2.2 随机变量的分布函数

离散型随机变量可以采用**分布律**描述概率特征，但非离散型随机变量无法采用分布律

因此，针对**所有类型随机变量**，引入“**分布函数**”的定义，描述随机变量的统计规律

非离散型随机变量不一定是连续型随机变量（例如是分段区间，或离散值加区间）

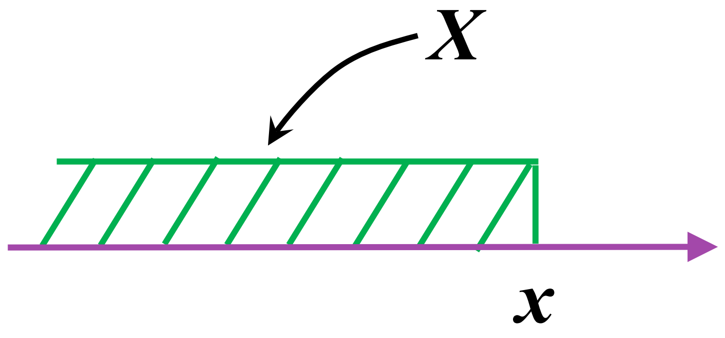
定义

对于随机变量X，x是任意实数，称函数 $F(x)=P(X\le x), -\infty<x<+\infty$

为随机变量X的**分布函数**

概率意义

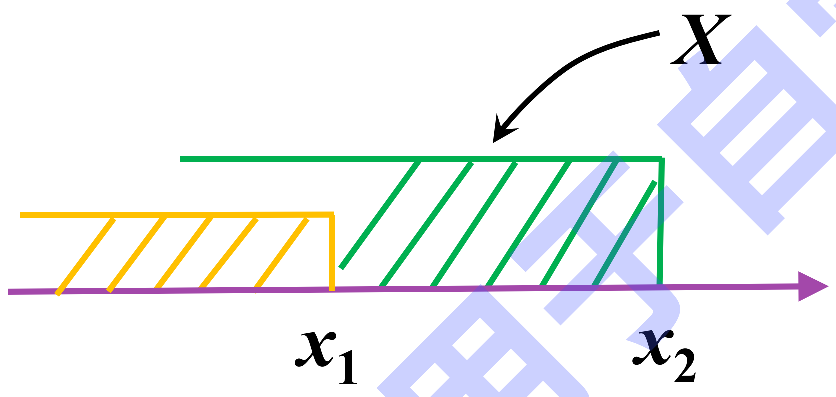
对于随机变量$F(x)$的几何意义



随机变量取值落在小于等于x一侧的概率

对于任意实数$x_1, x_2\ (x_1<x_2)$，有

$$P(x_1<X\le x_2) = P(X\le x_2) - P(X\le x_1) = F(x_2) - F(x_1)$$



注意开闭区间！

已知X分布函数，就可知X落在任意区间 $(x_1, x_2]$ 的概率

性质

1° **单调不减函数**：对于任意实数$x_1<x_2$，有 $F(x_2)-F(x_1)=P(x_1<X\le x_2)\ge 0$

2° $0\le F(x)\le 1$且 $\begin{cases} F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0 \\ F(\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1 \end{cases}$

3° $F(x+0)=F(x)$且即$F(x)$为**右连续函数**

假想将分布函数定义改为$G(x)=P(X<x)$，则为左连续

满足其上三点的$F(x)$必为某随机变量的分布函数

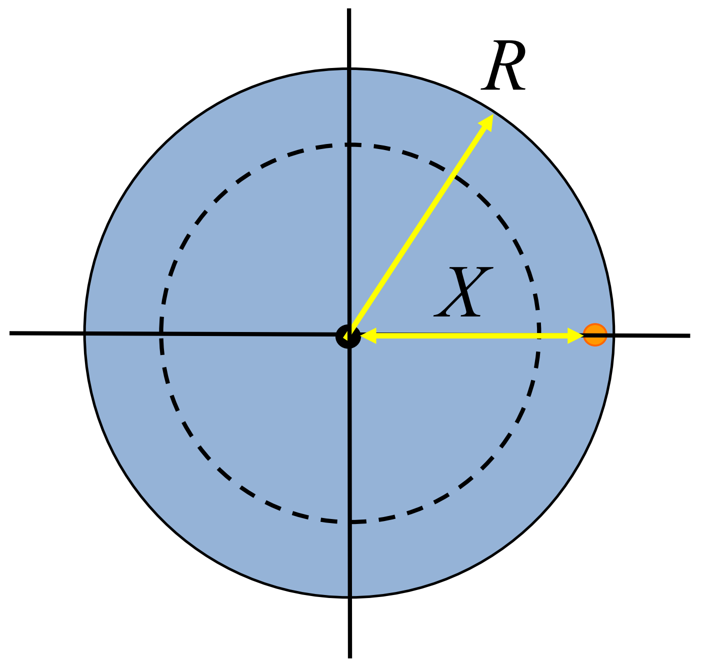
性质1-3是鉴别一个函数是否是某个随机变量的分布函数的充分必要条件。

离散型随机变量的分布函数

$$P(X=x_k)=p_k\ (k=1,2,3,\ldots)$$

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_k\le x}P(X=x_k)=\sum_{x_k\le x}p_k$$

例 一个靶子是半径为R的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比，并且射击均能中靶，以X表示弹着点与靶心的距离，试求随机变量的分布函数。



解 当$x<0$时，事件$\{X\le x\}=\emptyset$，是不可能事件，则$F(x)=P(X\le x)=0$。

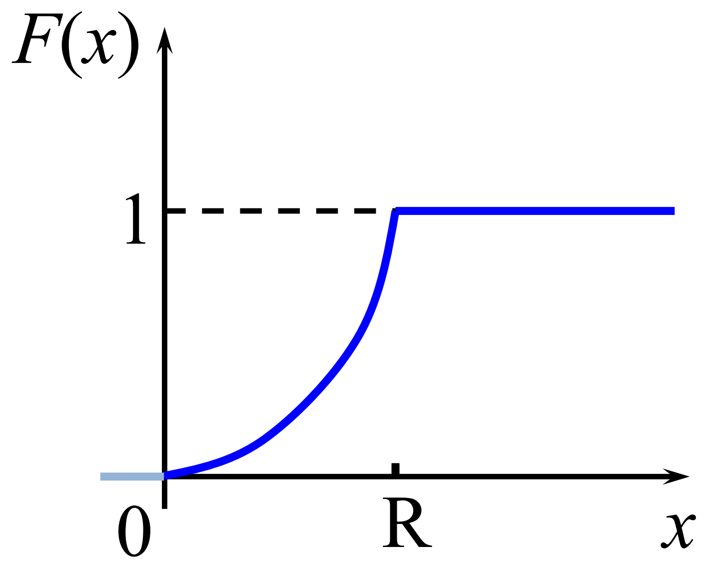
当$0\le x\le R$时，由题意知$P\{0\le X\le x\}=k\cdot\pi x^2$，其中k为比例系数

$$\because\quad P(0\le X\le R)=k\cdot\pi R^2=1 \qquad \therefore\quad k=\frac{1}{\pi R^2}$$

即 $$P(0\le X\le x)=\frac{x^2}{R^2}$$

从而 $$F(x)=P(X\le x)=P(X<0)+P(0\le X\le R)=\frac{x^2}{R^2}$$

当$x\ge R$时，事件$\{X\le x\}$是必然事件，则$F(x)=P(X\le x)=1$



即随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^2}{R^2}, & 0\le x<R\\ 1, & x\ge R\end{cases}$$

例

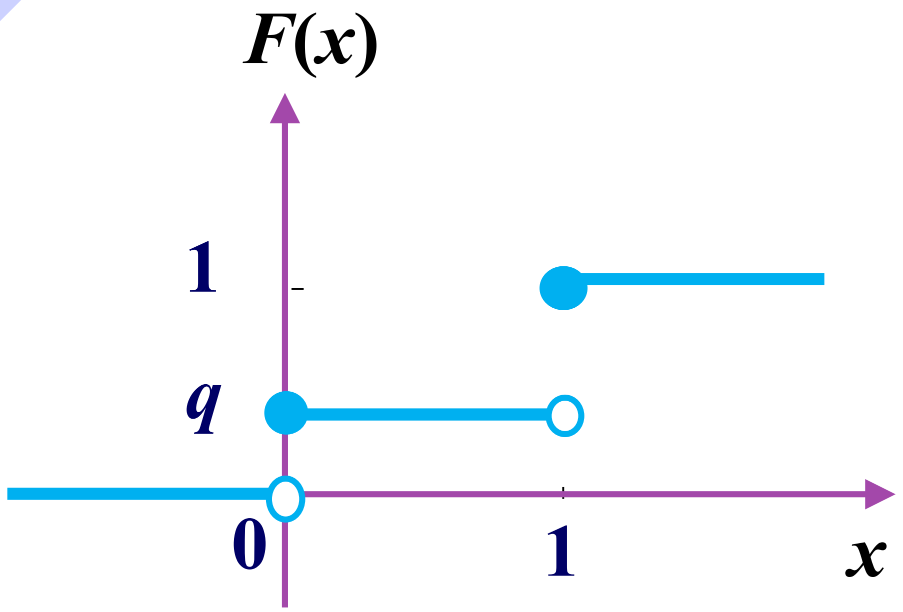
X	0	1
P	q	p

求 X 的分布函数$F(x)$ 及 $P(X\geq 1)$的值。

解

$$F(x)=P(X\leq x)$$

$$=\begin{cases} 0 & x<0 \\ q & 0\leq x<1 \\ 1 & x\geq 1 \end{cases}$$



$$P(X\geq 1)=p$$

比较：$P(X\geq 1)=p$ 与 当$x\geq 1$时 $F(x)=1$

前者是一个事件（随机变量落在大于等于1区间）的概率；后者是分布函数在大于等于1的区间各点处的函数值

例 设随机变量X的分布函数为$F(x)=A+B\cdot\arctan x$，求常数A与B。

解 由$F(-\infty)=A-\dfrac{\pi}{2}B=0$，$F(+\infty)=A+\dfrac{\pi}{2}B=1$，解之得 $A=\dfrac{1}{2}$，$B=\dfrac{1}{\pi}$。

例 设$F_1(x)$与$F_2(x)$分别为随机变量X_1和X_2的分布函数，且$F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$是某随机变量的分布函数，其中a、b为常数，且$a+b=1/5$，求a与b的值。

解 由$F(+\infty)=1$，$F_1(+\infty)=1$，$F_2(+\infty)=1$，得$a-b=1$。又由于$a+b=\dfrac{1}{5}$，故$a=\dfrac{3}{5}$，$b=-\dfrac{2}{5}$

例 设随机变量X的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ A\sin x, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，求 $P\left(X\le\dfrac{\pi}{6}\right)$。

解 由$F(x)$的右连续性知 $F\left(\dfrac{\pi}{2}+0\right)=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，由此可得$A=1$。因此 $P\left(X\le\dfrac{\pi}{6}\right)=F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$

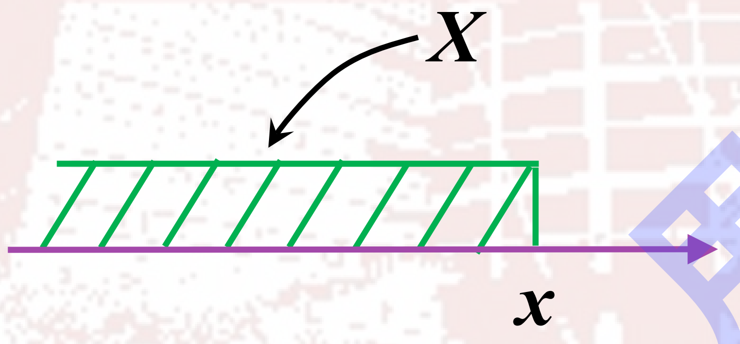
本节回顾

分布函数的定义及概率意义

因此，针对所有类型随机变量，引入“分布函数”的定义，描述随机变量的统计规律

对于随机变量X，x是任意实数，称函数 $F(x)=P(X\leq x),\ -\infty<x<+\infty$ 为随机变量X的分布函数

对于随机变量$F(x)$的几何意义



随机变量取值落在小于等于x一侧的概率