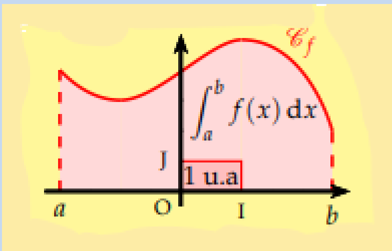
Chapitre 8

Intégrales et primitives

1 Aire sous une courbe

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a; b]$ et C_f sa courbe représentative. La **mesure** de l'aire, sous la courbe C_f entre les abscisses a et b est donné par :

$\mathcal{A} = \int_a^b f(t)\, dt$, qui est l'aire de la surface en rose.



2 Primitives

Théorème fondamental

Soit une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a, b]$.
La fonction F définie par : $F(x) = f(t)\, dt$ est dérivable sur $[a, b]$ et $\boldsymbol{F'} = \boldsymbol{f}$

Primitives

- F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable et si $\forall x \in$ I, on a : $F'(x) = f(x)$

- Si F_0 est une primitive de f sur un intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme :

$$F(x) = F_0(x) + C$$

où C, est une constante réel.

- Il existe une unique primitive F de f sur un intervalle I telle que pour les réels x_0 et y_0, on a : $F'(x_0) = y_0$

- Toute fonction **continue** sur un intervalle I, **admet des primitives**.

Si F est une primitive quelconque d'une fonction f continue sur un intervalle I, alors pourtous réels a et b de I on a :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

3 Calcul de primitives

Fonction	**Primitive**	**Intervalle**
f(x)=k	*F(x)=*$\boldsymbol{kx}$	$\boldsymbol{R}$
f(x)=x	*F(x)=* $\frac{x^2}{2}$	$\boldsymbol{R}$
f(x)=x^n	*F(x)=* $\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\boldsymbol{R}$
f(x)= $\frac{1}{x}$	*F(x)=* $\ln\lvert x\rvert$	R_+^* *ou* R_-^*
f(x)= $\frac{1}{x^n}$ $avec\ n \neq 1$	*F(x)=* $-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	R_+^* *ou* R_-^*
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	*F(x)=*$2\sqrt{x}$	R_+^*
f(x)=sin(x)	*F(x)=- cos(x)*	$\boldsymbol{R}$
f(x)=cos(x)	*F(x)= sin(x)*	$\boldsymbol{R}$
f(x)= e^x	*F(x)=* e^x	$\boldsymbol{R}$

Recherche d'une primitive

Pour les fonctions **usuelles**, on utilise directement les formules.

Pour **autres** fonctions, il faut d'abord identifier la forme qui ressemble plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on applique la formule correspondante avec assez de subtilité.

Dans **le cas contraire**, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction *f*, par une transformation juste de l'expression.

Exemples :

- Soit *f* définie sur$]-2;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(3x+6)^2}$ On pense à la forme $\frac{U'}{U^n}$ avec *n=2* dont une primitive est $\frac{-1}{U}$

$\Rightarrow$ On écrit $f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{(3x+6)^2}$, une primitive de f est F définie par $F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{-1}{3x+6}$

- Soit g définie sur $]0;\ +\infty[$ par $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

$\Rightarrow$ La fonction g est de la forme $u'u$ donc une primitive est $\frac{1}{2} \times u^2$ d'où $G(x) = \frac{1}{2} \times (\ln x)^2$

D'où ce Calcul Intégral

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{ln^2 x}{2}\right]_1^e = \frac{ln^2 e}{2} - \frac{ln^2 1}{2} = \frac{1}{2}$$

4 Propriétés de l'intégrale

- $On\ a$: $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ c'est la **relation de Chasles**
- $\int_a^b (af(x) + bg(x))dx = a\int_a^b f(x)dx + b\int_a^b f(x)dx$ **Linéarité**

Sur un intervalle $[a; b]$

- Si $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si $f(x) \geq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- Si $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ Ce s'appelle l'**inégalité de la Moyenne**

Valeur moyenne

Si f est continue sur $[a; b]$, la valeur moyenne μ $de\ f\ sur$ $[a; b]$ est égale à $\boldsymbol{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$