

Cezary Kostrzewski

Mechanika Nieba

Analiza misji na planetę Uran

Warszawa 2017/2018

1. Wstęp

Celem projektu było stworzenie programu przeprowadzającego obliczenia dla misji na planetę Uran. Założeniem była misja oparta na podstawie asysty grawitacyjnej dwóch planet. Całość realizowana w środowisku języka programowania *Python* wraz z wykorzystaniem biblioteki funkcji *Poliastro*.

Wybór misji na Uran

Wybór misji na Uran został dokonany ze względu na możliwość realizacji takich misji w latach 30tych bieżącego wieku. Jedynym przypadkiem misji dostarczającej wiedzy o Uranie był Voyager 2, który przeleciał w pobliżu Urana w 1986 roku. Preferowana misja to umieszczenie orbitera w atmosferze Urana. Dostarczy to najlepszych danych naukowych, pozwoli na dogłębne zbadanie całego systemu planetarnego: pierścieni, satelitów, atmosfery i magnetosfery. Specjaliści proponują odbycie czterech misji. Trzy związane byłyby z umieszczeniem orbiterów, jedna to przelot w pobliżu Urana i wykonanie zdjęć planety oraz jej księżyców. Ta misja byłaby połączona ze zrzuceniem do atmosfery próbnika, który miałby zbadać obecne tam gazy i poziomy poszczególnych pierwiastków.

Wspomniane misje nie byłyby jednak łatwe do przeprowadzenia. Po pierwsze trwałyby co najmniej 14 lat, a pojazdy trzeba by zasilać za pomocą energii jądrowej, gdyż w takiej odległości od Słońca nasza gwiazda nie zapewniłaby wystarczającej ilości energii. Problem w tym, że NASA ma bardzo małe zapasy plutonu-238, gdyż międzynarodowe traktaty przez wiele lat zabraniały wzbogacania plutonu. Dopiero w 2013 roku zezwolono na wzbogacenie niewielkich ilości tego pierwiastka.

Realizacja programu

Rezultatem jaki program ma osiągnąć jest określenie optymalnej daty startu misji na Uran. Zagadnieniem dotyczącym problematyki misji kosmicznych jest określenie zużycia paliwa wykorzystanym podczas manewru asysty grawitacyjnej. Duży wpływ na datę startu misji ma względna pozycja planet. Ponadto, metoda obliczania transferów między kolejnymi planetami zakłada określenie czasu lotu statku kosmicznego. Ta wartość zależy od konfiguracji planet i może być zoptymalizowana pod względem kosztów. Oznacza to, że dla każdej daty uruchomienia istnieje zestaw optymalnych transferów międzyplanetarnych. W programie wykorzystano równanie Ciolkowskiego do określenia masy mieszanki paliwowej dla układu o danej masie i układzie napędowym.

Podstawowe założenia dla których symulacja misji została zrealizowana:

- Początek obliczeń z orbity o wysokości 300km
- Masa własna statku kosmicznego 1500kg
- Impuls właściwy systemu napędowego $w = 4400 \frac{m}{s}$ (silnik na ciekły tlen i wodór)
- Założenia początkowe: daty startu i zakończenia misji, planowany zakres wyznaczenia daty startu misji: 01-01-2030 do 01-01-2045

Program został podzielony na listę następujących funkcji:

- Funkcja_startowa
- Transit_opt1
- Start_opt1 i Start_opt2
- Check_func

Funkcja startowa - jest to funkcja główna odpowiadająca za rozpoczęcie obliczeń oraz wywołanie innych funkcji. Odpowiada za wprowadzenie założonych parametrów misji. Dokonywana jest również obróbka otrzymanych wyników przy pomocy biblioteki *matplotlib*.

Transit_opt1 - odpowiada za obliczenie optymalnych wartości parametrów w czasie manewru międzyplanetarnego. Funkcja wykorzystuje rozwiązanie problemu Lamberta dostępne w bibliotece *poliastro*. W rezultacie otrzymywane są wektory prędkości na początku i na końcu manewru. Wartość prędkości wymagana podczas manewru jest to różnica pomiędzy prędkością określoną za pomocą rozwiązania problemu Lamberta i wstępnej prędkości statku oraz planety względem której wykonywany jest manewr asysty grawitacyjnej. Funkcja *transit_opt1* zwraca wartość zmiany prędkości potrzebnej do wykonania manewru, optymalną datę zakończenia manewru oraz wektor prędkości wynikowej.

Start_opt - jest to funkcja mająca na celu określenie daty rozpoczęcia misji przy założeniu największej oszczędności zużycia paliwa. Zakłada ona wykonanie wielokrotnej asysty grawitacyjnej. Funkcja oblicza całkowitą zmianę prędkości oraz masę zużytego paliwa. Wartościami jakie zwraca funkcja jest data startu, całkowity czas manewrów, zmiana prędkości i potrzebną masę paliwa.

Check_func - to funkcja kontrolna. Sprawdza czy obliczeniowa prędkość jest wystarczająca do osiągnięcia orbity Uranu bazując na pozycji i prędkości Uranu w danej chwili. Jeżeli ekscentryczność orbity po której porusza się statek kosmiczny jest równa bądź większa od 1, można stwierdzić, że orbita Uranu zostanie osiągnięta.

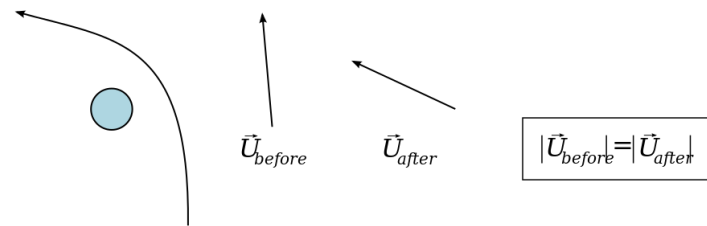
2. Podstawy teoretyczne

2.1. Asysta grawitacyjna

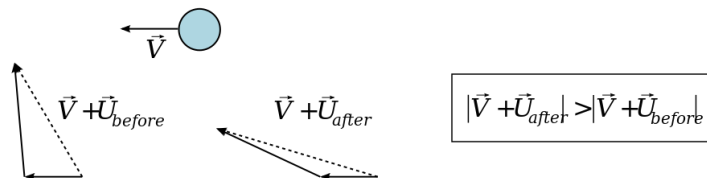
Asysta grawitacyjna jest to zmiana prędkości i kierunku lotu kosmicznego przy użyciu pola grawitacyjnego planety lub innego dużego ciała niebieskiego. Jest to obecnie powszechnie używana metoda uzyskiwania prędkości pozwalających osiągnąć zewnętrzne planety Układu Słonecznego.

Asysta grawitacyjna zmienia kierunek, w którym porusza się pojazd, nie zmieniając jego prędkości względem planety. Umożliwia to zwiększenie prędkości względem Słońca maksymalnie o dwukrotność prędkości orbitalnej planety – podobnie jak przy zderzeniu sprężystym (choć w tym przypadku nie ma fizycznego kontaktu).

Frame of Reference: Moving with Planet



Frame of Reference: Planet Moving Left



Rys.1. Schemat asysty grawitacyjnej

Głównym ograniczeniem asysty grawitacyjnej jest konieczność dostosowania się do aktualnego położenia planet. Przykładowo sonda Voyager 2 w swojej misji przeleciała kolejno obok Jowisza, Saturna, Uranu i Neptuna – ale umożliwiającą to odpowiednia konfiguracja planet powtórzy się dopiero w połowie XXII wieku. Nawet znacznie mniej ambitne loty często mogą być przeprowadzane tylko w odpowiednich momentach.

Wielokrotne wykorzystanie asysty grawitacyjnej

Sonda Cassini-Huygens w drodze na Saturna przeszła dwukrotnie obok Wenus, następnie obok Ziemi i wreszcie obok Jowisza. Jej lot trwał ponad sześć i pół roku (manewr Hohmanna trwałby 6 lat), ale sumarycznie wymagał przyspieszania silnikami jedynie o 2 km/s, co było szczególnie istotne ze względu na duże rozmiary sondy (manewr Hohmanna wymagałby przyspieszeń o 15,7 km/s).

2.2. Zagadnienie Lamberta

W mechanice nieba problem Lamberta dotyczy ustalenia orbity z dwóch wektorów pozycji i czasu lotu. Ma ważne zastosowania w zakresie spotkania, kierowania, orientacji i wstępnego określania orbity. Przypuśćmy, że ciało pod wpływem centralnej siły grawitacji przemieszcza się z punktu P1 na trajektorii stożkowej, do punktu P2 w czasie T. Czas lotu jest powiązany z innymi zmiennymi za pomocą twierdzenia Lamberta, który stwierdza:

Czas transferu ciała poruszającego się między dwoma punktami na trajektorii stożkowej jest funkcją sumy odległości dwóch punktów od początku siły, odległości liniowej między punktami i półosi w osi stożka.

Innymi słowy, problemem Lamberta jest problem wartości brzegowej dla równania różniczkowego problemu dwóch ciał, dla którego orbita Keplera jest rozwiązaniem ogólnym.

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\hat{r}}{r^2}$$

2.3. Równanie Ciolkowskiego

Wzór Ciolkowskiego to podstawowy wzór w technice raketowej określający prędkość rakiety zużywającej podczas lotu paliwo, czyli rakiety zmieniającej masę. Opublikowany został w 1813 r przez W. Moore'a z Królewskiej Akademii Wojskowej w Woolwich. Niezależnie opublikował go Konstanty Ciolkowski w pracy "Исследование мировых пространств реактивными приборами" ("Badanie przestrzeni świata przy pomocy urządzeń odrzutowych") pisanej od 1896, ogłoszonej w 1903. W warunkach próżni i braku siły ciężenia przybiera postać:

$$v = w * \ln \frac{m_0}{m}$$

Gdzie:

- v – prędkość idealna końcowa rakiety,
- w – prędkość strumienia czynnika roboczego (gazów wylotowych) mierzona w układzie odniesienia związanym z rakieta, impuls właściwy
- m_0 – masa początkowa rakiety z paliwem,
- m – masa końcowa rakiety, tj. bez paliwa

Dzięki powyższej zależności możliwe określenie m_p masy paliwa potrzebnej do wykonania manewru zmiany prędkości:

$$m_p = m * (e^{\frac{v}{w}} - 1)$$

Łatwo zauważyć, że wyniki będą silnie uzależnione od danych parametrów statku kosmicznego. Celem optymalizacji w podobnych misjach jest osiągnięcie jak najmniejszej wagi statku kosmicznego przy jak największym impulsie właściwym systemu silnikowego, co spowoduje zmniejszenie zapotrzebowania na mieszankę paliwową. Można też zauważyć, że te parametry nie mają wpływu na obliczenia na orbicie, całkowita zmiana prędkości pozostaje stała.

3. Obliczenia

Obliczenia zostały przeprowadzone dwuetapowo. Pierwszym etapem jest przeprowadzenia obliczeń ogólnych dla szerokiego zakresu czasowego 01-01-2030 do 01.01.2045 z krokiem 10-dniowym. Program realizując obliczenia w następującej kolejności: Odpalenie funkcji startowej z założonymi danymi początkowymi (wymienione we wstępie), wywołanie funkcji *Start_opt1* oraz *Start_opt2* w celu określenia optymalnej daty startu misji na Uran. Funkcja *Start_opt1* oblicza najbardziej optymalne parametry: wynikowa zmiana prędkości oraz wektor prędkości, całkowity czas transferu oraz masę materiału pędnego dla asysty grawitacyjnej Wenus i Jowisza. *Start_opt2* oblicza analogicznie te same parametry korzystając z asysty grawitacyjnej Marsa i Jowisza. Obie funkcje zwracają również listy wszystkich otrzymanych wyników, na podstawie których tworzone są wykresy zależności w funkcji głównej. *Start_opt1* oraz *Start_opt2* korzystają z funkcji *transit_opt1* odpowiedzialnej za obliczenia optymalnych wartości parametrów w transferze między dwoma planetami wykorzystując zagadnienie Lamberta. Po wykonaniu obliczeń funkcja główna wykonuje wykres zależności zmiany prędkości w zależności od daty rozpoczęcia misji, wykres zależności potrzebnej masy materiału pędnego w zależności od daty startu.

Drugi etapem jest przeprowadzenie obliczeń szczegółowych dla dat otrzymanych na podstawie analizy ogólnej. Do programu głównego wprowadza się węższy zakres czasowy w postaci daty otrzymanej z

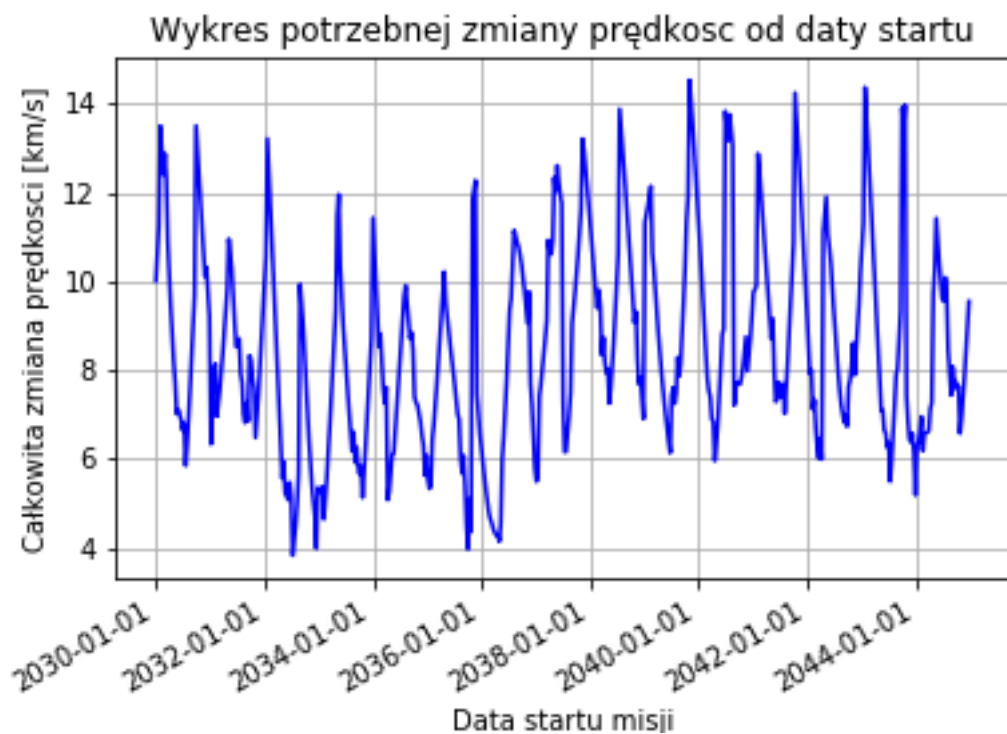
poprzedzającej analizy w przedziale ± 10 dni. Następnie wykonuje się dwie kolejne symulacje z krokiem 1-dniowym oddzielnie na *Start_opt1* i *Start_opt2*, ze względu różne daty rozpoczęcia misji. Kolejne obliczenia zostają niezmiennie. Wynikiem są wykresy tych samych zależności, co w przypadku ogólnym, w uściślonych przedziałach czasowych.

Wszystkie funkcje dostępne na: <https://github.com/cezarykos/orbital-mechanics>

4. Wyniki symulacji

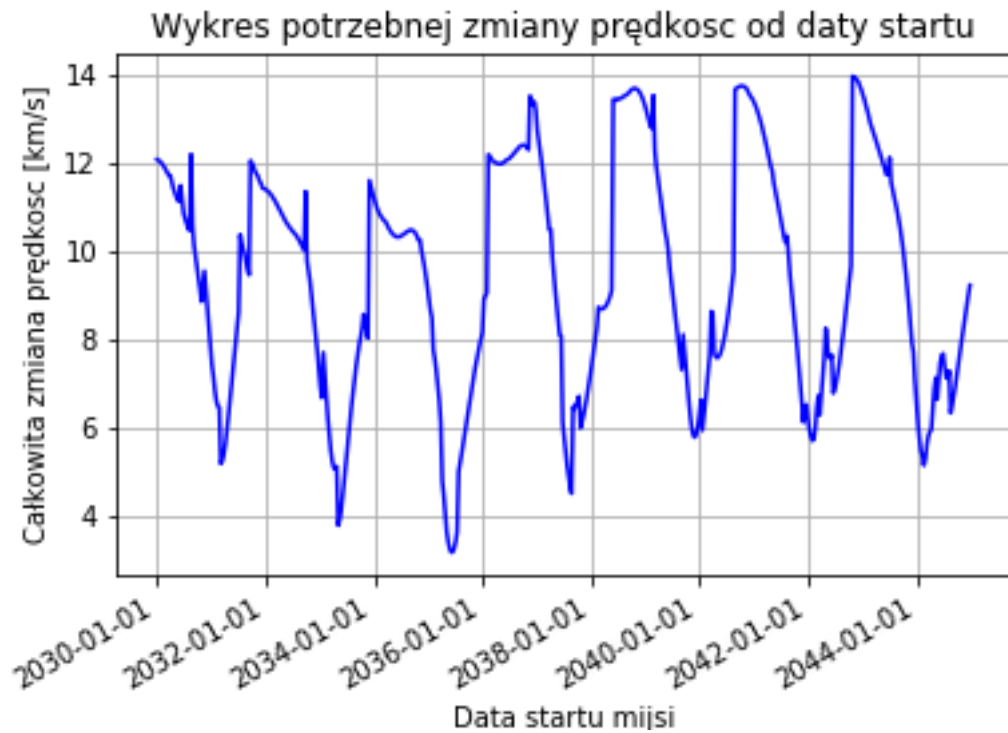
Pierwszy etap symulacji dla szerokiego zakresu czasu:

- Wykresy przedstawiające zależności dla przypadku wykorzystania asysty grawitacyjnej Wenus i Jowisza:





- Wykresy przedstawiające zależności dla przypadku wykorzystania asysty grawitacyjnej Marsa i Jowisza:



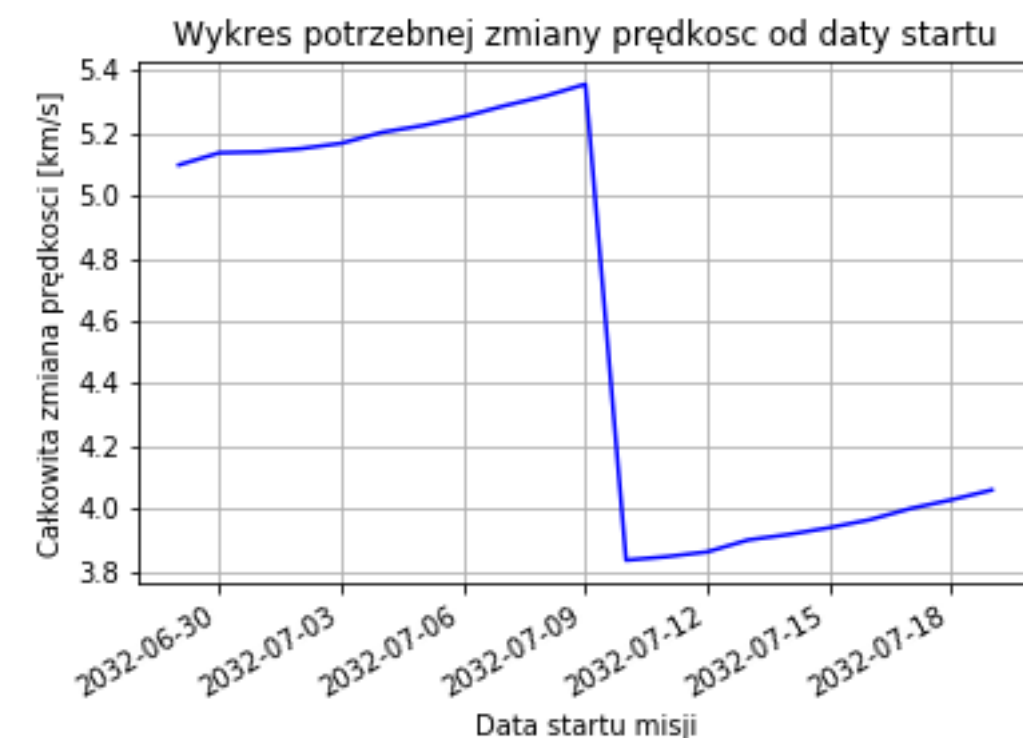


Z powyższych danych otrzymano najbardziej optymalne dane w postaci:

- Misja (Ziemia->Wenus->Jowisz->Uran):
 - Data startu: 2032-07-09
 - Całkowita zmiana prędkości: $3,82 \frac{km}{s}$
 - Zapotrzebowanie na paliwo: 2075 kg
- Misja (Ziemia->Mars->Jowisz->Uran):
 - Data startu: 2035-06-04
 - Całkowita zmiana prędkości: $3,20 \frac{km}{s}$
 - Zapotrzebowanie na paliwo: 1606 kg

W kroku drugim dla obu misji wykonano ponowne obliczenia w zakresie ± 10 dni od uzyskanej optymalnej wartości daty startu z krokiem 1-dniowym:

- Wykresy przedstawiające zależności dla przypadku wykorzystania asysty grawitacyjnej Wenus i Jowisza:



- Wykresy przedstawiające zależności dla przypadku wykorzystania asysty grawitacyjnej Marsa i Jowisza:



Analizowany czynnik	Asysty Wenus i Jowisza	Asysty Marsa i Jowisza
Data startu	2032-07-10	2035-05-30
Masa materiału pędnego	2087kg	1550kg
Całkowita zmiana prędkości	$3,82 \frac{km}{s}$	$3,12 \frac{km}{s}$

5. Podsumowanie

Analizując otrzymane wyniki łatwo zauważyć, że data startu misji silnie wpływa na koszty misji. Wynika to z faktu, że wykorzystanie koszt asyst grawitacyjnych wiąże się z położeniem planet w danym okresie. Otrzymane wyniki dla tych dwóch rodzajów wielokrotnej asysty grawitacyjnej policzone w programie można uznać za zgodne z rzeczywistością. Jednakże jest to analiza wyłącznie dwóch misji, wykorzystanie asyst innych planet lub nawet jednej planety może okazać się korzystniejsze. Co pozostawia szeroki zakres dla dalszych analiz.

Otrzymane wyniki wskazują, że dla położenia planet w latach 2030-2045 najkorzystniejsze będzie wykorzystanie asysty grawitacyjnej Marsa, a następnie Jowisza przyjmując koniec maja 2035 roku jako datę rozpoczęcia misji. Łatwo zauważyć również, że otrzymane wyniki różnią się w niewielkim stopniu od siebie. Zatem podczas planowania konkretnej misji warto jest ponownie rozpatrzenie obu tych przypadków, uwzględniając inne czynniki wpływające na przebieg misji.

6. Bibliografia

- [1] https://en.wikipedia.org/wiki/Specific_impulse
- [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Gravity_assist
- [3] <https://spaceflightsystems.grc.nasa.gov/education/rocket/rktpow.html>
- [4] Curtis H.D., *Orbital Mechanics for Engineering Students*
- [5] Agrawal V.; Maini A.K., *Satellite Technology. Principles and Applications.*, Edition 2, Wiley 2011
- [6] <http://docs.poliastro.space/en/latest/>