西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

第7章 参数估计

概率论与数理统计课程组

CHAPTER 7

参数估计

7.4 估计量的评选标准

对总体的未知参数，可用不同方法求得不同的估计量，如何评价不同估计量好坏？

通常 用三条标准检验：**无偏性，有效性，一致（相合）性**

无偏性——数学期望标准

定义 反复将估计量使用多次，“平均”偏差为0

若估计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的数学期望 $E(\hat{\theta})$ 存在且对任意$\theta\in\Theta$，有

$$E(\hat{\theta})=\theta$$

则称 $\hat{\theta}$ 是θ 的**无偏估计量**

若 $E(\hat{\theta}) \neq \theta$，那么称 $|E(\hat{\theta})-\theta|$ 为以 $\hat{\theta}$ 作为 θ 估计的系统误差

无偏估计就是无系统误差

无偏性是对估计量的一个最常见的重要要求，是“好”估计的标准之一

无偏性的统计意义是指在大量重复试验下，由

$$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

所作的估计值的平均恰是θ，从而无偏性保证$\hat{\theta}$ 没有系统误差

设总体X的一阶矩和二阶矩存在（不管服从什么分布），记 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$

则样本均值$\overline{X}$和样本方差S^2分别是μ和σ^2的无偏估计，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 却不是σ^2的无偏估计

证明

因为 $X_1, X_2, \dots, X_n$与X同分布且相互独立，故

$$E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$$

故$\overline{X}$是μ的无偏估计

$$E(S^2)=E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)\right]=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)\right]=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-n(\sigma^2/n+\mu^2)\right]=\sigma^2$$

故 S^2 是σ^2的无偏估计，而 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 不是σ^2的无偏估计

例 检验7.1节例题的矩估计量 $\hat{\theta}=2\overline{X}$ 与最大似然估计量 $\hat{\theta}=X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的无偏性。

解 $X_1, X_2, \ldots, X_n$与X同分布 $X\sim U(0,\theta)$ $E(X)=\dfrac{\theta}{2}$

$$E(2\overline{X})=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{2}{n}\cdot n\cdot\frac{\theta}{2}=\theta$$

$\hat{\theta}=2\overline{X}$ 是θ的无偏估计

为考察 $\hat{\theta}=X_{(n)}$ 的无偏性，先求$X_{(n)}$的分布

由第3章知，$F_{X_{(n)}}(x)=[F(x)]^n$ 于是，$f_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n} & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$$E\left[X_{(n)}\right]=\int_0^{\theta}\frac{x\cdot nx^{n-1}}{\theta^n}dx=\frac{n}{n+1}\theta\neq\theta$$

$\hat{\theta}=X_{(n)}$ 是θ的有偏估计 可以取 $\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$ 为θ的无偏估计

有效性——方差标准

定义

设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

都是θ的无偏估计量，若对于任意 $\theta\in\Theta$，有

$$D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$$

且至少对于某一个$\theta\in\Theta$上式的不等号成立，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效

样本容量n相同的前提下比较

设总体X的 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，虽然X_i $(i=1,2,\ldots,n)$和$\overline{X}$ 都可以作为参数μ的无偏估计量，

但是由于 $D(X_i)=\sigma^2, D(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$　　$\overline{X}$ 比 X_i 更有效

例 由上例题$X\sim U(0,\theta)$，$X_1, X_2,\ldots, X_n$是取自X 的样本，其两个无偏估计量分别为 $\hat{\theta}_1=2\overline{X}$，

$\hat{\theta}_2=\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$ 哪个有效$(n\geq 2)$?

解 $$D(\hat{\theta}_1)=D(2\overline{X})=\frac{4}{n}\cdot\frac{\theta^2}{12}=\frac{\theta^2}{3n}$$

由 $$f_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n} & 0<x<\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$\Rightarrow E\left[X_{(n)}\right]=\int_0^\theta \frac{x\cdot nx^{n-1}}{\theta^n}dx=\frac{n}{n+1}\theta$$

$$\Rightarrow E\left[X_{(n)}^2\right]=\int_0^\theta \frac{x^2nx^{n-1}}{\theta^n}dx=\frac{n}{n+2}\theta^2$$

于是 $$D(\hat{\theta}_2)=\frac{(n+1)^2}{n^2}\left\{E\left[X_{(n)}^2\right]-\left[E\left(X_{(n)}\right)\right]^2\right\}=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

因为 $D(\hat{\theta}_1)=\dfrac{\theta^2}{3n}>\dfrac{\theta^2}{n(n+2)}=D(\hat{\theta}_2)$ $\Rightarrow$ $\hat{\theta}_2$ 比$\hat{\theta}_1$ 更有效

一致性（相合性）——样本容量极限标准

无偏性和有效性都是在样本容量 n 固定的前提下提出，我们还希望随着样本容量的增大，一个估计量的值稳定于待估参数的真值

定义

样本容量n无穷时的特性，序列收敛趋势

设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是θ的估计量，若对于任意 $\theta\in\Theta$，当$n\to\infty$ 时

$$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

依概率收敛于θ，则称 $\hat{\theta}$ 为θ的一致（相合）估计量

若对于任意 $\theta\in\Theta$ 都满足：对于任意 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|<\varepsilon\right)=1$

一致性（相合性）是对一个估计量的基本要求，如果不具备一致性（相合性），那么不论样本容量n取多大，都不能将未知参数估计足够准确，这样的估计量不可取

例 由上例题$X \sim U(0,\theta)$，$X_1, X_2,\dots, X_n$是取自X的样本，证明：$\hat{\theta}_1 = 2\overline{X}$ 和 $\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$ 都是θ的一致（相合）估计量。

证 $E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta$

$$D(\hat{\theta}_1) = \frac{\theta^2}{3n} \qquad D(\hat{\theta}_2) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

由*Chebyshev*不等式，对于任意$\varepsilon>0$，当$n \to \infty$时，

$$P\left(\left|\hat{\theta}_1 - \theta\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{D(\hat{\theta}_1)}{\varepsilon^2} = \frac{\theta^2}{3n\varepsilon^2} \to 0$$

同理 $$P\left(\left|\hat{\theta}_2 - \theta\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{D(\hat{\theta}_2)}{\varepsilon^2} = \frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2} \to 0$$ 所以 $\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$都是θ的一致（相合）估计量

一致性（相合性）证明一般只需证明统计量的方差其极限为0，再利用*Chebyshev*不等式即可

本节回顾

估计量的评选标准

❖ 无偏性 $E(\hat{\theta})=\theta$ 反复将估计量使用多次，“平均”偏差为0

❖ 有效性 样本容量n相同的前提下比较

$D(\hat{\theta}_1)\leq D(\hat{\theta}_2)$ 至少对于某一个$\theta\in\Theta$不等号成立 $\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效

❖ 一致性（相合性） 样本容量n无穷时的特性，序列收敛趋势

若对于任意 $\theta\in\Theta$，当$n\to\infty$时 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 依概率收敛于θ

复习思考题

1. 总体未知参数矩估计的思想方法是什么？试写出 (0, 1) 分布、 二项分布$B(n, p)$、泊松分布$P(\lambda)$、均匀分布$U(a, b)$、正态分布$N(\mu, \sigma^2)$中有关参数的矩估计式。
2. 最大似然估计的主要步骤是什么？
3. 未知参数的估计量与估计值有什么区别？
4. 估计量的三个基本评价标准是什么？如何理解它们的含义？
5. 求参数置信区间的一般方法是什么？对正态总体，试从有关的统计量自行导出几类参数的置信区间？
6. 置信水平的含义是什么？置信水平、区间长度和样本容量的关系怎样？
7. 总体X有容量为n的样本，样本均值为 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，样本方差为 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

存在性质$E(\overline{X})=E(X)$, $E(S^2)=D(X)$，这是否只对正态总体成立？