
# Trabalho 1
# Seminário de Matemática Aplicada

Cláudio Henriques
Mestrado em Matemática e Aplicações

19 de Novembro de 2018

# Conteúdo

# Lista de Figuras

# Capítulo 1

# Introdução

No presente relatório é apresentado o algoritmo desenvolvido para a coloração dos vértices de um determinado grafo, utilizando a sua matriz de adjacência para definir uma estrutura abstracta para o representar. É ainda apresentado um algoritmo de pesquisa em profundidade.

Estes algoritmos foram implementados recorrendo à linguagem de programação *Java*. Foi ainda desenvolvido um pequeno script em *R* para a visualização do grafo aplicando as colorações obtidas nos algoritmos.

## 1.1 *Java*

A escolha da linguagem baseou-se essencialmente pelos recursos que esta oferece. Apesar de não ser tão rápida e consumir mais recursos computacionais quando comparada com o *Python* ou *Julia*, o *Java* oferece um bom suporte para o desenvolvimento de algoritmos sob o velho conhecido paradigma *Object-oriented programming (OOP)* (em português: Programação Orientada a Objetos (POO)).

A opção de implementar o trabalho em torno deste paradigma permite desenvolver *módulos* que possam ser usados futuramente noutros trabalhos relacionados com esta temática. Um exemplo simples é poder usar a estrutura de dados abstrata criada para representar um grafo num outro trabalho/projeto em que seja necessário esta estrutura para desenvolver outro tipo de algoritmos. Assim permite a diminuição de código redundante (i.e. implementar várias vezes a mesma estrutura da dados sempre que necessitar de a utilizar em ambientes diferentes).

## 1.2 Estruturas de Dados

As estrturuas de dados desenvolvidas ao longo do trabalho são:

- **Grafo** (*Graph.java*): representar um objeto do tipo grafo (recorrendo à sua matriz de adjacência);
- **Vértice** (*Vertex.java*): A estrutura anterior instância uma estrutura auxiliar para representar cada vértice como um objeto único. Desta forma um grafo é representado com um conjunto de vértices. (Lógicamente seria óbvio representar um grafo como um conjunto de vértices e arestas, contudo as arestas (neste caso) não são estritamente necessárias ao desenvolvimento dos algoritmos, recorrendo apenas a atributos no objeto vértice para identificar os seus *vizinhos*)

## 1.3 Algoritmos

- **Coloração dos vértices, versão 1** (*ColorizeVersion1.java*): Implementa o algoritmo apresentado nas aulas para a coloração dos vértices de um grafo, recorrendo à sua matriz de adjacência.
- **Coloração dos vértices, versão 2** (*ColorizeVersion2.java*): Implementa-dado como uma extensão da versão 1 deste algoritmo, altera apenas a ordem pela qual percorre os vértices do grafo.
- **Coloração dos vértices, versão 3** (*ColorizeVersion3.java*): Organiza os vértices pela ordem de maior grau, sendo este o critério para os percorrer e atribuir uma cor.
- ***Depth First Search* (DFS)** (*DFS.java*):

## 1.4 Módulos extra

- **Ficheiro de logs** *(WriteLogFile.java)* Para auxiliar na descrição dos algoritmos foi criado um sistema de *logs*, isto é, quando o algoritmos efetua alguma operação, esta é registada num ficheiro do tipo **.txt*, detalhando cada passo, por ordem cronológica.

# Capítulo 2

# Implementação

Nesta secção é apresentado e explicado a implementação das estruturas de dados que foram desenvolvidas por forma a tornar os algoritmos mais eficientes.

Algumas linhas de código foram omitidas para simplificar a explicação, por exemplo, a implementação da criação do ficheiro auxiliar com a matriz de adjacência que vai ser lida pelo script *R* uma vez que este processo não é essencial para o desenvolvimento dos algoritmos. Foram também omitidas as linhas correspondentes à implementação dos ficheiros de *log*.

Todo o código está comentado e pode ser visto em aqui

## 2.1 Grafo (*Graph.java*)

Esta estrutura abstracta usa um *ArrayList* para representar o conjunto de vértices pertencentes ao objeto (vertexList).

Cada grafo é identificado por um *id* e contém um atributo chamado *order* que representa a ordem do grafo.

```
1     private String id;
2     private int order;
3     private ArrayList<Vertex> vertexList;
```

Neste caso o *id* é o nome do ficheiro com a matriz de adjacência que é lida. Por exemplo, se construir um grafo recorrendo à matriz de adjacência do ficheiro

*A.txt*, o *id* deste grafo é definido como A.

```
id = file.split("/")[1].split("\\.")[0];
```

À medida que cada linha do ficheiro com a matriz de adjacência é lida é adicinado à lista de vértices um novo vértice (pois cada linha da matriz identifica um vértice do grafo). Estes são identificados por um número que é igual à ordem do grafo na iteração anterior.

Por exemplo, se ainda não foram lidas nenhuma linha então o primeiro vértice que é criado é representado por 0. Na linha seguinte é criado um novo vértice, desta vez já é representado pelo número 1.

Consequentemente a ordem do grafo é o número de linhas da matriz de adjacência.

```
while (scf.hasNextLine()) {
    vertexList.add(new Vertex(order));
    order++;
}
```

Seguidamente são lidos cada uma das entradas de cada linha da matriz para se definir as vizinhanças de cada vértice. Desta forma, a cada entrada da linha que é lida, se for 1 ou $-1$ então significa que o vértice que é representado pelo índice da linha da matriz é vizinho do vértice representado pelo índice da coluna da entrada em questão.

Consequentemente, se for 1 então definimos que o vértice representado pelo índice da linha da matriz é sucessor do vértice representado pelo índice da coluna da entrada em questão. Lógicamente também definimos que o índice da coluna da entrada em questão é predecessor do vértice representado pelo índice da linha da matriz. (A distinção entre sucessor e predecessor é implementada na estrutura *Vertex.java*, através da distinção do segundo argumento que é passado na função. Esta anotação é explicanda mais à frente na secção 2.2).

Analogamente utilizamos a mesma metodologia no caso da entrada ser $-1$.

```
    for (int k = 0; k < line.length; k++) {
        if (line[k].equals("1")) {
            vertexList.get(j).setNeighbors(k, 1);
            vertexList.get(k).setNeighbors(j, -1);
        } else if (line[k].equals("-1")) {
            vertexList.get(j).setNeighbors(k, -1);
            vertexList.get(k).setNeighbors(j, 1);
        }
    }
```

O método *getId ()* retorna o *id* deste grafo.

```
        return id;
```

O método *getOrder ()* retorna a ordem do grafo.

```
        return order;
```

O método *getVertexList ()* retorna a lista com todos os vértices do grafo.

```
        return vertexList;
```

O método *isNeighbor (int k, int y)* retorna um valor *booleano* para dar resposta à pergunta "k é vizinho de y?". Reparemos que k ser vizinho de y é a mesma coisa que y ser vizinho de k.

```
        return (vertexList.get(k).isNeighbor(y) || vertexList.get(y).
            isNeighbor(k));
```

O método *getVertexByDegree ()* retorna uma lista de vértices por ordem crescente do grau do vértice.

Neste método é criada uma estrutura temporária para armazenar os vértices pela ordem pretendida.

Num primeiro momento, é obtido o grau máximo de todos os vértices. Após esta operação é adicionada à estrutura temporária os vértices que têm o grau igual ao grau máximo (os vértices são adicionamos sempre ao inicio da lista, o que permite criar a lista por ordem crescente de grau dos vértices). Quando não houver mais vértices com o grau máximo então é reduzido o valor máximo numa unidade voltando a efetuar o processo anterior. Este ciclo termina quando o valor máximo for 0.

Por fim é retornada a estrutura temporária, sendo esta uma lista com os vértices organizados por ordem crescente do grau.

```
1         ArrayList<Vertex> temp = new ArrayList<Vertex>();
2         int max = 0;
3         for (int i = 0; i < vertexList.size(); i++)
4             if (vertexList.get(i).getDegree() >= max)
5                 max = vertexList.get(i).getDegree();
6         while (max >= 0) {
7             for (int i = 0; i < vertexList.size(); i++) {
8                 if (vertexList.get(i).getDegree() == max){
9                     temp.add(0, vertexList.get(i));
10                    vertexList.remove(i);
11                    i--;
12                }
13            }
14            max--;
15        }
16        return temp;
```

O método *sortVertexByDegree ()* organiza a lista de vértices deste grafo pela ordem do grau de cada vértice.

```
1         vertexList = getVertexByDegree();
```

O método *setDefaultColorVertexes ()* define a cor de cada vértice como 0 (cor inicial).

```
1         for (int i = 0; i < vertexList.size(); i++)
2             vertexList.get(i).setColor(0);
```

## 2.2 Vértice (*Vertex.java*)

Esta estrutura representa um vértice, identificado por um id, cor, ordem, por um atributo que define se o vértice foi ou não visitado, por uma lista de vértices sucessores e uma lista de predecessores.

```
1     private int id, color, order;
2     private boolean visited;
3     private ArrayList<Integer> successorList, predecessorList;
```

O método *getId ()* retorna o *id* do vértice.

```
1     return id;
```

O método *setColor (int color)* define a cor do vértice com a cor color.

```
1     this.color = color;
```

O método *getColor ()* retorna a cor do vértice.

```
1     return color;
```

O método *setOrder (int order)* define a ordem do vértice com o número order.

```
1     this.order = order;
```

O método *getOrder ()* retorna a ordem do vértice.

```
1     return order;
```

O método *setVisited ()* define o vértice como visitado.

```
1     visited = true;
```

O método *isVisited ()* retorna um booleano que indica se o vértice já foi ou não visitado.

```
1     return visited;
```

O método *setNeighbors (int k, int ps)* define este vértice como vizinho do vértice identificado por k. Se ps for 1 então o vértice k é sucessor, caso contrário k é predecessor.

```
1     if (ps == 1) {
2         if (!successorList.contains(k))
3             successorList.add(k);
4     }
5     else if (ps == -1) {
6         if (!predecessorList.contains(k))
```

```
7                predecessorList.add(k);
8        }
```

O método *isNeighbor (int k)* retorna um valor booleano que indica se o vértice é vizinho do vértice k.

```
1        return (successorList.contains(k) || predecessorList.contains(k))
             ;
```

O método *getNeighborList ()* retorna a lista de sucessores e predecessores do vértice.

```
1        Set<Integer> set = new HashSet<Integer>();
2        set.addAll(successorList);
3        set.addAll(predecessorList);
4        return new ArrayList<Integer>(set);
```

O método *getSucessorList ()* retorna a lista de sucessores do vértice.

```
1        return sucessorList;
```

O método *getPredecessorList ()* retorna a lista de predecessores do vértice.

```
1        return predecessorList;
```

O método *getDegree ()* retorna o grau do vértice. Este é igual ao número de visinhos do vértice.

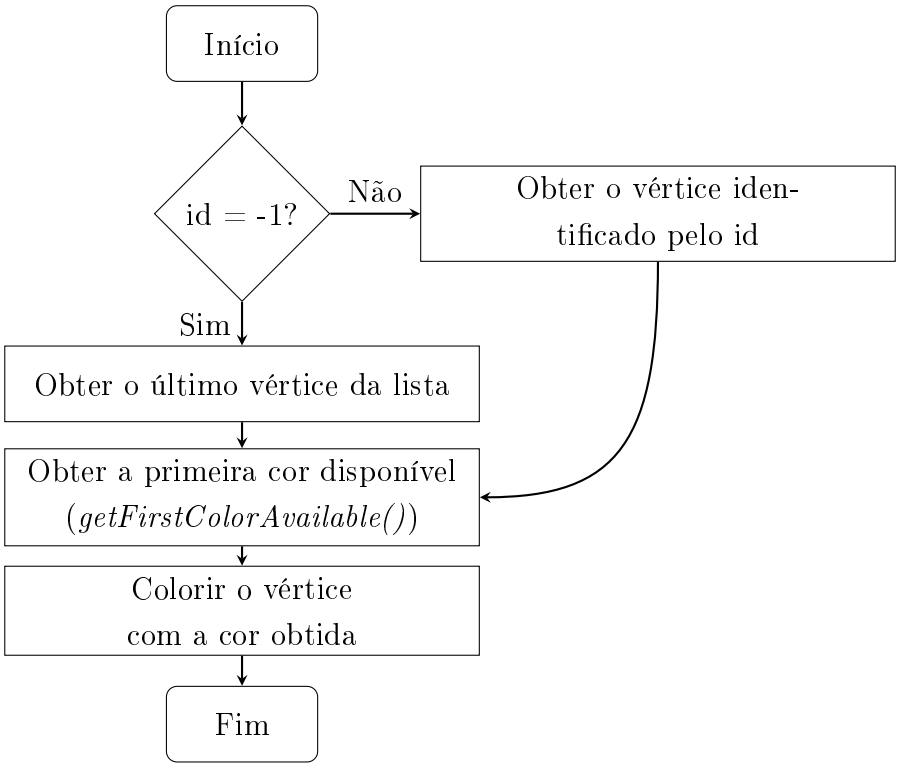
```
1        return getNeighborList().size();
```

## 2.3 Coloração dos vértices, versão 1

Esta implementação recebe um objeto do tipo grafo (*Graph.java*) e contém um conjunto de métodos que permite desenvolver um algoritmo de *fácil* leitura. Quando invocada, esta implementação guarda a lista dos vértices do grafo e define todos os vértices com a cor 0 (para garantir que o vértice não foi colorido anteriormente com outra cor distinta).

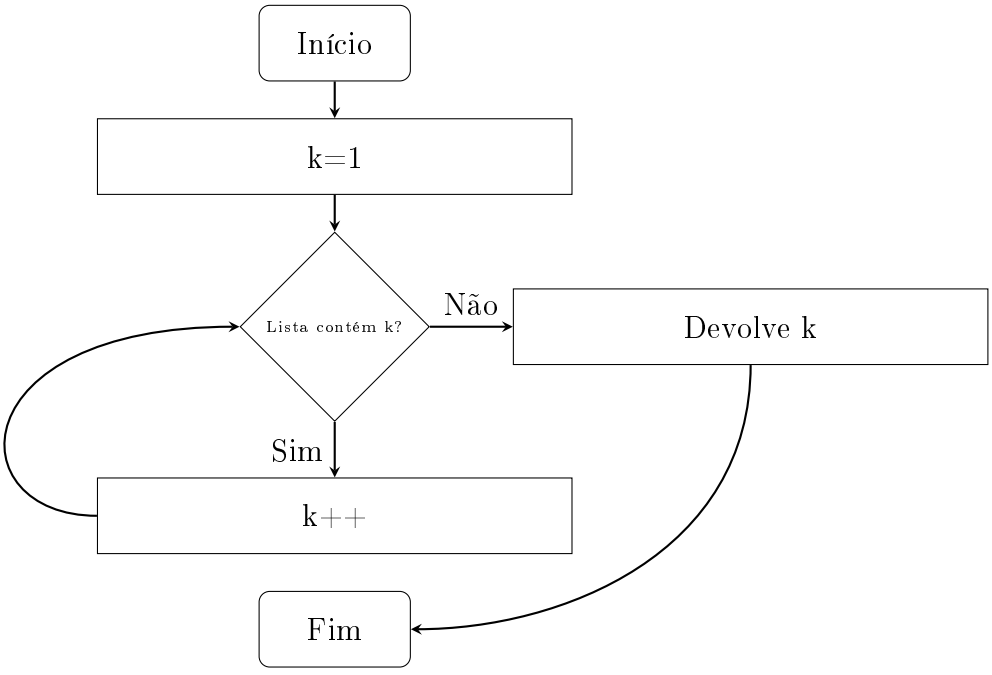
```
1    graph.setDefaultColorVertexes();
2    vertexList = graph.getVertexList();
```

O método *setColorVertex (int id)* define a cor do vértice identificado pelo *id* com a primeira cor disponível (tendo em conta os seus vizinhos), com recurso ao método *getFirstColorAvailable ()*. No caso do *id* ser $-1$ significa que o vértice a colorir é o último vértice da lista. Após obter o vértice correspondente ao *id* obtém a primeira cor disponível (*color*) e atribui ao vértice a cor color.



```
1     Vertex vertex;
2     if (id == -1)
3         vertex = vertexList.get(vertexList.size()-1);
4     else
5         vertex = vertexList.get(id);
6     int color = getFirstColorAvailable();
7     vertex.setColor(color);
```

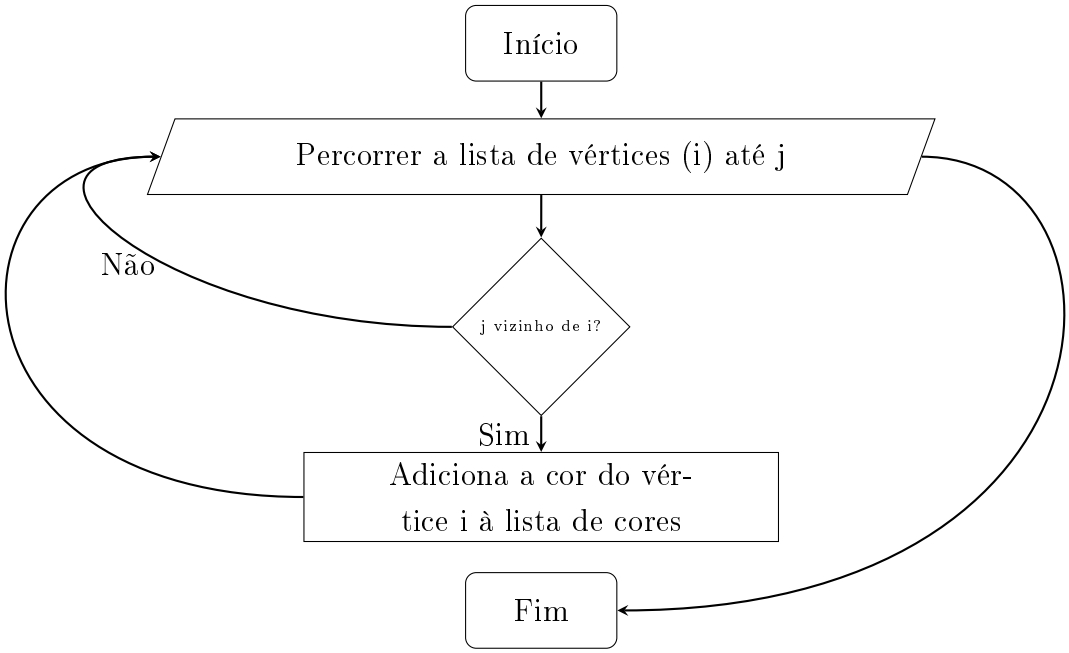
O método *getFirstColorAvailable ()* analisa uma fila de cores e retorna a cor mínima disponível. Esta fila é preenchida no método *saveNeighborColors (int j)*. Inicialmente começa com a cor mínima k = 1 e verifica se esta cor existe na lista de cores. No caso de exisitir então k passa a ser igual a 2 e volta a verificar se 2 existe na lista de cores. Este processo é repetido até encontrar um k que não conste na lista de cores.




```
1     int k = 1;
2     while(colors.contains(k))
```

```
3            k++;
4        return k;
```

O método *saveNeighborColors (int j)* guarda as cores dos vizinhos do vértice identificado por j. Nesta implementação, apenas verifica se os vértices anteriores são vizinhos, uma vez que como a ordem pela qual são percorridos os vértices começa no primeiro vértice até ao último, então aquando do vértice j ainda só foram coloridos os vértices anteriores. Quando encontrar um vértice vizinho, adiciona a cor deste à lista de cores.




```
1        colors = new LinkedList<Integer>();
2        for (int i = 0; i < j; i++)
3            if (vertexList.get(j).isNeighbor(vertexList.get(i).getId()))
4                colors.add(vertexList.get(i).getColor());
```

O método *getVertexList ()* retorna a lista dos vértices do grafo.

```
1     return vertexList;
```

### 2.3.1 Algoritmo

Em suma, seja v1 um objeto do tipo *ColorizeVersion1.java*, definimos a cor do vértice 0 (o primeiro vértice do grafo) com a primeira cor disponível (como é o primeiro vértice, a cor atribuida a este será 1). Após este processo, percorre-se todos os restantes vértices. A cada um destes, guarda-se a cor dos vértices anteriores que são seus vizinhos e seguidamente é definida a cor do vértice j com a cor mínima disponível (tendo em conta as cores obtidas no processo anterior). O algoritmo final terá o seguinda aspeto:

```
1     v1.setColorVertex(0);
2     for (int j = 1; j < v1.getVertexList().size(); j++) {
3         v1.saveNeighborColors(j);
4         v1.setColorVertex(j);
5     }
```

## 2.4 Coloração dos vértices, versão 2

Esta implementação, sendo uma extensão da anterior, é em grande parte igual à versão 1. A alteração que implementa é a ordem pela qual verifica os vértices vizinhos, ou seja, apenas verifica os vértices desde o fim até ao vértice j.

```
1     colors = new LinkedList<Integer>();
2     for (int i = vertexList.size()-1; i > j; i--)
3         if (vertexList.get(j).isNeighbor(vertexList.get(i).getId()))
4             colors.add(vertexList.get(i).getColor());
```

### 2.4.1 Algoritmo

Em suma, seja v2 um objeto do tipo *ColorizeVersion2.java*, definimos a cor do último vértice com a primeira cor disponível (como é o primeiro vértice, a cor atribuida a este será 1). Após este processo, percorre-se todos os restantes vértices, começando pelo fim (contráriamente à versão anterior). A cada um destes, guarda-se a cor dos seus vizinhos e seguidamente é definida a cor do vértice j com a cor mínima disponível (tendo em conta as cores dos seus vizinhos). O algoritmo final terá o seguinda aspeto:

```
1    for (int j = v2.getVertexList().size()-2; j >= 0; j--) {
2        v2.saveNeighborColors(j);
3        v2.setColorVertex(j);
4    }
```

## 2.5 Coloração dos vértices, versão 3

Esta implementação, quando invocada, tem o mesmo comportamento da versão 1 e 2, contudo organiza os vértices pela ordem do seu grau. Uma outra diferença nesta implementação é que ao invês de usar uma lista de cores usa um dicionário em que a chave é o código da cor e o valor é 1 (0 no caso da cor fazer parte da coloração dos vértices vizinhos de um determinado vértice, e neste caso não é adicionado ao dicionário de cores, 1 no caso de algum vizinho ter a cor identificada pelo código da cor).

```
1    colors = new Hashtable<Integer, Integer>();
2    vertexByDegree = graph.getVertexByDegree();
```

No método *setColorVertex (int id)*, ao invés de se obter os vértices a partir da lista de vértices, o algoritmo recorre à lista dos vértices ordenados por grau. O restante código é igual ao implementado nas versões anteriores.

```
1     Vertex vertex;
2     if (id == -1)
3         vertex = vertexList.get(vertexByDegree.get(vertexByDegree.
              size()-1).getId());
4     else
5         vertex = vertexList.get(vertexByDegree.get(id).getId());
6     int color = getFirstColorAvailable();
7     vertex.setColor(color);
```

O método *saveNeighborColors (int j)* tira proveito do facto de cada vértice ter associado uma lista de vértices vizinhos. Isto permite que o algoritmo não tenha de percorrer todos os vértices do grafo e verificar se algum é vizinho do vértice j e nesse caso adicionar a sua cor à tabela de cores. Neste caso, o algoritmo percorre apenas os vértices que fazem parte da lista de vizinhos do vértice j e adiciona a sua cor à tabela de cores. Contráriamente a uma lista, a tabela (sendo ela um dicionário) caso contenha a cor que está a adicionar simplesmente atualiza o seu valor (que neste caso fica exatamente igual). Por exemplo, considera-se uma tabela de cores que já contem a cor 2 e 5. Então os valores associados a 2 e 5 é 1 (como foi explicado em cima). Quando se adiciona novamente a cor 2 ou a cor 5, ao invés de criar uma nova entrada nesta tabela de cores, simplesmente verifica se ela já existe antes de criar.

```
1     colors = new Hashtable<Integer, Integer>();
2     for (int i = 0; i < vertexList.get(vertexByDegree.get(j).getId())
          .getNeighborList().size(); i++)
3         colors.put(vertexList.get(vertexList.get(vertexByDegree.get(j
              ).getId()).getNeighborList().get(i)).getColor(), 1);
```

### 2.5.1 Algoritmo

Em suma, a implementação deste algoritmo segue a mesma lógica da versão 2, pois uma vez que os vértices estão ordenados por ordem crescente de grau, então

começa a percorrer do fim para o início, por forma a atribuir primeiramente as cores aos vértices com maior grau. Seja v3 um objeto do tipo *ColorizeVersion3.java*:

```
1     for (int j = v3.getVertexList().size()-2; j >= 0; j--) {
2         v3.saveNeighborColors(j);
3         v3.setColorVertex(j);
4     }
```

## 2.6 *Depth First Search* (DFS)

### 2.6.1 Algoritmo

# Capítulo 3

# Exercício 1

## 3.1 Análise e Resultados

Seja $I$ a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e seja *graph* um objeto do tipo *Graph.java* construido com recurso à matriz $I$.

Implementamos o objeto $ColorizeVersion1.java$ usando o grafo *graph*.

A coloração obtida é a representada no seguinte grafo:

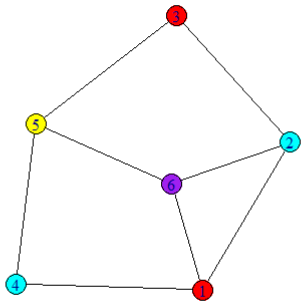



**Figura 3.1:** Grafo I, coloração 1

Aplicando a versão 2 e 3 do algoritmo de coloração dos vértices, obtemos os seguintes resultados:

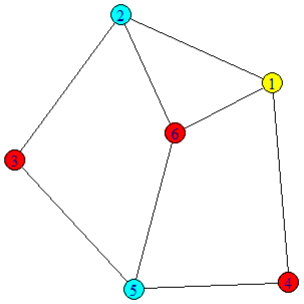



**Figura 3.2:** A figure

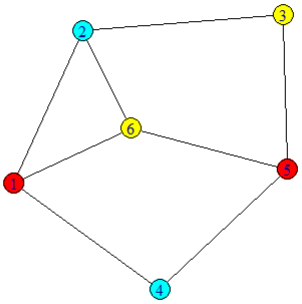



**Figura 3.3:** Another figure

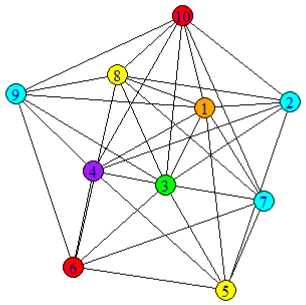
Analisando os resultados, podemos ver que neste caso o algoritmo 1 não consegue encontrar uma coloração mínima, ao contrário do que acontece com as versões 2 e 3.

Vamos agora analisar se a versão 3 consegue obter uma coloração mais baixa em algum caso, relativamente à versão 2.

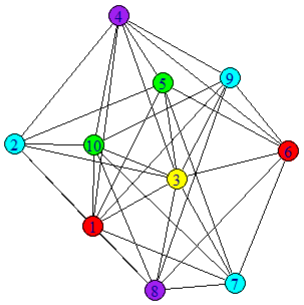
Seja $F$ a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e seja *graph* um objeto do tipo *Graph.java* construido com recurso à matriz $F$.

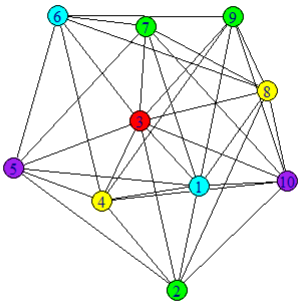
Implementamos o objeto $ColorizeVersion2.java$ usando o grafo *graph*.

A coloração obtida é a representada no seguinte grafo:




Aplicando a versão 1 e 3 do algoritmo de coloração dos vértices, obtemos os seguintes resultados:




Analisando os resultados, podemos ver que neste caso o algoritmo 2 não consegue encontrar uma coloração mínima, ao contrário do que acontece com as versões 1 e 3.

# Capítulo 4

# Exercício 2

## 4.1 Análise e Resultados

# Capítulo 5

# Exercício 3

## 5.1 Análise e Resultados

# Capítulo 6

# Conclusão

## 6.1 Considerações futuras