Statistiques

1 Intervalle de fluctuation

Si la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale *(n,p)* et si l'on se trouve dans les conditions de l'approximation normale de la loi binomiale $(n \geq 30,\ np \geq 5\ et\ n(n-p) \geq 5)$, on définit alors l'**intervalle de fluctuation au seuil de 95%** par :

$$I_n = \left[p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Cet intervalle peut éventuellement être simplifié par :

$$J_n = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}};\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

2 Prise de décision

Soit f_{obs} la fréquence d'un caractère observée d'un échantillon de taille n d'une population donnée. On suppose que les conditions de l'approximation normale de la loi binomiale sont remplies : $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

Hypothèse :

La proportion du caractère étudié dans la population est ***p*.**

Soit I_n l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

- Si $f_{obs} \in I_n$; on ne peut rejeter l'hypothèse faite sur p
- Si $f_{obs} \notin I_n$; on rejette l'hypothèse faite sur p

3 Estimation - Intervalle de confiance

Pour des raisons de coût et de faisabilité, on ne peut étudier un certain caractère sur l'ensemble d'une population. La proportion $\boldsymbol{p}$ de ce caractère est donc inconnue.
On cherche alors à estimer $\boldsymbol{p}$ à partir d'un échantillon de taille $\boldsymbol{n}$.
On calcule alors la fréquence $\boldsymbol{f_{obs}}$ des individus de cet échantillon ayant ce caractère.

On observe la fréquence f_{obs} sur un échantillon de taille n. On appelle **intervalle de confiance de 95%** l'intervalle :

$$\left[f_{obs} - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f_{obs} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Si l'on souhaite encadrer $\boldsymbol{p}$ dans un intervalle de longueur $\boldsymbol{a}$, on doit avoir : $\boldsymbol{n \geq \frac{4}{a^2}}$

Géométrie dans l'espace.
Vecteurs et produit scalaire.

1 Relations entre droites et plans

- Deux droites peuvent être parallèles, sécantes ou non coplanaires.
- Une droite et un plan peuvent être parallèles ou sécants.
- Deux plans peuvent être parallèles ou sécants

2 Parallélisme

Théorème du toit :

Si deux droites $\boldsymbol{d_1}$ et $\boldsymbol{d_2}$ sont deux parallèles contenues respectivement dans deux plans sécants P_1 et P_2 en une droite Δ alors la droite Δ est **parallèle** aux droites $\boldsymbol{d_1}$ et $\boldsymbol{d_2}$.

Plans parallèles :

Un plan P coupe deux plans parallèles P_1 et P_2 en deux droites d_1 et d_2 **Parallèles.**

3 Orthogonalité

Droite et plan orthogonaux :

Une droite Δ est orthogonale à un plan P si, et seulement si, il existe deux droites sécantes, d_1 et d_2 de P en un point I perpendiculaire à Δ.

Δ est alors **orthogonale** à toute droite du plan P

On dit que deux droites, d_1 et d_2 sont **perpendiculaires** si, et seulement si, d_1 et d_2 sont **sécantes** en **angle droit.**

On dit que deux droites, d_1 et d_2 sont orthogonales si, et seulement si, il existe une parallèle

Δ à d_1 qui est perpendiculaire à la seconde.

4 Vecteurs dans l'espace

On étend la notion de vecteur du plan à l'espace.

Les définitions et propriétés du plan restent valables dans l'espace :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme
- On définit l'addition de deux vecteurs à l'aide de la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- On définit le produit, d'un vecteur par un réel, par un vecteur de même direction $\lambda\vec{u}$.

<u>**Colinéarité**</u>

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \exists k \in R,\ \vec{v} = k\vec{u}$
- A, B, C alignés $\Leftrightarrow \exists k \in R,\ \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$
- (AB)// (CD) $\Leftrightarrow \exists k \in R,\ \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$

5 Coplanarité

Un plan **P** est défini par un point A et un couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ appelés vecteurs directeurs de P.

Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \quad (x, y) \in R^2$$

Vecteurs et points coplanaires

- $\vec{u}, \vec{v}\ et\ \vec{w}\ coplanaires \Leftrightarrow\ \exists(a, b) \in R^2,\ \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$
- A, B, C, D coplanaires $\Leftrightarrow \exists(a, b) \in R^2,\ \overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

Remarque : il faut alors résoudre avec les coordonnées un système de trois équations à deux inconnues.

6 Dans un repère

Dans un repère $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on détermine un point ou un vecteur par trois coordonnées : l'abscisse, l'ordonnée et la cote.

On obtient les relations identiques au plan :

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A;\ z_B - z_A)$
- I milieu de $[AB]$, on a :

$$I\left(\frac{x_B + x_A}{2}; \frac{y_B + y_A}{2}; \frac{z_B + z_A}{2}\right)$$

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

7 Représentation paramétrique d'une droite et d'un plan

Soit une droite d passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$, on appelle **représentation paramétrique** de la droite d, le système d'équations paramétriques suivant :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad t \in R$$

Soit un plan $\boldsymbol{P}$ passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$, on appelle **représentation paramétrique** du plan $\mathbf{P}$, le système d'équations paramétriques suivant:

$$\begin{cases} x = x_A + at + \alpha s \\ y = y_A + bt + \beta s \\ z = z_A + ct + \gamma s \end{cases} \quad (t,s) \in R^2$$

8 Produit scalaire

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}(x,y,z)$ *et* $\vec{v}(x',y',z')$ le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ définie par l'une des trois relations suivantes :

1- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

2- $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

3- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u},\vec{v})$

Propriétés :

Le produit scalaire est :

- Commutatif : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- Bilinéaire : $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ *et* $(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab\vec{u} \cdot \vec{v}$
  Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires alors*: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
  Le signe dépend du sens des vecteurs
  On appelle $\theta = (\widehat{BAC})$, on a :
- *Si* $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ *alors* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$
- *Si* $\theta = \frac{\pi}{2}$ *alors* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, *ABC est alors rectangle en A*
- *Si* $\theta > \frac{\pi}{2}$ *alors* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$

9 Équation cartésienne d'un plan

Le vecteur $\vec{n}$ est **normal** au plan **P** si, et seulement si, toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan P.

Un plan **P** est défini par un point **A** et un vecteur normal $\vec{n}$.

Tout point **M** du plan **P** vérifie :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AM}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}$$

Théorème :

Une droite Δ est orthogonale à un plan P si, et seulement si, deux droites sécantes de P sont perpendiculaires à Δ.

Théorème :

Deux plans $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}$ *et* $\overrightarrow{n_2}$ sont **perpendiculaires** si, et seulement si,

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$$

Équation d'un plan :

L'équation **cartésienne** d'un plan P est de la forme :

$ax + by + cz + d = 0$ a, b, c non tous nuls.

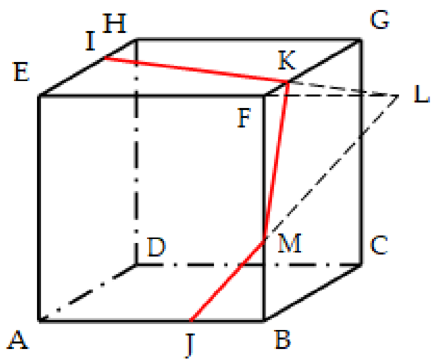
Le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est alors **normal** au plan **P**

10 Section d'un cube par un plan

- L'intersection, lorsqu'elle existe, d'une face par le plan (IJK) est un segment
- Une droite doit être tracée dans un plan contenant la face du cube
- Si deux points M et N du plan (IJK) sont sur une face, on relie M et N, cela donne l'inter-section de (IJK) et de cette face
- La section du cube par le plan (IJK) est un polygone.

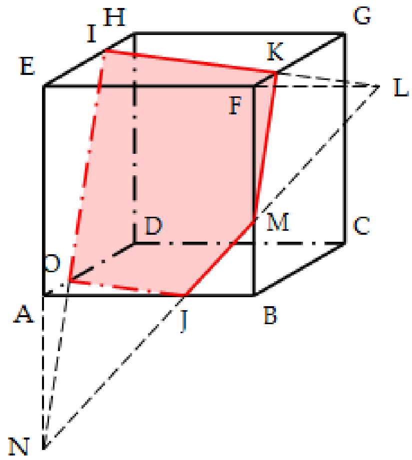
Dans notre construction :

- On trace [IK] en rouge qui est l'intersection du plan (IJK) avec la face du haut EFGH.
- On ne peut pas relier J à I ou K car ces segments ne sont pas sur une face du cube.
- On cherche l'intersection de (IJK) avec la face avant ABFE. Pour cela, on détermine l'intersection de la droite (IK) avec la droite (EF) qui contient l'arête [EF] appartenant aux faces EFGH et ABFE. On note L leur point d'intersection. Comme L∈(IK) donc *L*∈ (IJK).
- Comme L ∈ (EF), donc L appartient au plan (EFB) contenant la face ABFE. On trace alors la droite (JL) dans le plan (EFB) qui coupe [FB] en M. Comme M ∈ (JL), M ∈ (IJK)
- Ainsi [JM] et [KM] constituent les intersections du plan (IJK) avec les faces avant ABFE et de droite BCGF. On trace ces segments en rouge



On réitère cette opération pour la face gauche ADHE et la face du dessous ABCD :

- On détermine l'intersection de la droite (MJ) avec la droite (AE) qui contient l'arête [AE] appartenant aux faces ADHE et ABFE. On note N leur point d'intersection. Comme N ∈ (MJ) donc N ∈ (IJK).



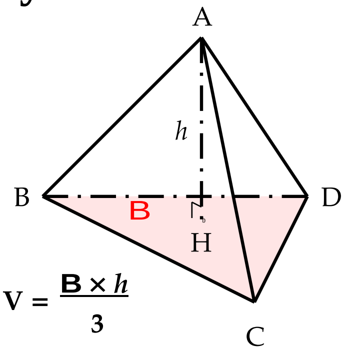
- Comme N ∈ (AE), donc N appartient au plan (EAD) contenant la face ADHE. On trace alors la droite (NI) dans le plan (EAD) qui coupe [AD] en O. Comme O ∈ (NI), O ∈ (IJK).
- Ainsi [OI] et [OJ] constituent les intersections du plan (IJK) avec les faces de gauche ADHE et de dessous ABCD. On trace ces segments en rouge et en pointillé car ces segments sont sur des faces cachées.
- La section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est **le pentagone IKMJO**.

<u>Remarque</u> : Comme les faces EFGH et ABCD dont parallèles. Le plan (IJK) coupe ces faces en des segments parallèles. Il en est de même pour les faces BCGH et ADHE. On a donc :

$$\mathbf{(IK) \,//\, (OJ) \quad et \quad (KM) \,//\, (IO)}$$

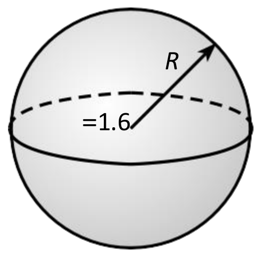
11 Volume d'une pyramide et d'une sphère

Pyramide



$$V = \frac{\mathbf{B} \times h}{3}$$

Sphère



$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$