva

Revisão Ortográfica: Ana Carolina Oliveira Freitag

Ano: 2018

Roberta Paye Bara

Matemática financeira aplicada e análise de investimentos

1ª Edição

2018
Curitiba, PR
Editora São Braz

FICHA CATALOGRÁFICA

BARA, Roberta Paye.
Matemática financeira aplicada e análise de investimentos / Roberta Paye Bara. – Curitiba, 2018.
49 p.

Revisão de Conteúdos: Irajá Luiz da Silva

Revisão Ortográfica: Ana Carolina Oliveira Freitag.

Material didático da disciplina de Matemática financeira aplicada e análise de investimentos – Faculdade São Braz (FSB), 2018.

ISBN: 978-85-5475-174-6

PALAVRA DA INSTITUIÇÃO

Caro(a) aluno(a),
Seja bem-vindo(a) à Faculdade São Braz!

Nossa faculdade está localizada em Curitiba, na Rua Cláudio Chatagnier, nº 112, no Bairro Bacacheri, criada e credenciada pela Portaria nº 299 de 27 de dezembro 2012, oferece cursos de Graduação, Pós-Graduação e Extensão Universitária.

A Faculdade assume o compromisso com seus alunos, professores e comunidade de estar sempre sintonizada no objetivo de participar do desenvolvimento do País e de formar não somente bons profissionais, mas também brasileiros conscientes de sua cidadania.

Nossos cursos são desenvolvidos por uma equipe multidisciplinar comprometida com a qualidade do conteúdo oferecido, assim como com as ferramentas de aprendizagem: interatividades pedagógicas, avaliações, plantão de dúvidas via telefone, atendimento via internet, emprego de redes sociais e grupos de estudos o que proporciona excelente integração entre professores e estudantes.

Bons estudos e conte sempre conosco!
Faculdade São Braz

Apresentação da disciplina

Nesta disciplina será compreendida a aplicação dos conceitos de matemática financeira nas relações comerciais, para compreender e analisar as operações financeiras e assim conseguir definir quais os melhores caminhos para os investimentos e a administração das finanças empresariais ou pessoais.

Este material foi elaborado para agregar mais conhecimentos ao estudo da Matemática Financeira Aplicada e Análise de investimento. Com o objetivo de compreender como funcionam as relações comerciais para poder analisar e refletir sobre quais decisões se deve seguir no caminho da educação financeira.

Em uma esfera capitalista, em que predomina o acúmulo cada vez maior de capital, a sociedade é induzida ao consumo, seja pelas necessidades ou facilidades de créditos.

Sendo assim, nada melhor que ter um entendimento mais amplo sobre as condições que muitas financeiras impõem ao oferecer seus serviços e créditos. Portanto, ao concluir a disciplina, haverá uma amplitude nas argumentações e negociações de juros e descontos, tendo a certeza da aplicabilidade, seja na organização financeira pessoal, comercial ou na interpretação de uma simples propaganda de divulgação de um produto qualquer em um centro comercial.

Aula 1 - Contexto histórico, educação financeira e conceitos fundamentais

Apresentação da aula 1

Nesta aula será realizado uma reflexão sobre o papel do dinheiro na construção das civilizações e alguns princípios da educação financeira, bem como a introdução dos conceitos básicos de matemática financeira. Os assuntos desta aula, serão primordiais para a compreensão de todo conteúdo proposto para a conclusão dessa disciplina, oportunizando a ampliação e análise financeira, não só mercadológica, mas também as atitudes e reversões comportamentais necessárias para melhorar as habilidades em administrar os recursos financeiros.

1.1 O contexto das finanças na história da matemática.

O dinheiro é um sistema necessário para a valorização e precificação de bens e serviços. Desde o início dos tempos da humanidade se fez necessário mensurar objetos, seja para contagem ou para troca de itens (bem como calcular distâncias e compreender eventos da natureza). Na questão comercial, a troca de produtos coletados ou provenientes da caça iniciaram as relações comerciais. Havia dificuldade em mensurar e equiparar produtos distintos, contudo o dinheiro surgiu como um artifício para poder precificar itens. Além de facilitar o comércio das mercadorias, o dinheiro em forma de moeda ou papel contribuiu para iniciar o pensamento do guardar valores, estocar recursos, visto que muitos produtos comercializados na época eram perecíveis.

Curiosidade

Historiadores encontraram evidências, que indicam que os trabalhadores que construíram as pirâmides egípcias, receberam cerveja como pagamento pelo trabalho, um tipo rudimentar de cerveja. Na idade média, o vinho também foi utilizado para pagamento de salários.

Vivemos em uma época onde é comum o comércio utilizar transferências digitais de dinheiro, bem como o uso da tecnologia para as transações financeiras. Muitas pessoas só utilizam de internet, aplicativos de celulares e cartões, para efetuar suas transações bancárias. Isso sem entrar nas questões das moedas digitais. Até o presente momento, o dinheiro teve várias formas, pois em alguns momentos da história utilizavam itens de interesse comum para ser utilizado como "moeda" de troca. Geralmente, itens com aceitação generalizada eram produtos de difícil acesso (conforme época e localidade), que eram apreciados por sua raridade, utilidade ou preciosidade, como: conchas, sal, bois, facas, discos de pedra. Esses itens podiam ser armazenados por um período maior que os alimentos perecíveis comercializados.

Para Refletir

Qual o papel do dinheiro na sua vida? Independente da sua resposta, para manter o básico nas condições de qualidade de vida, é necessário ter e administrar os recursos financeiros pessoais. Você lembra com qual idade você começou a compreender o que era o dinheiro?

A representação monetária em forma de moeda surgiu no século VIII a. C., na cidade de Lídia (atualmente Turquia). Com o objetivo de facilitar as transações comerciais que se baseavam no pagamento em ouro ou prata, pois havia a dificuldade em pesar. Por isso, foi criada essa representação monetária formada de ouro ou prata, onde o peso era conhecido e assim facilitou o pagamento de bens e serviços.

Moeda de Lídia

Fonte:https://www.levycam.com.br/wp-content/uploads/2017/05/historia_moeda_clip_image002.jpg

Foi no espaço denominado Ágora em Athenas, que iniciou o livre comércio pessoal. Lá as pessoas podiam trocar bens sem o controle do estado ou da igreja. Era um local de troca também de ideias, por isso que muitos pesquisadores defendem que Ágora e o dinheiro fizeram parte da origem da democracia. A palavra dinheiro tem origem na unidade monetária da Roma antiga, o denário.

Denário

Fonte: http://www.abiblia.org/public/icons/2015_11_20_03_48_33.jpg

Foi na China, durante a dinastia Tang (618-907), com o imperador que o dinheiro na forma de papel foi criado, com a justificativa de facilitar as longas viagens com grandes valores. Pois as moedas compostas de ouro e prata eram muito pesadas e o segredo de como fazer aquele tipo de papel na confecção das notas não foi disseminado, demorou para que outros povos adotassem o dinheiro na forma de notas de papel.

Primeira nota de papel

Fonte: https://img.ibxk.com.br/2015/03/13/13184028799305.jpg?w=1040

A matemática sempre esteve presente no processo de contagem, na representação numérica e na necessidade de mensurar pesos e medidas, bem como no desenvolvimento de técnicas para confecção de moedas e notas de dinheiro. Contudo a partir do momento em que a humanidade começou a comercializar, muito antes do surgimento de moedas e notas, já haviam devedores e credores. Com o tempo e com o desenvolvimento da matemática nas relações comerciais, a matemática financeira se estabeleceu, definindo várias relações no cenário financeiro.

Curiosidade

A palavra salário tem origem na época em que os trabalhadores recebiam sal pelos trabalhos realizados na época do Império Romano. Assim como a palavra Rupia, que nomeia o dinheiro na Índia, vem de rupa que significa gado.

1.2 Finanças e educação financeira

Saber administrar recursos financeiros é uma prática fundamental para todos os povos (exceto algumas tribos indígenas isoladas). Os indivíduos que estão inseridos em sociedades capitalistas ou socialistas, precisam compreender como se relacionar com os recursos monetários disponíveis de forma saudável, e assim contribuir para a garantia da qualidade de vida.

O dinheiro é necessário para sustentar recursos básicos do cotidiano, bem como para concretizar sonhos como aquisição da casa própria, entre outros. Porém, o consumo de bens e serviços de forma descontrolada gera dívidas, cortes de linhas de créditos e outras restrições. Esse tipo de dificuldade, pode afetar as relações sociais e a saúde mental da humanidade. Em 2016, o Instituto de Pesquisa Social da Universidade de Michigan, nos Estados Unidos, comprovou que 49% dos divorciados afirmaram que o dinheiro foi o principal motivo de discórdia entre os casais. Os pesquisadores acompanharam 373 casais ao longo de 25 anos, desses 46% deles se divorciaram. Durante a crise de 29, vários empresários se suicidaram em função das dificuldades financeiras e pela desvalorização dos patrimônios em poucas horas. Foram tantos casos, que o dia ficou conhecido como "quinta-feira negra".

A má gestão dos recursos financeiros pessoais, tem uma grande influência comportamental. Por isso, especialistas recomendam uma reflexão antes de qualquer aquisição, algo simples que ajudará no processo.

- Você precisa mesmo disso?
- Possui recursos financeiros para adquirir nesse momento?
- Precisa ser agora?

Caso uma das respostas seja não, então desista da compra. Além disso é importante compreender o básico da matemática financeira intrínseca nas movimentações comerciais, por exemplo:

- Comprar um item parcelado no cartão de crédito;
- À vista no débito? Caso a compra à vista for ameaçar a quitação de dívidas básicas (como luz e água que podem ser cortadas prejudicando as condições básicas da família), vale parcelar no crédito (de preferência em número de parcelas sem juros).

Porém, se é um item de extrema importância, como um remédio e você sabe que no crédito o valor será pago em atraso (acarretando juros), melhor pagar no débito à vista para evitar os juros mais altos do cartão de crédito. Enfim, a melhor alternativa depende de uma análise da situação, das necessidades e das condições disponíveis. Para fazer a melhor escolha é necessário ter o controle dos gastos, da renda e das condições de pagamento disponíveis.

Há uma vertente na educação financeira que aborda questões mais psicológicas no trato com o dinheiro, visto que além da falta de uma educação financeira regular desde a infância (salvo algumas exceções), há questões de ordem psicológica que podem estar envolvidas com origem de um descontrole financeiro, como por exemplo os casos de compulsão patológica em compras.

Pesquise

Pesquise sobre as questões psicológicas e o descontrole financeiro, pesquise as formas que podem ocorrer como por exemplo a acumulação. Veja textos, artigos, vídeos de reportagens sobre o tema e reflita sobre os tipos, as causas e os tratamentos disponíveis.

Na psicologia, existem várias formas de inteligência, uma delas está voltada ao contexto financeiro, que busca atuar na proximidade teórica voltada a prática no âmbito do controle de finanças pessoais. Essa linha de pesquisa serve para todos os públicos, os que não tiveram nenhum contato com a matemática financeira ou aqueles que simplesmente possuem dificuldades provenientes da falta de controle, para os indivíduos que estão em tratamento psicológico, buscando a superação no descontrole financeiro e aqueles indivíduos que possuem o conhecimento teórico de matemática financeira, porém possuem dificuldades na colocação prática, deixando a compulsão ser a percursora da situação.

O consultor financeiro Gustavo Cerbasi, defende que enriquecer é uma questão de atitude frente as escolhas diárias, que não é necessário ter o domínio aprofundado do mercado financeiro para fazer boas escolhas nas relações financeiras do dia a dia (CERBASI, 2017). Ou seja, refletir diariamente sobre as escolhas financeiras contribui para um controle financeiro pessoal, por exemplo, qual valor investimos diariamente com lanche ou café no ambiente de trabalho e ou estudo? No final do mês esses gastos reteram quantos por cento da renda mensal? Caso, estrategicamente houvesse a substituição em um dos dias por levar um pacote de bolacha de casa e só comprasse a bebida, qual seria a economia no final do mês?

A influenciadora digital e criadora do site: Me Poupe, Nathalia Arcuri, lista as 5 lições básicas de educação financeira para enriquecer conforme a seguir:

- Respeitar o dinheiro: no sentido de valorizar o esforço que você fez para conquistar, evitando pagar atrasado as contas e acarretando juros, economizar recursos em casa (reduzir desperdícios), buscar alternativas de compra com desconto, entre outros.

- Tenha objetivos de curto, médio e longo prazo: com planejamento, fica mais fácil continuar motivado em poupar e evitar tentações.

- Viva um degrau abaixo: no sentido de guardar uma parte considerável de sua renda mensal e viver com menos, para ter tranquilidade. Claro, isso é possível quando a renda não está toda comprometida com o pagamento de dívidas e empréstimos (depois que quitar todos os empréstimos é possível aplicar essa lição).

- Reserve pelo menos 30 minutos da sua semana para aprender sobre finanças. Há sites, blogs, vídeos, livros que abordam essa temática. Isso irá facilitar a sua vida e melhorar as suas escolhas diárias.

- Saiba a diferença entre preço e valor: é importante analisar isso quando vai adquirir algo. Essa lição entra no campo daquelas 3 perguntas do início desse tema, como se fosse a quarta pergunta: isso realmente vale esse preço? Porque você pode encontrar mais barato em outro lugar ou nem precisar realmente desse objeto/serviço.

A educação financeira fará mudar o seu olhar nas relações comerciais e sociais. Sim, as sociais também! Porque analisa os gastos mensais com esses itens. Não quer dizer que é para parar de sair socialmente, pelo contrário, é importante ter os momentos de lazer. Mas, é preciso analisar as opções e fazer escolhas mais saudáveis, que irão retornar em forma de estabilidade ou até de independência financeira.

1.3 Conceitos Matemáticos Fundamentais

Para compreender a matemática financeira é necessário dominar alguns conceitos fundamentais, como:

- Razão: É a relação existente entre dois valores de uma mesma grandeza. Como: pessoas, objetos, distâncias, entre outros.

Exemplo: Uma a cada cinco pessoas que comparece aos hemocentros é considerada inapta para doar sangue. (CAESAR, 2017)

Essa notícia de 2017, mostra a razão de 1:5 que poderia ser escrita como 1/5 ou ainda ser escrita como $\frac{1}{5}$

Generalizando, a razão entre A e B, pode ser descrita como:

A:B = A/B = $\frac{A}{B}$

Considerando A e B dois valores de uma mesma grandeza.

- Porcentagem ou percentagem, é uma relação de um valor para outro, onde existe uma razão com base 100 (cem).

Por exemplo, em um almoço em um restaurante fictício, é cobrado 10% do valor da compra de taxa de serviço. Em um almoço que custou R$ 80,00 será cobrado de taxa de serviço 10% do valor total gasto no almoço. Então é necessário calcular quantos reais é 10% de R$ 80,00 seja por regra de três, cálculo mental ou usando cálculo de frações.

Usando a representação de frações, podemos pensar no 1% de R$80,00 ou seja, $1\% = \frac{80}{100} = 0{,}80$ (oitenta centavos de reais).

Logo, 10% de R$80,00 será $10 \times 1\% \quad \rightarrow 10 \times 0{,}80 = 8$ (oito reais).

Veja que o valor da taxa depende do que foi gasto, por isso sempre há uma relação de dependência na porcentagem, então não basta dizer calcule X%, precisa dizer calcule X% de alguma coisa (salário, valor do título,).

- Conversão: nesse ponto, reforço a conversão de porcentagens para número decimal, ou para fração e vice-versa.

Por exemplo, se algo é representado por 5% de algo (pode ser uma taxa de juros, lucro, uma taxa de serviço ou qualquer outro valor que seja dependente de outro).

Por exemplo: 50% da população mundial são biologicamente mulheres.

Logo podemos escrever a mesma informação como a cada 50 de 100 pessoas ou metade da população são biologicamente mulheres.

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{5\cancel{0}}{10\cancel{0}} = \frac{5}{10} = \frac{5^{\div 5}}{10_{\div 5}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Importante

> Além da porcentagem existe o por mil ou permilagem, que é representado pelo símbolo: ‰
>
> Neste caso a base da razão é 1000. Por exemplo: 5% da população ama estudar matemática financeira, ou seja, a cada 1000 pessoas 5 amam estudar matemática financeira (esse dado é fictício, utilizado somente para exemplificar o uso do %).

- Simplificação é a operação onde valores proporcionais são transformados em um valor mais simples e equivalente ao valor original.

Como no exemplo anterior onde a fração 5 por 10 foi simplificada dividindo numerador e denominador por um mesmo valor, nesse caso o número 5. É necessário que numerador e denominador tenham divisor comum (ou seja, são múltiplos de um mesmo valor).

- Fatoração é o processo de decompor um número ou uma expressão em um produto.

Seguindo o mesmo exemplo dos 50% da população, podemos escrever: $\frac{50}{100} = 50 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}$

O símbolo $\Leftrightarrow$ significa equivalente. Nesse caso $\frac{50}{100}$ é equivalente a $\frac{1}{2}$. Tanto é que quando você calcula o valor da divisão $\frac{50}{100} \rightarrow 50 \div 100 = 0{,}5$ assim como $\frac{1}{2} = 1 \div 2 = 0{,}5$.

É possível fatorar antes de simplificar.

- Regra de três é uma aplicação do estudo das proporções, pois é possível obter um quarto valor desejado a partir de 3 valores conhecidos relativos a grandezas proporcionais.

A regra de três é definida como simples quando é conhecida a proporcionalidade entre dois valores. Quando há mais de duas grandezas proporcionais é chamado regra de três composta (a regra de três composta é formada por várias regras de 3 simples).

Dentro da regra de três simples, temos:

a) Direta: quando são diretamente proporcionais, ou seja, se uma aumenta a outra aumenta também.

b) Inversa: quando são inversamente proporcionais, ou seja, quando uma aumenta a outra diminui. Exemplo velocidade e tempo de viagem: se aumenta a velocidade do meio de transporte diminui o tempo do percurso, e se diminuir a velocidade aumenta o tempo do deslocamento.

É importante dispor corretamente os valores em colunas, deixando cada coluna para uma grandeza. Por exemplo na relação porcentagem de pessoas: uma coluna para pessoas e outra para porcentagem. Cada linha será de uma relação de proporcionalidade. Exemplo: Calcule quantas pessoas são 5% de um conjunto total de 360 pessoal.

%	Pessoas
5	?
100	360

Primeiro descreve em forma de tabela" os valores conhecidos, dispondo as relações de proporcionalidade por linha e as grandezas por coluna.

$$5 \times 360 = 100x$$
$$100x = 5 \times 360$$
$$100x = 1800$$
$$x = \frac{1800}{100} = \frac{1800^{\div 100}}{100_{\div 100}} = 18$$

O valor desconhecido, a variável, deve ser nomeado por uma letra, nesse caso foi usado "x". Em seguida se multiplica na diagonal formando uma equação (relação de igualdade). Isole a variável e resolva a equação.

É importante dispor corretamente os valores em colunas, deixando cada coluna para uma grandeza. Cada linha será de uma relação de proporcionalidade. Organizando as informações no início facilita o cálculo do valor por regra de três.

Conclusão da aula

O uso da matemática para controle e aplicação de recursos, existe desde a origem da humanidade. Com o passar do tempo foi aprimorada, assim como a evolução humana. Porém, ainda existe uma dificuldade em colocar em prática o conhecimento e ter uma relação saudável e tranquila com o dinheiro. Para isso, o importante é associar questões filosóficas e emocionais, sobre as escolhas com o conhecimento básico de matemática financeira.

Resumo da Aula

Nesta aula, além das situações conceituais voltadas à matemática, foi possível tramitar na plataforma histórica, tanto no desenvolvimento da ciência exata, como também nas necessidades humanas a partir da criação da moeda como espécie e forma mensurável para organizar a vida social da humanidade, oportunizando despertar itens da curiosidade e tramitar pelos efeitos dos primeiros acordes matemáticos em registros de bens, trazendo à tona, a necessidade de uma educação sólida para as condições financeiras, bem como o equilíbrio psicológico no desenvolvimento humano. Partindo do pressuposto, que as necessidades surgiram de forma espontânea e natural, a compreensão de suprir as necessidades mercadológicas e desse fator, contribuir com o processo evolutivo da humanidade, definindo as possibilidades e afirmando a base conceitual da matemática financeira, como por exemplo: juros, porcentagem, regra de três e simplificação.

Converse Com Seus Colegas

Converse com seus colegas sobre o educação financeira, assim poderá trocar experiências e ter contato com outras filosofias de uso dos recursos financeiros.

Amplie Seus Estudos

No livro "Como organizar sua vida financeira" de 2015, o autor, Gustavo Cerbasi, inicia com um roteiro para diagnosticar a situação financeira atual do leitor e as possibilidades futuras, como independência financeira e aposentadoria. Em seguida há tópicos específicos como sobre a melhor forma de administrar as dívidas e quais os melhores investimentos.

Vídeo

No Documentário "Origens - A Evolução Humana" da National Geographic, é possível encontrar um episódio específico sobre a origem do dinheiro e sua influência na sociedade. Com o título "A Origem do Dinheiro", o episódio 5 da primeira temporada utiliza de imagens históricas, relatos e dramatizações durante para retratar a influência do dinheiro na sociedade.

https://www.youtube.com/watch?v=dt3Zyhb3Gt8

http://legacy.foxplaybrasil.com.br/watch/900558403553

Atividade de Aprendizagem

Veja a descrição da resolução da regra de três simples e direta desta aula (Calcule quantas pessoas são 5% de um conjunto de 360 pessoas). Faça um passo a passo para resolução de qualquer regra de três simples e direta.

Aula 2 - Matemática Financeira

Apresentação da aula 2

Na segunda aula serão abordados: diferenças entre taxas e coeficientes; introdução aos juros e suas aplicações; progressão aritmética aplicada às operações financeiras; juros compostos e função exponencial. Esses temas constroem os fundamentos sobre a compreensão das operações financeiras. O mais interessante, é que após o conhecimento adquirido com a introdução a história da matemática financeira e também os aspectos que a envolve, entendemos que a complementação numérica, nada mais é do que a concretização da aprendizagem na sua aplicabilidade. Tendo em vista esse aspecto, ficará mais interessante e instigante a absorção do conteúdo que vem a seguir.

2. Juros

Juros é a compensação dada pelo devedor pelo uso do dinheiro (seja um valor financiado ou emprestado). É uma relação entre valor utilizado inicialmente, a taxa de juros e o tempo que irá demorar para quitar a dívida. Esse valor inicial denominamos por capital (seja adquirido por empréstimo pessoal, financiamento, empréstimo através de compra parcelada ou qualquer outro tipo de repasse), a taxa de juros é referente a algum período, pode ser diária, mensal, semestral ou anual.

Vídeo

Em 1993 o Brasil passou por uma Hiperinflação que chegou nas marcas de 2.477,146% ao ano (só para comparar na mesma época a inflação anual do Canadá era 1,653% e na Índia 8,642%). No Brasil a taxa de inflação anual foi de 2,21% em 2017 e 10,61% em 2015 (ano da crise).

A seguir o link de um vídeo com a propaganda de 1993, que retrata uma promoção de venda de vídeo game, onde além da entrada de mais de 1 milhão de cruzeiros havia a necessidade de pagar mais 5 parcelas fixas com a taxa de juros de 18% ao mês.

Link do vídeo: http://www.youtube.be./watch?v=tIsIuHDhPM0)

Para equacionar as relações financeiras vamos considerar o tempo de duração do empréstimo como t (também denominado período), o capital com a letra C, os juros por J e a taxa de juros como j.

O **juros simples** é definido pela equação: $J = C \times j \times t$

No tempo t o juros será t vezes maior, dessa forma o juros será o produto entre o capital inicial, taxas de juros e tempo.

Para calcular um valor futuro (o montante M) a partir de juros simples basta utilizar a função afim: $M = J + C \rightarrow M = C \times i \times t + C \rightarrow M = C(it + 1)$

Nos **juros compostos,** o capital inicial somado ao mesmo capital, irá novamente render juros em cada parcela. Como se a cada parcela tivesse um novo capital inicial, que é o resultante do capital inicial somado aos juros. Nesse caso o valor total, também chamado de capital total ou montante final (M), depende do capital inicial (C), da taxa de juros e do número de parcelas (período t).

$$M = C(1 + i)^t$$

Agora um breve comparativo entre juros simples e juros compostos, só para mostrar a diferença do montante no final em cada caso. Considerando um capital inicial de mil reais, durante um período de 10 meses a uma taxa de juros de 0,5% ao mês (taxa de juros da poupança no Brasil em fevereiro de 2018). Para facilitar a comparação as contas estão separadas lado a lado:

Juros Simples	Juros Composto
$M = C(jt+1)$ $M = 1000\left(\frac{5}{100}\cdot 10+1\right)$ $M = 1000(0{,}05\cdot 10+1) = 1000(0{,}5+1)$ $M = 1000\cdot(1{,}5)$ $M = 1500$	$M = C(1+i)^t$ $M = 1000\left(1+\frac{5}{100}\right)^{10}$ $M = 1000\cdot(1+0{,}05)^{10} = 1000\cdot(1{,}05)^{10}$ $M = 1000\cdot(1{,}62889)$ $M = 1628{,}89$

É possível notar que o montante a partir de juros composto rendeu mais em um mesmo período que o valor aplicado a juros simples. Esse cálculo também serve para dívidas, dívidas a juros compostos também aumentam mais rápido do que a juros simples, por isso é importante conhecer como funcionam as relações de crédito disponíveis para ter uma tranquilidade financeira. Bem como compreender as dívidas, obviamente a proposta de não ter dívidas e sempre pagar à vista ou com desconto é o mais vantajoso, pois não a perdas financeiras, mas a realidade de muitas famílias e empresas brasileiras mostra que nem sempre isso é possível. No caso de dívidas acumuladas, analise quais possuem maior taxa de juros e qual é a forma de cobrança (juros simples ou juros compostos por exemplo). Caso os juros de uma cobrança à juros simples for muito alto, a cobrança, o montante final será maior do que outra com uma taxa menor cobrada à juros compostos, precisa analisar, fazer a conta para análise e tomada de decisão.

E se tiver que escolher é importante dar preferência em quitar as dívidas que possuem maior crescimento, com as quais será necessário pagar um valor maior de juros e multas. Claro que nessa balança de "o que preferenciar no pagamento das dívidas?", as contas de serviços básicos possuem preferência, como Luz e água. Em seguida reduzir gastos de alimentação e o que sobrar quitar dívidas que possuem altas taxas de juros e multas, como cartão de crédito.

Pesquise

Pesquise quais são os valores das taxas de juros atuais, como rendimento na poupança, juros no uso do limite, juros do cartão de crédito e taxa de juros para financiamento de automóveis.

2.2. Diferença entre as taxas e os coeficientes

O coeficiente de financiamento (c_F) é um fator que ao ser multiplicado pelo valor a ser financiado resulta no valor de cada prestação. Depende do valor inicial a ser financiado (C_I) da taxa de juros (i) e do número de parcelas (que corresponde ao período t).

O coeficiente de financiamento é definido por:

$$c_F = \frac{i}{1-(1+i)^{-t}}$$

Exemplo: Em uma loja de eletrodoméstico, você decide comprar uma geladeira que custa mil reais (R$1000,00), sem entrada, parcelado em 12 meses com uma taxa de juros de 1,5% ao mês (a.m.). Qual será o valor mensal da prestação?

Primeiro precisa compreender que toda compra parcelada sem entrada significa que você irá financiar o valor integral do produto. Nesse caso irá financiar os R$1.000,00. Em seguida é necessário calcular o coeficiente de financiamento.

$$c_F \frac{i}{1-(1+i)^{-t}} = \frac{0{,}015}{1-(1+0{,}015)^{-12}} = \frac{0{,}015}{1-(1{,}015)^{-12}} = \frac{0{,}015}{1-\left(\frac{1}{1{,}015}\right)^{12}} = \frac{0{,}015}{1-\left(\frac{1}{1{,}195618171}\right)}$$

$$c_F = \frac{0{,}015}{1-0{,}836387422} = \frac{0{,}015}{0{,}163612578} = 0{,}091679993$$

Para obter o valor da prestação basta multiplicar o valor financiado pelo c_F : $1000 \times 0{,}091679993 =$ R\$ $91{,}68$

Lembre-se que no momento que for realizar alguma conta onde será inserido o valor da taxa de juros, use na forma de número decimal. Nesse caso a taxa de juros era $i = 1{,}5\%$ ao mês, logo:

$$i = 1{,}5\% = \frac{1{,}5}{100} = 0{,}015$$

> Lembre-se que no momento que for realizar alguma conta onde será inserido o valor da taxa de juros, use na fórmula a representação da taxa de juros na forma de número decimal.

É necessário ter atenção no período das parcelas e no período informado na taxa de juros, pois só poderão ser utilizados na mesma equação quando estiverem na mesma unidade de medida (dia, mês, ano, ...). Caso contrário será necessário realizar a conversão das taxas de juros, o que será apresentado na próxima aula.

Pesquise

> Pesquise descontos: desconto simples e desconto composto. Analise as informações e compare as fórmulas com as fórmulas desta aula.

2.3. Progressão aritmética

A progressão aritmética (PA) é uma sequênciação numérica onde a partir do segundo elemento da sequência, cada termo é o resultado da soma de um valor constante com o elemento antecessor na sequência. Esse valor constante que é somado é denominado razão aritmética (r).

Por exemplo, os pais de uma criança de 12 anos começaram a pagar uma mesada toda as segundas-feiras. Essa mesada com o valor constante de R$ 4,00. A criança decidiu não gastar nada por 10 semanas. Descreva a sequência que representa o valor que essa criança possuiu pelas 10 semanas.

Resposta: {4,8,12,16,20,24,28,32,26,40}. Nesse caso o valor do primeiro elemento da sequência é 4 e o valor da razão também é 4.

Os elementos da progressão aritmética são representados pela sua posição na sequência, de forma que podemos generalizar que toda sequência matemática em forma de PA será: $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n\}$

Onde $a_2 = a_1 + r$ e $a_3 = a_2 + r \rightarrow a_3 = a_1 + r + r$ e assim sucessivamente.

Logo, podemos generalizar qualquer elemento de uma PA conforme a seguinte expressão: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ onde n é o valor da posição do elemento da sequência (r a razão e a_1 o primeiro elemento dessa progressão). Essa razão pode ser um valor maior ou menor que zero.

O regime de capitalização simples se baseia em uma progressão aritmética (PA), onde os juros crescem de forma constante com o tempo. A progressão aritmética e os juros simples são descritos por funções afim (função afim é uma função polinomial de primeiro grau cujo gráfico é uma reta não perpendicular aos eixos).

Veja que o montante de uma aplicação a juros simples possui similaridade com a equação que descreve progressão aritmética.

$M = C(jt+1)$ (Montante juros simples)

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ (Elemento n da progressão aritmética)

Essa similaridade é devido a sua forma polinomial de primeiro grau.

2.4. Juros compostos X função exponencial

O montante á juros compostos podem ser descritos em forma de função exponencial, cujo expoente (grau da função polinomial) é o tempo. A cada período de uma aplicação no regime de capitalização composta, os juros são incorporados ao valor principal e rendem juros no período seguinte.

A progressão geométrica (PG) é uma sequência matemática onde cada elemento, a partir do segundo elemento da sequência, é o resultado do elemento anterior multiplicado por uma constante. Essa constante é denominada razão geométrica q.

Considerando a sequência de PG formada por: $\{a_{,}, a_2, a_{3,...,} a_n\}$

Onde $a_2 = a_1 \times q$ e $a_3 = a_2 \times q \to a_3 = a_1 \times q \times q \to a_3 = a_1 \times q^2$

Logo podemos definir que $a_{n+1} = a_1 \times q^n$ e assim descrever qualquer elemento da PG a partir de a_1 e a razão q.

A Progressão Geométrica (PG) está presente nas aplicações em forma de capitalização composta, quando os juros gerados em cada período são incorporados ao capital do cálculo dos juros do período seguinte, como no juros composto. Considerando uma taxa de juros constante, os valores do capital seguirão um formato coincidente de uma progressão geométrica e assim será possível ser descrito na forma de uma função exponencial. Lembrando que função exponencial é toda função de duas variáveis onde a variável independente é uma potência de um número, como na representação de um termo a_n qualquer de uma PG, onde a_{n+1} é a variável que depende do valor da potência n (que é a variável independente, pois não depende de nenhuma outra variável).

Lembrando que se a taxa de variação por período (seja mês, trimestre, ano...), não for constante, não é possível usar uma função exponencial para representar. Nesse caso se faz necessário uma conta para cada período para evitar erros.

Conclusão da aula

Na dúvida de como ocorre um rendimento ou aumento da dívida, faça o cálculo. Analise não só a taxa de juros, mas a forma que é contabilizado, se por juros simples ou composto. É importante conhecer as funções que regem o crescimento de capital ou a desvalorização de um bem (ou aumento de uma dívida).

Resumo da Aula

Foram abordados nesta aula conceitos referentes a aplicação de juros como linguagem própria para representar as aplicações de capitalização, a relação da progressão geométrica com os juros compostos e a diferença entre taxas e coeficientes de juros.

Saiba Mais

Pesquise a rentabilidade de investimentos aplicado a juros compostos. No site Me Poupe é possível acessar um simulador de juros compostos e analisar as possibilidades de rentabilidade dos investimentos a juros compostos. Disponível no endereço:

http://mepoupenaweb.uol.com.br/simulador-de-juros-compostos/

Amplie Seus Estudos

SUGESTÃO DE LEITURA

No livro "Matemática aplicada à gestão de negócios" (2005), de Carlos Alberto Di Agustini e Nei Schilling Zelmanovits é discutido os conceitos matemáticos aplicados na gestão de negócios especificamente em atividades de vendas, empréstimos, finanças, crédito e cobranças.

Atividade de Aprendizagem

Em 1993 era anunciado na TV a promoção de venda do vídeo game Master System da Tec Toy pagando Cr$ 1.399.000,00 de entrada e mais 5 parcelas corrigidas 18% ao mês. Sabendo que Cr$ 5.000,00 equivalem a R$1,82. Quanto custaria esse vídeo game atualmente? Considere a entrada de Cr$ 1.399.000,00 correspondente a metade do preço à vista.

Aula 3 - Finanças

Apresentação da aula 3

Nesta aula serão abordados aspectos que contemplam as relações financeiras com o mercado das finanças pessoais ou empresariais, equivalência de taxas, séries de pagamentos antecipadas ou postecipadas com carência. Como nas aulas anteriores é necessário conhecer conceitos fundamentais para compreender as relações financeiras pessoais ou empresariais.

Para Refletir

De acordo com a revista InfoMoney de 2017, um terço das empresas brasileiras fecham antes de completarem os dois primeiros anos, ou seja, 23% das empresas. Até que ponto o conhecimento em finanças e matemática financeira pode afetar no sucesso de uma empresa?

Assim como um produtor ou agricultor pesquisa e trabalha para aumentar a produtividade, sempre mantendo a qualidade dos produtos, dos serviços e a qualidade de vida dos funcionários envolvidos no processo. Quando lidamos com o dinheiro, como fruto de muito trabalho, também podemos pesquisar e agir para aumentar os rendimentos. Isso é possível com entendimento sobre controle financeiro e investimentos.

Pesquise

Pesquise quais as opções de investimentos financeiros que rendem no regime de capitalização composta (juros compostos).

3.1. Equivalência entre taxas

Duas taxas de juros são ditas proporcionais, quando são apresentadas com diferentes unidades de tempo, incidindo sobre um mesmo capital inicial, por um mesmo período de tempo, resultando em um mesmo montante, considerando o regime de capitalização simples (juros simples).

A conversão de valores de taxas de juros no regime de capitalização simples é linear (como uma função que possui um gráfico que é uma reta). Por exemplo, se uma determinada dívida rende 3% de juros ao mês no regime de capitalização simples, para saber qual será a taxa de juros anual, basta multiplicar a taxa de juros do mês por 12 (já que o ano tem 12 meses). Dessa forma, podemos relacionar a capitalização simples da taxa diária j_d, taxa mensal j_m, taxa bimestral j_b, trimestral j_t, semestral j_s e anual j_a da seguinte forma:

$$j_a = 2 \cdot j_s = 4 \cdot j_t = 6 \cdot j_b = 12 \cdot j_m = 365 \cdot j_d$$

Duas taxas de juros apresentadas com diferentes unidades de tempo, são ditas equivalentes quando, incidindo sobre um mesmo capital inicial, por um mesmo prazo, geram o mesmo valor futuro (ou montante), sempre considerando o regime de capitalização composta (juros compostos).

Pela forma que o juros composto é definido ($M = C(1+i)^t$), não temos uma equivalência direta, linear que relacione a taxa de juros de períodos de tempo diferentes, pois é uma relação exponencial (como a função exponencial que possui um gráfico característico).

Pesquise

Pesquise a forma do gráfico de equações exponenciais e compare com o gráfico de funções lineares.

Outra forma de ser apresentada a taxa de juros é por um período diferente do que o das prestações (pode ser maior ou menor do que o período das prestações). Por exemplo, as prestações são mensais, mas a taxa de juros informada é anual ou diária.

Primeiro a relação entre taxa de juros mensal e taxa de juros anual.

Considerando taxa de juros anual como i_a e taxa de juros mensal i_m, temos a seguinte relação:

$$(1+i_a)^1 = (1+i_m)^{12}$$

$$1+i_a = (1+i_m)^{12}$$

$i_a = (1+i_m)^{12} - 1$ bem como podemos concluir que $i_m = (1+i_a)^{-12} - 1$

Por exemplo: Calcule a taxa mensal equivalente a 60,103% ao ano.

$i_m = (1+i_a)^{-12} - 1 = (1{,}60103)^{-12} - 1 = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$ Ou 4% ao mês.

Considerando taxa de juros diária i_d, taxa de juros mensal i_m, taxa de juros bimestral i_b, taxa de juros trimestral i_t, taxa de juros semestral i_s e taxa de juros anual i_a, temos a seguinte relações de igualdade:

- Relação entre taxa de juros mensal com taxa de juros diária:

  $(1+i_m)^1 = (1+i_d)^{30}$ Considera o mês com 30 dias.

- Relação entre taxa de juros diária com taxa de juros anual:

  $$1+i_a = (1+i_d)^{365}$$

- Relação entre taxa de juros bimestral com taxa de juros anual:

$$1+i_a = (1+i_b)^6$$

- Relação entre taxa de juros trimestral com taxa de juros anual:

$$1+i_a = (1+i_t)^4$$

- Relação entre taxa de juros trimestral com taxa de juros anual:

$$1+i_a = (1+i_s)^2$$

Em resumo, podemos considerar a seguinte igualdade que resume todas essas relações:

$$(1+i_a)^1 = (1+i_s)^2 = (1+i_t)^4 = (1+i_b)^6 = (1+i_m)^{12} = (1+i_d)^{365}$$

$$1+i_a = (1+i_s)^2 = (1+i_t)^4 = (1+i_b)^6 = (1+i_m)^{12} = (1+i_d)^{365}$$

Isso ocorre pela simples equivalência entre um ano com dois semestres, quatro trimestres, seis bimestres, doze meses e 365 dias.

Para fazer a conversão basta seguir essa última igualdade, que relaciona todos os períodos, e selecionar as partes com os períodos que deseja converter e obter a equivalência.

Por exemplo, no caso de obter a equivalência entre taxa de juros semestral para mensal:

$$1+i_a = \underbrace{\underbrace{(1+i_s)^2}_{\downarrow} = (1+i_t)^4 = (1+i_b)^6 = \underbrace{(1+i_m)^{12}}_{\downarrow}}_{\downarrow} = (1+i_d)^{365}$$

$$(1+i_s)^2 = (1+i_m)^{12}$$

Ou no caso de obter a equivalência entre taxa de juros trimestral com a taxa de juros diária:

$$1+i_a = (1+i_s)^2 = \underbrace{\underbrace{(1+i_t)^4}_{\downarrow} = (1+i_b)^6 = (1+i_m)^{12} = \underbrace{(1+i_d)^{365}}_{\downarrow}}_{\downarrow}$$

$$(1+i_t)^4 = (1+i_d)^{365}$$

Nos casos de equivalência entre dia e mês, use a relação $1+i_m = (1+i_d)^{30}$, que irá simplificar as contas.

3.2. Relações financeiras

Nas relações financeiras é importante separar as finanças pessoais das empresariais, seja você um empregado que poupa parte do seu salário, ou seja um empreendedor ou um investidor. Mesmo que não tenha o costume de poupar ou investir parte dos seus ganhos, alguma movimentação você deve ter contato, seja financiamento de carro ou imóvel, ou previdência privada ou até mesmo compra parcelada de produtos. Porém, quando é um empreendedor obrigatoriamente precisa separar e controlar as finanças pessoais das empresariais, para que possa manter as contas pessoais e reinvestir no negócio.

Para os empreendedores a falta de separação das finanças pessoais das empresariais pode comprometer a saúde financeira da empresa. Além de ser uma causa também crises pessoais de estresse.

Então para reduzir conflitos, sejam pessoais ou empresariais, é necessário separar as contas, ter uma conta pessoal e outra para a empresa (ter uma conta bancária empresarial também proporciona acesso a pacotes de serviços bancários empresariais com taxas mais baixas). Realizar um planejamento que considere as contas básicas e as necessidades de investimento na empresa, isso inclui o controle de retirada. Mesmo nos casos onde o empreendedor é o único funcionário da empresa, não é possível retirar todo o lucro do mês, pois a empresa necessitará ter dinheiro em caixa para possíveis necessidades futuras. É importante realizar relatórios mensais de gastos e lucros, isso irá facilitar também no direcionamento do plano de ações da empresa, pois será possível analisar quais produtos ou serviços possuem melhor aceitação do público e em quais serão necessários maiores investimentos. E se perceber que está difícil conseguir finalizar os relatórios e a contabilidade mensal, é importante buscar ajuda de um contador para concretizar essa organização.

Para quem não é empreendedor, mas realiza investimentos é importante compreender as regras de retirada. Pois caso faça um investimento em produto financeiro que possui um tempo mínimo de retirada, deve ter em mente que não terá acesso a esse dinheiro investido, até o fim do tempo mínimo definido no contrato, caso contrário poderá ser taxado e acabar perdendo dinheiro. Por isso é importante considerar reservas financeiras pessoais de emergência quando for aplicar os recursos financeiros.

A poupança é uma forma menos rentável de reserva de recursos pessoais para emergências que possibilita o resgate mensal do valor sem desconto, que é uma vantagem em relação a outras formas de investimento. Porém, é importante verificar qual o número de saques mensais permitido pelo banco utilizado, para evitar pagar tarifas.

O tesouro direto rende mais do que a poupança, mas é importante considerar a necessidade do resgate do valor para escolher o tipo de tesouro direto que melhor se adequa na necessidade. Por exemplo, títulos do tesouro conforme a variação da taxa Selic pode ser resgatada antes do prazo de vencimento pelo valor de mercado.

3.4. Séries de pagamento

Séries de pagamento correspondem a valores comercializados periodicamente, seja uma aplicação na poupança ou algum financiamento. Lembrando que além dos conhecidos financiamento de imóveis e automóveis, compras parceladas, como no cartão de crédito, também são financiamentos e são regidos pelas regras e funções que descrevem séries de pagamento. As séries de renda ou pagamento podem ser classificadas pelos termos da renda (se será efetivada por depósitos ou prestações sucessivas), pelo período da renda e intervalo entre os vencimentos (se as prestações ou depósitos serão mensais, anuais ou outro tipo de intervalo), pela ocorrência de anuidade ou ainda quando não é possível todos os valores e prazos previamente. Quando não é possível prever todos os elementos que envolvem a série de pagamento, como um seguro de vida ou seguro residencial, que não tem como prever quando ele será necessário, é denominada renda aleatória.

Com relação a data do vencimento do primeiro depósito ou primeira prestação de uma renda uniforme, ela pode ser classificada como imediata ou postecipada, antecipada ou diferida (quando possui uma carência).

Para descrição de cada tipo de série de pagamento serão utilizadas as seguintes variáveis:

$N =$ Prazo, duração da operação ou quantia das prestações

$J =$ Juro, remuneração adicional proveniente da aplicação da taxa de juros sobre o capital envolvido

$i =$ Taxa de juro

$PV =$ valor presente, é o capital aplicado ou emprestado

$FV =$ valor futuro, corresponde ao valor resultante da aplicação, também conhecido como montante

$PMT =$ parcela, corresponde ao valor de cada parcela

O juro (J) é obtido através da diferença entre o valor futuro e o valor presente:

$$J = FV - PV$$

A taxa de juros i é o coeficiente que determina o valor do juro, pois determina a quantia da remuneração no caso dos investimentos e do custo no caso das dívidas:

$$i = \frac{J}{PV}$$

As siglas PV, PMT e FV, estão representadas conforme sua escrita em inglês, que também coincide com os botões de algumas calculadoras científicas para realizar esses cálculos.

3.5. Séries de pagamento postecipadas

A série uniforme de pagamento postecipada se dá quando definido um primeiro período, a prestação ou depósito é pago no final desse período de tempo. Por exemplo, uma prestação com período mensal que é contratada no dia 10 de janeiro será paga no dia 10 de fevereiro.

Onde o valor presente corresponde ao somatório dos valores de cada uma das prestações atualizadas para data em que se deseja analisar:

$$PV = \frac{PMT}{(1+i)} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + \frac{PMT}{(1+i)^4} + \dots + \frac{PMT}{(1+i)^{n-1}} + \frac{PMT}{(1+i)^n}$$

Logo, $PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]$

Exemplo: Qual será o valor da prestação do financiamento de uma moto que custa à vista R$20.000,00? Sabendo que a taxa de juros no ato da compra foi de 2%, foi parcelado em 36 meses e a primeira prestação foi paga um mês após a compra.

<u>Resolução</u>: $PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right] \rightarrow 20.000 = PMT \times \left[\frac{(1+0{,}02)^{36} - 1}{(1+0{,}02)^{36} \times 0{,}02} \right]$

$$20.000 = PMT \times \left[\frac{(1{,}02)^{36} - 1}{(1{,}02)^{36} \times 0{,}02} \right] \rightarrow 20.000 = PMT \times \left[\frac{(2{,}04) - 1}{(2{,}04) \times 0{,}02} \right]$$

$$20.000 = PMT \times \left[\frac{1{,}04}{0{,}04} \right] \rightarrow 20.000 = PMT \times 25{,}997 \rightarrow PMT = 769{,}32$$

Logo, a parcela PMT será de R$769,32.

3.6. Séries de pagamento antecipadas

A série uniforme de pagamento antecipada se dá quando definido um primeiro período, a prestação ou depósito é paga no início desse período de tempo. Por exemplo, na contratação de um investimento como depósito programado na poupança, onde o período será mensal e o contrato desse serviço foi realizado no dia 10 de janeiro, o primeiro depósito deverá ocorrer na data em que foi contratado o serviço (para poder efetivar o investimento).

Como o pagamento se dá logo na contratação, como um mês antes de um pagamento postecipado, na fórmula que descreve o pagamento antecipado a potência da taxa de juros no denominador será de $n-1$. É isso que difere da equação do pagamento postecipado descrito anteriormente:

$$PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n-1} \times i} \right]$$

Para exemplificar a diferença entre série de pagamento antecipado e postecipado, a seguir um exemplo com os mesmos dados do exemplo de pagamento postecipado, só alterando que o pagamento da primeira parcela ocorrerá no dia da compra, da contratação do financiamento.

Exemplo: Qual será o valor da prestação do financiamento de uma moto que custa à vista R$20.000,00? Sabendo que a taxa de juros no ato da compra foi de 2%, foi parcelado em 36 meses e a primeira prestação foi paga no ato da compra.

<u>Resolução</u>: $PV = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n-1} \times i} \right] \to 20.000 = PMT \times \left[\frac{(1+0,02)^{36} - 1}{(1+0,02)^{35} \times 0,02} \right]$

$$20.000 = PMT \times \left[\frac{(1,02)^{36} - 1}{(1,02)^{35} \times 0,02} \right] \to 20.000 = PMT \times \left[\frac{(2,04) - 1}{(1,99) \times 0,02} \right]$$

$$20.000 = PMT \times \left[\frac{1,04}{0,03999779} \right] \to 20.000 = PMT \times 25,998619 \to PMT = 769,27$$

Logo, a parcela PMT será de R$769,27.

3.7. Séries de pagamento com carência

Quando o vencimento do primeiro depósito ou pagamento se dá no fim de um número de períodos. Por exemplo uma compra de roupa, usando o cartão próprio da loja de roupas onde o valor total da compra foi dividido em 10 parcelas fixas mensais, mas começando a pagar após um mês da compra (ou após 3 meses da compra). Muitas lojas oferecem esse tipo de serviço no início do ano como atrativo de clientes em uma época que há tantos gastos como IPTU e compra de material escolar.

Nesse tipo série de pagamento existe a presença da carência c que corresponde ao período de tempo em que não será iniciado o pagamento da primeira parcela. Esse tipo de série de pagamento é descrito pela função:

$$PV = \frac{PMT \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]}{(1+i)^{c-1}}$$

Para exemplificar a diferença entre série de pagamento diferida com antecipado e postecipado temos a seguir um exemplo com os mesmos dados dos exemplos anteriores, só alterando que o pagamento da primeira parcela ocorrerá no dia da compra 3 meses após a contratação do financiamento.

Exemplo: Qual será o valor da prestação do financiamento de uma moto que custa à vista R$20.000,00? Sabendo que a taxa de juros no ato da compra foi de 2%, foi parcelado em 36 meses e a primeira prestação será paga 3 meses após a compra.

<u>Resolução</u>: $PV = \frac{PMT \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]}{(1+i)^{c-1}} \rightarrow 20.000 = \frac{PMT \times \left[\frac{1-(1+0{,}02)^{-36}}{0{,}02}\right]}{(1+0{,}02)^{3-1}}$

$$20.000\times(1{,}02)^{2}=PMT\times\left[\frac{1-(1{,}02)^{-36}}{0{,}02}\right]\rightarrow 20.808=PMT\times\left[\frac{1-\left(\frac{100}{102}\right)^{36}}{0{,}02}\right]$$

$$20.808=PMT\times\left[\frac{0{,}50977}{0{,}02}\right]\rightarrow\frac{20.808}{25{,}48884248}=PMT\rightarrow PMT=816{,}36$$

Logo, a parcela PMT será de R$816, 36.

Veja que a mesma compra, com a mesma taxa, variando somente a data de pagamento da primeira prestação variou de R$769,25 na antecipada, R$769,32 na postecipada para R$816,36 na diferida com carência de 3 meses. Ou seja, um mês de diferença no pagamento não ocorre uma variação tão significativa no valor da parcela, mas 3 meses de carência resulta em um aumento considerável. No final, a compra postecipada teve um acréscimo no valor final de R$2,52 (R$0,07 multiplicado por 36 meses, que foi a diferença entre as parcelas) enquanto que o valor final da compra com carência de 3 meses aumentou R$1.695,96 no valor final em relação à compra antecipada $(816{,}36-769{,}25)\times 36=1.695{,}96$).

Vocabulário

Carência**:** no sentido do mercado financeiro, trata de um período mínimo onde alguma cláusula contratual está definida.

Conclusão da aula

O controle das finanças e a separação das finanças pessoais das empresariais são fundamentais para a saúde financeira da empresa bem como da família. Além disso, em caso de necessidade de financimento ou contratação de um empréstimo, escolha a opção de pagamento da primeira parcela no ato da contratação (antecipada) ou no máximo no final do mês em que foi contratado (postecipada). Pois quanto mais adiar o pagamento da primeira parcela, maior será o montante final considerando um mesmo valor contratado inicialmente.

Resumo da Aula

Nesta aula foram tratadas as relações financeiras com o mercado de finanças pessoais e empresariais, bem como a compreensão da correlação de taxas de juros com períodos distintos e os conceitos referentes a séries de pagamentos e renda.

Amplie Seus Estudos

SUGESTÃO DE LEITURA

No livro "Contabilidade Financeira" (2004) de José Nicolás Albuja Salazar e Gideon Carvalho de Benedicto, mostra como o domínio do conhecimento na área de contabilidade pode ser utilizado como base para tomada de decisões na área empresarial.

Atividade de Aprendizagem

Escolha um produto comercializado atualmente (eletrodoméstico ou automóvel). Faça uma pesquisa de preço e analise as condições de pagamento. Construa uma planilha onde você possa inserir como dados de entrada a taxa de juros, o número de parcelas e o PV, para poder obter o valor da prestação. Você poderá variar a entrada e testar o número de parcelas. Para a taxa de juros utilize as disponíveis nos anúncios que pesquisou. Analise os dados obtidos. Lembre-se que esse é um caso de série antecipada com entrada.

Aula 4 - Operações financeiras

Apresentação da aula 4

Nesta quarta e última aula serão tratados os descontos (comercial e racional), técnicas de amortização como o Sistema de Amortização Constante, o Sistema de Amortização Crescente e o Sistema Francês. Com esta aula teremos a conclusão do panorama geral das operações financeiras e da análise de investimentos na perspectiva da matemática financeira.

4.1. Descontos

No estudo das operações financeiras temos os descontos, que se dividem em desconto composto e desconto simples. Os descontos simples se baseiam no regime de capitalização a juros simples, assim como os descontos compostos no regime de capitalização a juros compostos.

Os descontos simples se dividem em desconto racional e desconto comercial. Isso ocorre também com o desconto composto que também pode ser classificado como desconto comercial ou racional, que usualmente é mais utilizado em operações a longo prazo.

4.2. Desconto Comercial

Também conhecido como desconto por fora ou desconto bancário, por ser utilizado em movimentações bancárias como crédito. Esse tipo de operação é utilizado por empresas que possuem vendas a prazo e desejam antecipar o recebimento dessas e utilizar esses recursos como capital de giro.

No desconto simples comercial é considerado a capitalização a juros simples, a taxa de desconto incidirá no valor nominal do título, de forma a obter o desconto $D = FV \times j_D \times n$ enquanto o valor atual PV é calculado por $PV = FV - D$. Onde:

$FV =$ Valor nominal, o valor futuro, montante ou valor do resgate

$D =$ Desconto comercial

$PV =$ Valor atual, valor presente

$j_D =$ Taxa de desconto comercial à juros simples

$n =$ Período, prazo de antecipação

Já no desconto comercial composto à juros compostos são utilizados as taxas de descontos à juros compostos (i_D) e segue as mesmas relações do regime à juros compostos. Porém é o menos utilizado nas movimentações financeiras. As equações que definem esse tipo de desconto são:

$$PV = FV \times (1 - i_D)^n$$
$$D = FV - PV$$

Exemplo: Um título com valor nominal de R$ 8.500,00, com taxa de 2,5% ao mês é quitado com 4 meses de adiantamento. Qual será o valor atual do título?

Resolução: Considerando o desconto comercial temos o simples e o composto. Mas nos dois casos o valor atual será o valor nominal menos o desconto. Como não foi mencionado se o desconto será a juros simples ou a juros composto, vamos realizar dois cálculos pois há duas possíveis soluções, uma para cada tipo de desconto comercial.

Para os dois casos vamos considerar juros 2,5% ao mês, $n = 4$ e $FV = 8.500$.

Desconto comercial simples

$$D = FV \times j_D \times n \rightarrow D = 8.500 \times 2{,}5\% \times 4 \rightarrow D = 8.500 \times \frac{10}{100} = 850$$

Logo o valor atual nesse caso será R$ 7.650,00 (8.500,00 - 850,00).

Desconto comercial composto

$$PV = FV \times (1 - i_D)^n \rightarrow PV = 8.500 \times (1 - 0{,}025)^4 \rightarrow PV = 8.500 \times (0{,}975)^4$$
$$PV = 8.500 \times 0{,}903$$
$$PV = 7.681{,}35$$

Comparando os dois valores é possível ver que no desconto comercial simples houve um desconto maior que no caso do desconto comercial composto.

4.3. Desconto Racional

O desconto racional também é conhecido como desconto por dentro, fornece maior desconto pois considera o valor atual (também conhecido como valor líquido na data do desconto).

O desconto simples racional (D_r) é regido pela capitalização a juros simples é utilizado para calcular o desconto a partir do valor inicial do título (diferente do desconto comercial que é obtido em cima do montante, do valor final), esse desconto incide sobre o valor inicial e não do montante, como ocorre no desconto comercial descrito anteriormente.

$$FV = PV \times (1 + j \times n)$$
$$D_r = \frac{(FV \times j \times n)}{(1 + j \times n)}$$

Já no desconto composto racional é utilizado a taxa de desconto a juros composto (i_D) e segue as mesmas relações do regime à juros composto. A seguir as equações que regem esse tipo de desconto:

$$FV = PV \times (1 + i)^n \rightarrow PV = \frac{FV}{(1+1)^n}$$
$$D_r = FV - PV$$

Exemplo: Calcule a taxa mensal de desconto racional simples de uma nota promissória negociada para 90 dias antes da data de seu vencimento, sendo que seu valor nominal é R$ 27.000,00 e seu valor atual na data do desconto é de R$ 24.107,14.

Resolução:

Primeiro precisamos identificar os valores e as variáveis conhecidas e considerar que irão se comportar conforme o desconto racional regido por juros simples.

O valor nominal é o mesmo que valor futuro, então: $FV - 27.000{,}00$.

O valor atual na data do desconto é o mesmo que valor presente: $PV = 24.107{,}14$.

Como $n = 90$ dias, ou seja, 3 meses, logo temos que:

$$FV = PV(1 + jn) \rightarrow 27.000 = 24.107{,}14(1 + 3j)$$
$$27.000 = 24.107{,}14 + 72.321{,}42\,j$$
$$27.000 - 24.107{,}14 = 72.321{,}42\,j$$
$$j = \frac{2.892{,}86}{72.321{,}42}$$
$$j = 0{,}04$$

Portanto, a taxa de juros simples é 4% ao mês.

Exemplo: Uma nota promissória de R$ 24.500,00 será paga 75 dias antes do vencimento. O desconto será calculado conforme o desconto composto racional a uma taxa de 3,5% ao mês. Nesse caso, qual será o valor líquido?

Resolução: Veja que a taxa está em ao mês e os períodos que descreve o adiantamento em dias, precisa converter conforme foi mencionado nas aulas anteriores.

$$FV = PV(1 + i)^n$$
$$24.500 = PV(1 + 0{,}035)^{2,5}$$
$$24.500 = PV \times (1{,}035)^{2,5}$$
$$24.500 = PV \times 1{,}089810$$
$$PV = \frac{24.500}{1{,}089810} = 22.480{,}98$$

O valor líquido a ser pago é R$ 22.480,98.

4.4. Técnicas de Amortização

A amortização é a forma de como um determinado montante de capital será pago como forma de empréstimo ao longo das várias parcelas, ou seja, é a forma que ditará como esse montante de capital será pago. A parcela é composta basicamente por juros e a amortização. A amortização é o constituinte da parcela que efetivamente será abatido do montante total, enquanto que os juros é o constituinte da parcela que é cobrado pela instituição financeira pelo "aluguel" do montante total de capital.

Existem no Brasil hoje basicamente três tipos de financiamento de capital: Sistema SAC, sistema PRICE e Sistema SACRE.

4.5. SAC

O Sistema de Amortização Constante (SAC), como o nome diz, é o sistema pelo qual a amortização é constante ao longo das parcelas, variando dessa forma a taxa de juros. Assim, o valor das prestações varia ao longo do tempo, normalmente iniciando com um valor mais alto e finalizando com um valor mais baixo. Por esse motivo, esse tipo de financiamento é muito utilizado por investimentos que possuam um alto risco, já que com um valor de parcela elevado no início, é maior a chance de ser pago o total de capital contratado em um curto espaço de tempo. Por outro lado, esse sistema é mais vantajoso pelo lado de quem o contrata, pois apresenta valores totais de juros menores.

Para cálculos de valores de parcela, amortização e outros valores relacionados a esse sistema utilizamos o equacionamento abaixo:

$$A = \frac{P}{n}$$

$$r = J_k - J_{k+1}$$

$$J_k = (n - k + 1) \times i \times A \text{ ou } J_k = J_1 - [(k-1) \times r] \text{ ou } J_k = \left\{ P - \frac{[(k-1) \times P]}{n} \right\} \times i$$

$$R_k = A + J_k$$
$$R_k = [(n - k + 1) \times i + 1] \times A$$

Onde:

P = Valor total do financiamento

n = Quantidade de períodos

i = Taxa de juros

A = Valor da amortização (constante)

k = Período

r = Valor de decréscimo constante de juros de cada período

J_k = Valor do juro referente ao período k

R_k = Valor da parcela (amortização + juros do período**)**

4.6. PRICE

O Sistema PRICE, também conhecido como sistema Francês (em algumas fontes bibliográficas chamado de SAF), criado em 1771 por Richard Price.

Esse é o sistema que se caracteriza por possuir o valor das parcelas constantes ao longo do tempo, sendo os juros decrescentes e a amortização crescente. Esse sistema é amplamente utilizado pelas diversas empresas de varejo para venda de produtos de bens de consumo, oferecendo crédito direto para consumidores. Ele é utilizado para prestações de curta duração por serem um investimento considerado de risco, sendo por isso utilizado para crédito de curta duração no varejo.

Para cálculo dos valores relacionados a esse sistema, utilizamos o equacionamento abaixo:

$$PMT = \frac{PV \times i}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}$$

Onde:

PMT = Valor da parcela (do inglês *payment*)

PV = Valor Presente (do inglês *present value*)

i = Taxa de juros

n = número de períodos

Curiosidade

> Richard Price (1723-1791), nascido na Inglaterra foi um filósofo, reverendo e político. Em 1769, a pedido da seguradora Inglesa produziu Tábuas de Mortalidade (conhecidas como tábuas de mortalidade de Northampton). Foram essas tábuas que serviram para direcionar a seguradora, pois foram usadas como base de cálculo para seguro e aposentadoria. Porém continham graves erros, que resultou na estimativa invertida, muito acima da taxa de mortalidade nas pessoas mais jovens e abaixo nas pessoas mais velhas.

4.7. SACRE

O Sistema de Amortização Crescente (SACRE) pode ser caracterizado como uma mistura entre o sistema PRICE e o sistema SAC, já que os valores das parcelas se mantêm constantes por um determinado intervalo de tempo, e a partir desse intervalo os valores começam a baixar. Além disso, nesse sistema existe uma correção dos valores pela TR (taxa de retorno), substituindo na maioria dos contratos a correção monetária do período de vigência das prestações. Devido ao fato desse sistema necessitar de recalcular o valor baseado na TR, pode-se gerar algum valor residual no final do período do financiamento.

4.8. Outros métodos de amortização

Além dos sistemas SAC, SACRE e PRICE existem os sistemas de amortização americano (SAA), amortização misto (SAM) e o sistema Alemão.

No sistema de amortização americano (SAA), temos um método onde é considerado o capital financiado e o contratante desse serviço deve pagar somente uma parcela no final do período da operação. Porém, os juros são pagos periodicamente, como parcelas intermediárias.

No sistema misto (SAM), que também se baseia nos sistemas PRICE e SAC não há um valor fixo das parcelas como no sistema SACRE. As parcelas do sistema SAM são calculadas como a média aritmética entre o valor conforme e PRICE e a SAC. Em função disso as parcelas vão reduzindo com o tempo.

$$P_{SAM} = \frac{P_{PRICE} + P_{SAC}}{2}$$

Onde:

$P_{SAM} =$ Prestação do Sistema de Amortização Misto

$P_{PRICE} =$ Prestação do Sistema de PRICE

$P_{SAC} =$ Prestação do Sistema de Amortização Crescente

No sistema Alemão os juros são pagos antecipadamente com prestações iguais, exceto o primeiro pagamento que corresponde aos juros cobrados no momento da operação. Nesse caso a amortização varia a cada mês, onde iremos descrever a amortização da primeira parcela como A_0 e para qualquer parcela, exceto a primeira, A_k com $k = 1,2,3,\ldots,n$.

Considerando P a parcela, C é o capital, i o juros e n o período de tempo em que foi parcelado, temos que

$$P = \frac{C \times i}{1-(1-i)^n}$$
$$A_1 = P(1-i)^{n-1}$$
$$A_k = \frac{A_1}{(1-i)^{k-1}}$$

Exemplo: O financiamento de um imóvel de R$ 300.000,00 foi contratado conforme as regras do sistema de amortização Alemão, com juros de 4% ao mês para ser quitado em 5 meses. Calcule o valor de cada parcela e construa a tabela que descreve o pagamento, os juros pagos em cada mês, a amortização do saldo devedor e o saldo devedor.

Resolução: O capital inicial C é R$300.000,00, o juros i é 0,004 e n é 5. Considerando as fórmulas que descrevem os sistemas de amortização Alemão:

$$P = \frac{C \times i}{1-(1-i)^n}$$
$$A_1 = P(1-i)^{n-1}$$
$$A_k = \frac{A_1}{(1-i)^{k-1}}$$

Então:

$$P = \frac{C \times i}{1-(1-i)^n} = \frac{300.000 \times 0{,}04}{1-(1-0{,}04)^5} = 64.995{,}80$$

$$A_1 = P(1-i)^{n-1} = 64.995{,}80(1-0{,}04)^4 = 55.203{,}96$$

$$A_2 = 55.203{,}96(1-0{,}04) = 57.504{,}13$$

$$A_3 = 57.504{,}13(1-0{,}04) = 59.900{,}13$$

$$A_4 = 59.900{,}13(1-0{,}04) = 62.395{,}97$$

$$A_5 = 62.395{,}97(1-0{,}04) = 64.995{,}80$$

Como esses valores de amortização, é possível construir uma tabela com os dados da transação financeira:

Sistema Alemão				
n	Juros	Amortização do Saldo devedor	Pagamento	Saldo devedor
0	12.000,00	0	12.000,00	300.000,00
1	9.791,84	55.203,96	64.995,80	244.796,04
2	7.491,84	57.504,13	64.995,80	187.291,91
3	5.095,67	59.900,13	64.995,80	127.391,78
4	2.599,83	62.395,97	64.995,80	64.995,80
5		64.995,80	64.995,80	0
Totais	36.979,02	300.000,00	336.979,02	

O juro foi calculado com índice de 4% sobre o saldo devedor (saldo devedor x 0,04).

Conclusão da aula

Há várias formas de descontos e de amortizações, cada uma com suas peculiaridades terá uma melhor aplicação conforme a situação onde será utilizada. Por isso é importante conhecer as definições e características para poder analisar a situação financeira em que precisará utilizar um desses recursos, para poder administrar da melhor forma as finanças, sejam pessoais ou empresariais.

Resumo da Aula

Nesta última aula da disciplina, foram contempladas as informações sobre amortização, desconto comercial e desconto racional. Tanto no desconto comercial como no desconto racional é possível ser definido por juros simples ou juros compostos, lembrando que em cada um dos quatro casos há uma fórmula específica que os descreve. Na amortização foi descrita a definição para cada caso: SAC, SACRE e PRICE.

Amplie Seus Estudos

SUGESTÃO DE LEITURA

No livro "Tudo o que você precisa saber sobre Economia" (2007) de Alex Pimentel, são apresentadas as indicações de aplicação dos conceitos de economia no dia a dia. Aplicando na administração das finanças pessoais e empresariais para maximizar o lucro. Destaque para abordagem sobre rentabilidade, bolsa de valores, balanço patrimonial e investimentos.

Atividade de Aprendizagem

Utilizando os conceitos de desconto comercial e desconto racional, calcule o valor futuro para os quatro casos de desconto abordados nesta aula: desconto comercial simples, desconto comercial composto, desconto racional simples e desconto racional. Compare os resultados finais de valor futuro e escreva uma análise comparativa. Para isso, defina um valor presente, uma taxa de juros e um período de tempo para ser utilizado nos 4 casos.

Resumo da disciplina

Nesta disciplina foram abordados conceitos fundamentais de Matemática financeira aplicada a análise de investimentos, assuntos indispensáveis no profissional especialista em Administração e Finanças. Desde os conceitos históricos, educação financeira, os principais conceitos fundamentais de matemática financeira, operações financeiras e investimentos.

Cada aula possui exercícios para reforçar os conceitos apresentados nesta disciplina, com sugestão bibliográfica para expandir sua compreensão sobre os temas abordados.

Com esta disciplina você terá conhecimento sobre finanças para aplicar em sua atividade profissional bem como na administração dos seus recursos financeiros pessoais.

Referências

ARCURI, N. 5 lições de educação financeira para enriquecer. **Me poupe**. Disponível em: < http://mepoupenaweb.uol.com.br/dicas-de-riqueza/5-licoes-de-educacao-financeira-pra-vida-toda/>. Acesso em: 16 fev. 2018.

BRANCO, A.C.C., **Matemática Financeira Aplicada: Método Algébrico**, HP-12C, Microsoft Excel® São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

CAESAR, G. **Uma a cada cinco pessoas que vão aos hemocentros é considerada inapta para doar sangue no Brasil**. Portal G1 de 25 de novembro de 2017. Disponível em: < https://g1.globo.com/bemestar/noticia/uma-a-cada-cinco-pessoas-que-vao-aos-hemocentros-e-considerada-inapta-para-doar-sangue-no-brasil.ghtml>. Acesso em: 16 fev. 2018.

CARDOSO, L. F. **Dicionário de Matemática**. Editora Expressão e Cultura. Rio de Janeiro, 2001.

CERBASI, G. **Inteligência financeira se aprende na prática**. Gazeta do Povo de 07 de fevereiro de 2017. Disponível em: < http://www.gazetadopovo.com.br/economia/financas-pessoais/gustavo-cerbasi/inteligencia-financeira-se-aprende-na-pratica-4s9dzzh063izo172cjqzla2fw>. Acesso em: 17 fev. 2018.

GOTARDELO, D. R. **Apostila de Matemática Financeira**. UFRRJ, 2010. Disponível em: < http://renatoaulasparticulares.com.br/files/APOSTILA_mat_fin_UFRRJ.pdf>. Acesso em: 14 de fev. 2018.

PACÍFICO, O. **Matemática Financeira**. Editora Universidade Estácio de Sá, 2015.