

CfCA 流体学校

国立天文台 天文シミュレーションプロジェクト

岩崎一成

Contents

1	流体方程式の数値解法	1
1.1	移流方程式の数値解法の流体方程式への適用	1
1.1.1	移流方程式の数値解法	1
1.1.2	特性曲線	3
1.2	Godunov 法	5
1.2.1	近似 Riemann 解法	6
1.2.2	プログラミングするための準備	10
1.2.3	ゴーストセルを使った境界条件の処理	12
1.2.4	時間空間一次精度サンプルプログラムでの計算手順	13
1.3	実習課題	16
1.3.1	衝撃波管問題	16
1.3.2	音波の伝播	19
2	磁気流体力学の数値解法	20
2.1	1次元磁気流体方程式	20
2.1.1	近似 Riemann 解法	21
2.1.2	実装方針	28
2.1.3	高次精度化	30
2.2	多次元磁気流体コード	31
2.3	実習	34
2.3.1	Kelvin-Helmholtz(KH) 不安定性	34
2.3.2	Rayleigh-Taylor(RT) 不安定性	36
2.3.3	Decaying Turbulence	39

3	テスト計算	40
3.1	流体力学	40
3.1.1	Sod 解 (1 次元)	41
3.1.2	衝撃波管問題 (1 次元)	42
3.1.3	音波 (1 次元)	43
3.2	磁気流体力学	44
3.2.1	Brio-Wu 解 (1 次元)	44
3.2.2	衝撃波管問題 in 2D	44

Chapter 1

流体方程式の数値解法

この章では、以下の1次元流体方程式の数値解法について扱う。高精度化と多次元化については次の磁気流体方程式の数値解法の章(第2章)で説明する。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P \\ (E + P)v_x \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

流体方程式の数値解法については様々な手法が提案されてきた。CfCA 流体学校では、現在の天文シミュレーションにおいて広く用いられている Godunov 法 (Godunov, 1959) とそこから派生した手法を主に扱う。その前に、移流方程式の数値解法で開発された手法の流体方程式への応用についても、Riemann 不変量や特性曲線などの重要事項が出てくるとともに歴史的に重要なので簡単に説明する。

1.1 移流方程式の数値解法の流体方程式への適用

1.1.1 移流方程式の数値解法

最も簡単な双曲型微分方程式である移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

は、物理量 f の速度 c での移流を表しており、厳密解 $u = f(x - ct)$ が知られている。

移流方程式の数値解法については長い歴史があり、移流方程式の発展形である流体方程式の数値解法に

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \nu(f_{i+1/2} - f_{i-1/2}), \quad (1.4)$$

ここで、 $\nu = c\Delta t/\Delta x$ 。

数値流束 $f_{i+1/2}$ の様々な評価方法がある。詳細な解説は講義に譲り、ここでは代表的なものについて列挙する。

中心差分

差分方程式は、

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \nu \frac{1}{2} (u_{i+1} - u_{i-1}) \quad (1.5)$$

となり、有限体積法での数値流束は

$$f_{i+1/2} = c \frac{u_i + u_{i+1}}{2} \quad (1.6)$$

となる。中心差分は数値的に不安定である。

空間一次精度風上差分

差分方程式は、 c の正負により後退差分と前進差分を切り替えて、

$$u_i^{n+1} = \begin{cases} u_i^n - \nu(u_i - u_{i-1}) & \text{for } c > 0 \\ u_i^n - \nu(u_{i+1} - u_i) & \text{for } c < 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

となり、数値流束は

$$f_{i+1/2} = \begin{cases} cu_i & \text{for } c > 0 \\ cu_{i+1} & \text{for } c < 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

となる。また以下のようにまとめて書くこともできる。

$$f_{i+1/2} = \left\{ \frac{cu_i + cu_{i+1}}{2} - \frac{|c|}{2} (u_{i+1} - u_i) \right\} \quad (1.9)$$

Lax 法

差分方程式 (Lax, 1954) は、

$$u_i^{n+1} = \frac{u_{i-1}^n + u_{i+1}^n}{2} - \frac{\nu}{2} (u_{i+1} - u_{i-1}) \quad (1.10)$$

となり、数値流束は、

$$f_{i+1/2} = c \left(\frac{1+1/\nu}{2} u_i + \frac{1-1/\nu}{2} u_{i+1} \right) = c \left(\frac{u_i + u_{i+1}}{2} \right) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (u_{i+1} - u_i) \quad (1.11)$$

となる。

Lax-Wendroff 法

差分方程式 (Lax and Wendroff, 1960) は、

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2} (u_{i+1} - u_{i-1}) + \frac{\nu^2}{2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad (1.12)$$

となり、数値流束は、

$$f_{i+1/2} = c \left(\frac{1+\nu}{2} u_i + \frac{1-\nu}{2} u_{i+1} \right) = c \left\{ \frac{u_i + u_{i+1}}{2} - \frac{\nu}{2} (u_{i+1} - u_i) \right\} \quad (1.13)$$

となる。

Lax 法と Lax-Wendroff 法は、セル境界 $i+1/2$ の両側のセル中心の値 u_i と u_{i+1} をある重みを付けて平均した値で流束を評価していることになっている。また、別の見方をすると、数値流束は中心差分での数値流束に、 $u_{i+1} - u_i$ に比例する項を加えた形に変形することができる。 $u_{i+1} - u_i \sim (\partial u / \partial x) \Delta x$ なので、拡散として働き、その拡散係数は Lax 法では $c\Delta x / \nu = \Delta x^2 / \Delta t$ 、Lax-Wendroff 法では $\nu c \Delta x = c^2 \Delta t$ となる。数値的に不安定な中心差分を拡散で安定化していると解釈することができる。ただその大きさは両者で異なり、Lax 法は離散化した時空 $(\Delta x, \Delta t)$ で決まる最大の拡散になっており、Lax-Wendroff 法は、移流速度と Δt の間での移流距離で決まる拡散になっている。CFL 条件より $\nu \leq 1$ なので、Lax 法の方が Lax-Wendroff 法よりも数値拡散がかなり大きく入る。

1.1.2 特性曲線

流体方程式の性質として、

流体方程式は Jacobi 行列 A を使うと、以下のように移流方程式に似せた形に書き換えることができる。

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + A_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x} = 0, \quad A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial U_j} \quad (1.14)$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(3-\gamma)v^2/2 & (3-\gamma)v & \gamma-1 \\ \left(\frac{(\gamma-2)v^2}{2} - \frac{\gamma P}{\gamma-1} \right) v & \frac{\gamma P}{\gamma-1} + \frac{(3-2\gamma)v^2}{2} & \gamma v \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

A_{ij} が移流方程式での速度に対応するが、非対角成分が存在するので、完全な移流方程式ではない。そこで A_{ij} が対角成分となるような系を変換する。

Jacobi 行列の固有値と固有ベクトルは、それぞれ

$$\lambda_1 = v - a, \lambda_2 = v, \lambda_3 = v + a \quad (1.16)$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ v - a \\ H - va \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ v + a \\ H + va \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

となる。ここで $H = v^2/2 + \gamma P/(\gamma - 1)$ は比エンタルピーを表す。固有ベクトルから構成した行列

$$R_{ij} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v - a & v & v + a \\ H - va & v^2/2 & H + va \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

を使って、Jacobi 行列を以下のように対角化できる。

$$\Lambda_{ij} = (R^{-1})_{ik} A_{kl} R_{lj} = \begin{pmatrix} v - a & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & v + a \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

R の逆行列は以下になる。

$$(R^{-1})_{ij} = \frac{\gamma - 1}{2a^2} \begin{pmatrix} \frac{v^2}{2} + \frac{va}{\gamma - 1} & -v - \frac{a}{\gamma - 1} & 1 \\ -v^2 + \frac{2a^2}{\gamma - 1} & 2a & -2 \\ \frac{v^2}{2} - \frac{va}{\gamma - 1} & -v + \frac{a}{\gamma - 1} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

流体方程式は以下のように変形できる。

$$(R^{-1})_{ik} \frac{\partial U_k}{\partial t} = \lambda_i (R^{-1})_{ik} \frac{\partial U_k}{\partial x} \quad (1.21)$$

保存量ベクトルを R^{-1} で変換した量 \mathbf{W} が、対応する Λ_{ij} の対角成分の速度で移流するということを表している。

$$(R^{-1})_{ik} dU_k = \frac{1}{2a^2} \begin{pmatrix} dP - a\rho dv \\ -2a^2 P d[\ln(P\rho^{-\gamma})] \\ dP + a\rho dv \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} dW_1 \\ dW_2 \\ dW_3 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

\mathbf{W} は Riemann 不変量と呼ばれ、 W_1 と W_2 は、流体系から見て左右に音速で伝播する音波によって移流する量を表し、 W_2 はエントロピーと等しく、流体素片の速度で伝播するエントロピー波を表す。

流体方程式をこれら 3つの移流方程式に分解し、それぞれに移流方程式の適切な数値計算法を適用して時間更新させたのち、 R を掛けて元の保存量に戻せばよい。たとえば、空間一次精度風上差分法を流体方程式に適用すると、数値流束は、

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1} - (\mathbf{R}|\Lambda|\mathbf{R}^{-1})_{i+1/2} (\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i) \right] \quad (1.23)$$

となる。ここで $|\Lambda|$ は Λ の対角成分の絶対値をとった行列である。

1.2 Godunov 法

天文学の多くのシミュレーションでは、有限体積法が用いられている。空間をセルに分割し、セル内の物理量の時間発展を、セルの両側の境界で流れる流束の差し引きで求める。セル中心の座標を x_i とし、セル境界の座標を $x_{i+1/2}$ とする。 i 番目のセルの保存量を U_i とし、その左と右の境界を流れる流束を $F_{i-1/2}$ と $F_{i+1/2}$ とすると、有限体積法による保存量の時間進化は以下の式で表現される。

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) \quad (1.24)$$

詳しくは講義で話されるが、 $x_{i+1/2}$ での数値流束を、 x_i と x_{i+1} の保存量を使って出した流束の単純な平均 (例えば、質量保存式の場合 $F_{i+1/2} = \{(\rho v_x)_i + (\rho v_x)_{i+1}\}/2$) として表して計算すると、移流方程式での中心差分に相当し、数值的に不安定となる。

Godunov (1959) によって提唱された Godunov 法は、数値流束 $F_{i+1/2}$ を求める際に、左の状態 U_i と右の状態 U_{i+1} の間に初期不連続があるとして Riemann 問題を解いて得た厳密解を使い、セル境界の位置の物理量から数値流束を計算する手法である。形式的に書くと、

$$F_{i+1/2} = \text{RiemannProblem}(U_i, U_{i+1}) \quad (1.25)$$

となる。ここで RiemannProblem は、左右の状態を入力として数値流束を返す関数である。Godunov (1959) の手法は空間一次精度であったが、G

1.2.1 近似 Riemann 解法

厳密な Riemann 解法では、陰的方程式の求解が必要なので、計算に時間がかかるという問題がある。ただ流体方程式の場合については、厳密 Riemann 解法が比較的単純なので一部のシミュレーションで使われている。しかし、第 2 章で扱う磁気流体力学での厳密 Riemann 解法は、波の数が最大 7 本となり、求解過程が非常に複雑になる。そのため特に磁気流体では厳密 Riemann 解法を使うのは現実的ではない。

そこで Riemann 問題を厳密に解かずに、ある程度サボって近似的に解く手法が確立している。今回の実習では代表的な近似 Riemann 解法である HLL 法と、それから派生した HLLC 法を実装する。

Harten-Lax-van Leer (HLL) 近似 Riemann 解法

HLL 法は Harten et al. (1983) によって提案され、下の図のようにセル境界を起点として、左右に伝播する波 (速度は S_L と S_R) に一様な中間状態 (U^*, F^*) を仮定する。

求めたい量はセル境界での流束 F である。 S_L と S_R の正負によって以下の場合に分けることができる ($S_R > S_L$ は使う)。

- $S_L > 0$ のとき。この時は、セル境界は左の状態にあるので、数値流束に F_L を採用する。
- $S_R < 0$ のとき。この時は、セル境界は左の状態にあるので、数値流束に F_R を採用する。
- それ以外 ($S_L \leq 0 \leq S_R$)。下の図のように、セル境界が中間状態にあるので、数値流束に F^* を採用する。

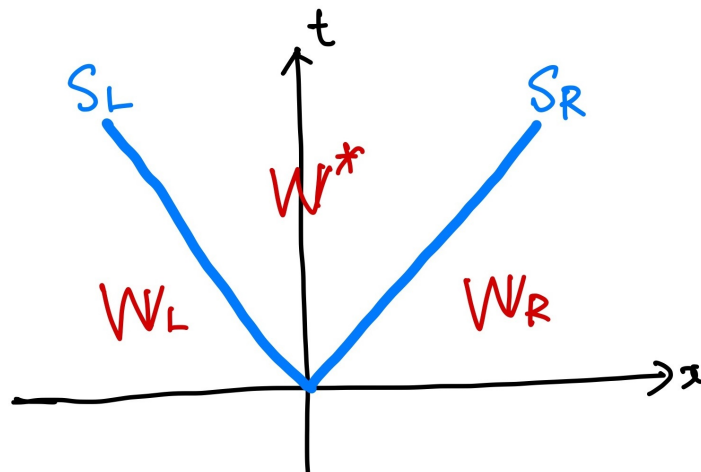


Figure 1.1: HLL 法

上記の場合分けの3つ目の場合は、中間状態の数値流束 \mathbf{F}^* が必要であるため、以下で、その導出過程を示す。HLL 法では以下の保存式のみを使って中間状態を求める。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (1.26)$$

まず、保存則を $S_L \Delta t \leq x \leq S_R \Delta t$ と $0 \leq t \leq \Delta t$ で積分する。

$$\int_{S_L \Delta t}^{S_R \Delta t} \mathbf{U}(\Delta t, x) dx - \int_{S_L \Delta t}^{S_R \Delta t} \mathbf{U}(0, x) dx + \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}(t, S_R \Delta t) dt - \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}(t, S_L \Delta t) dt = 0 \quad (1.27)$$

第一項は、時刻 $t = \Delta t$ で、 $S_L \Delta t \leq x \leq S_R \Delta t$ にある状態なので、 $\mathbf{U}^*(S_R - S_L) \Delta t$ となり、第二項は、時刻 $t = 0$ なので、 $S_L \Delta t \leq x \leq 0$ と $0 \Delta t \leq x \leq S_R \Delta t$ に分割し、 $\mathbf{U}_L S_L - \mathbf{U}_R S_R$ となる。第三項は、 $x = S_R \Delta t$ における $0 \leq t \leq \Delta t$ での状態なので、 $\mathbf{F}_R \Delta t$ となり、第四項は、同様にして $-\mathbf{F}_L \Delta t$ となる。したがって、

$$\mathbf{U}^* = \frac{S_R \mathbf{U}_R - S_L \mathbf{U}_L - \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L}{S_R - S_L} \quad (1.28)$$

を得る。

保存則を $0 \leq x \leq S_R \Delta t$ と $0 \leq t \leq \Delta t$ で積分すると、

$$\int_0^{S_R \Delta t} \mathbf{U}(\Delta t, x) dx - \int_0^{S_R \Delta t} \mathbf{U}(0, x) dx + \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}(t, S_R \Delta t) dt - \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}(t, 0) dt = 0 \quad (1.29)$$

となり、図 1.1 より、

$$\mathbf{U}_R S_R \Delta t - \mathbf{U}^* S_R \Delta t + \mathbf{F}_R \Delta t - \mathbf{F}^* \Delta t = 0 \quad (1.30)$$

を得る。式 (1.28) を使うと、式 (1.29) から、

$$\mathbf{F}^* = \frac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R + S_R S_L (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{S_R - S_L} \quad (1.31)$$

を得る。

HLL 流束は

$$\mathbf{F}_{\text{HLL}} = \begin{cases} \mathbf{F}_L & \text{if } S_L > 0 \\ \mathbf{F}_R & \text{if } S_R < 0 \\ \mathbf{F}^* & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.32)$$

HLL 法では、 S_L と S_R は決まらないので、手で与える必要がある。様々な手法が提案されている。

$$S_L = \min(v_{x,L}, v_{x,R}) - \max(c_{s,L}, c_{s,R}), \quad S_R = \max(v_{x,L}, v_{x,R}) + \max(c_{s,L}, c_{s,R}) \quad (1.33)$$

HLLC 近似 Riemann 解法

HLLC(HLL-contact discontinuity) 法は、HLL 法の拡張である (Toro et al., 1994)。HLL 法の間断状態を接触不連続面を介して、2つの状態 ($\mathbf{U}_L^*, \mathbf{U}_R^*$) に分ける。

左右に伝播する波の前後での保存則より、

$$S_L \mathbf{U}_L^* - \mathbf{F}_L^* = S_L \mathbf{U}_L - \mathbf{F}_L \quad (1.34)$$

$$S_R \mathbf{U}_R^* - \mathbf{F}_R^* = S_R \mathbf{U}_R - \mathbf{F}_R \quad (1.35)$$

を得る。

接触不連続面なので、前後で速度と圧力が等しい。これらを v^* と P^* とする。上の2つの保存式 (式 2.6、2.7) の質量保存から、

$$\rho_L^*(S_L - v^*) = \rho_L(S_L - v_L) = C_L, \quad \rho_R^*(S_R - v^*) = \rho_R(S_R - v_R) = C_R \quad (1.36)$$

を得る。ここで、 C_L と C_R は左右の波を介した質量流束を表す。

次に上の2つの保存式 (式 2.6、2.7) の運動量保存から、

$$-P^* + \rho_L^* v^*(S_L - v^*) = -P_L + \rho_L v_L(S_L - v_L), \quad -P^* + \rho_R^* v^*(S_R - v^*) = -P_R + \rho_R v_R(S_R - v_R), \quad (1.37)$$

となる。式 (1.36) を使うと、

$$-P^* + C_L v^* = -P_L + C_L v_L, \quad -P^* + C_R v^* = -P_R + C_R v_R \quad (1.38)$$

となり、 v^* と P^* について解くと、

$$v^* = \frac{-C_L v_L + C_R v_R - (P_R - P_L)}{-C_L + C_R} \quad (1.39)$$

$$P^* = P_L + C_L(v^* - v_L) = P_R + C_R(v^* - v_R) \quad (1.40)$$

となる。これにより接触不連続面の伝播速度 $S_M = v^*$ が決まる。

HLL 方法と同じ考え方を使うと、 $S_L < S_M < S_R$ の3つの速度の正負で、セル境界にある状態には4つの場合がありえる。したがって数値流束は以下で与えられる。

$$\mathbf{F}_{\text{HLLC}} = \begin{cases} \mathbf{F}_L & \text{for } S_L > 0 \\ \mathbf{F}_L^* = \mathbf{F}_L + S_L(\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L) & \text{for } S_L \leq 0 \leq S_M \\ \mathbf{F}_R^* = \mathbf{F}_R + S_R(\mathbf{U}_R^* - \mathbf{U}_R) & \text{for } S_M \leq 0 \leq S_R \\ \mathbf{F}_R & \text{for } S_R < 0 \end{cases} \quad (1.41)$$

\mathbf{F}_L^* と \mathbf{F}_R^* を求めるために、 $U_{L,R}^*$ が必要である。ここで重要なのは保存則だけを使うことである。

質量保存の式より、

$$\rho_{L,R}^* = \rho_{L,R} \frac{S_{L,R} - u_{L,R}}{S_{L,R} - S_M} \quad (1.42)$$

を得て、エネルギー保存式より、

$$E_{L,R}^* = \frac{(S_{L,R} - u_{L,R}) E_{L,R} - P_{L,R} v_{L,R} + P^* S_M}{S_{L,R} - S_M} \quad (1.43)$$

を得る。中間状態 $(\rho_{L,R}^*, v^*, P^*, E_{L,R}^*)$ を使って、 $\mathbf{F}_{L,R}^*$ を求める。

厳密 Riemann 解法ではないので、HLL 系解法では流体変数間の関係は満たされない。例えば、

$$E_{L,R}^* \neq \frac{1}{2} \rho_{L,R}^* (v^*)^2 + P^* \quad (1.44)$$

となるので注意。厳密解法ではもちろん一致する。

1.2.2 プログラミングするための準備

Fortran を使ってプログラミングをおこなうための準備をする。 x_i や ρ_i 、 $F_{i+1/2}$ など、空間に依存する量はセルの番号をインデックスとする配列を使って表現する。注意するのは、有限体積法ではセル中心で定義されている物理量 (ρ_i 、 P_i など) とセル境界で定義されている物理量 ($F_{i+1/2}$) があることである。Fortran では、配列のインデックスは整数でなければならないので、数値流束 $F_{i+1/2}$ の半整数 $i+1/2$ をインデックスにできない。たとえば、数値流束 $F_{i+1/2}$ を $F(i)$ と表現することにして、頭の中で $1/2$ だけずらす必要がある。

座標に関する変数と配列

図 1.2 に示す通り、計算領域を $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ とし (変数名 `x_min`、`x_max`)、空間を N_{grid} 個 (変数名 `ngrid`) のセルに分割する。

?? 節で述べた通り、境界条件を課すために使うゴーストセルを左右に用意する (図 1.2 の赤破線)。ゴーストセルの数は、Riemann 問題の左右の状態を求める手法に依存する。例えば、空間 2 次精度 MUSCL 法では、ゴーストセルは計算領域を挟み左右にそれぞれ 2 つ必要である。ゴーストセルの数を、自由に変更できるようにするため、`mgn` という変数にする。

図 1.2 に示すように、セル中心境界 $x_{i-1/2}$ を表す配列を `x1f(i)` とし、セル中心座標を表す配列 x_i を `x1v(i)` とする。実は fortran では配列の開始インデックスは任意の整数から始められるが、ここではデフォルトの 1 とする (C 言語の場合 0)。ゴーストセルが加わるため、計算領域左端のセル中心座標のインデックスは 1 ではない値となり、これを `is` とする (これは `mgn+1` と等しい)。同様に右端のセル中心座標のインデックスを `ie` とする (これは `ngrid+mgn` と等しい)。セル境界座標の `x1f(is)` は x_{\min} と等しく、`x1f(ie+1)` は x_{\max} に等しい。

セル中心座標 `x1v` の総要素数は `ngrid+2*mgn` で、セル境界座標 `x1f` の総要素数は `ngrid+2*mgn+1` である。サンプルプログラムでは大きい方 `ngrid+2*mgn+1` を `in` としている。

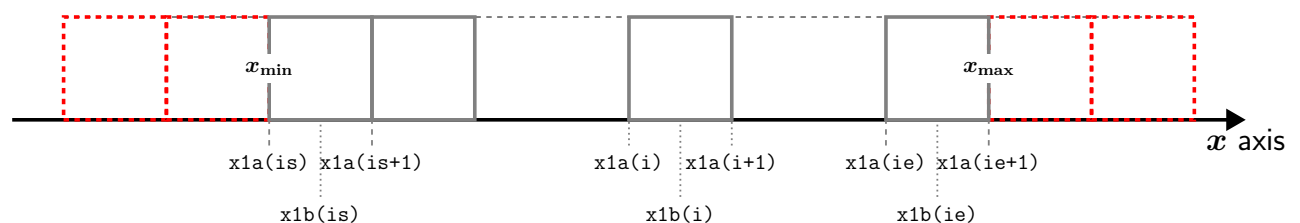


Figure 1.2:

Table 1.1: 座標に関する変数

変数名/配列名	説明
<code>nx</code>	計算領域内のセル総数
<code>ngh</code>	ghost cell 数
<code>nxtot</code>	ghost cell を含めたセル総数
<code>is</code>	計算領域左端のセル番号
<code>ie</code>	計算領域右端のセル番号
<code>xlmin</code>	計算領域左端の座標
<code>xlmax</code>	計算領域右端の座標
<code>x1c(i)</code>	セル中心の座標 x_i (要素数 <code>nxtot</code>)
<code>x1b(i)</code>	セル境界の座標 $x_{i+1/2}$ (要素数 <code>nxtot+1</code>)

流体変数に関する変数と配列

物理量は、 x と t の 2 つの従属変数をもつので、空間方向のセル番号と時間ステップの番号を引数とする 2 次元配列、例えば `d(i,n)` で定義するのが自然と思うかもしれない。しかし、例えばオイラー時間積分法で解く場合、 $t = t^{n+1}$ での U を求めるとき、前の時刻 $t = t^n$ の全空間の U のデータを保存しておけば十分で、それ以前 $t \leq t^{n-1}$ のデータは不要である。したがって、通常、時間ステップ番号を引数とすることはなく、空間 1 次元のシミュレーションをおこなう場合は、セル番号を引数とする配列 (例えば `U(i)`) を宣言する。多段の時間積分法を使う場合は、サブステップの物理量を保存しておく必要があるため、必要な数の配列を宣言する。

サンプルコードでは、保存量と基本量をそれぞれ 2 次元配列 `U(i,n)` と `W(i,n)` で定義している。一番目の引数 `i` はセル番号を表し、二番目の引数 `n` は流体変数のインデックスを表す。1 次元流体計算では式 (1.2) で示すように、3 つの要素をもつ。たとえば、`U(i,0)` は、`i` 番目のセルの密度を表し、`W(i,2)` は `i` 番目のセルの圧力を表す。プログラム内で、番号で流体変数の種類を指定するのは間違いの元なので、変数名を流体変数と対応付けた整数変数を定義する。詳しくは表 1.2.2 を参照。

表 1.2.2 にサンプルプログラムで使われている配列を示す。

Table 1.2: 流体変数に関する変数

変数名/配列名	説明
基本量 (primitive variables) (IDEN=0, IVX=1, IPRE=2)	
Q(i, IDN)	$x = x_i$ における密度 (要素数 <code>nxtot</code>),
Q(i, IV1)	$x = x_i$ における速度 (要素数 <code>nxtot</code>)
Q(i, IPR)	$x = x_i$ における圧力 (要素数 <code>nxtot</code>)
保存量 (primitive variables) (IDEN=0, IMX=1, IENE=2)	
U(i, IDN)	$x = x_i$ における密度 (要素数 <code>nxtot</code>)
U(i, IM1)	$x = x_i$ における運動量 (要素数 <code>nxtot</code>)
U(i, IEN)	$x = x_i$ における全エネルギー (要素数 <code>nxtot</code>)
セル境界の流束 (numerical flux) (IDEN=0, IMX=1, IENE=2)	
F(i, IDN)	$x = x_{i+1/2}$ における質量流束 (要素数 <code>nxtot+1</code>)
F(i, IM1)	$x = x_{i+1/2}$ における運動量流束 (要素数 <code>nxtot+1</code>)
F(i, IEN)	$x = x_{i+1/2}$ におけるエネルギー流束 (要素数 <code>nxtot+1</code>)

1.2.3 ゴーストセルを使った境界条件の処理

流体方程式は、偏微分方程式なので解くためには境界条件が必要となる。時間方向の境界条件は初期条件と呼ばれ、シミュレーション上では、 $t = 0$ において、全てのセルの U に値を代入することに対応する。

現実の空間は無限に広がっているが、シミュレーションをおこなう場合は、有限の計算領域を設定せざるを得ず、必ず空間方向の境界条件 (以下では単に境界条件と呼ぶ) を与える必要がある。

代表的な境界条件としては、

- 周期境界条件 $U(x + L) = U(x)$
- ディリクレ境界条件 $\partial U / \partial x = U'_0$.
- ノイマン境界条件 $U = U_0$

がある。その他、問題設定に応じて適切な条件を設定する。

左端セルの密度の時間発展は、

$$U(is, IDEN) = U(is, IDEN) - dt / (x1f(is+1) - x1f(is)) * (F(is+1, IDEN) - F(is, IDEN))$$

となる。ここで $F(is, IDEN)$ は $U(is-1, IDEN)$ と $U(is, IDEN)$ から計算されるはずだが、 $U(is-1, IDEN)$

は計算領域外にあるので、このままでは $F(is, IDEN)$ が計算できない。計算領域の右端のセルも同様に時間発展できない。

境界条件を設定する方法は色々ある。たとえば、計算領域の境界における数値流束 $F(IDEN, is)$ を、境界条件を満たすように直接与えるのも一つの手である。流束が 0 の境界条件であれば、 $dflux(is)=0$ にすればよい。ただその場合は、境界のセルを特別扱いする必要がある。

昨今の公開コードで多く用いられているのは、計算領域の外に「ゴースト」セルを用意する方法である。設定したい境界条件が満たされるようにゴーストセルに値を事前に代入すれば、計算領域の境界と接しているセルも、そうでないセルと全く同じ手順で計算できるため、コードが簡潔になる。

- 周期境界条件の場合 $U(x+L) = U(x)$

$x1v(is-1)$ と $x1v(ie)$ が同一視される。また、 $x1v(ie+1)$ と $x1v(is)$ が同一視される。

したがって、ゴーストセルに代入すべき値は、

$$U(is-1, IDN) = U(ie, IDN)$$

$$U(ie+1, IDN) = U(is, IDN)$$

- ディレクレ条件の場合 $\partial U / \partial x = U'_0$

左端に着目すると、計算領域の右端の境界 $xf(is)$ での U の勾配を差分化すると、

$$\frac{U_{is} - U_{is-1}}{\Delta x} = U'_0 \quad (1.45)$$

となる。したがって、 $U_{is-1} = U_{is} - U'_0 \Delta x$ となる。同様に、左端の境界 $xf(ie+1)$ では、 $U_{ie+1} = U_{ie} + U'_0 \Delta x$ が得られる。

- ノイマン条件の場合 $U = U_0$

物理量がセル中心でしか定義されていないので、ゴーストセルの値を使って、セル境界の値を最も簡単に表すと、 $U(x_{is}) = (U_{is} + U_{is-1})/2$ となる。これが U_0 に等しいので、 $U_{is-1} = 2U_0 - U_{is}$ が得られる (U_0 と U_{is-1} を使った外挿になっている)。右端の境界でも同様にして、 $U_{ie+1} = 2U_0 - U_{ie}$ を得る。

1.2.4 時間空間一次精度サンプルプログラムでの計算手順

以下にサンプルプログラムの計算手順を示す (図 1.3 のフローチャットも参照)。対応する関数およびサブルーチンを載せている。

引数に色を付けている。赤がインプットに対応する変数/配列 (サブルーチン内で変更しない) で、青がサブルーチン内で値を代入する変数/配列を表す。

1. シミュレーションを始める前の準備

- まず、セル境界とセル中心の座標の設定をする。
 - `GenerateGrid(xf, xv)`
- 基本量の初期分布を設定する。
 - `GenerateProblem(x1c, x1b, W)`
- 保存量に変換
 - `ConsvVariable(Q, U)`

2. シミュレーションのメインループ (ここで物理量の時間を更新する)

- CFL 条件を満たすように Δt を設定する。
 - `Real(8) Function TimeControl(x1a, Q)`
- 境界条件を設定するためにゴーストセルに適切な値を代入する。
 - `BoundaryCondition(Q)`
- 数値流束を求める。
 - `NumericalFlux(x1a, xv, Q, F)`
- 保存量を更新する。
 - `UpdateConsv(dt, xf, Uold, F, U)`
- 保存量から基本量を求める。
 - `PrimVariable(U, Q)`
- 必要なら結果を出力する。
 - `Output(x1a, x1b, U, Q)`
- 時間を更新し (`time = time + dt`)、シミュレーションの終了条件を満たしているか確認し、満たしていたらメインループを抜ける。満たしていなかったら、メインループの始めに戻る。

サンプルコードで使われている変数の説明

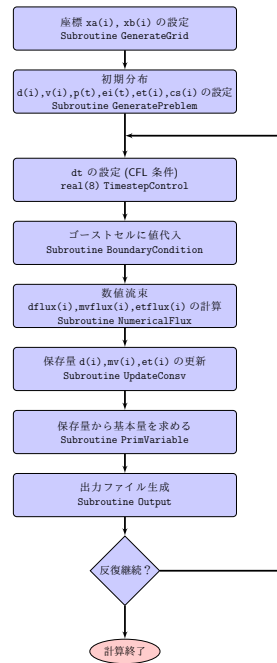


Figure 1.3: サンプルプログラムの計算手順のフローチャート。

Table 1.3: 時間発展に関数する変数

変数名/配列名	説明
nhy	時間ステップ数
nhymax	最大時間ステップ数
time	時刻
timemax	計算終了時刻
dt	時間幅

Table 1.4: $\text{nhy} > \text{nhymax}$ または $\text{time} > \text{timemax}$ を満たすと計算が終了する。

1.3 実習課題

1.3.1 衝撃波管問題

まずは問題設定が単純な衝撃波管問題でコードが正しく動いてるかを確認する。

理論

詳しくは講義資料を参照のこと。不連続面で仕切られた2つの一様なガスの時間進化には、厳密解が知られており、数値流体計算コードが正しく動いているかをテストするためによく使われる。

Sod 解は有名な衝撃波管問題の解で、計算コードの論文によく登場する。左右の物理量を添え字”L”と”R”を使ってそれぞれ表すと、Sod 解の初期条件は、

$$\begin{pmatrix} \rho_L \\ v_L \\ P_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho_R \\ v_R \\ P_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

である。伝統的に Sod 解での比熱比は $\gamma = 1.4$ が使われる。

計算結果と比較するための解析解を生成する python スクリプト (`RiemannSolver.py`) を用意した。すでに生成したファイル `sod_ana.dat` (時刻 $t = 0.2$ での解析解。1 列目は x 、2 列目は ρ 、3 列目は v 、4 列目は P 。) をディレクトリの中に入れている。

図 1.4 は $t = 0.2$ における厳密解を表す。左のガスの方が高圧なので、右のガスから左のガスが押されて、右のガスに衝撃波が伝わり、逆に右のガスには希薄波が生じる。

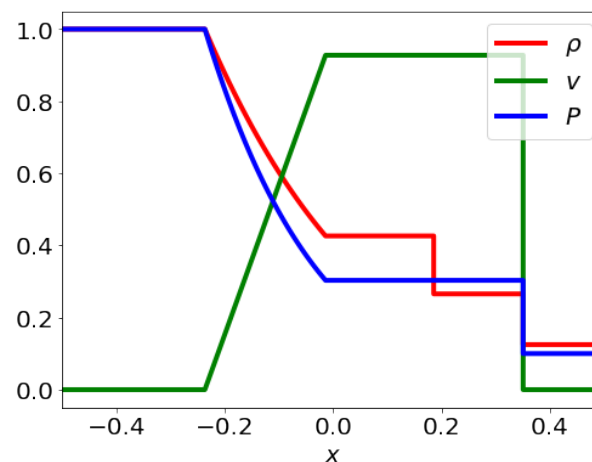


Figure 1.4: $t = 0.2$ における Sod 解

出力

サンプルコードでは、dtout 毎にスナップショットファイルの出力をおこなっている。対応するサブルーチンは Output である。スナップショットファイルは、ディレクトリ snap/の下に作られる。

可視化

可視化はシミュレーション結果を確認する強力な方法である。この実習では計算コードを実装しつつ、衝撃波管問題の解析解と比較する。参考のために gnuplot と python による可視化のためのサンプルコードを用意した。

- gnuplot によるインタラクティブな可視化

コマンドラインで gnuplot と入力すると起動する。

```
gnuplot> plot "snap/t00001.dat" using 1:2
```

と入力すると横軸を 1 列目、縦軸を 2 列目にとったグラフが出力される。

解析解と同時に出力したい場合は、

```
gnuplot> plot "snap/t00001.dat" using 1:2 w lp, "sod_ana.dat" using 1:2 w l
```

using の後の列を指定する箇所は、演算した結果を使うこともできる。

たとえば、using (\$1*2):(\$2*\$3) にすると、1 列目を 2 倍した値を横軸とし、2 列目と 3 列目の積の値を縦軸にとったプロットを作れる。

- gnuplot によるパラパラ漫画出力

gnuplot の出力画面上で、パラパラ漫画のように各時刻のスナップショットを連続的に表示できる。コマンドラインで、

```
gnuplot RealtimeAnime.plt
```

を実行する。gnuplot を起動した上で実行する場合は、load "RealtimeAnime.plt"を実行する。

- gnuplot による動画の作成

MakeAnime.sh は、snap/に出力されたファイルをつかって、自動で動画を作るスクリプトである。

コマンドラインで、

```
./MakeAnime.sh
```

を実行すると、動画ファイル `animation.mp4` が作成される。再生する場合は、コマンドラインで

```
mplayer animation.mp4
```

を実行する。

- python による動画の作成

コマンドラインで

```
python MakeAnime.py
```

を実行する。

課題

サンプルプログラムに以下を実装し

- 数値流束 HLL 法 (HLL 法を実装したあと余力があれば HLLC 法も)
- outflow 境界条件の設定 (すべての基本量の勾配を境界で 0 にする) `BoundaryCondition`

シミュレーション結果が厳密解と整合的か確認する。特に接触不連続面の両側の物理量が厳密解と一致しているか。

1.3.2 音波の伝播

理論

基礎方程式は以下になる。ここで便利のために全エネルギー保存の式を断熱の式に置き換えている。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0 \quad (1.47)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1.48)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \ln \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (1.49)$$

非摂動状態として一様な静止したガスを考える (密度 $\rho = \rho_0$ 、速度 $v = 0$ 、圧力 $P = P_0$)。摂動量を $\delta \rho$ 、 δv 、 δP とし、流体方程式を線形化すると、

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} = 0 \quad (1.50)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial t} = - \frac{\partial \delta P}{\partial x} \quad (1.51)$$

$$\frac{\delta P}{P_0} - \gamma \frac{\delta \rho}{\rho_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta P = c_s^2 \delta \rho, \quad (1.52)$$

ここで、 $c_s = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}$ は音速である。

式 (1.52) を式 (1.51) に代入し、式 (1.50) を使って、 δv を消去すると、以下の $\delta \rho$ についての波動方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial x^2} = 0 \quad (1.53)$$

ちなみに δv と δP も全く同じ波動方程式に従う。波動方程式の厳密解は、よく知られており、波形を保ったまま左右に伝播する波を表す ($\delta \rho(x, t) = g(x - ct) + f(x + ct)$)。

課題 1

密度摂動が、

$$\delta \rho(x, t) = A \sin(k(x - c_s t)) \quad (1.54)$$

に従って、右に伝わる様子をシミュレーションしよう。ここで k は波数である。

密度摂動が上の式で与えられたとき、速度摂動と圧力摂動がどう与えられるかは、摂動方程式からわかるので、適切な初期条件を与えること。

Chapter 2

磁気流体力学の数値解法

2.1 1次元磁気流体方程式

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ E \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P_T - B_x^2 \\ \rho v_x v_y - B_x B_y \\ \rho v_x v_z - B_x B_z \\ (E + P_T)v_x - B_x(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \\ B_y v_x - B_x v_y \\ B_z v_x - B_x v_z \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

ここで、 $E = P/(\gamma - 1) + \rho \mathbf{v}^2/2 + \mathbf{B}^2/2$ は全エネルギー、 P_T は全圧力 ($P + \mathbf{B}^2/2$) を表す。1次元の場合は、 B_x が一定であれば、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ が自動的に満たされる。

2.1.1 近似 Riemann 解法

Harten-Lax-van Leer (HLL) 近似 Riemann 解法

$U_{L,R}$ と $F_{L,R}$ に磁場の効果を含めれば、流体方程式の場合と全く同じである。

$$F_{\text{HLL}} = \begin{cases} F_L & \text{if } S_L > 0 \\ F_R & \text{if } S_R < 0 \\ F^* & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.3)$$

$$F^* = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_R S_L (U_R - U_L)}{S_R - S_L} \quad (2.4)$$

S_L と S_R は、流体方程式での対応する式の音速を fast 波の速度にする。

$$S_L = \min(v_{x,L}, v_{x,R}) - \max(c_{f,L}, c_{f,R}), \quad S_R = \max(v_{x,L}, v_{x,R}) + \max(c_{f,L}, c_{f,R}) \quad (2.5)$$

HLLC 近似 Riemann 解法

HLL 法と同じように、 $\mathbf{U}_{L,R}$ と $\mathbf{F}_{L,R}$ に磁場の効果を含めれば、流体方程式での HLLC 法と基本的には同じである。接触不連続面の前後で、速度と全圧力 ($P_T = P + \mathbf{B}^2/2$) が連続であることを使う。

左右に伝播する波の前後での保存則から始める。

$$S_L \mathbf{U}_L^* - \mathbf{F}_L^* = S_L \mathbf{U}_L - \mathbf{F}_L \quad (2.6)$$

$$S_R \mathbf{U}_R^* - \mathbf{F}_R^* = S_R \mathbf{U}_R - \mathbf{F}_R \quad (2.7)$$

- 質量保存。流体方程式の場合と全く同じ式を得る。

$$\rho_L^*(S_L - v_x^*) = \rho_L(S_L - v_{x,L}) = C_L, \quad \rho_R^*(S_R - v_x^*) = \rho_R(S_R - v_{x,R}) = C_R \quad (2.8)$$

- x 方向の運動量保存

流体の場合の熱圧力を全圧力に置き換えた式になる。

$$-P_T^* + C_L v_x^* = -P_{T,L} + C_L v_{x,L}, \quad -P_T^* + C_R v_x^* = -P_{T,R} + C_R v_{x,R} \quad (2.9)$$

$$v_x^* = \frac{-C_L v_{x,L} + C_R v_{x,R} - (P_{T,R} - P_{T,L})}{-C_L + C_R} \quad (2.10)$$

$$P_T^* = P_{T,L} + C_L(v^* - v_L) = P_{T,R} + C_R(v^* - v_R) \quad (2.11)$$

- y, z 方向の運動量保存

ここでは y 方向の方程式のみ示す。 z 方向は、 y を z と置き換えればよい。

$$C_L v_{y,L}^* + B_x B_{y,L}^* = C_L v_{y,L} + B_x B_{y,L}, \quad C_R v_{y,R}^* + B_x B_{y,R}^* = C_R v_{y,R} + B_x B_{y,R} \quad (2.12)$$

- y, z 方向の磁束保存

ここでは y 方向の方程式のみ示す。 z 方向は、 y を z と置き換えればよい。

$$B_x B_{y,L}^* + (S_L - v_x^*) B_{y,L}^* = B_x B_{y,L} + (S_L - v_{x,L}) B_{y,L} \quad (2.13)$$

$$B_x B_{y,R}^* + (S_R - v_x^*) B_{y,R}^* = B_x B_{y,R} + (S_R - v_{x,R}) B_{y,R} \quad (2.14)$$

式 (2.12) と式 (2.14) を連立させ、

$$v_{y,\alpha}^* = v_{y,\alpha} - B_x B_{y,\alpha} \frac{v_x^* - v_{x,\alpha}}{C_\alpha(S_\alpha - v_x^*) - B_x^2} \quad (2.15)$$

$$B_{y,\alpha}^* = B_{y,\alpha} \frac{C_\alpha(S_\alpha - v_{x,\alpha}) - B_x^2}{C_\alpha(S_\alpha - v_x^*) - B_x^2} \quad (2.16)$$

を得る。ここで、 $\alpha = (\text{L}, \text{R})$ となる。 z 方向の式は

$$v_{z,\alpha}^* = v_{z,\alpha} - B_x B_{z,\alpha} \frac{v_x^* - v_{x,\alpha}}{C_\alpha(S_\alpha - v_x^*) - B_x^2} \quad (2.17)$$

$$B_{z,\alpha}^* = B_{z,\alpha} \frac{C_\alpha(S_\alpha - v_{x,\alpha}) - B_x^2}{C_\alpha(S_\alpha - v_x^*) - B_x^2} \quad (2.18)$$

となる。

- エネルギー保存。

$$E_\alpha^* = \frac{(S_\alpha - v_{x,\alpha})E_\alpha - P_{\text{T},\alpha} + P_{\text{T}}^* v_x^* + B_x(v_\alpha \cdot B_\alpha - v_\alpha^* \cdot B_\alpha^*)}{S_\alpha - v_x^*} \quad (2.19)$$

HLLD 近似 Riemann 解法

厳密な MHD リーマン問題では、片側につき、最も速い伝播速度をもつ fast 衝撃波、中間的な伝播速度をもつ回転不連続面と、最も遅い伝播速度の slow 衝撃波が伝わる (場合によっては fast 希薄波や slow 希薄波があり得る)。左右の slow 衝撃波の後面同士が接触不連続面で接している。HLLC 法ではこの中で fast 衝撃波のみを考慮に入れていることに対応する。

B_x が 0 でない場合には、垂直方向の運動量保存と誘導方程式から、接触不連続面の前後で垂直磁場と垂直速度が連続であることが導かれる。fast 衝撃波と slow 衝撃波は、その不連続面の前後で磁場の張る平面が回転しないため、初期状態において左右の磁場の張る平面が異なる場合は、回転不連続面を介して、磁場の張る平面が一致することになる。HLLD 法では、左右に $S_{L,R}$ で伝播する波の内側に $S_{L,R}^*$ で伝播する回転不連続面に対応する波を考慮し、垂直磁場と垂直速度を回転させる。

左右に伝播する回転不連続面の後面の保存量を $U_{L,R}^{**}$ とする。 $S_L \Delta t \leq x \leq S_R \Delta t$ において、 v_x と全圧力が一定とする。

$$v_{x,L}^* = v_{x,L}^{**} = v_{x,R}^{**} = v_{x,R}^* = v_x^* \quad (2.20)$$

$$P_{T,L}^* = P_{T,L}^{**} = P_{T,R}^{**} = P_{T,R}^* = P_T^* \quad (2.21)$$

S_α^* 前後と、 S_α の前後の質量保存より

$$\rho_\alpha^{**} = \rho_\alpha^*, \quad \rho_\alpha^* = \rho_\alpha \frac{S_\alpha - v_{x,\alpha}}{S_\alpha - v_x^*} \quad (2.22)$$

を得る。 S_α^* の前後では v_x に差がないので、密度が変化しない。第 2 式は HLLC 法でのものと同じである。

S_α^* 前後と、 S_α の前後の質量保存より

$$P_{T,\alpha}^{**} = P_T^*, \quad -P_T^* + C_L v_x^* = -P_{T,\alpha} + C_L v_{x,L} \quad (2.23)$$

となる。 P_T の連続性は、 S_T^* を前後での運動量保存を満たしていることがわかる。式 (2.23) の第二式は、HLLC でのものと同じである。

$$v_x^* = \frac{-C_L v_{x,L} + C_R v_{x,R} - (P_{T,R} - P_{T,L})}{-C_L + C_R} \quad (2.24)$$

$$P_T^* = P_{T,L} + C_L (v_x^* - v_{x,L}) = P_{T,R} + C_R (v_x^* - v_{x,R}) \quad (2.25)$$

S_α の前後での y, z 方向の運動量保存は、HLLC と同じ式を与える。

$$v_{y,\alpha}^* = v_{y,\alpha} - B_x B_{y,\alpha} \frac{v_x^* - v_{x,\alpha}}{C_\alpha(S_\alpha - v_x^*) - B_x^2}, \quad v_{z,\alpha}^* = v_{z,\alpha} - B_x B_{z,\alpha} \frac{v_x^* - v_{x,\alpha}}{C_\alpha(S_\alpha - v_x^*) - B_x^2} \quad (2.26)$$

$$B_{y,\alpha}^* = B_{y,\alpha} \frac{C_\alpha(S_\alpha - v_{x,\alpha}) - B_x^2}{C_\alpha(S_\alpha - v_x^*) - B_x^2}, \quad B_{z,\alpha}^* = B_{z,\alpha} \frac{C_\alpha(S_\alpha - v_{x,\alpha}) - B_x^2}{C_\alpha(S_\alpha - v_x^*) - B_x^2} \quad (2.27)$$

回転不連続面の伝播速度は流体静止系で Alfvén 速度とするのが自然である。

$$S_L^* = v_x^* - \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_L^*}}, \quad S_R^* = v_x^* + \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_R^*}}, \quad (2.28)$$

接触不連続面の前後での保存則を書くと、

$$v_x^* \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* v_{y,L}^{**} \\ \rho_\alpha^* v_{z,L}^{**} \\ B_{y,L}^{**} \\ B_{z,L}^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* v_{y,L}^{**} v_x^* - B_x B_{y,L}^{**} \\ \rho_\alpha^* v_{z,L}^{**} v_x^* - B_x B_{z,L}^{**} \\ B_{y,L}^{**} v_x^* - B_x v_{y,L}^{**} \\ B_{z,L}^{**} v_x^* - B_x v_{z,L}^{**} \end{pmatrix} = v_x^* \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* v_{y,R}^{**} \\ \rho_\alpha^* v_{z,R}^{**} \\ B_{y,R}^{**} \\ B_{z,R}^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* v_{y,R}^{**} v_x^* - B_x B_{y,R}^{**} \\ \rho_\alpha^* v_{z,R}^{**} v_x^* - B_x B_{z,R}^{**} \\ B_{y,R}^{**} v_x^* - B_x v_{y,R}^{**} \\ B_{z,R}^{**} v_x^* - B_x v_{z,R}^{**} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

となり、直ちに以下の式を得る。

$$B_x \begin{pmatrix} B_{y,L}^{**} \\ B_{z,L}^{**} \\ v_{y,L}^{**} \\ v_{z,L}^{**} \end{pmatrix} = B_x \begin{pmatrix} B_{y,R}^{**} \\ B_{z,R}^{**} \\ v_{y,R}^{**} \\ v_{z,R}^{**} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

$B_x \neq 0$ のとき、接触不連続面を介して、垂直磁場と垂直速度が連続となる。

$$B_{y,L}^{**} = B_{y,R}^{**} = B_y^{**}, \quad B_{z,L}^{**} = B_{z,R}^{**} = B_z^{**} \quad (2.31)$$

$$v_{y,L}^{**} = v_{y,R}^{**} = v_y^{**}, \quad v_{z,L}^{**} = v_{z,R}^{**} = v_z^{**} \quad (2.32)$$

次に保存則を使って、 $B_{y,z}^{**}$ と $v_{y,z}^{**}$ を導く。 S_α^* の前後での保存則を使うと、

$$S_\alpha^* \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* v_{y,\alpha}^{**} \\ \rho_\alpha^* v_{z,\alpha}^{**} \\ B_{y,\alpha}^{**} \\ B_{z,\alpha}^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* v_{y,\alpha}^{**} v_x^* - B_x B_{y,\alpha}^{**} \\ \rho_\alpha^* v_{z,\alpha}^{**} v_x^* - B_x B_{z,\alpha}^{**} \\ B_{y,\alpha}^{**} v_x^* - B_x v_{y,\alpha}^{**} \\ B_{z,\alpha}^{**} v_x^* - B_x v_{z,\alpha}^{**} \end{pmatrix} = S_\alpha^* \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* v_{y,\alpha}^{**} \\ \rho_\alpha^* v_{z,\alpha}^{**} \\ B_{y,\alpha}^{**} \\ B_{z,\alpha}^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* v_{y,\alpha}^{**} v_x^* - B_x B_{y,\alpha}^{**} \\ \rho_\alpha^* v_{z,\alpha}^{**} v_x^* - B_x B_{z,\alpha}^{**} \\ B_{y,\alpha}^{**} v_x^* - B_x v_{y,\alpha}^{**} \\ B_{z,\alpha}^{**} v_x^* - B_x v_{z,\alpha}^{**} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

となり、式 (2.28) を代入すると、式 (2.33) の第 1 式と第 3 式、そして第 2 式と第 4 式が同じ式となり、 $B_{y,z}^{**}$ と $v_{y,z}^{**}$ の絶対値が決まらない。これは任意の振幅の Alfvén 波が許されることで理解される。

次に保存形式の方程式 ($\partial \mathbf{U} / \partial t + \partial \mathbf{F} / \partial x = 0$) を $S_L \Delta t \leq x \leq S_R \Delta t$ と $0 \leq t \leq \Delta t$ で積分した

$$(S_R - S_R^*) \mathbf{U}_R^* + (S_R^* - v_x^*) \mathbf{U}_R^{**} + (v_x^* - S_L^*) \mathbf{U}_L^{**} + (S_L^* - S_L) \mathbf{U}_L^* - S_R \mathbf{U}_R + S_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = 0 \quad (2.34)$$

を使う。式 (2.28) より、

$$(S_R - v_x^*) \mathbf{U}_R^* + \left(\frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_R^*}} \right) (\mathbf{U}_R^{**} - \mathbf{U}_R^*) + \left(\frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_L^*}} \right) (\mathbf{U}_L^{**} - \mathbf{U}_L^*) + (v_x^* - S_L) \mathbf{U}_L^* - S_R \mathbf{U}_R + S_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = 0 \quad (2.35)$$

を得る。 S_α の前後の保存則

$$S_\alpha \mathbf{U}_\alpha^* - \mathbf{F}_\alpha^* = S_\alpha \mathbf{U}_\alpha - \mathbf{F}_\alpha \quad (2.36)$$

を使うと、

$$\left(\frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_R^*}} \right) (\mathbf{U}_R^{**} - \mathbf{U}_R^*) + \left(\frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_L^*}} \right) (\mathbf{U}_L^{**} - \mathbf{U}_L^*) - v_x^* \mathbf{U}_R^* + v_x^* \mathbf{U}_L^* + \mathbf{F}_R^* - \mathbf{F}_L^* = 0 \quad (2.37)$$

を得る。質量保存と x 方向の運動量保存については、 $Q_\alpha^{**} = Q_\alpha^*$ が満たされるので、式 (2.37) は HLLC 法の式と一致する。

y, z 方向の運動量保存

$$\left(\frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_R^*}} \right) (\rho_R^* v_{y,z}^{**} - \rho_R^* v_{y,z,R}^*) + \left(\frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_L^*}} \right) (\rho_L^* v_{y,z}^{**} - \rho_L^* v_{y,z,L}^*) - B_x B_{y,z,R}^* + B_x B_{y,z,L}^* = 0 \quad (2.38)$$

より、

$$v_{y,z}^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} v_{y,z,L}^* + \sqrt{\rho_R^*} v_{y,z,R}^* + \text{sign}(B_x) (B_{y,z,R}^* - B_{y,z,L}^*)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \quad (2.39)$$

y, z 方向の磁束保存

$$\left(\frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_R^*}} \right) (B_{y,z}^{**} - B_{y,z,R}^*) + \left(\frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_L^*}} \right) (B_{y,z}^{**} - B_{y,z,L}^*) - B_x v_{y,z,R}^* + B_x v_{y,z,L}^* = 0 \quad (2.40)$$

より、

$$B_{y,z}^{**} = \frac{\sqrt{\rho_R^*} B_{y,z,L}^* + \sqrt{\rho_L^*} B_{y,z,R}^* + \sqrt{\rho_R^* \rho_L^*} \text{sign}(B_x) (v_{y,z,R}^* - v_{y,z,L}^*)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \quad (2.41)$$

最後に S_α^* の前後でのエネルギー保存を使って、 E_α^{**} を求める。

$$(S_\alpha^* - v_x^*) E_\alpha^{**} - P_T^* v_x^* + B_x (\mathbf{v}^{**} \cdot \mathbf{B}^{**}) = (S_\alpha^* - v_x^*) E_\alpha^* - P_T^* v_x^* + B_x (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*) \quad (2.42)$$

から、

$$E_L^{**} = E_L^* - \text{sign}(B_x) \sqrt{\rho_L^*} (\mathbf{v}_L^* \cdot \mathbf{B}_L^* - \mathbf{v}^{**} \cdot \mathbf{B}^{**}) \quad (2.43)$$

$$E_R^{**} = E_R^* + \text{sign}(B_x) \sqrt{\rho_R^*} (\mathbf{v}_R^* \cdot \mathbf{B}_R^* - \mathbf{v}^{**} \cdot \mathbf{B}^{**}) \quad (2.44)$$

を得る。

最終的に、セル境界に当たる状態で場合分けして、以下の数値流束を得る。

$$\mathbf{F}_{\text{HLLD}} = \begin{cases} \mathbf{F}_L & \text{if } S_L > 0 \\ \mathbf{F}_L^* = \mathbf{F}_L + S_L(\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L) & \text{if } S_L \leq 0 \leq S_L^* \\ \mathbf{F}_L^{**} = \mathbf{F}_L^* + S_L^*(\mathbf{U}_L^{**} - \mathbf{U}_L^*) & \text{if } S_L^* \leq 0 \leq S_M \\ \mathbf{F}_R^{**} = \mathbf{F}_R^* + S_R^*(\mathbf{U}_R^{**} - \mathbf{U}_R^*) & \text{if } S_M \leq 0 \leq S_R^* \\ \mathbf{F}_R^* = \mathbf{F}_R + S_R(\mathbf{U}_R^* - \mathbf{U}_R) & \text{if } S_R^* \leq 0 \leq S_R \\ \mathbf{F}_R & \text{if } S_R < 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

2.1.2 実装方針

作成した流体コードを磁気流体コードに書き換えよう。流体コードでは、基本量 (ρ, v_x, P) と保存量 $(\rho, \rho v_x, E)$ の2つの配列を使って実装した。

磁気流体では横波 (Alfvén 波) が存在するので、流体では考慮しなかった垂直方向の速度と運動量を新たに加える。さらに、垂直方向の磁場 (B_y と B_z) を加えて、流体変数の数は7個になる。 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ から B_x は一定なので解かなくてよい。

実装方法はいろいろ考えられるが、今回は表 2.1.2 に示すように、基本量配列 \mathbf{w} と保存量配列 \mathbf{u} の両方に B_y と B_z を加える。メモリを少し無駄に消費するが、コードが単純になる。表 ?? は、MHD 1 次元コードで用いている変数を示している。

Table 2.1: 1次元磁気流体計算コードにおける流体変数

変数名/配列名	説明
基本量 (primitive variables)	
Q(i,IDN)	$x = x_i$ における密度 (要素数 nxtot),
Q(i,IV1)	$x = x_i$ における v_x (要素数 nxtot)
Q(i,IV2)	$x = x_i$ における v_y (要素数 nxtot)
Q(i,IV3)	$x = x_i$ における v_z (要素数 nxtot)
Q(i,IPR)	$x = x_i$ における圧力 (要素数 nxtot)
Q(i,IB2)	$x = x_i$ における B_y (要素数 nxtot)
Q(i,IB3)	$x = x_i$ における B_z (要素数 nxtot)
保存量 (primitive variables)	
U(i,IDN)	$x = x_i$ における密度 (要素数 nxtot)
U(i,IM1)	$x = x_i$ における ρv_x (要素数 nxtot)
U(i,IM2)	$x = x_i$ における ρv_y (要素数 nxtot)
U(i,IM3)	$x = x_i$ における ρv_z (要素数 nxtot)
U(i,IEN)	$x = x_i$ における全エネルギー (要素数 nxtot)
U(i,IB2)	$x = x_i$ における B_y (要素数 nxtot)
U(i,IB3)	$x = x_i$ における B_z (要素数 nxtot)
セル境界の流束 (numerical flux)	
F(i,IDN)	$x = x_{i+1/2}$ における質量流束 (要素数 $\text{nxtot}+1$)
F(i,IM1)	$x = x_{i+1/2}$ における運動量流束 (要素数 $\text{nxtot}+1$)
F(i,IM2)	$x = x_{i+1/2}$ における運動量流束 (要素数 $\text{nxtot}+1$)
F(i,IM3)	$x = x_{i+1/2}$ における運動量流束 (要素数 $\text{nxtot}+1$)
F(i,IEN)	$x = x_{i+1/2}$ におけるエネルギー流束 (要素数 $\text{nxtot}+1$)
F(i,IB2)	$x = x_{i+1/2}$ における運動量流束 (要素数 $\text{nxtot}+1$)
F(i,IB3)	$x = x_{i+1/2}$ における運動量流束 (要素数 $\text{nxtot}+1$)

2.1.3 高次精度化

MUSCL 法

2.2 多次元磁気流体コード

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0 \quad (2.46)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ E \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P_T - B_x^2 \\ \rho v_x v_y - B_x B_y \\ \rho v_x v_z - B_x B_z \\ (E + P_T)v_x - B_x(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \\ 0 \\ B_y v_x - B_x v_y \\ B_z v_x - B_x v_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x - B_y B_x \\ \rho v_y^2 + P_T - B_y^2 \\ \rho v_y v_z - B_y B_z \\ (E + P_T)v_y - B_y(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \\ B_x v_y - B_y v_x \\ 0 \\ B_z v_y - B_y v_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x - B_z B_x \\ \rho v_z v_y - B_z B_y \\ \rho v_z^2 + P_T - B_z^2 \\ (E + P_T)v_z - B_z(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \\ B_x v_z - B_z v_x \\ B_y v_z - B_z v_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

双曲磁場発散除去法

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0 \quad (2.48)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ E \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P_T - B_x^2 \\ \rho v_x v_y - B_x B_y \\ \rho v_x v_z - B_x B_z \\ (E + P_T)v_x - B_x(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \\ \psi \\ B_y v_x - B_x v_y \\ B_z v_x - B_x v_z \\ c_h^2 B_x^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x - B_y B_x \\ \rho v_y^2 + P_T - B_y^2 \\ \rho v_y v_z - B_y B_z \\ (E + P_T)v_y - B_y(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \\ B_x v_y - B_y v_x \\ \psi \\ B_z v_y - B_y v_z \\ c_h^2 B_y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x - B_z B_x \\ \rho v_z v_y - B_z B_y \\ \rho v_z^2 + P_T - B_z^2 \\ (E + P_T)v_z - B_z(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \\ B_x v_z - B_z v_x \\ B_y v_z - B_z v_y \\ \psi \\ c_h^2 B_z^2 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \psi/\tau \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Constrained Transport

2.3 実習

2.3.1 Kelvin-Helmholtz(KH) 不安定性

ファイル群は multiD/KelvinHelmholtz/にある。

理論

物理状態の異なる流体が接触する不連続面 (接触不連続面) に生じる不安定性の一つである。 $y = 0$ にある不連続面を介して、 $y < 0$ と $y > 0$ にそれぞれ一様な流体 1 と流体 2 が存在し、圧力平衡状態にある。 $y < 0$ と $y > 0$ にあるガスの物理量をそれぞれ下付き添え字 1 と 2 を付けて表す。流体 1 と流体 2 は不連続面に沿った方向に速度 v_{x1} と v_{x2} で運動している。

微小な揺らぎを与えて、その時間発展を線形解析で調べる。詳細は参考文献 (Chandrasekhar, 1961) を読んでもらうことにして、ここでは結果のみを示そう。非圧縮極限において波数 k の揺らぎの成長率は、

$$\Gamma = k|v_{x1} - v_{x2}| \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\rho_1 + \rho_2} \quad (2.51)$$

で与えられる。成長率は流体間の速度差に比例する。密度差がある場合は、等密度 $\rho_1 = \rho_2$ のときに成長率が最大となり、密度差が大きくなるに従い成長率が下がる。成長率は波数に比例して、小さなスケールの揺らぎが、より大きな成長率で成長する。これは接触面の厚みが 0 と仮定していることが原因である。接触面の厚み a を考慮した場合は、 $k > a^{-1}$ で成長率が減少する。

次に磁場がある場合について考える。一様磁場 (強度 B) が接触面に沿っている場合、成長率は以下のように修正される (例えば Chandrasekhar, 1961)。

$$\Gamma = k \sqrt{(v_{x1} - v_{x2})^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} - \frac{B^2}{2\pi(\rho_1 + \rho_2)}} \quad (2.52)$$

以下の条件を満たすとき、磁場により KH 不安定性が安定化する。

$$\frac{2B}{\sqrt{4\pi \{(\rho_1^{-1} + \rho_2^{-1})/2\}^{-1}}} > |v_{x1} - v_{x2}| \quad (2.53)$$

右辺は Alfvén 速度の分母の密度を、流体 1 と流体 2 の密度の調和平均にした形になっている。流体 1 と 2 で密度が等しい場合、Alfvén 速度が速度差の半分より大きいときに安定となる ($c_A > |v_{x1} - v_{x2}|/2$)。

問題設定と初期条件

問題設定は各自で自由におこなってもらって構わないが、ここでは一つの例を挙げる。

計算領域を $-1/2 \leq x, y \leq 1/2$ とする。周期境界条件を使うために、接触面を $y = \pm 1/4$ に用意する。 $|y| \leq 1/4$ の物理量を下付き添え字 1 を付けて表し、それ以外の領域の物理量を下付き添え字 2 を付けて表す。物理量を滑らかに変化させるため、以下のように \tanh をつかう。

$$\mathbf{W}(x, y) = \frac{\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_2}{2} \left[\tanh\left(\frac{y + 1/4}{h}\right) - \tanh\left(\frac{y - 1/4}{h}\right) \right] + \mathbf{W}_2 \quad (2.54)$$

$h = 0.05$ は接触面の厚みを表す。

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ v_{x1} \\ v_{y1} \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} \rho_2 \\ v_{x2} \\ v_{y2} \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ v_2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

流体 1 の音速は $\sqrt{10\gamma}$ で、流体 2 の音速は $\sqrt{5\gamma}$ となる。非圧縮の線形解析の結果と比較するので、速度差を音速よりも十分小さくする必要がある。速度差を $v_{x1} - v_{x2} = 1$ とする。したがって、速度差は、流体 1 にとっては Mach 数 0.24 で、流体 2 にとってはマッハ数 0.35 である。速度 v_{x1} と v_{x2} は運動量 $\rho_1 v_{x1} + \rho_2 v_{x2}$ が 0 になるように入れる。

ここでは接触面を揺らがせるために、以下の v_y を与える。

$$v_y(x, y) = 10^{-2} \sin(kx) \left\{ \exp\left[-\left(\frac{y + 1/4}{w}\right)^2\right] + \exp\left[-\left(\frac{y - 1/4}{w}\right)^2\right] \right\} \quad (2.56)$$

Gauss 関数により接触面付近にのみ速度揺らぎが入るようになっている。 w は Gauss 関数の広がりを表し、ここでは例えば 0.1 を採用する。 x 方向に正弦関数で変動しているため、時間を進めると接触面が波数 k で揺らぐことになる。

1. 上記の初期条件と境界条件を設定し、まずは磁場を 0 としてシミュレーションをおこなう。可視化をして進化の様子を確認する。
2. 揺らぎの成長率を線形成長率と比較する。様々な方法が考えられるが、例えば、 y 方向の速度分散の時間進化を調べると簡単。
3. x 方向に沿った初期磁場を入れる。磁場強度をパラメータとし、成長率の磁場強度依存性を調べ、線形解析の結果と比較する。

2.3.2 Rayleigh-Taylor(RT) 不安定性

ファイル群は multiD/RayleighTaylor/にある。

理論

KH 不安定性と同様に、接触不連続面における不安定性である。流体 1($y < 0$) と流体 2($y > 0$) の間に接触不連続面があり、 $-y$ 方向に重力 (重力加速度の大きさ g) が働いている。成長率は

$$\Gamma^2 = gk \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \right) \quad (2.57)$$

となり、 $\rho_2 > \rho_1$ のときに不安定となる。KH 不安定性とは成長率の波数依存性 (k に比例) が弱く、 Γ は $k^{1/2}$ に比例して増加する。

接触面に平行な磁場 (強度は B) を加えると、成長率が以下のように修正される。

$$\Gamma^2 = gk \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{B^2 k}{2\pi g(\rho_1 + \rho_2)} \right) \quad (2.58)$$

KH 不安定性とは異なり、 $\Gamma = 0$ を満たす臨界波数 k_{cri} が定義でき、 $k > k_{\text{cri}}$ を満たす小スケールの揺らぎは磁気張力により安定化される。

問題設定と初期条件・境界条件

RT 不安定性をシミュレーションするためには、運動量保存式とエネルギー方程式に源項が必要である。今回は重力加速度の大きさを g とし x 負方向に重力をかけると、

$$\left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} \right)_{\text{grav}} = -\rho g \quad (2.59)$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_{\text{grav}} = -\rho g v_x \quad (2.60)$$

となる。

計算領域は $-3/4 \leq x \leq 3/4$, $-1/4 \leq y \leq 1/4$ とする。初期条件は、

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{for } x \geq 0 \\ 1 & \text{for } x < 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

$$P(x, y) = P_0 + \rho(x)gx \quad (2.62)$$

$$v_x(x, y) = A\{1 + \cos(2\pi x/L_x)\}\{-\cos(2\pi y/L_y)\}, \quad v_y(x, y) = v_z(x, y) = 0 \quad (2.63)$$

$$B_x(x, y) = 0, \quad B_y(x, y) = B_0, \quad B_z(x, y) = 0 \quad (2.64)$$

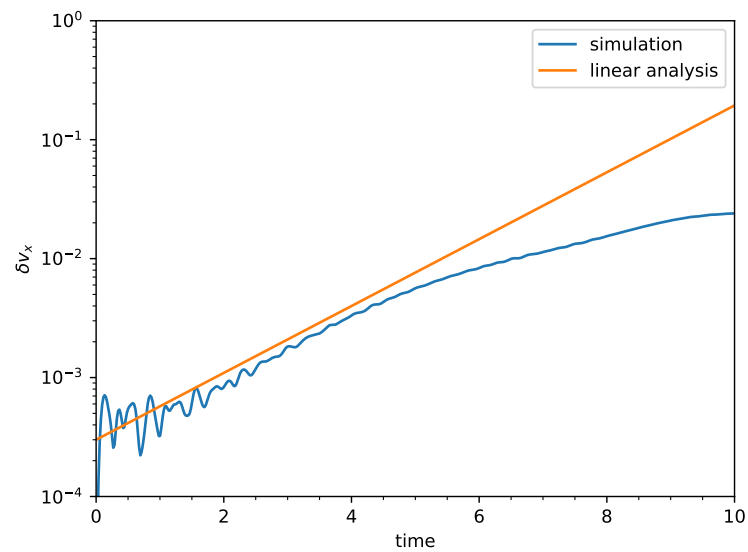
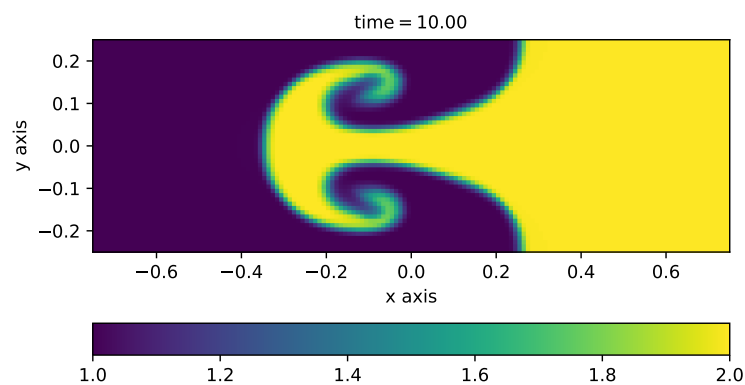
とする。重力加速度の大きさは $g = 0.1$ とし、 $P_0 = 2.5$ とする。 y 方向に一様な初期磁場を置く。摂動は初期不連続面を波数 $2\pi/L_y$ の波で揺らがせるように、 v_x に入れる。 A は初期摂動の大きさを表す。

y 方向は周期境界条件を課す。 x 方向の境界条件は、揺らぎが 0 の場合に平衡状態 $\partial P/\partial x = \rho g$ を維持できるように設定する。例えば以下の境界条件を設定する。

- ρ と v_y 、 v_z 、 \mathbf{B} 、 ϕ は勾配 0 境界にする。
- v_x に対しては反射境界を課す。
- P については、与えられた密度分布における平衡分布 $\partial P/\partial x = \rho g$ を数値積分して代入する。

課題

1. 上記の初期条件と境界条件を設定し、まずは磁場を 0 としてシミュレーションをおこなう。可視化をして進化の様子を確認する。MakeAnime.py
2. 揺らぎの成長率を線形成長率と比較する。例えば、 x 方向の速度分散の時間進化を調べると簡単。
3. y 方向に沿った初期磁場を入れる。磁場強度をパラメータとし、成長率の磁場強度依存性を調べ、線形解析の結果と比較する。

Figure 2.1: 成長率との比較 ($B_0 = 0$)Figure 2.2: $t = 10$ における密度分布 ($B_0 = 0$)

2.3.3 Decaying Turbulence

ファイル群は `multiD/DecayingTurbulence/` にある。

Chapter 3

テスト計算

3.1 流体力学

3.1.1 Sod 解 (1 次元)

$$\begin{pmatrix} \rho_L \\ v_L \\ P_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho_R \\ v_R \\ P_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

図 3.3 左は、空間一次精度 Lax 法、HLL 法、HLLC 法で Sod 解を解いた結果である。Lax 法では偶数番号と奇数番号のセルが独立に時間発展するので、いわゆる odd-even decoupling が起こる。Lax 法は、HLL 法と HLLC 法に比べ数値拡散が格段に多く入り、厳密解から大きくズレる。Sod 解では HLL 法と HLLC 法に顕著な違いは見えないが、 $x = 0.2$ 付近にある接触不連続面で HLLC の方が少しシャープになる。

図 3.3 右は、空間二次精度 Lax 法、HLL 法、HLLC 法で Sod 解を解いた結果である。HLL 法と HLLC 法は、厳密解に近い解が得られる。Lax 法では odd-even decoupling のために MUSCL 法を使うと勾配が 0 に制限されてしまい、一次精度になる。

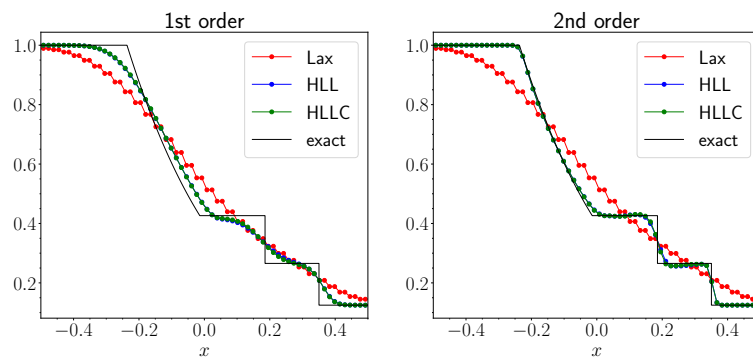


Figure 3.1: Sod 解。Lax 法、HLL 法、HLLC 法で解いた結果。左図が空間一次精度、右図が空間二次精度の結果。

3.1.2 衝撃波管問題 (1 次元)

HLL と HLLC の結果の違いがより大きく出るように、接触不連続面が動かない以下の衝撃波管問題を考える。

$$\begin{pmatrix} \rho_L \\ v_L \\ P_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho_R \\ v_R \\ P_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

この衝撃波管問題は左右から $x = 0$ 向かって流体が衝突した結果、 $x = 0$ に接触不連続面ができ、 $x < 0$ と $x > 0$ に 2 つの衝撃波が伝播する。接触不連続面が $x = 0$ から動かない。Sod 解と同様に、Lax 法は数値拡散が大きく、解がほとんど再現できない。

この衝撃波管問題では移流による接触不連続面の数値拡散が入らないので、HLL 法と HLLC 法の違いが顕著に見える。接触不連続面は HLLC の方が格段によく捉えられている。

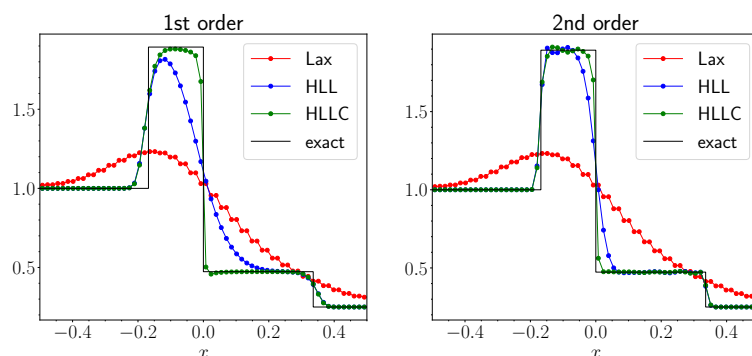


Figure 3.2: 衝撃波管問題 (初期条件は式 3.6)。Lax 法、HLL 法、HLLC 法で解いた結果。左図が空間一次精度、右図が空間二次精度の結果。

3.1.3 音波 (1 次元)

非摂動状態 ($\rho = 1$, $v = 0$, $P = 1$) に、 $+x$ 方向に伝播する音速を計算する。

$$\rho = 1 + 10^{-4} \sin(2\pi x), \quad v = 10^{-4} \sqrt{\gamma} \sin(2\pi x), \quad P = 1 + 10^{-4} \gamma \sin(2\pi x), \quad (3.3)$$

1 周期計算 ($1/\sqrt{\gamma}$) したあとに解析解との誤差を以下の式で測定する。

$$\epsilon = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\rho(x_i) - \rho_{\text{ana}}(x_i))^2} \quad (3.4)$$

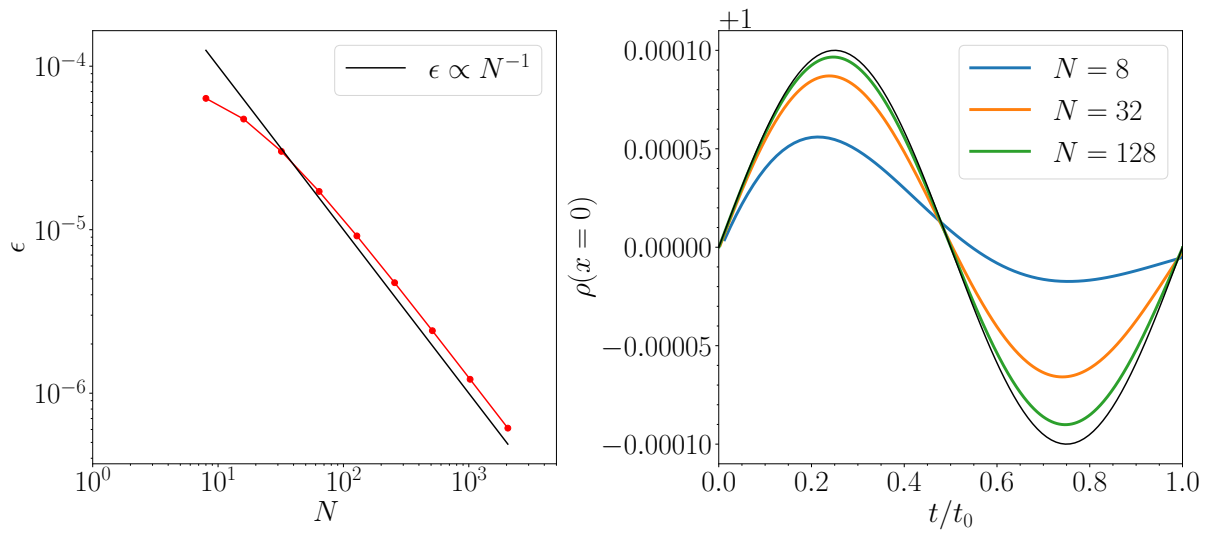


Figure 3.3: 1 次精度コードで音波を解いた結果。左：誤差の格子数依存性。右： $x = 0$ での密度の時間進化。

3.2 磁気流体力学

3.2.1 Brio-Wu 解 (1 次元)

3.2.2 衝撃波管問題 in 2D

以下の衝撃波管問題を考える。添え字”1”と”2”は、初期不連続面に対して垂直成分と平行成分を表す。初期条件を回転させる。

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

回転角は $\alpha = \tan^{-1} 2$ とする ($\cos \alpha = 1/\sqrt{5}$, $\sin \alpha = 2/\sqrt{5}$)。初期不連続面は傾き $-1/2$ の直線。

計算領域は $0 \leq x \leq 1$ 、 $0 \leq y \leq 2/N_x$ とする。 y 方向はメッシュ数 2。 x 方向の境界条件は outflow にする。 y 方向の境界条件は outflow にするが x 方向にズラす。

$$\begin{pmatrix} \rho_L \\ v_{1,L} \\ v_{2,L} \\ B_{1,L} \\ B_{2,L} \\ P_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \\ 5/\sqrt{4\pi} \\ 5/\sqrt{4\pi} \\ 20 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho_R \\ v_{1,R} \\ v_{2,R} \\ B_{1,R} \\ B_{2,R} \\ P_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 0 \\ 5/\sqrt{4\pi} \\ 5/\sqrt{4\pi} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

Bibliography

Subrahmanyam Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. 1961.

S. K Godunov. A Difference Scheme for Numerical Solution of Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations. *Mat. Sbornik*, 47:271–306, 1959.

A. Harten, P. D. Lax, and B van Leer. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM*, 25:35, 1983.

P. D Lax. . *Commun. Pure Appl. Math.*, 7:159, 1954.

P. D. Lax and B. Wendroff. Systems of conservation laws. *Commun. Pure Appl. Math.*, 13(2): 217–237, 1960. doi: doi:10.1002/cpa.3160130205.

E. F. Toro, M. Spruce, and W. Speares. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver. *Shock Waves*, 4(1):25–34, July 1994. doi: 10.1007/BF01414629.