第五章　　留数（残数）

第五章　留数（残数）

留数理论是Cauchy积分理论的继续，在复变函数论中及实际应用中都很重要。留数的概念是在计算函数沿绕“孤立奇点”圆域的复积分引出的，从而和计算考察围线积分的问题密切相关。

第一节 孤立奇点

1.定义: 设$f(z)$在z_0点不解析，但在$0<|z-z_0|<\delta$内解析

则称z_0为$f(z)$的孤立奇点。

例1 $(1)\dfrac{1}{z^2(1-z)}$ $\qquad(2)\,\tan\dfrac{1}{z}$

解: (1) 显然，$z=0, z=1$为孤立奇点

$(2)\quad z=0,\ z_k=\dfrac{1}{\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi}$均为奇点

第一节 孤立奇点

但$z_k \to 0\left(k \to \infty\text{时}\right)$

$\therefore z=0$非孤立奇点，z_k是孤立奇点

因而$\tan\frac{1}{z}$在$0<|z|<R\left(0<R<\infty\right)$内不能进行$L-$展开

(3) $$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}}$$

解： $z_k=\frac{1}{k}\left(k=0,\pm1,\pm2\cdots\right)$是孤立奇点

$z=0$是非孤立奇点$\left(\because z_k \to 0, k\to\infty\right)$

2.孤立奇点的分类

设z_0是$f(z)$的孤立奇点

则 $$f(z) \underset{L-\text{展开}}{\overset{0<|z-z_0|<\delta}{=}} \cdots c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$

$$+c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots \qquad --(1)$$

定义:(1)可去奇点:

若(1)式中不含$z-z_0$的负幂项

即$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots$

则称z_0是$f(z)$的可去奇点

第一节 孤立奇点

特性:

显然级数的和函数$F(z)=\begin{cases} f(z), & 0<|z-z_0|<\delta \\ c_0, & z=z_0 \end{cases}$

且$F(z)$在$|z-z_0|<\delta$内解析

$\therefore \lim\limits_{z\to z_0} F(z)=F(z_0)=c_0,$

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0} F(z) = c_0$

若令$f(z_0)=c_0$,则$f(z)=F(z)$,故$f(z)$在z_0点解析

$\therefore$ 称z_0点为可去奇点

2）极点

若(1)式含有有限个$z-z_0$的负幂项，则称z_0为极点。

即$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots$

且$m\geq 1, c_{-m}\neq 0$,这时，又称z_0为m级极点。

特性:

$$显然f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\left(c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+c_0(z-z_0)^m+\cdots\right)$$

$$\overset{\Delta}{=}\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

其中$g(z)$在$|z-z_0|<\delta$内解析，$g(z_0)=c_{-m}\neq 0$

而$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}=\infty$

3）本性奇点

若(1)是含无穷多个$z-z_0$的负幂项，则称z_0为本性奇点.

3.综上论述，有下列奇点判别方法

(1) z_0为可去奇点$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=b(\neq\infty)$

证明: $\Rightarrow$ 上面已证.

$\Leftarrow \quad \because \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=b \quad \therefore \exists \dot{U}(z_0,R), |f(z)|\le M$

故$f(z)$在z_0的$L-$展开式的主要部分

$$c_{-1}(z-z_0)^{-1}+\cdots+c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots$$

$$|c_{-n}|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}d\zeta\right|$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{R^{-n+1}}\cdot 2\pi R=MR^{n}\to 0 \quad (R\to 0) \quad (n=1,2,\cdots)$$

即$f(z)$的主要部分为零， 故z_0是可去奇点.

(2) z_0是极点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$

证: $\Rightarrow$ 上述讨论.

$\Leftarrow$ 用极点与零点关系证明，略.

(3) z_0是本性极点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$不存在$(\neq\infty)$

证: 由(1),(2)可得.

(4) z_0是m级极点 $\Leftrightarrow f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$,

其中$g(z)$在z_0解析，且$g(z_0)\neq 0$。

证: $\Rightarrow$ 上述讨论.

$$\Leftarrow \quad \because f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}, \text{而} g(z) \text{在} z_0 \text{解析}$$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\left(c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots\right)$$

$$=\frac{c_0}{(z-z_0)^m}+\cdots+c_m+c_{m+1}(z-z_0)+\cdots$$

其中$c_0=g(z_0)=c_{-m}\neq 0$

$\therefore z_0$是$f(z)$的m级极点。

例2 求下列各函数的奇点，并判别类型.

(1) $\dfrac{\sin z}{z}$

解: $z=0$是孤立奇点.

又 $\dfrac{\sin z}{z} \underset{0<|z|<+\infty}{\overset{L-展开}{=}} \dfrac{1}{z}\left(z-\dfrac{1}{3!}z^3+\cdots\right)=1-\dfrac{1}{3!}z^3+\cdots$

$\therefore z=0$是可去奇点.

或 $\because \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\cos z=1$

$\therefore z=0$是可去奇点。

(2) $\dfrac{1}{z^2(1-z)}$

解: $z=0$及1为孤立奇点

显然 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{z^2}g(z)\quad \therefore z=0$是二级极点

$f(z)=\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{1}{z-1}\cdot g(z)\qquad \therefore z=1$是一级极点

或$\because f(z)\overset{0<|z-1|<1}{=}\dfrac{1}{z-1}\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\dfrac{1}{z-1}+2-3(z-1)\cdots$

$\therefore z=1$是一级极点

(3) $e^{\frac{1}{z}}$

解： $z=0$是孤立奇点

又 $e^{\frac{1}{z}} \overset{0<|z|<+\infty}{=} 1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!}\cdot\dfrac{1}{z^2}+\cdots,\qquad \therefore z=0$是本性奇点

(4) $\dfrac{e^z-1}{z^3}$

解： $z=0$是孤立奇点

又 $\dfrac{e^z-1}{z^3} \overset{0<|z|<+\infty}{=} \dfrac{1}{z^2}\left(1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots\right)$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\cdots$$

$\therefore z=0$是二级极点

(5) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$

解： $z=0$是孤立奇点

$$\because \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2z}=\frac{1}{2}$$

$\therefore z=0$是可去奇点

补充定理:

若$P(z),Q(z)$在z_0点解析，且$P(z_0)=Q(z_0)=0$,

$P(z)$, $Q(z)\neq 0$

则 $\displaystyle\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{Q(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{P'(z)}{Q'(z)}$(含$\infty$)

4.零点与极点的关系：

定义： 若解析函数$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，

其中$\varphi(z)$在z_0点解析，且$\varphi(z_0)\neq 0,(m\in N)$，

则称z_0是$f(z)$的m级零点。

例3 求下列各函数的零点，并判断其级数.

(1) $f(z)=z^2(z-1)^3$

解： 显然$z=0$是二级极点，$z=1$是三级极点.

(2) $f(z)=z^3-1$

解: $f(z)=z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$

$\therefore z=1$是一级零点.

(3) $f(z)=e^z-1$

解: $f(z)=e^z-1=1+z+\dfrac{1}{2!}z^2+\cdots-1$

$$=z\left(1+\frac{z}{2!}+\cdots\right)$$

$\therefore z=0$是一级零点.

第一节 孤立奇点

定理1. 设$f(z)$在z_0点解析，则z_0是$f(z)$的m级零点

$$\Leftrightarrow f^{n}(z)=0 \quad (n=0\cdots m-1),\ 而f^{m}(z)\neq 0$$

证明: $\Rightarrow \quad \because f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$ —由m级零点的定义得

$$\underset{T-展开}{\overset{|z-z_0|<R}{=}} (z-z_0)^m\left[c_0+c_1(z-z_0)+\cdots\right]$$

$$=c_0(z-z_0)^m+c_1(z-z_0)^{m+1}+\cdots$$

求导得: $f^{n}(z_0)=0 \qquad (n=0\cdots m-1)$

$$f^{m}(z_0)=c_0=\varphi(z_0)\neq 0$$

$\Leftarrow$

$$f(z) \underset{T-\text{展开}}{\overset{0<|z-z_0|<R}{=}} f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)$$

$$+\cdots+\frac{f^{n}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n}+\cdots$$

$$=\frac{f^{m}(z_0)}{m!}(z-z_0)^{m}+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)^{m+1}+\cdots$$

$$=(z-z_0)^m\left(\frac{f^{m}(z_0)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)+\cdots\right)$$

$$\overset{\Delta}{=}(z-z_0)^m\varphi(z)$$

显然$\varphi(z_0)=\dfrac{f^{m}(z_0)}{m!}\neq 0$

即z_0是$f(z)$的m级极点

例4 求$f(z)=\sin z-1$的零点，并判别级数.

解:

$$f(z)=\sin z-1=0\text{的零点为}z_k=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$\text{而}\ f'(z_k)=\cos z_k=0,\ f''(z_k)=-\sin z_k=-1\neq 0$$

$\therefore z_k$均为二级极点

例5 指出$f(z)=6\sin z^3+z^3(z^6-6)$在零点$z=0$的级.

解:

$$f(z)=6\left(z^3-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{15}}{5!}-\frac{z^{21}}{7!}+\cdots\right)+z^9-6z^3$$

$$=6z^{15}\left(\frac{1}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots\right)$$

$\therefore z=0$是$f(z)$的15级零点

例6 $P_{183.}6$(留做练习)

定理2. 极点与零点的关系

$$z_0\text{是}f(z)\text{的}m\text{级极点}\Leftrightarrow\ z_0\text{是}\frac{1}{f(z)}\text{的}m\text{级零点。}$$

证明:

$$\Leftarrow\quad \because \frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\varphi(z),$$

$$\varphi(z)\text{在}z_0\text{点解析},\varphi(z_0)\neq 0$$

第一节 孤立奇点

则$z \neq z_0$时，$f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^m} \cdot \dfrac{1}{\varphi(z)}$

$$= \frac{1}{(z-z_0)^m} g(z)$$

显然 $g(z_0) = \dfrac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0$，且在$z_0$点解析.

$\therefore z_0$是$f(z)$的m级极点.

第一节 孤立奇点

$$\Rightarrow \because f(z) \overset{0<|z-z_0|<R}{=} \frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot g(z)$$

$$\therefore z \neq z_0\text{时}, \frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^m \cdot \frac{1}{g(z)} \overset{\Delta}{=} (z-z_0)^m \varphi(z)$$

显然$\varphi(z)$在z_0点解析，且$\varphi(z_0) \neq 0$

而$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{f(z)} = 0$

$\therefore$只要令$\dfrac{1}{f(z)} = 0$，则z_0即是$\dfrac{1}{f(z)}$的m级零点

例7 判别$\dfrac{1}{\sin^3(z-2)}$在奇点$z=2$的类型.

解: $f(z)=\dfrac{1}{\sin^3(z-2)}$,显然$z=2$为孤立奇点,

又 $z=2$是$\sin(z-2)$的一级零点

$\therefore z=2$是$\sin^3(z-2)$的三级零点

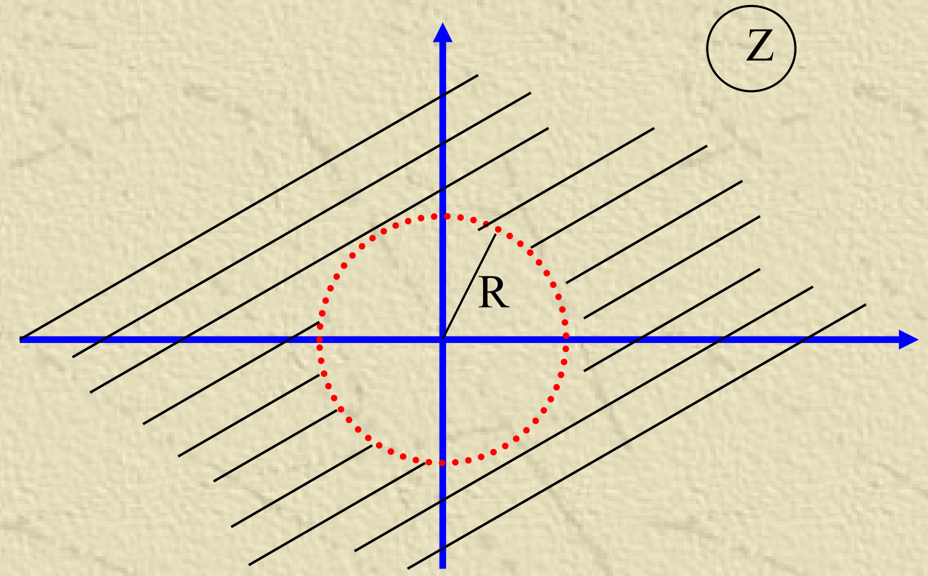
$\Rightarrow \therefore z=2$是$f(z)$的三级极点

第一节 孤立奇点

5.函数在无穷远点的性态

定义： 若$f(z)$在$R<|z|<+\infty$内解析，

则称∞远点为$f(z)$的孤立奇点.



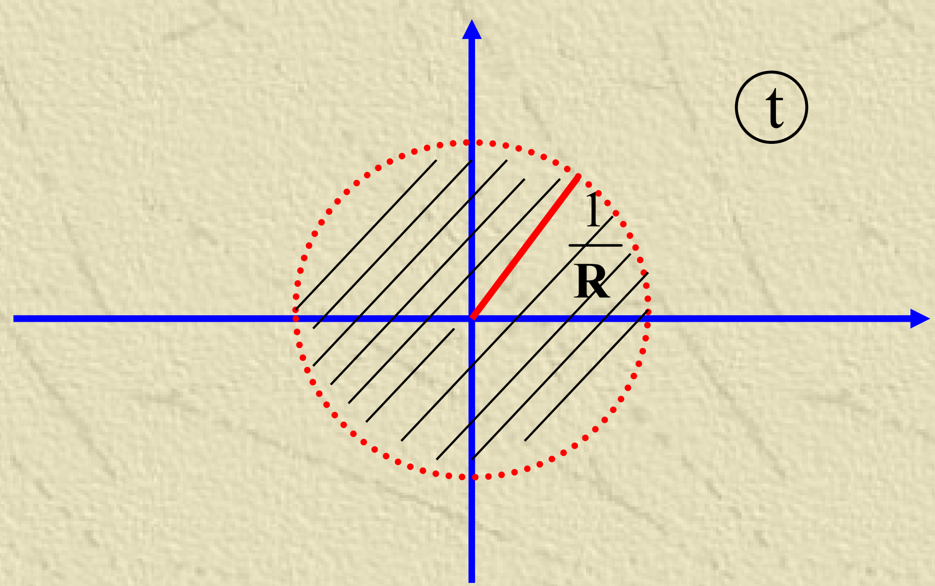
注： 在扩充复平面上∞均为$f(z)$的奇点

第一节 孤立奇点

讨论：$f(z)$在$z=\infty$的性态(分类)

1) 作变换$t=\frac{1}{2}$，规定：$z=\infty \overset{z=\frac{1}{t}}{\longleftrightarrow} t=0$

则 $0<|z|<+\infty \leftrightarrow 0<|t|<\frac{1}{R}$



而 $f(z)=f\left(\frac{1}{t}\right)\overset{\Delta}{=}\phi(t)$

显然$\phi(t)$在$0<|t|<\frac{1}{R}$内解析，$t=0$是$\phi(t)$的孤立奇点

规定：

$$\begin{cases} 1^\circ\ \text{若}\,t=0\,\text{是}\,\varphi(t)\,\text{的可去奇点，称}\,z=\infty\,\text{是}\,f(z)\\ \quad\ \text{的可去奇点} \\ 2^\circ\ \text{若}\,t=0\,\text{是}\,\varphi(t)\,\text{的}\,m\,\text{级极点，称}\,z=\infty\,\text{是}\,f(z)\\ \quad\ \text{的}\,m\,\text{级极点} \\ 3^\circ\ \text{若}\,t=0\,\text{是}\,\varphi(t)\,\text{的本性奇点，称}\,z=\infty\,\text{是}\,f(z)\\ \quad\ \text{的本性奇点} \end{cases}$$

2)判别∞的方法

$\because f(z)$在$R<|z|<+\infty$内解析

$$\therefore f(z) \overset{L-\text{展开}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad —(1)$$

其中$c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$

而$\varphi(t)$在$0<|t|<\dfrac{1}{R}$内解析

$$\text{且}\varphi(t) = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} t^n + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^{-n} \quad —(2)$$

比较(1),(2)两式得:

1° 若(1)式中不含正幂项 $\Rightarrow t=0$ 是 $\varphi(t)$ 的可去奇点

$\Rightarrow z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点

2° 若(1)式中含有有限个正幂项，且 z^m 是最高次幂

$\Rightarrow t=0$ 是 $\varphi(t)$ 的 m 级极点 $\Rightarrow z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 m 级极点

3° 若(1)式中含有无穷多正幂项

$\Rightarrow t=0$ 是 $\varphi(t)$ 的本性奇点 $\Rightarrow z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点

此外，与有限奇点类似:

1° $z=\infty$是可去奇点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)=b$

2° $z=\infty$是极点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$

3° $z=\infty$是本性奇点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$不存在$(\neq\infty)$

例8 讨论下列函数在扩充复平面内的奇点，并判别类型.

(1) $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$

解: $z=0, z=\infty$为孤立奇点

而 $\sin\dfrac{1}{z} \overset{0<|z|<+\infty}{=} \dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{3!}\cdot\dfrac{1}{z^3}+\cdots$

$\therefore z=\infty$是可去奇点，$z=0$是本性奇点

$$(2)\ f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}$$

解: $z=0, z=\infty$为孤立奇点

$$\because \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=0, \qquad \therefore z=0\text{是可去奇点}$$

$$z=\infty\text{时}, \quad \frac{1-\cos z}{z^2}\ \underset{L-\text{展开}}{\overset{0<|z|<+\infty}{=}}\ \frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}z^2+\cdots$$

$$\therefore z=\infty\text{是本性奇点，从而}\lim_{z\to\infty}\frac{1-\cos z}{z^2}\text{不存在}$$

(3) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$

解: $z=0, z=\infty$是孤立奇点

$\because z=0$是$\sin z$的一级零点，是z^3的三级零点

$\therefore z=0$是$f(z)$的二级极点.

在$z=\infty$点，$\dfrac{\sin z}{z^3}=\dfrac{1}{z^3}\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\cdots\right)$

$\therefore z=\infty$是本性奇点.

第一节 孤立奇点

(4) $f(z)=\dfrac{(z^2-1)(z-2)^2}{(\sin\pi z)^3}$

解: 奇点为$z_k=0,\pm1,\pm2\cdots$,及$z=\infty$

且对z_k, $\sin\pi z\big|_{z_k}=0$, $(\sin\pi z)'\Big|_{z_k}=\pi\cos\pi z_k\neq 0$

$\therefore z_k$是$(\sin\pi z)^3$的三级零点

又$z=\pm1$点，是$z^2-1=(z+1)(z-1)$的一级零点

$\therefore z=\pm1$点是$f(z)$的二级极点

$z = 2$点，　　是$(z-2)^3$的三级零点

$\therefore z = 2$点是$f(z)$的可去奇点

$z = z_k \, (k \neq \pm 1, 2)$，　　是$(z^2-1)(z-2)^3$的非零点

$\therefore$是$f(z)$的三级极点

$z = \infty$，　　$\because z_k \to \infty \, (k \to \infty$时$)$

$\therefore z_k$是非孤立奇点

第一节 孤立奇点

例9 $z=0$是函数$(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)^{-2}$的几级极点?

解: $\dfrac{1}{f(z)}=(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)^{2}$

而 $\sin z+\operatorname{sh} z-2z=\sin z+\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}-2z$

$$=\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\right)+\left(z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\cdots\right)-2z$$

$$=\frac{2}{5!}\cdot z^5+\frac{2}{9!}\cdot z^9+\cdots=z^5\cdot\left(\frac{2}{5!}+\frac{2}{9!}\cdot z^4+\cdots\right)$$

$\therefore z=0$是$\sin z+\operatorname{sh} z-2z$的5级零点

是 $\dfrac{1}{f(z)}=(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)^{2}$的10级零点

故是$(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)^{-2}$的10级极点

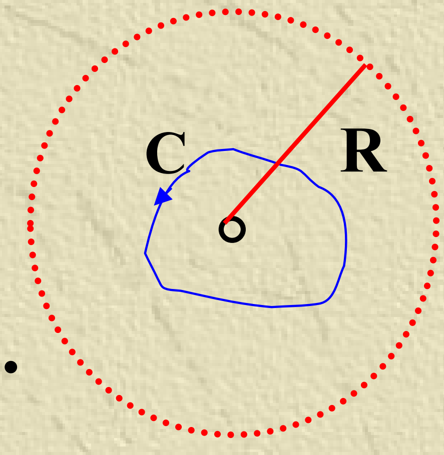
第二节　留数（或残数 *Residue*）

1.定义：

设z_0为$f(z)$的孤立奇点，且在$K: 0<|z-z_0|<R$内解析，

则　$\operatorname{Res}[f(z),z_0] \overset{\Delta}{=} \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$

称为$f(z)$在z_0点的留数.



其中C是K内绕z_0的任一正向简单闭曲线.

$\because \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\cdot c_{-1}$　　$\therefore \operatorname{Res}[f(z),z_0]=c_{-1}$

注：这里的c_{-1}是在z_0去心邻域内$L-$展开式中$\dfrac{1}{z-z_0}$前的系数

例1 求下列各函数在孤立奇点的留数

(1) $sin\dfrac{1}{z-1}$

解: $\because sin\dfrac{1}{z-1} \underset{L-\text{展开}}{\overset{0<|z-1|<\infty}{=}} \dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{3!}\cdot\dfrac{1}{(z-1)^3}+\cdots$

$\therefore c_{-1}=1,\qquad Res\left[sin\dfrac{1}{z-1},1\right]=c_{-1}=1$

(2) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$

解: $\because \dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$

$$\underset{L-\text{展开}}{\overset{0<|z|<+\infty}{=}} \frac{1}{z^4}\left[1-\left(1+2z+\frac{1}{2!}(2z)^2+\frac{1}{3!}(2z)^3+\cdots\right)\right]$$

$$=-\frac{2}{z^3}-\frac{4}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}-\frac{2^3}{3!}\cdot\frac{1}{z}-\cdots$$

$$\therefore c_{-1}=-\frac{2^3}{3!}=-\frac{4}{3} \quad \therefore \operatorname{Res}\left[f(z),0\right]=-\frac{4}{3}$$

(3) $\dfrac{1}{z^2(1-z)}$

解: $\because \dfrac{1}{z^2(1-z)} \underset{L-\text{展开}}{\overset{0<|z|<1}{=}} \dfrac{1}{z^2}\left(1+z+z^2+\cdots\right)$

$= \dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}+z+\cdots \quad \therefore c_{-1}=1, \quad \text{即} \operatorname{Res}\left[f(z),0\right]=1$

$\because \dfrac{1}{z^2(1-z)} \underset{L-\text{展开}}{\overset{0<|z-1|<1}{=}} \dfrac{1}{z-1}\left(\dfrac{1}{z}\right)' = \dfrac{1}{z-1}\left[\dfrac{1}{1+(z-1)}\right]'$

$= \dfrac{1}{(z-1)}\left[-1+2(z-1)-3(z-1)^2\cdots\right] = -\dfrac{1}{z-1}+2-3(z-1)\cdots$

$\therefore c_{-1}=-1, \quad \text{即} \operatorname{Res}\left[f(z),1\right]=-1$

定理1（留数定理）：

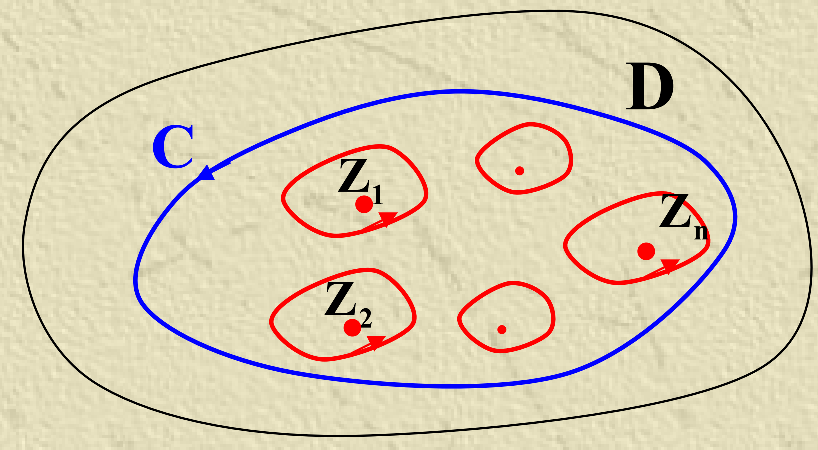
设$f(z)$在区域D内除有限个孤立奇点$z_1, z_2, \cdots, z_n$外处处解析，C是D内包含各奇点的一条正向简单闭曲线

$$\text{则} \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[f(z), z_k\right]$$

证明:

作$c_k\left(k=1\cdots n\right)$分别包含$z_k$,且互不包含，互不相交

则由复合闭路原理:



$$\oint_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)dz$$

故 $$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_k} f(z)dz$$

$$=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[f(z),z_k\right]$$

2. 留数的计算方法

(1) z_0是可去奇点 $\Rightarrow Res\left[f(z), z_0\right]=0$

(2) z_0是本性奇点 $\Rightarrow Res\left[f(z), z_0\right]=c_{-1} \quad (L-$展开$)$

(3) z_0是$f(z)$的极点,下列规则:

规则I: 若z_0为$f(z)$的一级极点,

则 $Res\left[f(z), z_0\right]=\lim\limits_{z \to z_0}(z-z_0)f(z)$

证明:

$$\because f(z) \overset{0<|z-z_0|<R}{\underset{L-\text{展开}}{=}} c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots$$

$$\therefore (z-z_0)f(z) = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + \cdots$$

$$\text{故}\ c_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \operatorname{Res}[f(z), z_0]$$

第二节 留数

规则II： z_0为$f(z)$的$m(m\geq 1)$级极点，则

$$Res\left[f(z),z_0\right]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}$$

证明：

$$\because f(z)\underset{L-展开}{\overset{0<|z-z_0|<R}{=}}c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+\cdots$$

$$\therefore (z-z_0)^m f(z)=c_{-m}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_0(z-z_0)^m+\cdots$$

从而

$$\left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}=(m-1)!\,c_{-1}+m!\,c_0(z-z_0)+\cdots$$

$$\therefore c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{m-1} = \operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right]$$

特别的：$m=1$时为规则I.

注： 若z_0是$f(z)$的m级极点，且$n \geq m$

$$\text{则} \operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0)^n f(z)\right]^{(n-1)}$$

$$= c_{-1} \quad \text{（证法同上）}$$

第二节 留数

例2 求下列各函数在有限奇点处的留数

$$(1)\ \frac{e^z}{(z-1)^2} \qquad (2)\ \frac{1}{z^3(z-2i)} \qquad (3)\ \frac{\sin z}{z^6}$$

解: $(1)\ Res\left[\frac{e^z}{(z-1)^2},1\right]$

$$\overset{z=1\text{是二级极点}}{\underset{m=2}{=}} \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\cdot\frac{e^z}{(z-1)^2}\right]'$$

$$=e$$

第二节 留数

$$(2)\ Res\left[\frac{1}{z^3(z-2i)},0\right]$$

$$\underset{m=3}{\overset{z=0\text{是三级极点}}{=}}\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\left[z^3\cdot\frac{1}{z^3\cdot(z-2i)}\right]''=-\frac{i}{8}$$

$$Res\left[\frac{1}{z^3(z-2i)},2i\right]=\lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{1}{z^3(z-2i)}=\frac{i}{8}$$

第二节 留数

$$(3)\ Res\left[\frac{\sin z}{z^6},0\right]$$

$$\overset{z=0\text{是五级极点}}{\underset{\text{取n=6}}{=}}\frac{1}{(6-1)!}\lim_{z\to 0}\left[z^6\cdot\frac{\sin z}{z^6}\right]^{(5)}=\frac{1}{5!}$$

或 $$\frac{\sin z}{z^6}=\frac{1}{z^6}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^5}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^5}-\cdots$$

$$\therefore c_{-1}=\frac{1}{5!}$$ 即 $$Res\left[\frac{\sin z}{z^6},0\right]=\frac{1}{5!}$$

规则III： 设$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z)$，$Q(z)$在z_0点解析，

如果$P(z_0)\neq 0$，$Q(z_0)=0$，$Q'(z_0)\neq 0$，

则z_0是$f(z)$的一级极点，且$\mathrm{Res}\left[f(z),z_0\right]=\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

证明： $\because$ z_0是$Q(z)$的一级零点，$\therefore$ z_0是$\dfrac{P(z)}{Q(z)}$的一级极点.

由规则I：$\mathrm{Res}\left[f(z),z_0\right]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)\dfrac{P(z)}{Q(z)}$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

第二节 留数

例3 计算下列积分.

(1) $\oint_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)^2} dz$

解: $f(z)=\frac{5z-2}{z(z-1)^2}$ 的奇点有: 一级极点 $z=0$,

二级极点 $z=1$. 且 $z=0$ 及 $z=1$ 均在圆 $|z|=2$ 内

而 $\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{5z-2}{z(z-1)^2}=-2$,

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\cdot\frac{5z-2}{z(z-1)^2}\right]'$$

$$=\lim_{z\to 1}\left(5-\frac{2}{z}\right)'=\lim_{z\to 1}\frac{2}{z^2}=2$$

$$\therefore \text{原式} = 2\pi i\left\{\operatorname{Res}\left[f(z),0\right]+\operatorname{Res}\left[f(z),1\right]\right\}$$

$$= 2\pi i(-2+2) = 0$$

(2) $\oint_{|z|=1} \dfrac{z\sin z}{\left(1-e^{z}\right)^{3}} dz$

解： $f(z)$的奇点为$e^{z}=1$点：即$z=2k\pi i\ (k=0,\pm1,\cdots)$

而只有$z=0$在$|z|=1$内，且为一级极点

$(\because$是分母三级零点，分子二级零点$)$

$$\therefore \operatorname{Res}\left[f(z),0\right]=\lim_{z\to0} z\cdot\frac{z\sin z}{\left(1-e^{z}\right)^{3}}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z}\cdot\left(\frac{z}{1-e^{z}}\right)^{3}=\left[\lim_{z\to0}\frac{z}{1-e^{z}}\right]^{3}=-1$$

$\therefore$ 原式$=2\pi i\operatorname{Res}\left[f(z),0\right]=-2\pi i$

第二节 留数

(3) $\oint_{|z|=2} \tan \pi z dz$

解: $\because \tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ $\therefore$ 奇点为$z_k = k + \dfrac{1}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$

且为一级极点(是分母的一级零点，分子非零点)

而 $z_0 = \dfrac{1}{2}, z_1 = \dfrac{3}{2}, z_{-1} = -\dfrac{1}{2}, z_{-2} = -\dfrac{3}{2}$在$|z| = 2$内

且 $\operatorname{Res}[\tan \pi z, z_k] \overset{\text{规则}III}{=} \dfrac{\sin \pi z_k}{(\cos \pi z)'\big|_{z_k}} = \dfrac{\sin \pi z_k}{-\pi \sin \pi z_k} = -\dfrac{1}{\pi}$

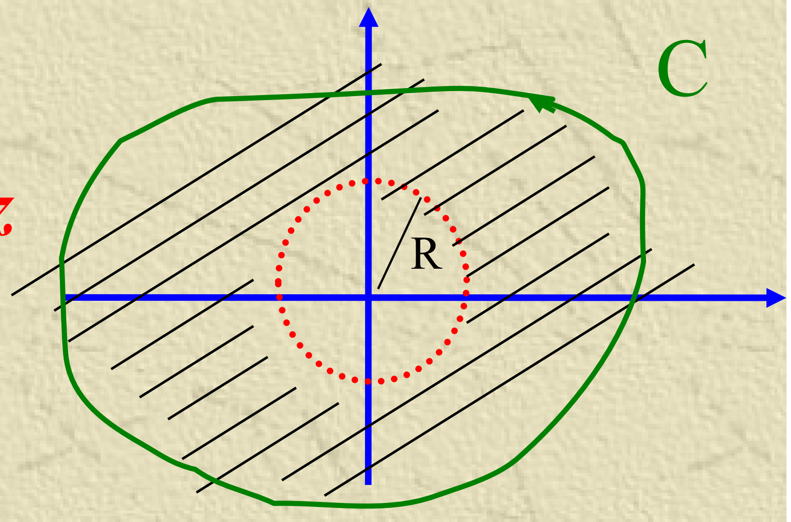
$\therefore$ 原式 $= 2\pi i \sum\limits_{|z_k|<2} \operatorname{Res}[\tan \pi z, z_k] = 2\pi i \left[-\dfrac{1}{\pi} - \dfrac{1}{\pi} - \dfrac{1}{\pi} - \dfrac{1}{\pi}\right] = -8i$

类似可得: $\oint_{|z|=n} \tan \pi z dz = -4ni$

第二节 留数

3. 无穷远点的留数

定义: 设$f(z)$在H: $R<|z|<+\infty$内解析，C为H内绕$z=0$的任一正向简单闭曲线



则 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)dz$

(注: C^-为∞点的正向)

又 $f(z) \underset{L-\text{展开}}{\overset{R<|z|<+\infty}{=}} \sum_{n=2}^{\infty} c_{-n}z^{-n}+c_{-1}z^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

$\therefore \oint_{C^-} f(z)dz = c_{-1}\oint_{C^-}\dfrac{1}{z}dz=-2\pi i c_{-1}$

$\therefore \mathrm{Res}[f(z),\infty]=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)dz=-c_{-1}$

第二节 留数

注：若∞是可去奇点，不能得出 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=0.$

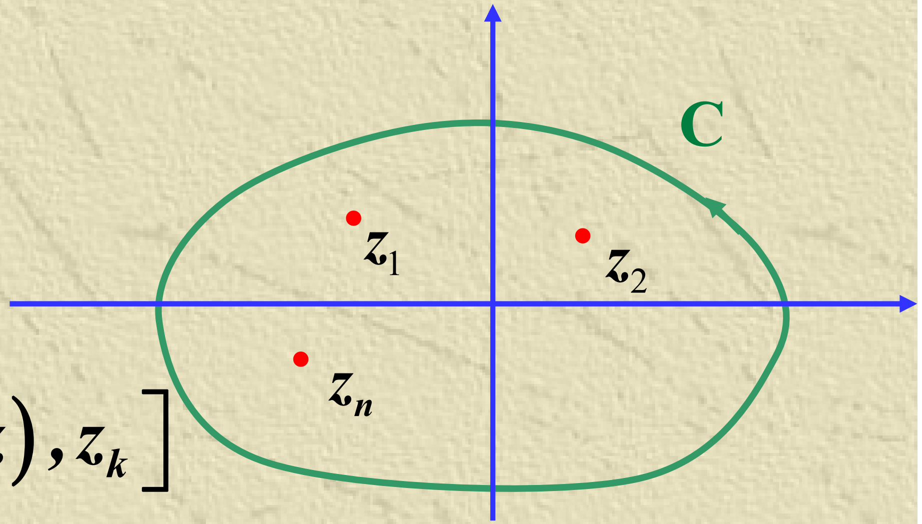
定理2（扩充复平面内的留数定理）：

如果 $f(z)$ 在扩充复平面内只有有限个孤立奇点（包括∞点）$z_1, z_2 \cdots, z_n, \infty$，

则 $$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]+\operatorname{Res}[f(z),\infty]=0$$

或 $$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]=-\operatorname{Res}[f(z),\infty]$$

证明: 设C是绕原点并包含有$z_1, z_2, \cdots z_n$的正向简单闭曲线,



则 $\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f(z), z_k]$

又 $\oint_{C^-} f(z)dz = 2\pi i\, Res[f(z), \infty]$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} Res[f(z), z_k] + Res[f(z), \infty]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_C f(z)dz + \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{C^-} f(z)dz = 0$$

第二节 留数

规则IV： $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$

证明:(略.见书P_{161}页)

例4 计算下列各函数在∞点处的留数.

$$(1)\ \sin\frac{1}{z} \qquad (2)\ \frac{e^z}{z^2-1}$$

解： $(1)\ \operatorname{Res}\left[\sin\frac{1}{z},\infty\right]=-\operatorname{Res}\left[\frac{\sin z}{z^2},0\right]$

$$=-\lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot\frac{\sin z}{z^2}\right)'=-1$$

或 $\because \sin\frac{1}{z}\overset{0<|z|<\infty}{\underset{L-\text{展开}}{=}}\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots \quad \therefore C_{-1}=1,\ \operatorname{Res}[\sin\frac{1}{z},\infty]=-1$

第二节 留数

(2) $\operatorname{Res}\left[\dfrac{e^z}{z^2-1}, \infty\right]$

$$= -\left[\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z^2-1}, 1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z^2-1}, -1\right)\right]$$

$$= -\left[\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{e^z}{(z-1)(z+1)} + \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{e^z}{(z-1)(z+1)}\right]$$

$$= -\left(\frac{e}{2} - \frac{e^{-1}}{2}\right) = \frac{e^{-1}-e}{2}$$

第二节 留数

例5 计算下列积分

$$(1)\ \oint_C \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz \qquad C:|z|=3\text{正向}$$

解： $f(z)$在c内的奇点为：$z=i,-i,\sqrt[4]{2}e^{\frac{(2k+1)\pi i}{4}}\quad (k=0\sim 3)$

$$\therefore \text{原式}=2\pi i\sum_{k=1}^{6}\mathrm{Res}\left[f(z),z_k\right]=-2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f(z),\infty\right]$$

$$=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3},0\right]$$

$$=2\pi i$$

$$(2)\ \oint_C \frac{dz}{(z+i)^{10}(z-1)(3-z)} \qquad C: |z| = 2\text{正向}$$

解: $f(z)$的奇点为$z=-i,1,3,\infty$,

只有$-i$, 1在C内，而3, ∞在C外

$$\therefore \text{原式} = -2\pi i\left\{Res\left[f(z),3\right] + Res\left[f(z),\infty\right]\right\}$$

$$= -2\pi i\left\{\lim_{z\to 3}(z-3)\cdot\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(3-z)} - Res\left[\frac{z^{10}}{(1+iz)^{10}(1-z)(3z-1)},0\right]\right\}$$

$$= -2\pi i\left(\frac{-1}{2(3+i)^{10}} + 0\right) = \frac{\pi i}{(3+i)^{10}}$$

第三节留数在定积分计算中的应用

第三节　留数在定积分计算中的应用

本节介绍利用留数计算几种特殊类型的定积分.

I　形如$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$的积分.

其中$R(\cos\theta, \sin\theta)$是$\cos\theta, \sin\theta$的有理函数.

解法:　令$z = e^{i\theta}$, 则$dz = ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta = \dfrac{1}{iz}dz$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

而θ: $0 \to 2\pi \overset{对应}{\leftrightarrow} C:|z|=1$正向

原式$= \oint_{C:|z|=1} R\left(\dfrac{z^2+1}{2z}, \dfrac{z^2-1}{2iz}\right)\cdot\dfrac{1}{iz}dz \overset{\Delta}{=} \oint_{|z|=1} f(z)dz$

若$f(z)$在$|z|=1$上分母不为零(即无奇点),

则上式$=2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res\left[f(z),z_k\right]$

其中$z_k\,(k=1\cdots n)$是圆周$|z|=1$内$f(z)$的孤立奇点

例1 计算$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\frac{5}{4}+\sin\theta}$

解： $I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{\frac{5}{4}+\frac{z^2-1}{2iz}}\cdot\frac{1}{iz}dz=\oint_{|z|=1}\frac{1}{2z^2+5iz-2}dz$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{4}{2\left(z+\frac{i}{2}\right)(z+2i)}dz$$

$\because f(z)$的奇点$z=-\frac{i}{2}$在$|z|=1$内，且为一级极点

$$\therefore I=2\pi i Res\left[f(z),-\frac{i}{2}\right]=2\pi i\lim_{z\to-\frac{i}{2}}\left(z+\frac{i}{2}\right)\cdot\frac{4}{2\left(z+\frac{i}{2}\right)(z+2i)}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{2}{-\frac{i}{2}+2i}=\frac{8\pi}{3}$$

注：若$R(\cos\theta, \sin\theta)$为$\theta$的偶函数，

$$\text{则}\int_0^{\pi} R d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} R d\theta = \oint_{|z|=1} f(z) dz$$

例2 计算$I = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{5 - 4\cos x} dx$

解：$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{5 - 4\cos x} dx = \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^2+1}{2z}}{5 - 4\frac{z^2+1}{2z}} \cdot \frac{1}{iz} dz$$

$$= -\frac{1}{4i}\oint_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z(2z^2 - 5z + 2)} dz = -\frac{1}{4i}\oint_{|z|=1} \frac{z^2+1}{2z\left(z - \frac{1}{2}\right)(z-2)} dz$$

$$= -\frac{1}{8i}\cdot 2\pi i\left[\underset{z=0}{Res}\, f(z) + \underset{z=\frac{1}{2}}{Res}\, f(z)\right]$$

$$= -\frac{\pi}{4}\left[\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{z^2+1}{z\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)} + \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{z^2+1}{z\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\right]$$

$$= -\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{5}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

若用万能代换计算较繁.

另解: 令 $I_1=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x}{5-4\cos x}dx,\ I_2=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{5-4\cos x}dx$

则 $I_3=I_1+iI_2=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ix}}{5-4\cos x}dx$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{z}{5-4\cdot\frac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{1}{iz}dz=\frac{i}{2}\oint_{|z|=1}\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}dz=\frac{\pi}{3}$$

即 $I_1=\frac{\pi}{3}$ $\quad\therefore I=\frac{\pi}{6}$

II 形如$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$的积分

条件： 1° 积分区间$(-\infty, +\infty)$

2° $R(x)$是x的有理函数，

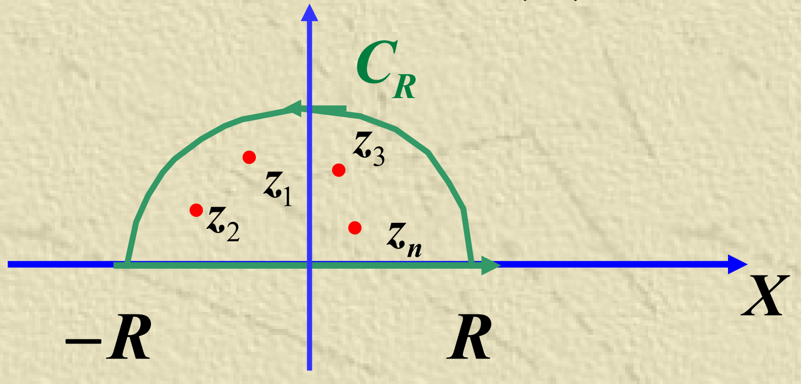
且$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_n}{x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$中$m-n\geq 2$

(即分母次幂至少比分子次幂高两次)

3° $R(z)$在实轴上无孤立奇点，上半平面只有有

限个孤立奇点.

解法: 作上半圆周 $C_R: |z| = R, Im\, z > 0$ 且 C_R 内含 $R(z)$ 的所有奇点,



则 $\int_{-R}^{R} R(z)dz + \int_{C_R} R(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\left[R(z), z_k\right]$

可证明:(P_{165}) $R \to +\infty$ 时, $\int_{C_R} R(z)dz \to 0$

$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{Im\, z_k > 0} Res\left[R(z), z_k\right]$

特别的, $R(x)$ 为偶函数时, $\int_{0}^{+\infty} R(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$

例3 计算$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$

解： $m-n=2$且$R(z)$在实轴上无奇点

又 $R(z)=\frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}=\frac{z^2-z+2}{(z^2+1)(z^2+9)}$

$$=\frac{z^2-z+2}{(z+i)(z-i)(z+3i)(z-3i)}$$

在上半平面有两个孤立奇点，$z=i, z=3i$均为一级极点

而$\mathrm{Res}[R(z),i]=-\frac{1+i}{16}$， $\mathrm{Res}[R(z),3i]=\frac{3-7i}{48}$

$\therefore$ 原式$=2\pi i\{\mathrm{Res}[R(z),i]+\mathrm{Res}[R(z),3i]\}=\frac{5}{12}\pi$

III 形如$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}dx\,(a>0)$的积分

条件： 1° 积分区间$(-\infty,+\infty)$

2° $R(x)$是x的有理数，且分母次幂至少高于分子次幂一次

3° $R(z)$在实轴上无孤立奇点，上半平面只有有限个孤立奇点.

解法： 讨论如II,得:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{Res}\left[R(z)e^{iaz}, z_k\right]$$

例4 计算$\int_0^{+\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx$

解： $\because$ 被积函数是偶函数 $\therefore \int_0^{+\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx$

令$\mathrm{I}_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx,\quad \mathrm{I}_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin mx}{1+x^2}dx$

则$\mathrm{I}=\mathrm{I}_1+i\mathrm{I}_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{imx}}{1+x^2}dx=2\pi i\,Res\left[\frac{e^{imz}}{1+z^2},i\right]$

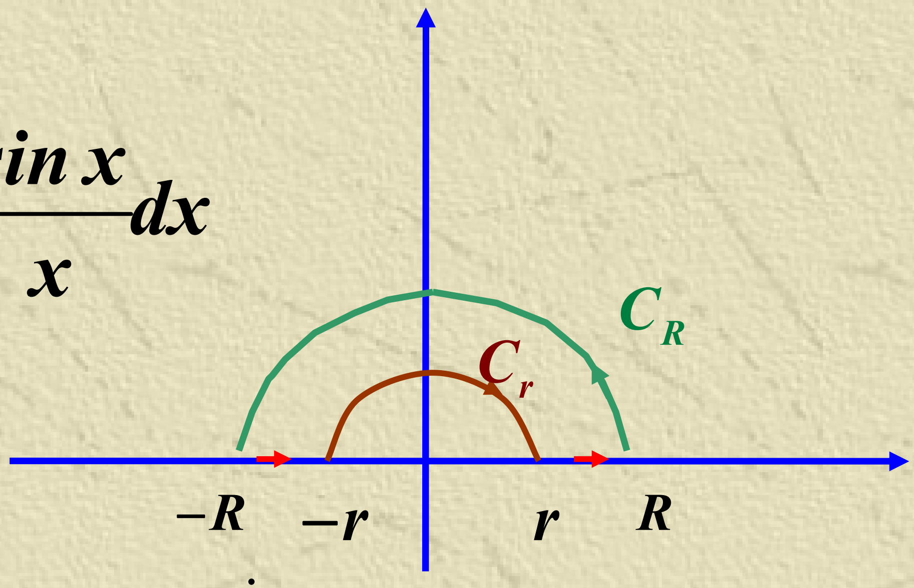
($\because$ 上半平面只有一个奇点$z=i$)

$$=2\pi i\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{imz}}{(z-i)(z+i)}=2\pi i\cdot\frac{e^{-m}}{2i}=\pi e^{-m}$$

$\therefore \mathrm{I}_1=\pi e^{-m}$，原式$=\frac{\pi}{2}e^{-m}$

例5 计算$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$

解: $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$



由$C-G$定理得:

$$\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{r}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx=0$$

经证明: $r\to 0^+, R\to +\infty$时, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx=\pi i$

即 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x+i\sin x}{x}dx=\pi i$ $\quad\therefore\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$