



Figure 1: Diagram sieci neuronowej

Sieć Neuronowa

Cezary Rasiński

June 2025

1 Warstwa wejściowa

Na załączonym obrazie jest przedstawiony prosty schemat sieci neuronowej klasyfikującej obraz 2x2 pixele jako jeden z czterech wzorów. X_1 – X_4 przedstawiają wejścia odpowiadające pikselom obrazu, które są w formie wektora z wartościami w zakresie $[0, 1]$. Przykładowe wzory:

- $[1, 1, 0, 0] \rightarrow$ wzór poziomy
- $[1, 0, 1, 0] \rightarrow$ wzór pionowy
- $[1, 0, 0, 1] \rightarrow$ wzór skośny
- $[1, 1, 1, 1] \rightarrow$ wzór jednolity

2 Warstwa ukryta

W naszej sieci warstwa ukryta składa się z 7 neuronów H_1-H_7 , z których każdy pełni określona funkcję detekcji wzorców w obrazie 2×2 :

| Neuron i | $w_i^{(h)}$ | $b_i^{(h)}$ |
|------------|----------------|-------------|
| h_1 | [1, 1, -1, -1] | 0 |
| h_2 | [-1, -1, 1, 1] | 0 |
| h_3 | [1, -1, 1, -1] | 0 |
| h_4 | [-1, 1, -1, 1] | 0 |
| h_5 | [1, -1, -1, 1] | 0 |
| h_6 | [-1, 1, 1, -1] | 0 |
| h_7 | [1, 1, 1, 1] | -1 |

Table 1: Przykładowe wagi wejścia oraz biasy neuronów w ukrytej warstwie

- H_1, H_2 – poziome wzory H_1 wykrywa: górny wiersz jaśniejszy od dolnego, H_2 wykrywa: dolny wiersz jaśniejszy od górnego.
- H_3, H_4 – pionowe wzory H_3 wykrywa: lewa kolumna jaśniejsza od prawej, H_4 wykrywa: prawa kolumna jaśniejsza od lewej.
- H_5, H_6 – skośne wzory H_5 wykrywa: wzór przekątnej góra-dół (x_{11} & x_{22}), H_6 wykrywa: wzór odwrotnej przekątnej (x_{12} & x_{21}).
- H_7 – jednolite wypełnienie H_7 wykrywa: gdy wszystkie cztery piksele mają zbliżoną wartość.

Podwojenie detektorów dla pasm i przekatnych pozwala sieci rozpoznać wzór niezależnie od orientacji wzoru;

Dla każdego z 7 ukrytych neuronów obliczamy najpierw ważoną sumę wejść z biasem, a następnie stosujemy funkcję sigmoidalną:

$$z_i^{(h)} = \sum_{j=1}^4 w_{ij}^{(h)} x_j + b_i^{(h)}, \quad i = 1, \dots, 7, \quad (1)$$

$$h_i = \sigma(z_i^{(h)}), \quad (2)$$

gdzie

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

to funkcja sigmoidalna.

3 Warstwa wyjściowa

Wagi warstwy wyjściowej zostały ustawione następująco:

| Neuron j | $\mathbf{w}_j^{(o)} \in R^7$ | $b_j^{(o)}$ |
|-------------------|------------------------------|-------------|
| o_1 (poziomy) | $[1, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$ | 0 |
| o_2 (pionowy) | $[0, 0, 1, 1, 0, 0, 0]$ | 0 |
| o_3 (skośny) | $[0, 0, 0, 0, 1, 1, 0]$ | 0 |
| o_4 (jednolity) | $[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]$ | 0 |

Table 2: Przykładowe wagi wyjścia oraz biasy neuronów w warstwie wyjściowej

- Neuron o_1 sumuje sygnały od H_1 i H_2 .
- Neuron o_2 sumuje sygnały od H_3 i H_4 .
- Neuron o_3 sumuje sygnały od H_5 i H_6 .
- Neuron o_4 korzysta wyłącznie z sygnału H_7 .

Wynikiem przejścia jest wybór tej kategorii, której detektory dają najsilniejszy sygnał, co pozwala na rozpoznanie wzoru obrazu.

Każdy z 4 neuronów wyjściowych pobiera sygnały z 7 neuronów ukrytych, dodaje własny bias i przekształca wyniki funkcją softmax, aby otrzymać rozkład prawdopodobieństwa:

$$z_j^{(o)} = \sum_{i=1}^7 w_{ji}^{(o)} h_i + b_j^{(o)}, \quad j = 1, \dots, 4, \quad (3)$$

$$\hat{y}_j = \text{softmax}(z^{(o)})_j = \frac{\exp(z_j^{(o)})}{\sum_{k=1}^4 \exp(z_k^{(o)})}. \quad (4)$$

gdzie

$$\text{softmax}(\mathbf{z})_j = \frac{e^{z_j}}{\sum_k e^{z_k}}$$

zapewnia, że $\hat{y}_j \in (0, 1)$