Les nombres complexes

1 Définition

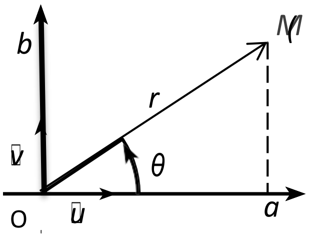
La forme algébrique d'unnombrecomplexe z est de la forme :

$z = a + ib$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

La partie réelle de z : **Re(z) =** $\boldsymbol{a}$

La partie imaginaire de z : **Im(z) =** $\boldsymbol{b}$

Le module de z : $|\boldsymbol{z}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$



2 Conjugué

Le conjugué d'un nombre complexe z est noté : $\bar{z} = a - ib$

Pour tout z complexe, on a : $z\bar{z} = |z|^2$

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$; $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$; $z + \bar{z} = 2Re(z)$; $z - \bar{z} = 2Im(z)$

Donc : si z réel alors $z = \bar{z}$; si z imaginaire pur alors $z + \bar{z} = 0$

3 Second degré

Équation du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$

$E: az^2 + bz + c = 0$ On a: $\Delta = b^2 - 4ac$, Δ *se lit* "$\boldsymbol{discriminant}$".
Si:

- $\Delta > 0$, E a 2 racines réelles de la forme : $\boldsymbol{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$
- $\Delta = 0$, E a 1seule racine de la forme : $\boldsymbol{\frac{-b}{2a}}$
- $\Delta < 0$, E a 2 racines complexes conjuguées : $\boldsymbol{\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$

4 Forme trigonométrique

La forme trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe z ($z \neq 0$) est de la forme :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\ \ et\ \ z = re^{i\theta}$

Avec : $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\arg(z) = \theta[2\pi]$

Puis : $\cos\theta = \frac{a}{r}\quad et\ \ \sin\theta = \frac{b}{r}$

On a les relations : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $-1 = e^{i\pi}$

- $|zz'| = |z||z'|$ et $arg(zz') = arg(z) + arg(z')[2\pi]$
- $|z^n| = |z|^n$ et $arg(z^n) = n \times arg(z)[2\pi]$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')[2\pi]$
- Formule de Moivre : $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{i\times n\theta}$
- Formule d'Euler : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$
- Si $z = re^{i\theta}$ alors $\boldsymbol{\bar{z} = re^{-i\theta}}$, $\boldsymbol{\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}}$

5 Vecteur, alignement et orthogonalité

Soient les points A, B, C et D, on a :

- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ alors $AB = |z_B - z_A|$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$
- $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$
- $\overrightarrow{AB}\ \ et\ \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in R}$
- $\overrightarrow{AB}\ \ et\ \overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}}$ **imaginaire pur**

PROBABILITES CONDITIONNELLES, LOI BINOMIALE

1 Probabilité

1.1 Généralités

Lors d'une expérience aléatoire :

- L'univers Ω est l'ensemble des issues possibles.
- Un événement A est une partie de l'univers.
- Un événement élémentaire $\boldsymbol{e_i}$ est un événement ne comportant qu'un seul élément.
- L'événement contraire de l'événement A est l'événement noté $\overline{\boldsymbol{A}}$ formé de tous les éléments de Ω **n'appartenant pas** à A.
- L'événement $A \cap B$ (noté aussi "A et B") est l'événement formé des éléments de Ω appartenant à A et à B.
- L'événement $A \cup B$ (noté aussi "A ou B") est l'événement formé des éléments de Ω appartenant au moins à l'un des événements A ou B.
- Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
- Si $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et si à chaque issue e_i on associe un nombre $P(e_i)$ tel que $0 \leq P(e_i) \leq 1$ et $P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = 1$, on dit que l'on a **défini une loi de probabilité sur Ω.**
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des **événements élémentaires** qui le constituent.

Pour tous évènements A et B

- $P(\emptyset) = 0,\ P(\Omega) = 1$
- $0 \leq P(A) \leq 1;\ P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap P) \Rightarrow$
  $Si\ A\ et\ B\ sont\ incompatibles\ \ alors\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  Car dans ce cas $P(A \cap P) = 0$.
- Pour une loi équirépartie ou d'équiprobabilité :
  $\boldsymbol{P(A) = \frac{nbre\ d'\acute{e}l\acute{e}ments\ \ de\ A}{nbre\ d'\acute{e}l\acute{e}ments\ \ de\ \Omega} = \frac{nbre\ de\ cas\ favorables}{nbre\ de\ cas\ possibles}}$

1.2 Variable aléatoire

Une variable aléatoire X définie sur un univers Ω est une fonction qui à chaque issue associe un réel $\boldsymbol{x_i}$. La probabilité que X prenne la valeur x_i est alors notée $\boldsymbol{P(X = x_i)}$ ou $\boldsymbol{p_i}$.

- Définir la loi de probabilité de $\boldsymbol{X}$, c'est donner (sous forme d'un tableau) la probabilité de chacun des évènements $\boldsymbol{X=x_i}$.
- Espérance mathématique de $\boldsymbol{X}$:
  $\boldsymbol{E(X) = \sum p_i x_i = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n}$
  L'Espérance représente la valeur moyenne que prend $\boldsymbol{X}$ Si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.
- Variance de $\boldsymbol{X}$:
  $\boldsymbol{V(X) = \sum p_i {x_i}^2 - E^2(X) = p_1 {x_1}^2 + \cdots + p_n {x_n}^2 - E^2(X)}$
- Ecart-type de $\boldsymbol{X}$: $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

Exemple : On lance 3 fois de suite un dé. Le joueur gagne 6 euros s'il n'obtient aucun 1 et aucun 2 et il perd 3 euros dans le cas contraire. X, la variable aléatoire égale au gain du joueur, ne peut prendre que les valeurs −3 et 6.

On a: $P(X=6)=\frac{4^3}{6^3}=\boldsymbol{\frac{8}{27}}$ $\quad et \quad P(X=-3)=1-P(X=6)=\boldsymbol{\frac{19}{27}}$

$\boldsymbol{E(X)}=-3\times\frac{19}{27}+6\times\frac{8}{27}=-\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

$\boldsymbol{V(X)}=(-3)^2\times\frac{19}{27}+(6)^2\times\frac{8}{27}-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\boldsymbol{\frac{152}{9}}$

$\boldsymbol{\sigma(X)}=\sqrt{\frac{152}{9}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{38}}{3}}$

2 Probabilités conditionnelles

Etant donné deux évènements $A\ et\ B\ avec\ B\neq\emptyset$ d'un univers $\boldsymbol{\Omega}$. On appelle **probabilité de B sachant A,** le réel noté $P_A(B)$ tel que :

$$\boldsymbol{P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$$

On a alors :

$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=P(B)\times P_B(A)$ car $A\cap B=B\cap A$

Formule des probabilités totales

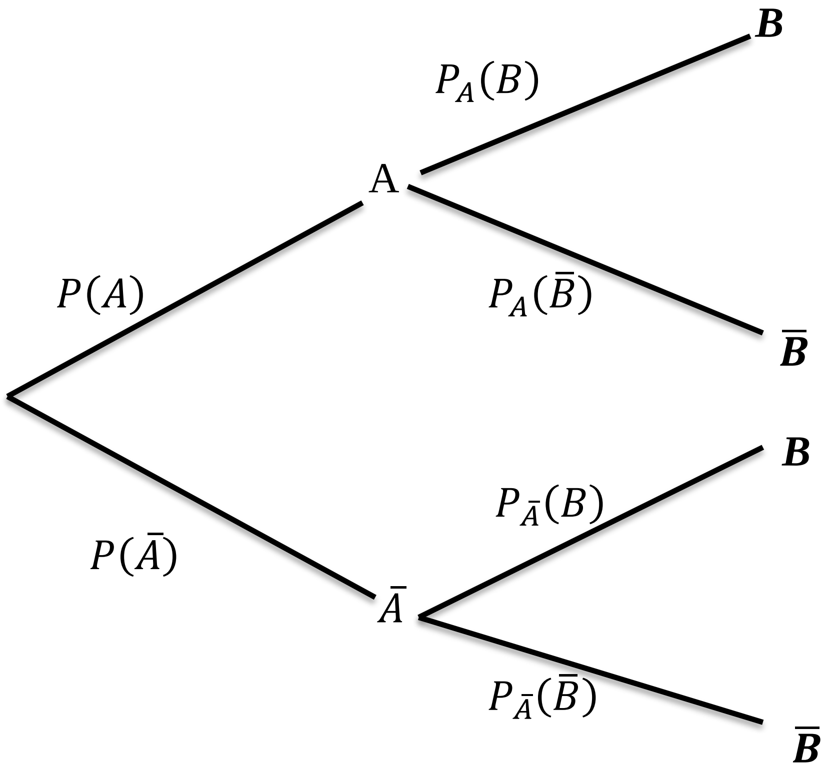
Si $A_1, A_2,\ldots,A_n$ forment une partitions de Ω (2 à 2 incompatibles et leur union forme Ω), alors pour tout événement B, on a :

$\boldsymbol{P(B)=P(A_1\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)}$ ce qui donne

$$\boldsymbol{P(B)=P(A_1)P_{A_1}(B)+\cdots+P(A_n)P_{A_n}(B)}$$

Représentation par un arbre pondéré

Le cas le plus fréquent correspond à la partition la plus simple de $\boldsymbol{A\ et\ \bar{A}}$
Si on connait les probabilités de $\boldsymbol{B\ et\ \bar{B}}$ par l'intermédiaire de, $\boldsymbol{A\ et\ \bar{A}}$
on a l'arbre qui suit :

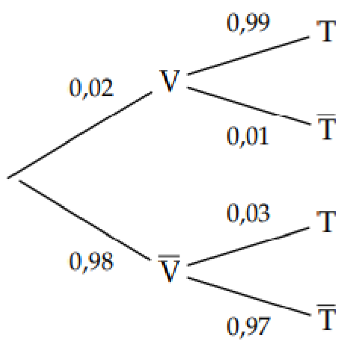


- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des évènements placés sur ce chemin. On a : $\boldsymbol{P(A) \times P_A(B) = P(A \cap B)}$
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
  $\boldsymbol{P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1}$
- La probabilité d'un événement $\boldsymbol{E}$ est la somme des probabilités des **chemins** qui aboutissent à $\boldsymbol{B}$.
  $\boldsymbol{P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)}$

Exemple : Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».



- Quelle est la probabilité que le test soit **positif**

$$P(\text{T}) = 0,02 \times 0,99 + 0,98 \times 0,03 = 0,0492$$

- Quelle est la probabilité que la personne soit **contaminée** sachant que le test est positif :

$$P_{\text{T}}(\text{V}) = \frac{P(\text{T} \cap \text{V})}{P(\text{T})} = \frac{0,02 \times 0,99}{0,0492} = 0,4024$$

3 Indépendance de deux événements

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P_{\text{A}}(\text{B}) = P(\text{B}) \quad \Leftrightarrow \quad P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) \times P(\text{B})$$

4 Loi binomiale

- On appelle épreuve de Bernoulli toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraire l’une de l’autre).
- On appelle schéma de Bernoulli toute répétition d’épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve.

Si on note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli asso- cie le nombre de fois où est apparu un succès S, la loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p et est notée B(n; p).

- Probabilité d'obtenir *k* succès : $\boldsymbol{P(X=k)=\sum_{k}^{n} p^{k}(1-p)^{n-k}}$
- Espérance de *X* : $\boldsymbol{E(X)=np}$
- Variance et écart-type de *X* : $\boldsymbol{V(X)=np(1-p)}$;

$$\boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}}$$