

Chapitre 11

Lois à densité. Loi normale

1 Lois à densité

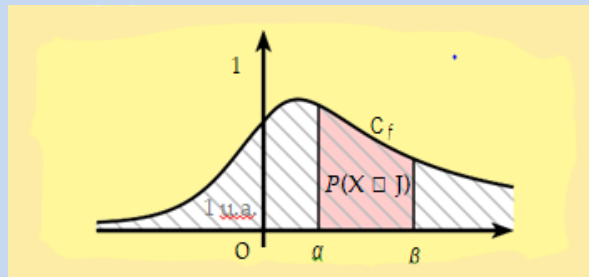
1.1 Généralités

Définition 7 :

On appelle **densité de probabilité** d'une variable aléatoire continue X , la fonction f continue et positive sur intervalle I ($[a; b]$, $[a; +\infty[$ ou \mathbb{R}) telle que :

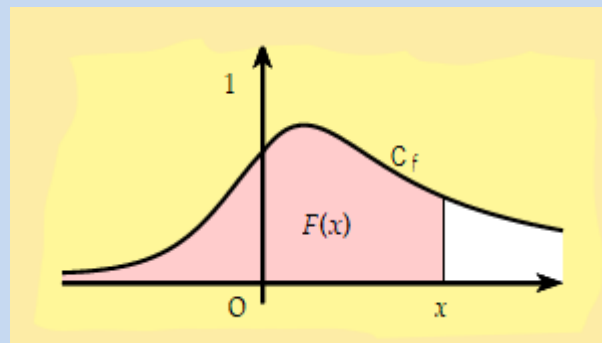
- $P(X \in I) = \int f(t)dt = 1$ sur I
- Pour tout intervalle $J = [\alpha; \beta]$, on a :

$$P(X \in J) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$



- La fonction F définie par : $F(x) = P(X \leq x)$
 Est appelée la **fonction de répartition** de la variable X

$$F(s) = \int_{a, -\infty}^x f(t)dt$$



- L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X , de densité f sur I , est :

$$E(X) = \int t f(t) dt, \text{ sur } I$$

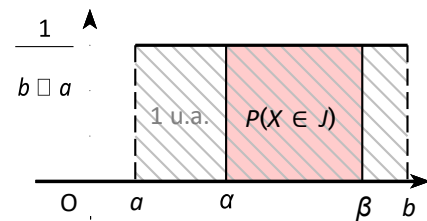
1.2 Loi uniforme

Définition 8 : X suit une loi uniforme sur

$$I = [a, b], \text{ alors : } f(t) = \frac{1}{b-a}$$

Pour tout intervalle $J = [\alpha, \beta]$ inclus dans I , on a :

$$P(X \in J) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} = \frac{\text{longueur de } J}{\text{longueur de } I}$$



La probabilité est proportionnelle à la longueur de l'intervalle.

1.3 Loi exponentielle

Définition 9 :

X suit une loi exponentielle de paramètre réel λ alors :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

On a les relations suivantes :

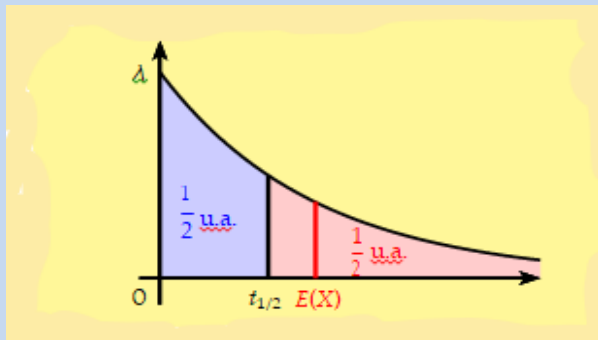
- La fonction de répartition est $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- $P(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$ et $P(X \geq a) = e^{-\lambda a}$

Théorème 1 : La loi exponentielle est une loi **sans mémoire**

$$\forall t > 0 \text{ et } h > 0 \text{ on a } P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

Théorème 2 : X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors :

- L'espérance est : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- La demi-vie est : $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$



- $E(X) = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \simeq 1,44 \times t_{1/2}$

2 La loi normale

2.1 La loi normale centrée réduite

Définition 10 :

On appelle **densité de probabilité de Laplace-Gauss**, la fonction φ définie sur \mathbf{R} par : $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

X suit une loi normale centrée réduite, $\mathcal{N}(0; 1)$,

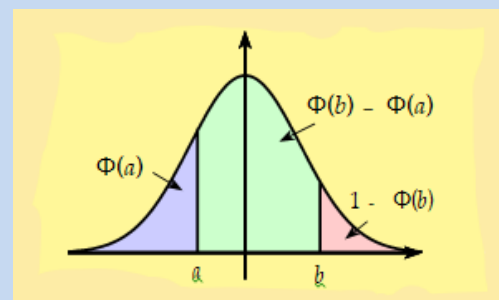
si sa **densité de probabilité** est égale à la fonction φ .

Sa fonction de répartition Φ , vaut : $\Phi = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$

Théorème 3 : X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors pour tous réels

a et b , avec $b > a$ on a :

- $P(X \leq a) = \Phi(a)$
- $P(X \geq b) = 1 - \Phi(b)$
- $P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- $P(X \leq -|a|) = 1 - \Phi(|a|)$



Théorème 4 : X est une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite. Soit $\alpha \in]0; 1[$, il existe un unique réel strictement positif u_α tel que : $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$

Il est bon de retenir les valeurs de $u_{0,05}$ et $u_{0,01}$:

- $P(-1,96 \leq X \leq 1,96) = 0,95$
- $P(-2,58 \leq X \leq 2,58) = 0,99$

2.2 La loi normale générale

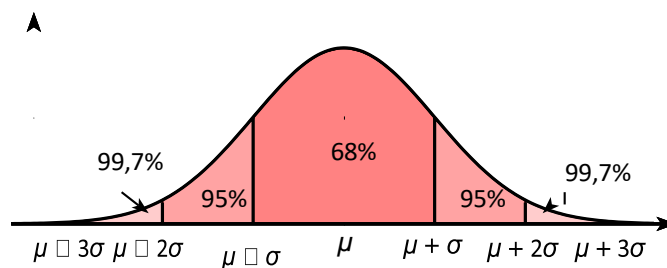
Définition 11 : Changement de variable

X suit une loi normale de paramètres $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors :

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

On a alors : $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$

On obtient les intervalles caractéristiques :



2.3 Approximation normale d'une loi binomiale

Théorème 5 : Théorème de Moivre-Laplace

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et Z telque :

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Pour tous nombres a et b tels que $a < b$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Conditions de l'approximation d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi normale $\mathcal{N}[np, np(1-p)]$

$$n \geq 30, \quad np \geq 5 \quad \text{et} \quad n(1-p) \geq 5$$

▲ : Faire la correction de continuité : $P(7 \leq X \leq 15) = P_N(6, 5 \leq X \leq 15.5)$