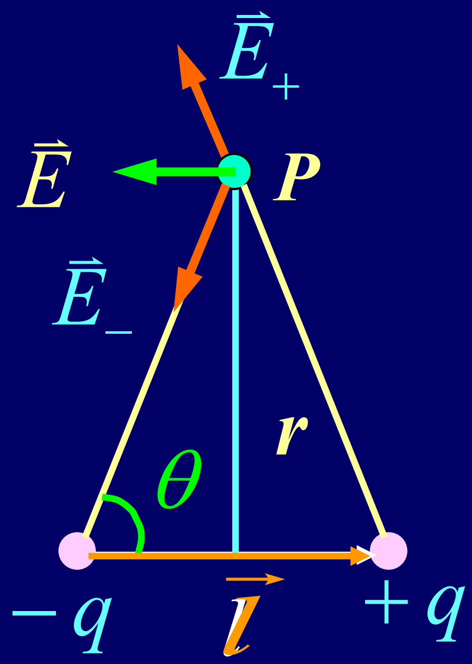
电偶极子:等量异号的点电荷相距l, $r>>l$

电偶极矩: $\vec{p}=q\vec{l}$



例 求电偶极子在中垂线上一点产生的电场强度。

解

$$E_+=E_-=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+l^2/4)}$$

$$E=2E_+\cos\theta \qquad \cos\theta=\frac{l/2}{\sqrt{r^2+(l/2)^2}}$$

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{\left[r^2+(l/2)^2\right]^{3/2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{r^3\left[1+l^2/4r^2\right]^{3/2}}\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}$$

$$\vec{E}=-\frac{\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

例 求电偶极子在均匀电场中受到的力偶矩。

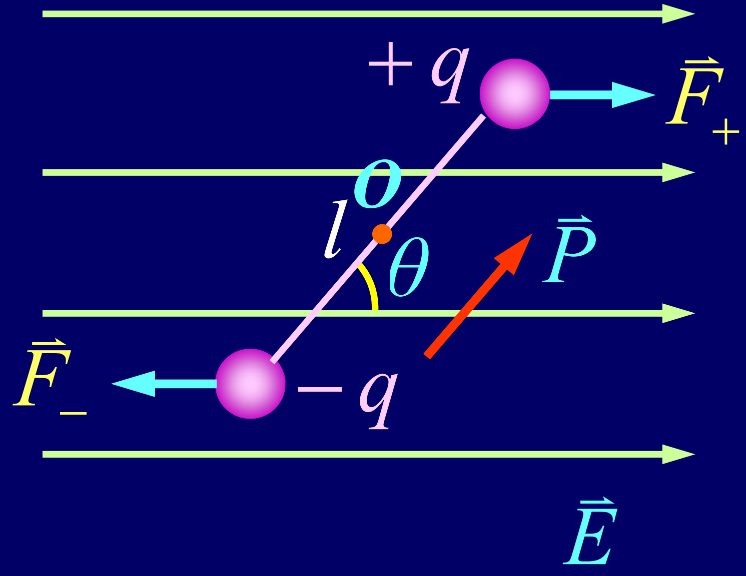
解 $\vec{F}_+ = q\vec{E}$ $\qquad \vec{F}_- = -q\vec{E}$

相对于*O*点的力矩

$$M = F_+ \cdot \frac{1}{2} l \sin\theta + F_- \cdot \frac{1}{2} l \sin\theta$$

$$= qlE\sin\theta = pE\sin\theta$$

$$\boxed{\vec{M} = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}}$$



讨论

(1) $\theta = \frac{\pi}{2}$ 力偶矩最大

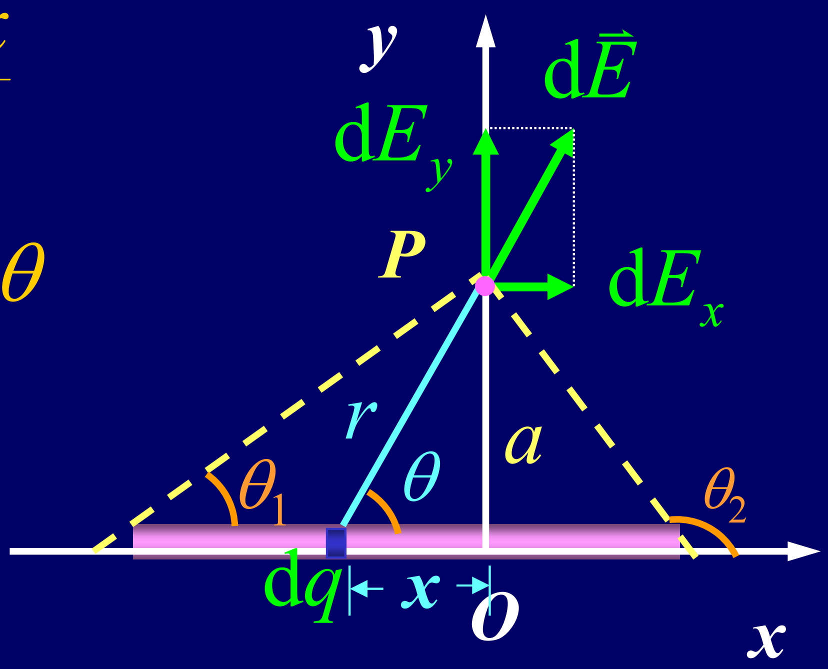
(2) $\theta = 0$ 力偶矩为零 (电偶极子处于稳定平衡)

(3) $\theta = \pi$ 力偶矩为零 (电偶极子处于非稳定平衡)

例 长为L的均匀带电直杆，电荷线密度为λ

求 它在空间一点P产生的电场强度（P点到杆的垂直距离为a)

解 $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x$ $\qquad$ $\mathrm{d}E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda \mathrm{d}x}{r^2}$



$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\cos\theta$ $\qquad$ $\mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\sin\theta$

$$r^2 = \left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^2 = a^2\csc^2\theta$$

$x = -a\cot\theta$ $\qquad$ $\mathrm{d}x = a\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta$

$$\mathrm{d}E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta \mathrm{d}\theta \qquad \mathrm{d}E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta \mathrm{d}\theta$$

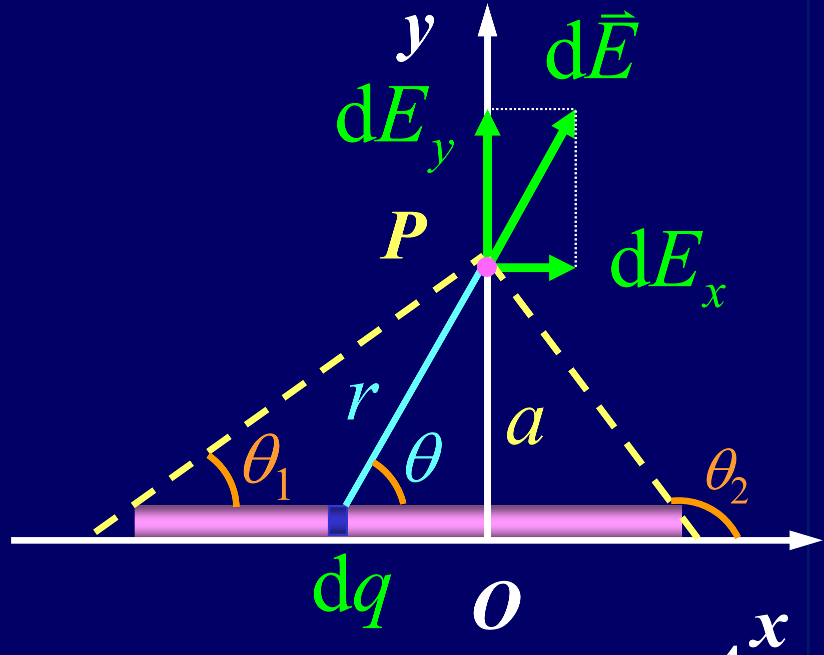
$$E_x=\int \mathrm{d}E_x=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)$$

$$E_y=\int \mathrm{d}E_y=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

讨论

(1) 无限长带电细直线, 或*a* << *L*　　轴对称分布

$$\left.\begin{aligned}\theta_1&=0\\ \theta_2&=\pi\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases}E_x=0\\ \boxed{E_y=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}}\end{cases}$$



(2) *a* >> *L*　杆可以看成点电荷

$$E_x=0\qquad E_y=\frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

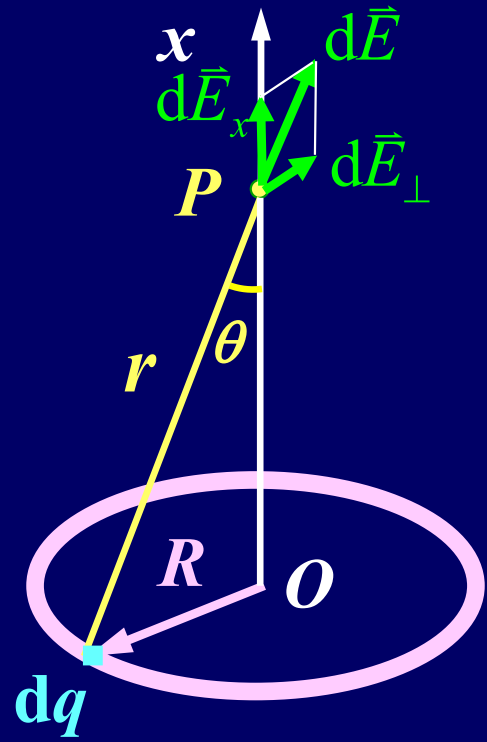
例 半径为R的均匀带电细圆环，带电量为q

求 圆环轴线上任一点P 的电场强度

解

$$\mathrm{d}q = \lambda\, \mathrm{d}\overset{\frown}{l} \qquad \mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{r}^{\,0}$$

$$\mathrm{d}E_\perp = \mathrm{d}E\sin\theta \qquad \mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\cos\theta$$



圆环上电荷分布关于x轴对称 $\quad E_\perp = 0$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\lambda \mathrm{d}\overset{\frown}{l}}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}\int\mathrm{d}q$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$r = (R^2+x^2)^{1/2}$$

轴线上

$$\boxed{\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2+x^2)^{3/2}}\vec{i}}$$

讨论

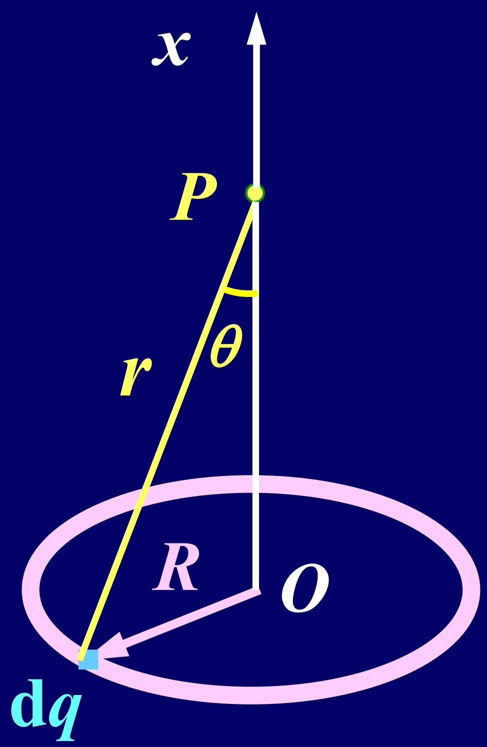
(1) 当 $x=0$（即P点在圆环中心处）时，

$$E=0$$

(2) 当 $x>>R$ 时

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2}$$

可以把带电圆环视为一个点电荷



例 面密度为 σ 的圆板在轴线上任一点的电场强度

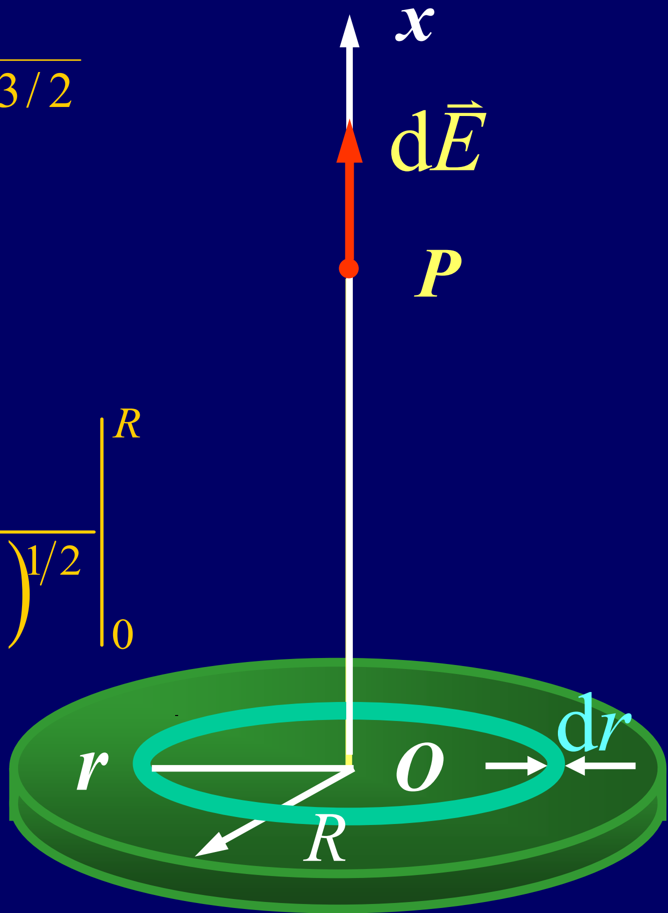
解 $\mathrm{d}q = 2\pi r \mathrm{d}r\sigma$

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\mathrm{d}q}{(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$E = \int \mathrm{d}E = \frac{x\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{x\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\mathrm{d}\left(r^2+x^2\right)}{2\left(r^2+x^2\right)^{3/2}} = -\frac{x\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\left(r^2+x^2\right)^{1/2}}\Bigg|_0^R$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}]$$



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}]\vec{i} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}]\vec{i}$$

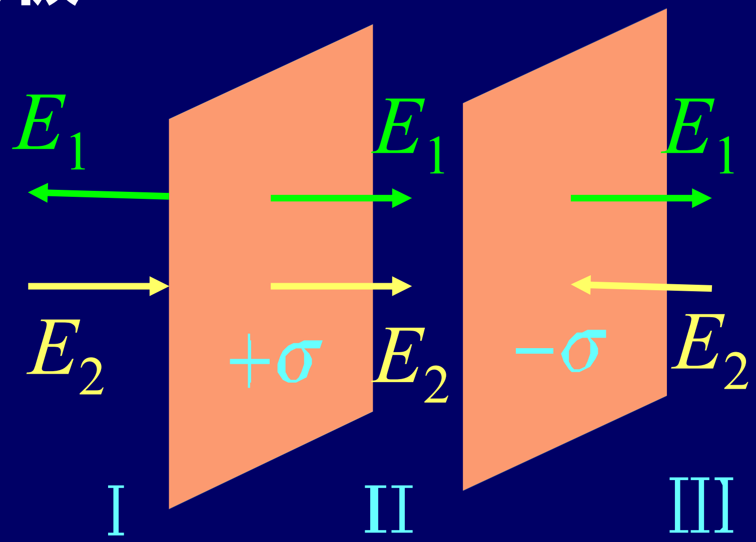
$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]\vec{i}$$

讨论

(1) 当 $R>>x$，圆板可视为无限大薄板

$$\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

面对称分布的均匀场



(2)

$$E_{\mathrm{I}}=E_1-E_2=0$$

$$E_{\mathrm{II}}=E_1+E_2=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E_{\mathrm{III}}=E_1-E_2=0$$

(3) 补偿法

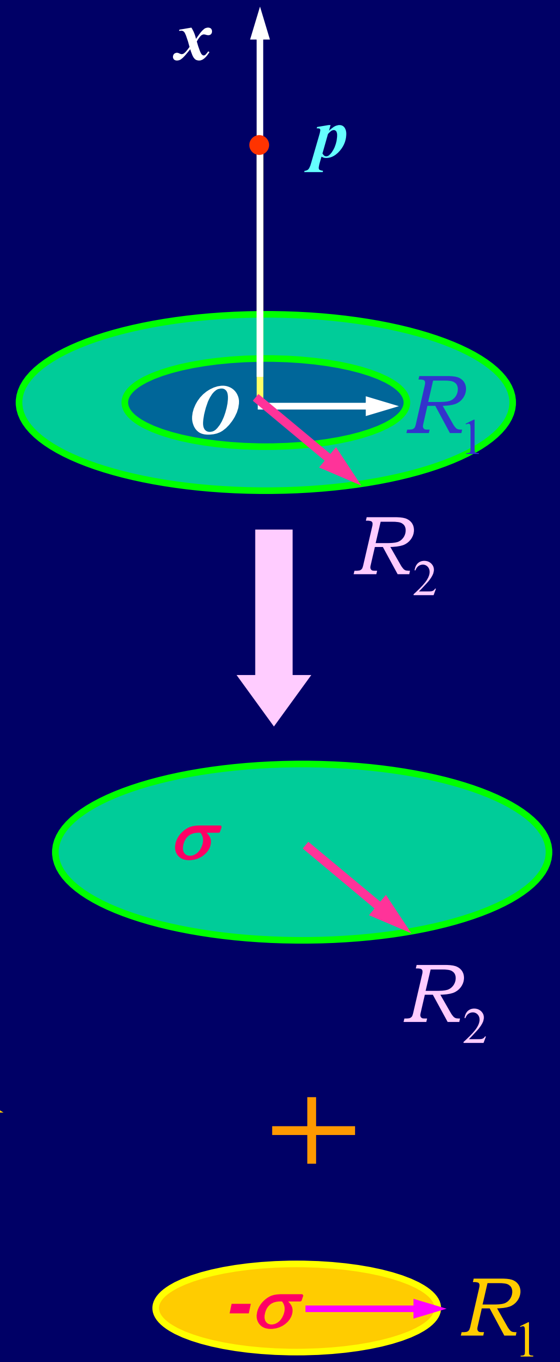
面密度为 σ 的圆环轴线上任意点的场强

$$\vec{E}_{R_1} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[1-\frac{x}{(R_1{}^2+x^2)^{1/2}}]\vec{i}$$

$$\vec{E}_{R_2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[1-\frac{x}{(R_2{}^2+x^2)^{1/2}}]\vec{i}$$

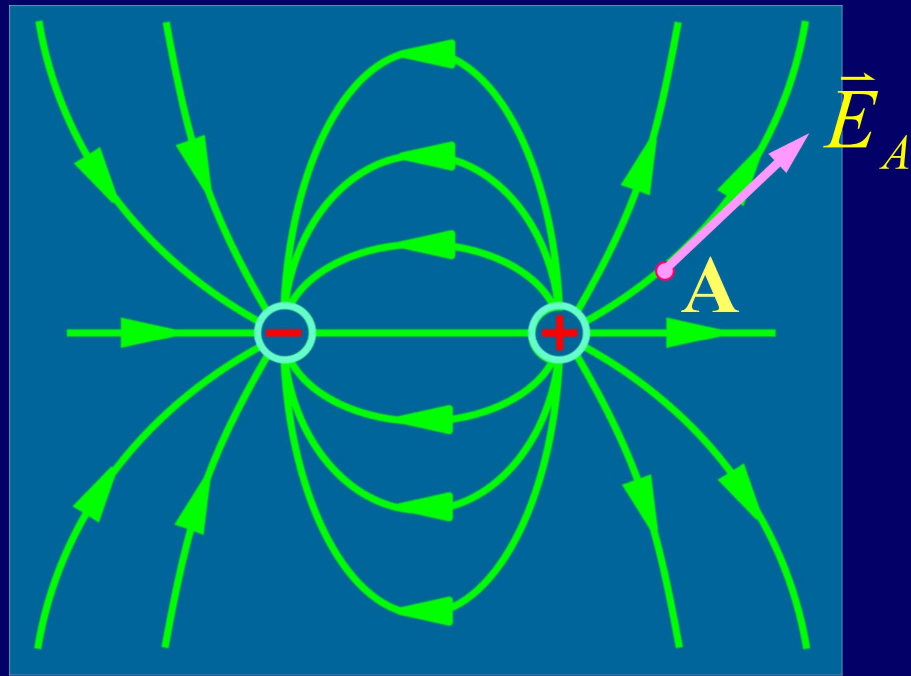
$$\vec{E} = \vec{E}_{R2} + \vec{E}_{R1}$$

$$= \frac{x\sigma}{2\varepsilon_0}[\frac{1}{(R_1^2+x^2)^{1/2}} - \frac{1}{(R_2^2+x^2)^{1/2}}]\vec{i}$$



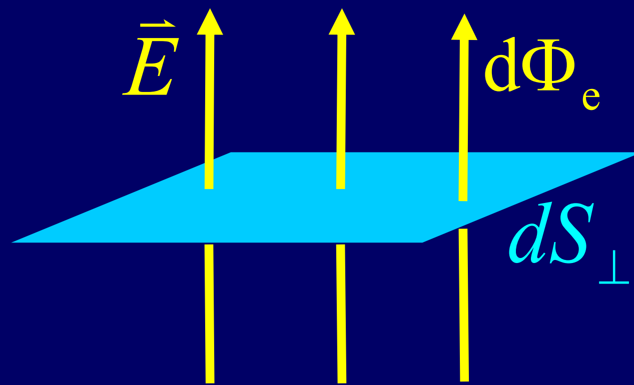
§10.3 电通量 高斯定理

一. 电场线（电力线）



1. 电场线反映电场强度的分布

电场线密度： $\dfrac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}S_\perp} = E$



2.电场线的特点：

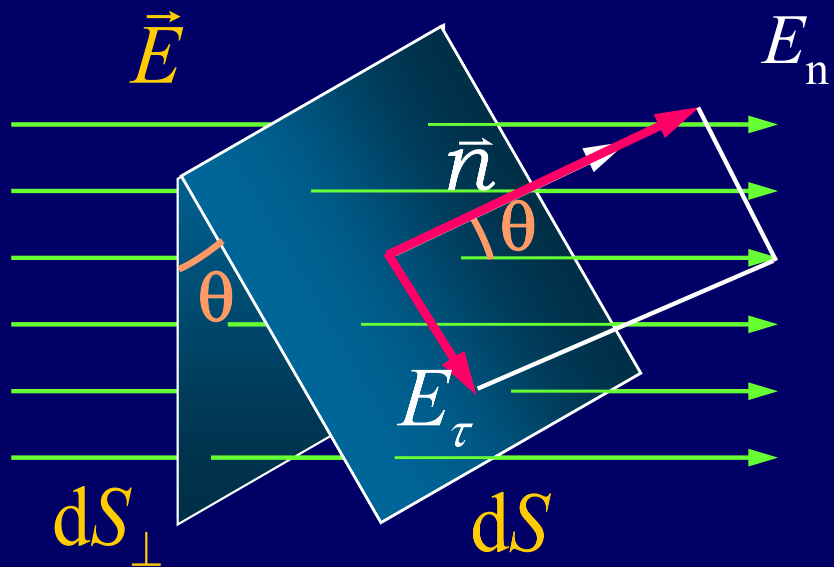
(1) 由正电荷出发终止于负电荷或无穷远处

(2) 电场线是非闭合曲线

(3) 两条电场线不会在没有电荷的地方相交

二. 电通量

在电场中穿过任意曲面S 的电场线条数称为穿过该面的电通量。—— Φ_e



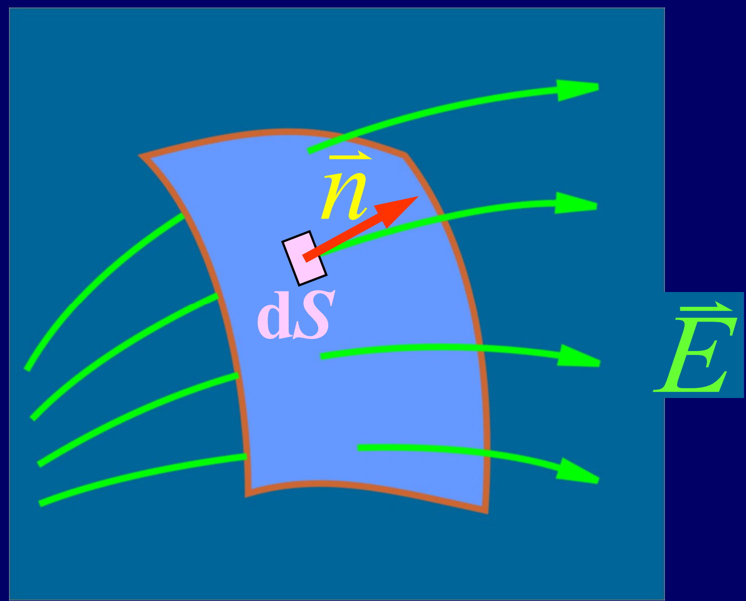
1. 通过任意面元dS的电通量

$$d\Phi_e = E_n dS = E\cos\theta dS$$

$$= E dS_\perp$$

定义：面积元矢量 $d\vec{S} = dS\vec{n}$

$$\boxed{d\Phi_e = \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$



2.通过任意曲面S的电通量

$$d\Phi_e = \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\Phi_e = \int d\Phi_e = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

3.通过闭合曲面的电通量

$$\boxed{\Phi_e = \int \mathrm{d}\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

讨论

(1) $\mathrm{d}\vec{S}$ 方向的规定：
- 非闭合曲面 —— 可任意选取
- 闭合曲面 —— 由内向外为正

(2) 电通量是代数量
- $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ —— $\mathrm{d}\Phi_e > 0$ 穿出为正
- $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ —— $\mathrm{d}\Phi_e < 0$ 穿入为负