CHAPTER 1

概率论的基本概念

1.7 事件的独立性

有些概率问题关注事件*A*, *B* 是否相互影响

大部分情况下，*A*发生对*B*发生的概率有影响，即$P(B|A)\neq P(B)$

只有*A*发生不影响*B*发生的概率时，才有$P(B|A)=P(B)$

例 有10件产品，其中8件为正品，2件为次品。从中取2次，每次取1件，设

A_i={第i次取到正品}，i=1, 2

- 不放回抽样时，$P(A_2|A_1)=\frac{7}{9}\neq P(A_2)=\frac{8}{10}$
- 放回抽样时，$P(A_2|A_1)=\frac{8}{10}=P(A_2)$

A_1的发生对A_2的发生概率不影响；同样，A_2的发生对A_1的发生概率不影响

定义 设A, B为两事件，如果满足等式

$P(AB)=P(A)\times P(B)$ 则称A, B相互独立，简称A, B独立

定理1 A, B为两事件，$P(A)>0$， 则A, B相互独立的充要条件是$P(B|A)=P(B)$

同理，$P(B)>0$， A, B相互独立的充要条件是$P(A|B)=P(A)$

定理2 A, B相互独立，则下列事件也相互独立

A与$\bar{B}$， $\bar{A}$与B， $\bar{A}$与$\bar{B}$

证

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

$$P(A\bar{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)\left[1-P(B)\right]=P(A)P(\bar{B})$$

定理3 设$P(A)>0$， $P(B)>0$， 则A, B相互独立与A, B互不相容不能同时成立

推广至三个事件

设A, B, C为三事件，如果满足等式
$$\begin{cases} P(AB)=P(A)\times P(B) \\ P(BC)=P(B)\times P(C) \\ P(AC)=P(A)\times P(C) \\ P(ABC)=P(A)\times P(B)\times P(C) \end{cases}$$
称A, B, C **相互独立**

推广至多个事件

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n $(n\geq 2)$个事件， 如果对于其中任意2个，任意3个，……，任意n个事件的**积事件的概率，等于各事件概率之积**，即

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=\prod_{j=1}^{k}P(A_{i_j})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})\quad(2\leq k\leq n)$$

则称事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$**相互独立；** 若只能对于其中任意2个事件满足条件，

$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),\ i\neq j$　　则称事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$**两两独立**

定理4 设A, B, C相互独立，则下列事件也相互独立

A与BC，A与$B\cup C$，A与B-C

证 $$P(A(BC))=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=P(A)P(BC)$$

提示：$P(A(B\cup C))=P(AB\cup AC)=P(AB)+P(AC)-P(ABC)$

提示：$P(A(B-C))=P(A(B\overline{C}))=P((AB)\overline{C})=P(AB)-P(ABC)$

不能想当然认为 $P(A(B-C))=P(AB)-P(AC)$ 错误！

定理5 设事件$A_1, A_2, \dots, A_n$是n $(n\geq 2)$相互独立， 则

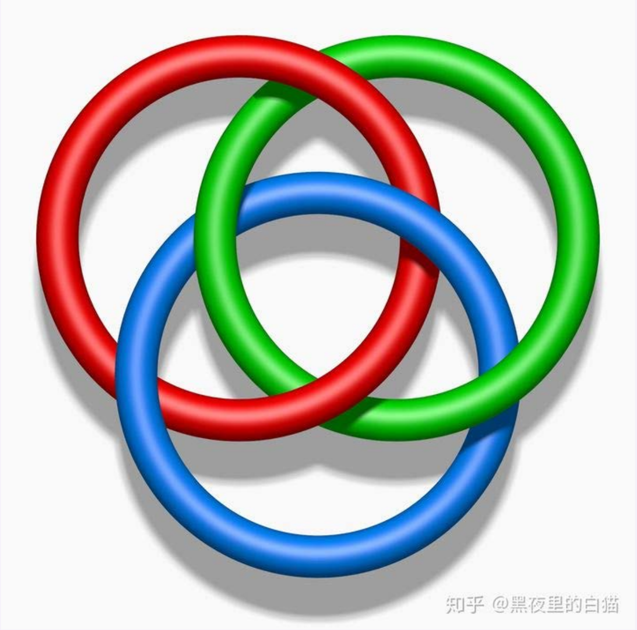
1° 其中任意 k $(2\leq k\leq n)$个事件也相互独立

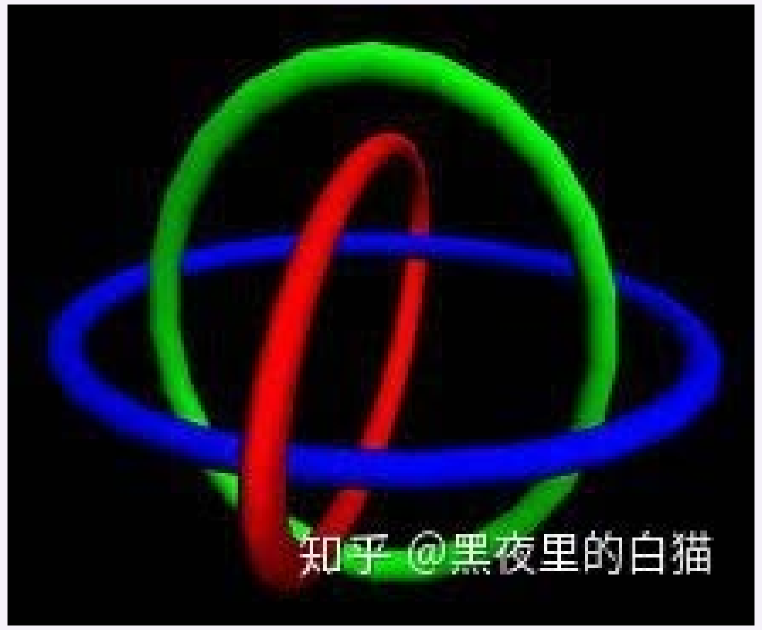
2° 将其中任意 k $(1\leq k\leq n)$个事件换成它们各自的对立事件，所得到的n个事件也相互独立

3° 将$A_1, A_2, \dots, A_n$任意分成 k $(2\leq k\leq n)$个没有相同事件的不同小组，并对每个小组的事件施以和、积、差、逆运算后，所得到的 k个事件也相互独立

注意

1° 事件两两独立不能推出相互独立





2° 实际问题中，往往不是用定义验证事件的独立性，而是由实际情形判断其独立性

两事件相互独立的含义是它们中一个已发生，不影响另一个发生的概率。**一般，若由实际情况分析，*A*和*B*两个事件间没有关联或者关联很微弱的话，则认为它们相互独立**

例如：甲、乙两人患感冒 二人生活无交集可视为相互独立，活动轨迹相近则不独立

例 甲、乙两人同时向一目标射击，甲击中率为0.8，乙击中率为0.7，求目标被击中的概率。

解 设 A={甲击中}，B={乙击中}，C={目标被击中}

则 $C=A \cup B$

$$P(C)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

由于甲、乙同时射击，其结果互不影响，所以A，B 相互独立

$$P(C)=0.8+0.7-0.56=0.94$$

由实际情形判断事件的独立性

例 甲、乙两人进行乒乓球比赛，每局甲胜的概率为 p，$p \geq 1/2$，对甲而言，采用三局二胜制有利，还是采用五局三胜制有利？设各局胜负相互独立。

解 设 A_i={第 i 局甲胜}　　$P(A_i) = p,\ i = 1, 2, \cdots, 5$

设 A={最终甲胜}

(i) 三局两胜制

$$P(A) = P(A_1A_2 \cup A_1\bar{A}_2A_3 \cup \bar{A}_1A_2A_3) = p^2 + 2p^2(1-p) \qquad \text{记为} P_1$$

(ii) 五局三胜制

$$P(A) = P\left\{A_1A_2A_3 \cup (\text{前三次有一次输})A_4 \cup (\text{前四次有两次输})A_5\right\}$$

$$= p^3 + C_3^1(1-p)p^3 + C_4^2(1-p)^2p^3 \qquad \text{记为} P_2$$

$$P_2 - P_1 = 3p^2(p-1)^2(2p-1) \quad \begin{cases} P_2 > P_1 \ (p > 1/2) \\ P_2 = P_1 \ (p = 1/2) \end{cases}$$

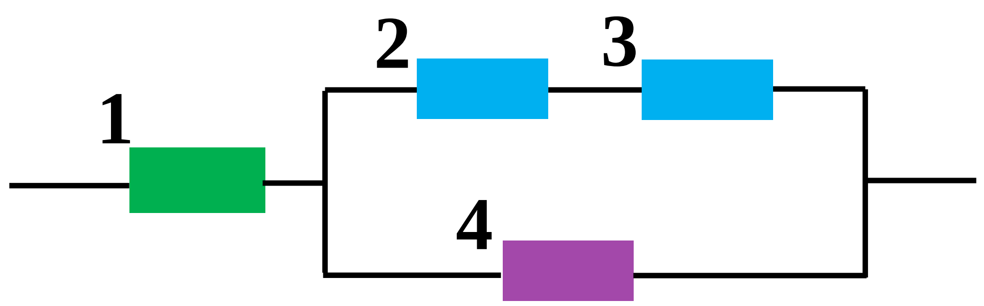
例 有4个独立元件构成的系统，设每个元件能正常运行的概率为 p，求该系统正常运行的概率。

解 设A_i={第i个元件运行正常}, $i = 1, 2, 3, 4$

$$A = A_1(A_2A_3 \cup A_4)$$

由题意知，A_1, A_2, A_3, A_4 相互独立

$$P(A) = P(A_1)P(A_2A_3 \cup A_4) = p(p^2 + p - p^3)$$



可否采用 $P(A) = P(A_1A_2A_3 \cup A_1A_4) = p^3 + p^2 - p^5$?　　错误！ p^5 项是独立性公式的误用

例 假设你和你的堂妹玛丽打算用扔硬币的方法来解决你们的矛盾，但是不凑巧的是你们都没有硬币可用，于是玛丽建议用扔瓶盖来代替扔硬币，瓶盖朝上相当于硬币正面朝上，反之就是硬币的反面。但是有个问题就是，瓶盖并不能保证这两个事件的概率是否相等，有什么办法能够保证结果的公平性呢？

解 计算机之父——约翰冯诺依曼有一个不错的主意，你可以要求掷瓶盖两次：
如果投掷的结果是HT，那么你赢；如果是TH，则玛丽赢；
如果结果是HH或者TT则为平局，重新开始掷瓶盖。

假设正面朝上的概率为 p，并不一定是1/2，那么反面朝上的概率是1-p

独立性使得事件HT发生的概率为 $p\times(1-p)$，TH的概率是 $(1-p)\times p$

实际上，两者的概率是相同的，但是需要注意的是如果 p 或者 1-p 接近于0，则游戏要玩很久才能决出胜负

思考：如果两个事件不能同时发生，那么他们一定互相独立吗？

乍一听，你肯定会这样认为，毕竟他们之间没有任何关系，对吗？

“事件A、B不能同时发生”对应：它们互不相容（互斥），即$AB=\varnothing$

“事件A、B相互独立”对应：它们一个发生与否对另一个发生的概率没有影响，即

$$P(AB)=P(A)\times P(B) \quad \Leftrightarrow \text{若} P(A)>0, \quad P(B|A)=P(B)$$

通常，事件A、B没有共同元素，这说明它们中一个事件发生会导致另一个不发生，二者之间是有影响的，也就是说不独立

不可能事件$\varnothing$与其他事件的关系有特殊性
- 它与任意事件相互独立 $P(A\varnothing)=P(A)\times P(\varnothing)$
- 它与任意事件互不相容 $A\varnothing=\varnothing$

必然事件Ω，它与其他任意事件相互独立 $P(A\Omega)=P(A)\times P(\Omega)$

例

1992年，一架小型客机在瑞典斯德哥尔摩附近的居民区坠落，所幸没有造成居民的伤亡，但引起了居民的极度恐慌。为了让人们冷静下来，机场总经理在接受采访时说：“从统计学说，人们应当感到更安全，因为再发生一次这样事故的概率相比之前已经小多了。”你认为这一说法有无道理？

类似的说法还有：为了减少某个航班中有人携带炸弹的概率，我们可以选择自己带一个炸弹上飞机，因为飞机上同时有两个炸弹的概率远远小于只有一个炸弹的概率 !?

机场经理犯了一个普遍的错误：混淆了一个事件连发生两次的概率与一个事件再次发生的概率

举个例子：1. 扔两次硬币，两次都是正面朝上的概率是多少？

2.一直扔硬币直至正面朝上，那么你下次扔到正面朝上的概率是多少？

本节回顾

独立性定义

设A, B为两事件，如果满足等式

$P(AB)=P(A)\times P(B)$ 则称A, B相互独立，简称A, B独立

独立性判断

1° 事件两两独立不能推出相互独立

2° 实际问题中，往往不是用定义验证事件的独立性，而是由实际情形判断其独立性

复习思考题

1. 事件A不发生，则$A=\varnothing$，对吗？试举例证明之。
2. “两事件A和B为互不相容，即$AB=\varnothing$，则A和B互逆”对吗？ 反之成立吗？试举例说明之。
3. 甲、乙两人同时猜一谜，设A={甲猜中}，B={乙猜中}，则$A\cup B$={甲、乙两人至少有1人猜中}。$P(A)=0.7$，$P(B)=0.8$，则“$P(A\cup B)=0.7+0.8=1.5$”对吗？
4. 满足什么条件的试验问题称为古典概型问题？
5. 如何理解样本点是两两互不相容的？
6. 设A和B为两随机事件，试举例说明$P(B)=P(B|A)$表示不同的意义。
7. 设A和B为两事件，且$P(A)\neq 0$，$P(B)\neq 0$，问A和B相互独立、A和B互不相容能否同时成立？试举例说明。
8. 设A和B为两事件，且$P(A)=a$，$P(B)=b$，问：
   (i) 当A和B独立时，$P(A\cup B)$为何值？
   (ii) 当A和B互不相容时，$P(A\cup B)$为何值？
9. 设A和B为随机事件，且$P(A)\neq 0$，$P(B\mid A)=P(B)-P(\bar{B}\mid A)$是否成立？$P(B\mid A)=1-P(\bar{B}\mid A)$是否成立？
10. 设A, B, C为三随机事件，当$A\neq B$，且$P(A)\neq 0$，$P(B)\neq 0$时，$P(C|A)+P(C|B)$有意义吗？试举例说明。
11. 设A, B, C为三随机事件，且$P(C)\neq 0$，问$P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C) - P(AB|C)$是否成立？若成立，与概率的加法公式比较之。
12. 抛1亿次硬币，全部正面朝上的概率是否存在？

1. 事件A={a}, 表示线段上一个点，为单点集
无法在线段上确定一个点，故事件A不发生
但A不是空集

9. 第一式不成立，第二式成立证明如下

对第一式有

右边$=P(B)-\dfrac{P(A\bar{B})}{P(A)}=P(B)-\dfrac{P(A-AB)}{P(A)}=P(B)-\dfrac{P(A)-P(AB)}{P(A)}=P(B)-1+P(B|A)$

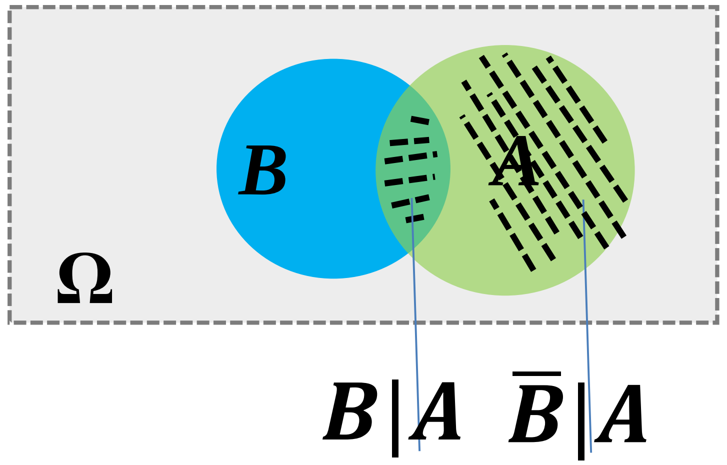
左边$=P(B|A)$ **左右不相等**

故不成立

对第二式有

右边$=1-P(\bar{B}|A)=1-\dfrac{P(A\bar{B})}{P(A)}=1-\dfrac{P(A-AB)}{P(A)}=P(B|A)=$**左边**

故成立

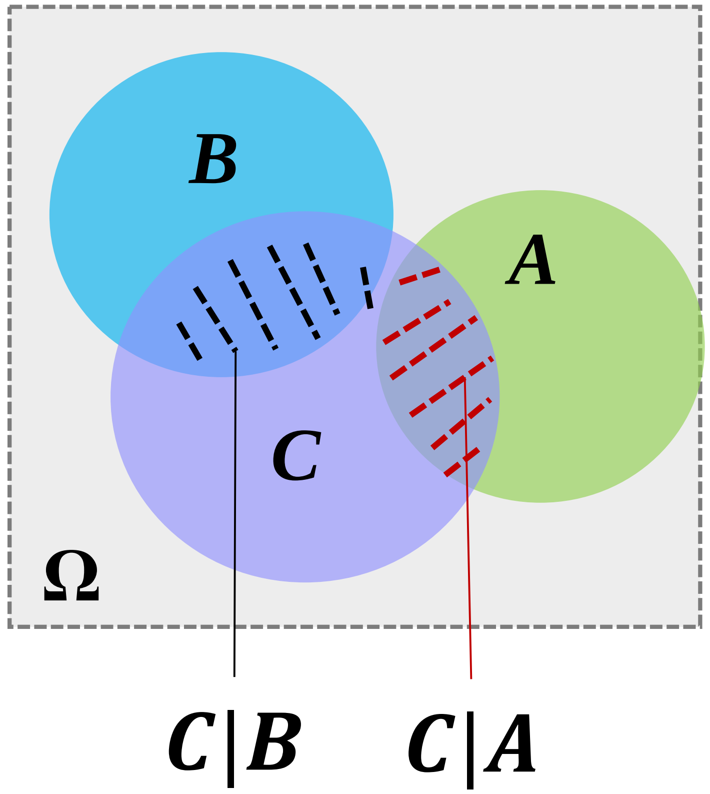


二者样本空间为Ω_A
故该样本空间中的
对立事件B和$\bar{B}$发生
的概率之和为1

10. 无意义

坐班车问题，A、B 分别为坐第一二趟车，各有一定概率 $P(A)$, $P(B)$, C为{不迟到}

$P(C|A)+P(C|B)$中坐两趟车的概率均为1，不可能。应为$P(A)\ P(C|A)+P(B)P(C|B)$



二者样本空间分别为$\Omega_A\ \Omega_B$

未在同一样本空间中，无意义

$P(A)\ P(C|A)+P(B)P(C|B)$

则将二者均转换至样本空间Ω 为$P(AC)+P(BC)$,有意义