Chapitre 3

Étude d'une fonction (chap. 3 à 6)

1 Limites

1.1 Somme

Si f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	k	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite	$l+k$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F. Ind**

1.2 Produit

Si f a pour limite	l	$l\neq 0$	0	∞
Si g a pour limite	k	∞	∞	∞
Alors $f\times g$ a pour limite	$l\times k$	∞	F. Ind	∞

1.3 Quotient

Si f a pour limite	l	$l\neq 0$	0	l	∞	∞
Si g a pour limite	$k\neq 0$	$0\pm$	0	∞	k	∞
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{k}$	∞	**F. Ind**	0	∞	**F. Ind**

1.4 Composition

Composition de deux fonctions.

Soient deux fonctions *f, g*. Soient *a, b et c* des réels :

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ $\;et\;$ $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$ $\;alors\;$ $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} g\big(f(x)\big) = c}$

1.5 Fonction et suite

Soit une suite (u_n) définie par : $u_n=f(n)$. *f* est alors la fonction réelle **associée** à la suite (u_n). Soit *a* un réel,

Si $\lim f(x) = a$ $\;alors\;$ $\lim u_n = a$

1.6 Comparaison

f , *g*, *et h* sont trois fonctions définies sur l'intervalle I =]b; +∞[et ℓ un réel.

1) **Théorème des « Gendarmes »**
   Si pour tout $x \in I$, on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$ $\;alors\;$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

2) **Théorème de comparaison**
   Si pour tout $x \in I$ on a : $f(x) > g(x)$ et si :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ $\;alors\;$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2 Continuité

Définition 4 : Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un élément de I.

On dit que la fonction f est **continue** en a si et seulement si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Fonctions continues :

Toutes fonctions construites par **somme, produit, quotient ou par composition** à partir de fonctions élémentaires sont continues sur leur ensemble de définition.

C'est par exemple le cas pour les **fonctions polynômes et rationnelles**.

Si f est dérivable en a alors la fonction f est **continue en *a*.**

▲La réciproque est fausse.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit une fonction f définie et **continue** sur un intervalle $I = [a, b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in I$ tel que $f(c) = k$.
(c n'est pas nécessairement unique).

Soit une fonction f **continue et strictement monotone** sur $I = [a, b]$. Alors, pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$

a une solution **unique** dans $I = [a, b]$

Si l'intervalle $I =]a, b[$ est ouvert, k doit alors être compris entre

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \quad et \quad \lim\limits_{x \to b} f(x)$

3 Dérivabilité

Définition 5 : Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un point de I. On dit que

la fonction f est dérivable en a si et seulement si le taux d'accroissement de la fonction f en

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(a)}{h} = l \quad et \quad f'(a)=l$$

- **Variation :** Soit une fonction f dérivable sur un f est **constante** sur I.

Si $\forall x \in$ I, $f'(x) > 0$, alors la fonction intervalle I.

- Si $\forall x \in$ I, $f'(x) = 0$, alors la fonction
- f est **croissante** sur I.
- Si $\forall x \in$ I, $f'(x) < 0$, alors la fonction f est **décroissante** sur I.

3.1 Dérivées des fonctions usuelles

FONCTIONS	DERIVEES	D_f
$f(x)=k$	$f'(x)=0$	-
$f(x)=x$	$f'(x)=k$	R
$f(x)= x^n \quad n\in N^*$	$f'(x)=nx^{n-1}$	R
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	R^*

FONCTIONS	**DERIVEES**	**D$_f$**
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \in N^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	R^*
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	R_+^*
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	R
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	R
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + tan^2(x)$	R-$\left\{\frac{n\pi}{2} + k\pi\right\}$
f(x)=ln(x)	$f'(x) = \frac{1}{x}$	R^*
$f(x) = e^x$	$f(x) = e^x$	R

3.2 Règles de dérivation

DERIVEE	**FORMULE**
de la somme	$(u+v)' = u' + v'$
du *ku*	$(ku)' = k \times u'$
du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
de l'inverse	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
du quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
de la puissance	$(u^n)' = nu' \times u^{n-1}$
de la racine	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
du logarithme	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
de l'exponentielle	$(e^u)' = u' \times e^u$

Tangente : Lorsque f est dérivable en a, la courbe représentative C f de la fonction f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente de coefficient directeur $\boldsymbol{f'(a)}$ dont l'équation est :

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

Pour déterminer les points de Cf où la tangente est

parallèle à une droite d'équation $y = mx + p$, on résout l'équation $f'(x) = m$

Extremum : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I. Soit a un point de I.

- Si f, admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.
- Si $f(a) = 0$ et si f' change de signe en a alors la fonction f admet un extremum local en a.

4 Fonctions exponentielle et logarithme

4.1 Existence

Définition 6 :

- La fonction exponentielle « exp » est l'unique fonction *f* définie sur ***R*** telle que : *f'=f et f(0)=1*. On note *exp(x)=e*^{x}
- La fonction logarithme népérien notée *ln* est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est définie sur ***R****

Notons que l'ensemble d'arrivée (image de exponentielle n'est pas exactement l'ensemble de définition de sa réciproque, ln.

Exemple :

$La\ fonction\ e^{x^2-1}\ existe\ sur\ \boldsymbol{R}\ tandis\ que\ \ la\ fonction\ ln(x^2-1)\ sur$ $]-\infty;-1[u]1;+\infty[\ car\ il\ faut\ que\ \ x^2-1>0$

Relation entre les deux fonctions

Pour tout ***y*** réel positif et ***x*** un réel, on a :

$$y=e^x\quad \Leftrightarrow \ln y=x\quad car\quad \ln(e^x)=x\ et\ aussi\ \ e^{\ln y}=y$$

4.2 Variations des deux fonctions

La fonction **exponentielle** et la fonction **logarithme** sont strictement croissantes sur leur ensemble de définition.

On a les tableaux suivants :

Fonction logarithme

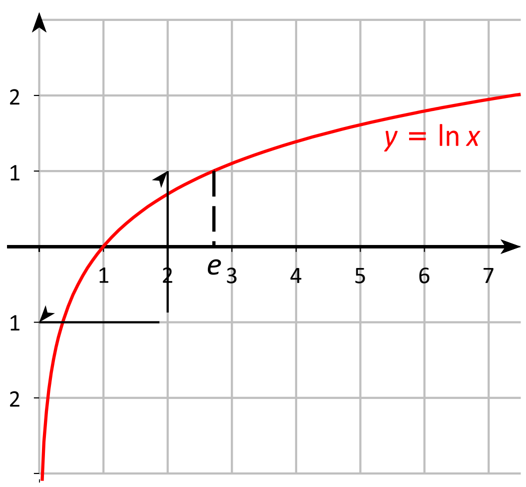
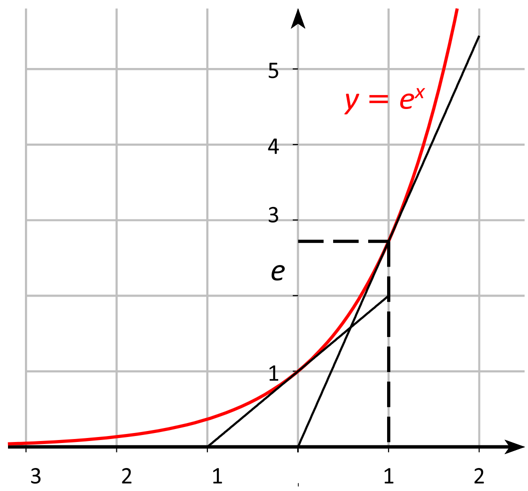
x	0	1	e	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖	+		
ln	‖ $-\infty$	0	1	$+\infty$

Fonction exponentielle

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x		+		
e^x	0	1	e	$+\infty$

4.3 Représentation des deux fonctions

Les deux courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Fonction logarithme	**Fonction exponentielle**
	

4.4 Propriétés algébriques

Fonction logarithme	Fonction exponentielle
$\ln 1 = 0 \;\; et \;\; \ln e = 1$ $\ln(ab) = \ln a + \ln b, \;\; \ln\frac{1}{b} = -\ln b$ $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \;\; \ln a^n = n \ln a$ $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$	On a : *e= 2,718282* $e^0 = 1 \;\; et \;\; e^1 = e$ $e^{a+b} = e^a \times e^b, \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, \quad (e^a)^n = e^{na}$

- $Pour \;\; tout \;\; x > 0, \; on \; a\!: \;\; \ln\frac{1}{x^2} = -\ln x^2 = -2\ln x$
- $Pour \;\; tout \;\; x, on \; a\!: \;\; (e^{-x})^2 \times e^{3x} = e^{-2x} \times e^{3x} = e^x$

4.5 Signe des deux fonctions

Fonction logarithme	Fonction exponentielle
$Si \; 0 < x < 1 \; alors \;\; \ln x < 0$ $Si \;\; x > 1 \; alors \;\; \ln x > 0$	$Pour \; tout \; x, \qquad e^x > 0$

4.6 Équations et inéquations

Fonction logarithme	Fonction exponentielle
Pour *a*, *b et x* positif $\ln a = \ln b \leftrightarrow a = b$ $\ln a < \ln b \leftrightarrow a < b$ $\ln x = y \leftrightarrow x = e^y$ $\ln x < y \leftrightarrow 0 < x < e^y$	Pour *a*, *b et x* positif $e^a = e^b \leftrightarrow a = b$ $e^a < e^b \leftrightarrow a < b$ $e^y = x \leftrightarrow y = \ln x$ $e^y < x \leftrightarrow y < \ln x$

Notons : Pour les équations et les inéquations avec les logarithmes, ne pas oublier de commencer par définir les **conditions d'existence** (les expressions contenues dans un logarithme doivent être positives)

4.7 Limites et croissance comparée

Fonction logarithme	Fonction exponentielle
$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0>} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

4.8 Exemples

Equations et inéquations

- Résoudre : $\ln x + \ln 2 = 5 \quad D_f = R_+^*$

On a alors $\ln 2x = 5 \Leftrightarrow 2x = e^5 \Leftrightarrow x = \frac{e^5}{2}$

- Résoudre : $\ln(x+2) \leq 1 \quad D_f =]-2;\ +\infty[$

On a $x + 2 \leq e^1 \Leftrightarrow x \leq e - 2,\ S =]-2;\ +\infty]$

- Résoudre : $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0\ \ on\ pose: X = e^x$

On a $X^2 - 2X - 3 = 0 \Leftrightarrow\ X_1 = -1(non\ solution);\ X_2 = 3 \Leftrightarrow e^x = 3$

Donc $x = \ln 3$

- Résoudre $e^x < 5e^{-x} \Leftrightarrow e^x < \frac{5}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x} < 5 \Leftrightarrow 2x < \ln 5$

$$x < \frac{\ln 5}{2} \qquad S = \left]-\infty;\ \frac{\ln 5}{2}\right[$$

Limites

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) =$
  $-\infty \ car \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 3e^{x} - x^{2} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x}\left(3 - \frac{x^{2}}{e^{x}}\right) =$
  $+\infty \ car \ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^{2}}{e^{x}} = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x} + \ln x}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} \times \frac{1 + \frac{\ln x}{e^{x}}}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty \ \ car \ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} =$
  $+\infty \ et \ \lim\limits_{x + \infty} \frac{\ln x}{e^{x}}$

- $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) = \lim\limits_{x \to 0^{+}} \left[\frac{1}{x}(1 + x \ln x)\right] =$
  $+\infty \ car \ \lim\limits_{x \to 0^{+}} \frac{1}{x} = +\infty \ et \ \lim\limits_{x \to 0^{+}} x \ln x = 0$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x}(x+1) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} + e^{x} =$
  $0 \ \ car \ \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0 \ \ et \ \ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

Chapitre 7

Les fonctions sinus et cosinus

1 Équation trigonométrique

Équations trigonométriques

- L'équation $\cos x = \cos a$ admet les solutions suivantes sur R :

$$x = a + k\,2\pi \quad \text{ou} \quad x = \boldsymbol{-a} + k\,2\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

- L'équation $\sin x = \sin a$ admet les solutions suivantes sur R :

$$x = a + k\,2\pi \quad \text{ou} \quad x = \boldsymbol{\pi - a} + k\,2\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

2 Signe des fonctions sinus et cosinus

Sur l'intervalle$]-\pi;\pi]$, les fonctions sinus et cosinus ont les signes suivants :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	-	-1	-	0	+	1	+	0
$\cos x$	-1	-	0	+	1	+	0	-	-1

3 Propriétés des fonctions sinus et cosinus

Parité :

- La fonction sinus est **impaire :** $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}, \sin(-\boldsymbol{x}) = -\sin \boldsymbol{x}$
- La fonction cosinus est **paire :** $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}, \cos(-\boldsymbol{x}) = \cos \boldsymbol{x}$

Périodicité :

Les fonctions sinus et cosinus sont $\boldsymbol{2\pi}$ ***périodiques*** noté $T = 2\pi$ *on a* $\forall x \in R, \sin(x + 2\pi) = \sin x$ *et* $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

De sinus à cosinus

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad et \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

4 Dérivées et limites

Dérivées

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbf{R}_+$:

$$\boldsymbol{\sin' x = \cos x \quad et \quad \cos' x = -\sin x}$$

Limites

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad et \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0}$$

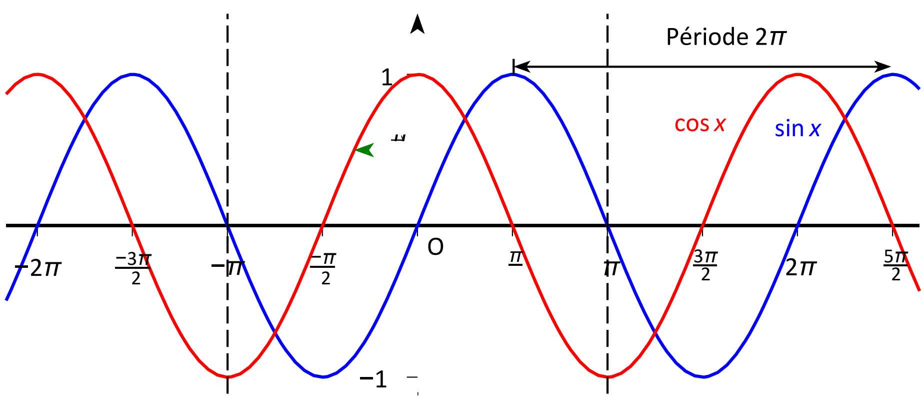
5 Variations et représentations

- Les variations des fonctions sinus et cosinus sont les suivantes :

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{\pi}{2}$		π
$\sin' x = \cos x$		-	0	+	0	-	
$\sin x$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	$-\pi$		0		π
$\cos' x = \sin x$		+	**0**	-	
$\cos x$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

- Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sont des sinusoïdes.



6 Fonctions sin $(ax + b)$ et cos $(ax + b)$

Dérivée

Les fonctions *sin (ax+b) et cos (ax+b)* sont dérivables sur ***R*** et
$\sin'(ax+b) = \mathrm{a}\cos(ax+b)$ *et* $\cos'(ax+b) = -a\sin(ax+b)$

Périodicité

Les fonctions *sin (ax+b) et cos(ax+b)* sont $\boldsymbol{\frac{2\pi}{a}}$ périodiques.

7 Application aux ondes progressives

Un son pur est une onde sinusoïdale caractérisée par :

- Sa fréquence F (en Hertz, nombre de pulsations par seconde) qui détermine la hauteur du son.
- Son amplitude (pression acoustique) P (en Pascal).

La fréquence F est reliée à la période T de la sinusoïde par la relation :

$$F = \frac{1}{T}$$

La fonction f associée est donc de la forme : $f(t) = P\sin(2\pi F t)$

La note de référence (donnée par un diapason) sur laquelle s'accordent les instruments de l'orchestre est le la$_3$ qui vibre à 440 Hz. Pour une amplitude de 1 Pa, cette note peut être associé à la fonction f définie par :

$f(t) = \sin(880\pi t)$.

L'écran d'un oscilloscope donne alors :