西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

第3章　多维随机变量及其分布



概率论与数理统计课程组

CHAPTER 3

多维随机变量及其分布

对二维随机变量进行类似一维随机变量的研究

CHAPTER 3

多维随机变量及其分布

3.1 二维随机变量及联合分布函数

问题的提出

研究某地区学龄儿童的发育情况：仅研究身高的分布或仅研究体重的分布是不够的。需同时考察每个儿童的身高和体重，研究二者间的关系，这就要引入定义在同一样本空间的两个随机变量

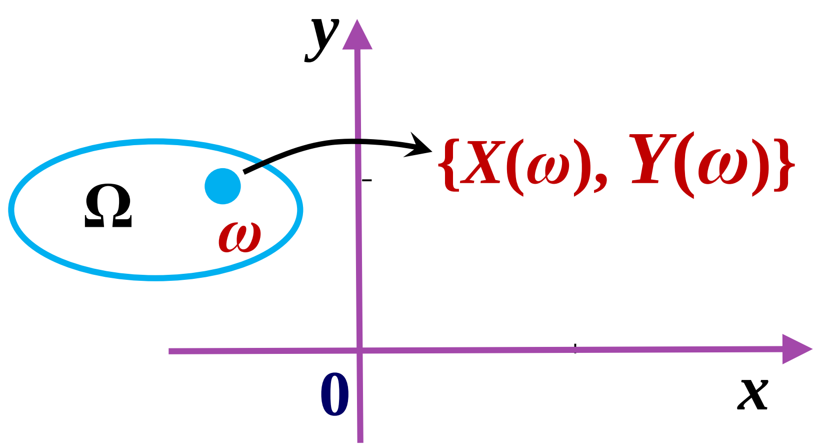
研究某种型号炮弹的弹着点分布：
每枚炮弹的弹着点位置需要由横坐标和纵坐标来确定，而它们是定义在同一样本空间的两个随机变量

二维随机变量

设E是一个随机试验，样本空间 $\Omega=\{\omega\}$；设$X=X(\omega)$和$Y=Y(\omega)$是定义在Ω上的随机变量，由它们构成的向量(X, Y)称**二维随机向量或二维随机变量**

不可以理解为**任意**两个一维随机变量的组合

因为(X, Y)的性质不仅与X 及Y 有关，而且依赖于X和Y的相互关系，需要将二者视为一个整体



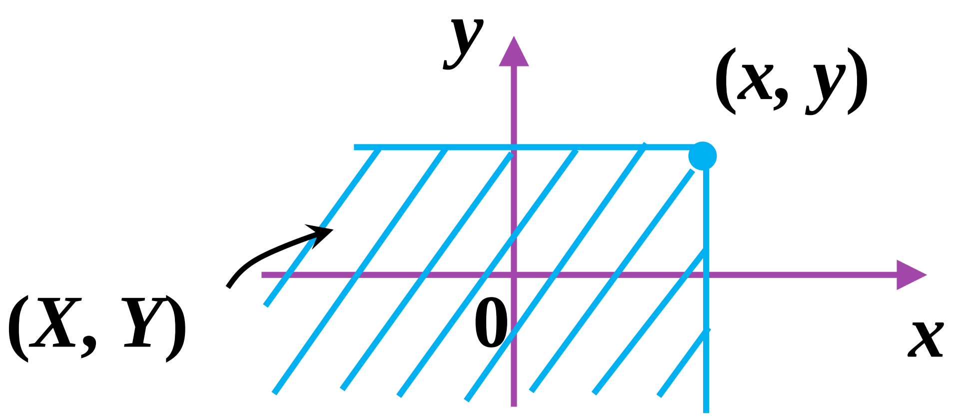
$X=X(\omega)$和$Y=Y(\omega)$的写法说明它们是来自同一个随机试验

分布函数

设(X, Y)是二维随机变量，对于任意实数x, y，有二元函数

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\overset{\text{记成}}{=\!=}P(X\le x,Y\le y)\qquad -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty$$

称为二维随机变量**(X, Y)的联合分布函数**

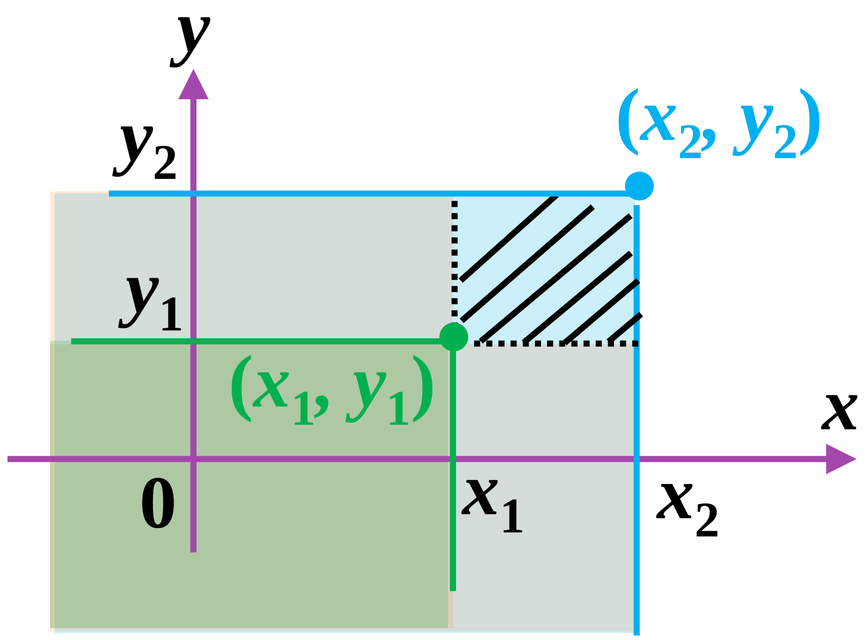


$F(x, y)$在(x, y)处的函数值实际为随机点(X, Y) 落在**以(x, y)为顶点左下方无穷矩形域的概率**

随机点(X, Y)落在矩形域

$$\{(x,y)/x_1<x\le x_2,y_1<y\le y_2\}$$

的概率为



$$P(x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2)$$

$$=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)$$

基本性质

1° $F(x, y)$是x和y的不减函数

2° $0 \le F(x, y) \le 1$, $F(-\infty, -\infty) = 0$, $F(+\infty, +\infty) = 1$

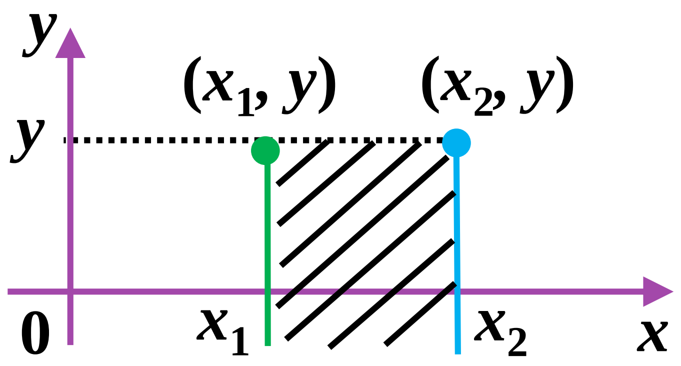
对任意固定y, $F(-\infty, y) = 0$

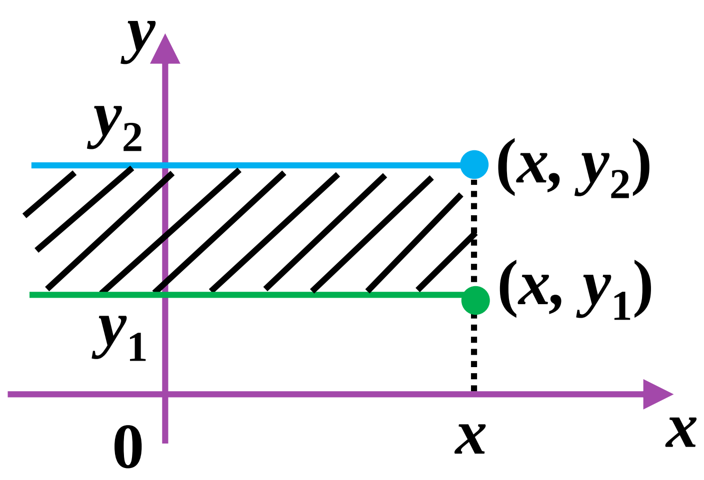
对任意固定x, $F(x, -\infty) = 0$

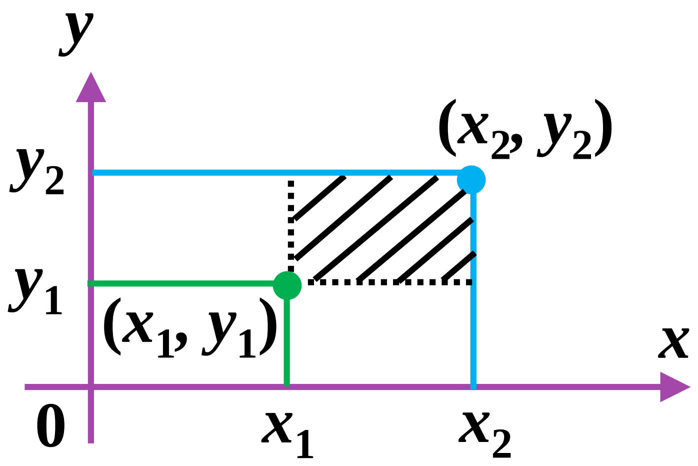
$F(x, +\infty) = ?$ $F(+\infty, y) = ?$

3° $F(x, y)$关于x, y均为右连续，$F(x+0, y) = F(x, y)$, $F(x, y+0) = F(x, y)$

4° 若 $x_1<x_2$, $y_1<y_2$，则 $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \ge 0$







$x_1<x_2$则$F(x_1, y) \le F(x_2, y)$ $y_1<y_2$则$F(x, y_1) \le F(x, y_2)$

$P(x_1 < x \le x_2, y_1 < y \le y_2)$

$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2)$

本节回顾

二维随机变量

设E是一个随机试验，样本空间 $\Omega=\{e\}$；设$X=X(e)$和$Y=Y(e)$是定义在Ω上的随机变量，由它们构成的向量(X, Y)称**二维随机向量或二维随机变量**

不可以理解为**任意**两个一维随机变量的组合

二维随机变量的分布函数

设(X, Y)是二维随机变量，对于任意实数x, y，有二元函数

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\overset{\text{记成}}{=\!=}P(X\le x,Y\le y)$$

$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$

称为二维随机变量**(X, Y)的联合分布函数**

CHAPTER 3

多维随机变量及其分布

3.2 二维离散型随机变量及联合分布律

二维离散型随机变量

定义

若二维随机变量(X, Y)全部可能取到的不同值是有限对或可列无限对，则称(X, Y)是**离散型随机变量**

联合分布律

设(X, Y)所有可能取值为(x_i, y_j), $i, j = 1, 2, \cdots$

记为 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \ i, j = 1, 2, \cdots$

称为二维离散型随机变量(X, Y)的**联合**分布律

联合分布律可以用表格形式表示

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

基本性质

1° $p_{ij} \geq 0 \ (i, j = 1, 2, 3, \ldots)$

2° $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$ 或写为 $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

联合分布函数为 $F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$

例 设随机变量X 在1、2、3、4四个整数中等可能地取 一个值，另一个随机变量 Y 在1~X 中等可能地取一整数值，试求(X, Y)的联合分布律，$F(2.5, 3.6)$

解 $(X=i, Y=j)$的取值情况为：i =1, 2, 3, 4，j 取不大于i 的正整数。

$$P(X=i, Y=j)$$

$$=P(X=i)P(Y=j \mid X=i)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{i}$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ j\le i$$

即(X, Y)的联合分布律为：

Y \ X	1	2	3	4
1	1/4	1/8	1/12	1/16
2	0	1/8	1/12	1/16
3	0	0	1/12	1/16
4	0	0	0	1/16

$$F(2.5, 3.6)=\sum_{x_i\le 2.5}\sum_{y_j\le 3.6} p_{ij}=p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{21}+p_{22}+p_{23}=1/2$$

例 某足球队在任何长度为 t 的时间区间内得黄牌或红牌的次数$N(t)$服从参数为λt的泊松分布，记 X_i 为比赛进行 t_i 分钟后的得牌数，$i=1, 2$ $(t_2>t_1)$。试写出X_1, X_2的联合分布律。

解

$$P\{N(t)=k\}=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!},\ k=0,1,2,\cdots$$

$X\sim P(\lambda)$ $\quad P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ k=0,1,2,\cdots,\ \lambda>0$

$$P(X_1=i,X_2=j)=P(X_1=i)P(X_2=j|X_1=i)$$

乘法公式 $P(AB)=P(A)P(B|A)$，$P(A)>0$

$$=P(X_1=i)P(X_2-X_1=j-i|X_1=i)=P(X_1=i)P(X_2-X_1=j-i)$$

独立性

可拆解为长度分别为t_1和t_2-t_1的两个区间分析

$$=\frac{e^{-\lambda t_1}(\lambda t_1)^i}{i!}\cdot\frac{e^{-\lambda(t_2-t_1)}\left[\lambda(t_2-t_1)\right]^{j-i}}{(j-i)!}$$

$i=0,1,2,\cdots,\ j=i,\ i+1,\ \ldots$

并非直接写出X_1, X_2各自的分布律

本节回顾

二维离散型随机变量的联合分布律

若二维随机变量(*X*, *Y*)全部可能取到的不同值是有限对或可列无限对，则称(*X*, *Y*)是离散型随机变量

设(*X*, *Y*)所有可能取值为 $(x_i, y_j),\ i,j=1,2,\cdots$

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots$$

称为二维离散型随机变量(*X*, *Y*)的联合分布律

联合分布律

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

联合分布函数为 $F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y} p_{ij}$

CHAPTER 3

多维随机变量及其分布

3.3 二维连续型随机变量及联合概率密度

二维连续型随机变量

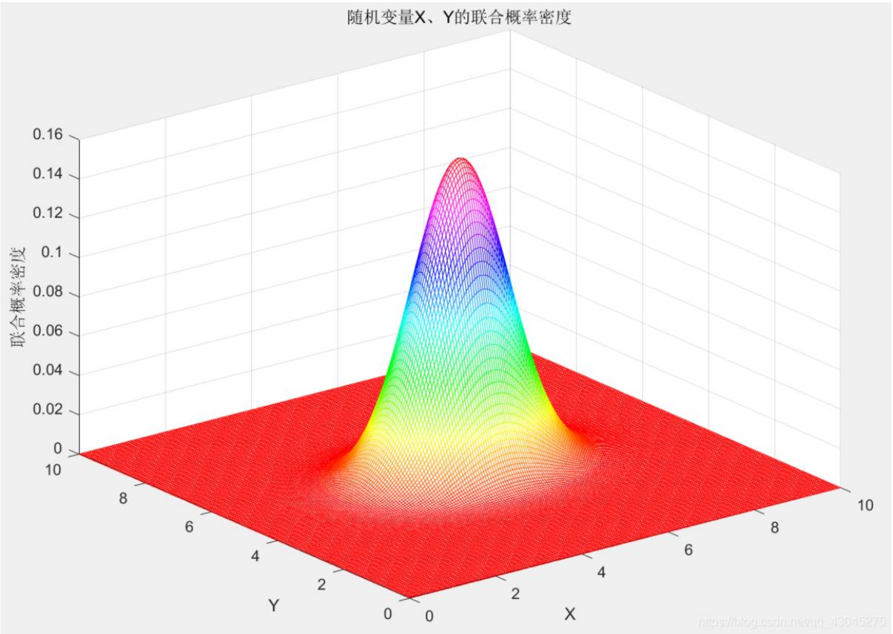
定义

对于二维随机变量(X, Y)的分布函数$F(X, Y)$，如果存在**非负可积**函数$f(x, y)$，使对于任意x, y有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$$

则称(X, Y)为二维连续型随机变量，称$f(x, y)$ 为**二维随机变量(X, Y)的联合概率密度函数，简称二维随机变量(X, Y)的联合概率密度**

注意：联合概率密度 $f(x, y)$ 是由联合分布函数$F(x, y)$引出



基本性质

1° $f(x, y) \geq 0$

2° $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,du\,dv = F(+\infty,+\infty)=1$

3° 若G为xoy平面内任意区域，点(x, y)落在G内概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$$

$z=f(x, y)$，可视为该曲面为顶xoy平面为底围成区域的体积（总共体积为1）

4° 在$f(x, y)$的连续点(x, y)处有 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$

在Δx, Δy很小时

$$P(x < X \leq x+\Delta x, y < Y \leq y+\Delta y) \approx f(x,y)\Delta x \Delta y$$

落在小矩形$(x, x+\Delta x] \times (y, y+\Delta y]$内的概率

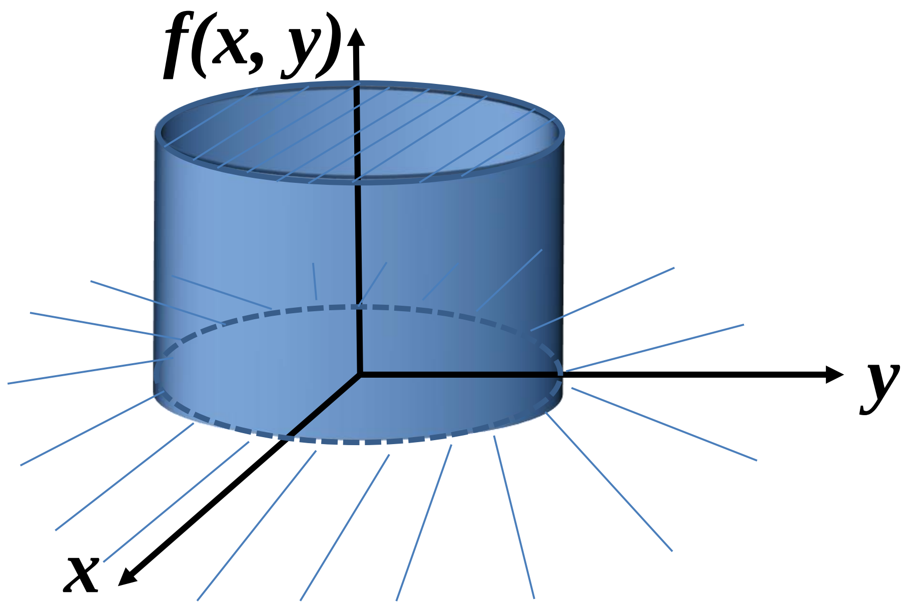
例 设二维随机变量(X,Y)具有联合概率密度： $f(x,y)=\begin{cases} c, & x^2+y^2\le r^2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$ 求c，并画出$f(x, y)$

解 利用 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} c\,dxdy = c\iint_{x^2+y^2\le r^2} 1\,dxdy = c\pi r^2 = 1$$

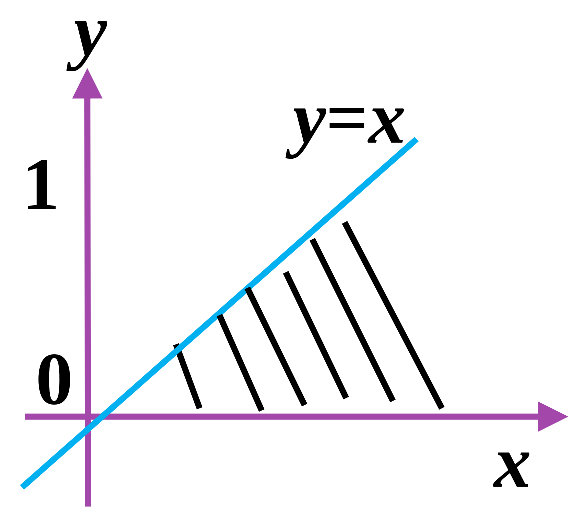
$c=1/\pi r^2$

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\le r^2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$



圆柱体积为1

例 设二维随机变量(X,Y)具有联合概率密度：$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(2x+3y)}, & x>0,\ y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$



(i) 求常数k； (ii) 求联合分布函数$F(x,y)$； (iii) 求概率$P(Y\le X)$ 。

解 (i) 利用 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

$$k\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx\int_0^{+\infty} e^{-3y}dy=k/6=1 \quad \Rightarrow k=6 \qquad f(x,y)=\begin{cases} 6e^{-(2x+3y)}, & x>0,\ y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(ii) (X, Y)的联合分布函数为：$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv=\begin{cases} \int_0^{y}\int_0^{x} 6e^{-(2u+3v)}dudv, & x>0,y>0 \\ 0\,, & \text{其他} \end{cases}$

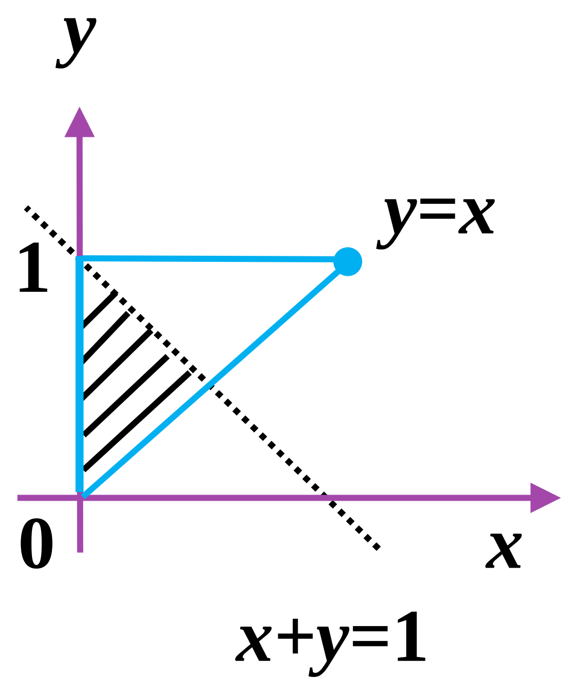
$$=\begin{cases} \int_0^{x} 2e^{-2u}du\int_0^{y} 3e^{-3v}dv, & x>0,y>0 \\ 0\,, & \text{其他} \end{cases}=\begin{cases} (1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), & x>0,y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(iii) $P(Y\le X)=\int_0^{+\infty}dy\int_y^{+\infty}6e^{-(2x+3y)}dx=\int_0^{+\infty}3e^{-3y}(-e^{-2x}\big|_y^{+\infty})dy=\int_0^{+\infty}3e^{-3y}e^{-2y}dy=\int_0^{+\infty}3e^{-5y}dy=-\frac{3}{5}e^{-5y}\big|_0^{+\infty}=\frac{3}{5}$

例 设二维随机变量(X, Y)具有联合概率密度： $f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0<x<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

(i) 求常数k；

(ii) 求概率$P(X+Y\le 1)$。



解 (i) 利用 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^y kxydxdy=\int_0^1\frac{k}{2}y^3dy=\frac{k}{8} \quad \Rightarrow k=8$$

$$\text{(ii)} \quad P(X+Y\le 1)=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}8xydy=\int_0^{\frac{1}{2}}4x[(1-x)^2-x^2]dx=\int_0^{\frac{1}{2}}4x(1-2x)dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

本节回顾

二维连续型随机变量的联合概率密度

对于二维随机变量(X, Y)的分布函数$F(X, Y)$，如果存在非负可积函数$f(x, y)$，使对于任意x, y有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$$

则称(X, Y)为二维连续型随机变量，称$f(x, y)$ 为二维随机变量(X, Y)的联合概率密度函数，简称二维随机变量(X, Y)的联合概率密度

1° $f(x, y)\geq 0$

2° $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv = F(+\infty,+\infty)=1$

3° 若G为xoy平面内任意区域，点(x, y)落在G内概率为 $P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy$

4° 在$f(x, y)$的连续点(x, y)处有 $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

在$\Delta x, \Delta y$很小时 $P(x<X\leq x+\Delta x, y<Y\leq y+\Delta y)\approx f(x,y)\Delta x\Delta y$