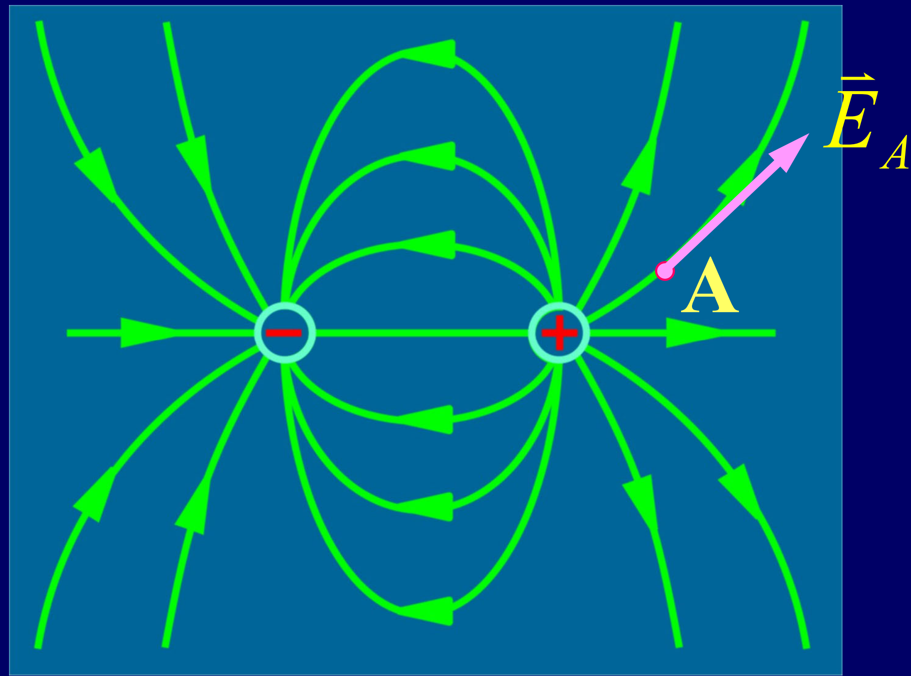
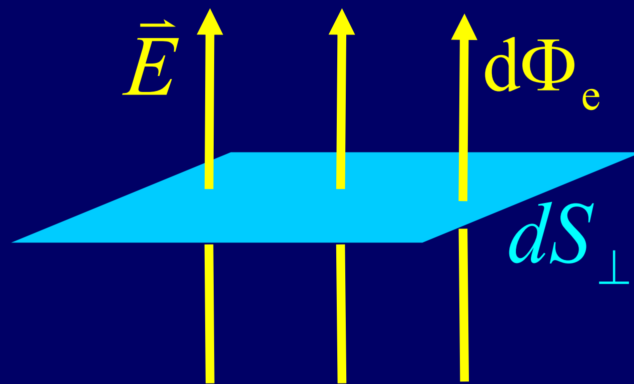
§ 10.3 电通量 高斯定理

一. 电场线（电力线）

1. 电场线反映电场强度的分布



电场线密度： $\dfrac{d\Phi_e}{dS_\perp} = E$



2.电场线的特点：

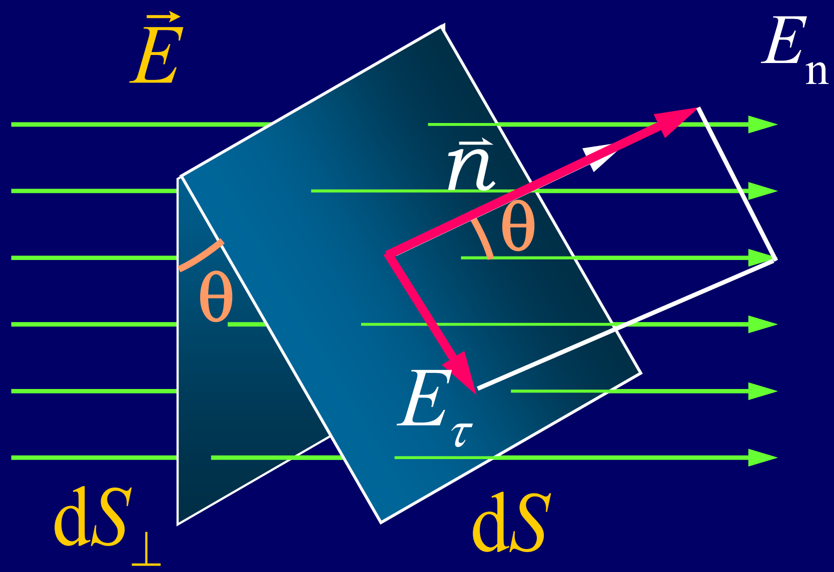
(1) 由正电荷指向负电荷或无穷远处

(2) 电场线是非闭合曲线

(3) 电场线不相交

二. 电通量

在电场中穿过任意曲面*S* 的电场线条数称为穿过该面的电通量。—— Φ_e



1. 通过任意面元d*S*的电通量

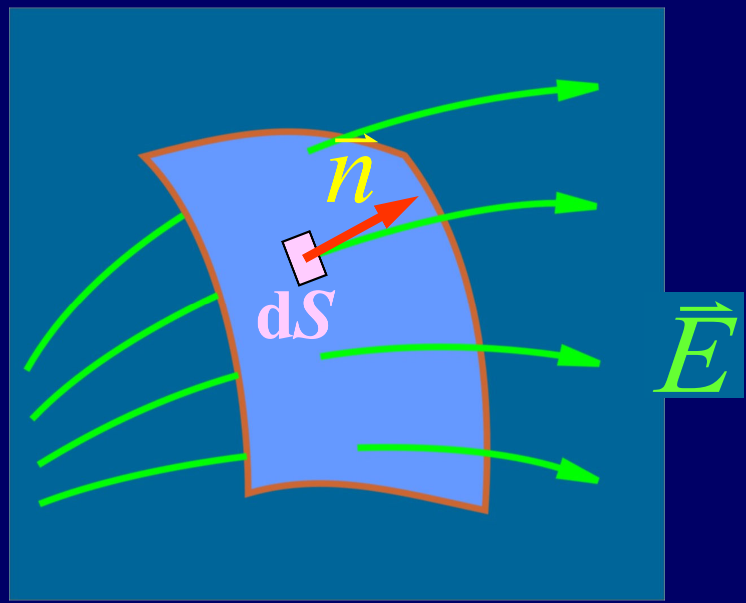
$$d\Phi_e = E_n dS = E\cos\theta dS$$

$$= E dS_\perp$$

定义：面积元矢量 $d\vec{S} = dS\vec{n}$

$$\boxed{d\Phi_e = \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

2.通过任意曲面S的电通量



$$d\Phi_e = \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

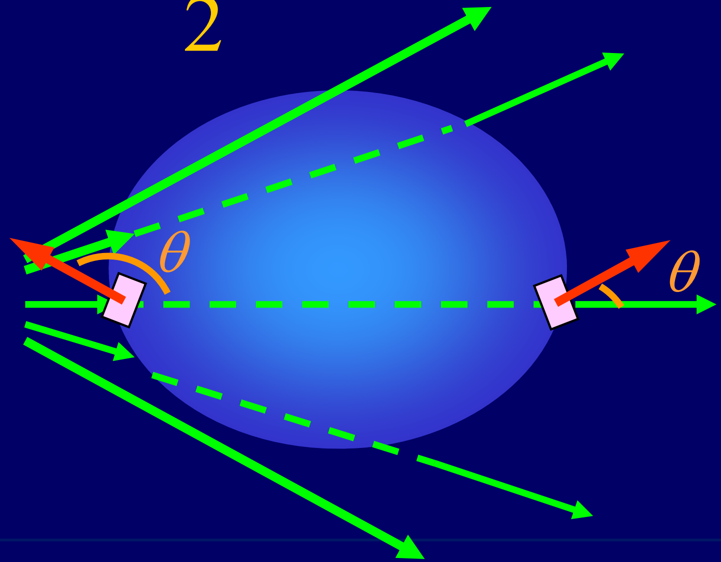
$$\boxed{\Phi_e = \int d\Phi_e = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

3.通过闭合曲面的电通量 $\boxed{\Phi_e = \int \mathrm{d}\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$

讨论

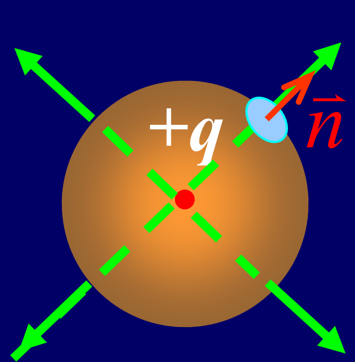
(1) $\mathrm{d}\vec{S}$ 方向的规定：
- 非闭合曲面 —— 可任意选取
- 闭合曲面 —— 由内向外为正

(2) 电通量是代数量
- $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ —— $\mathrm{d}\Phi_e > 0$ 穿出为正
- $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ —— $\mathrm{d}\Phi_e < 0$ 穿入为负



三. 高斯定理

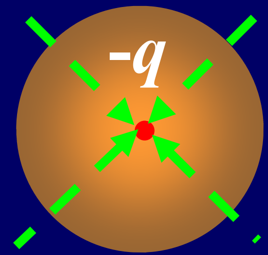
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \begin{cases} >0 \text{ —— } +q \\ <0 \text{ —— } -q \end{cases}$$



以点电荷为例建立Φ_e——q 关系:

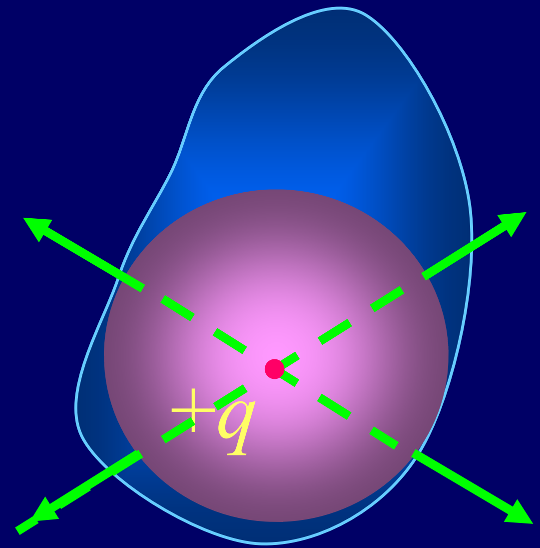
- 取球对称闭合曲面

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\cos\theta \mathrm{d}S = E\oint_S \mathrm{d}S$$



$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}q$$

与r无关



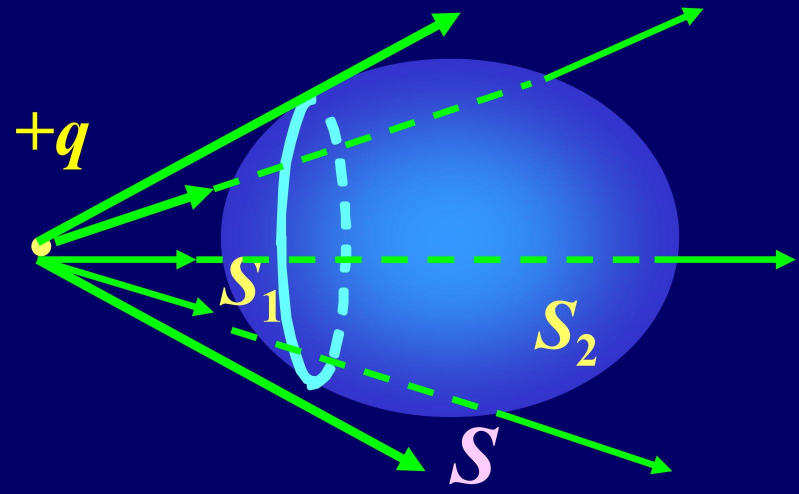
- 取任意闭合曲面时

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}q$$

结论: Φ_e 与曲面的形状及 q 在曲面内的位置无关。

- q在曲面外时：

$$\Phi_e = \Phi_{e1} + \Phi_{e2} = 0$$



- 当存在多个电荷时：

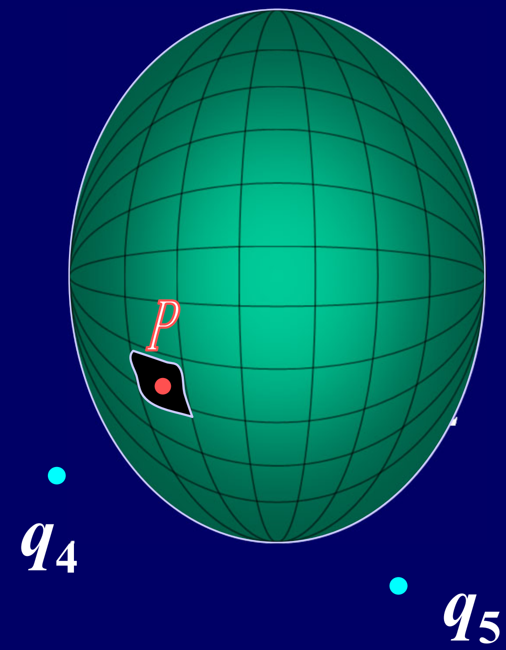
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_5$$

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_5) \cdot d\vec{S}$$

$$= \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} + \ldots + \oint \vec{E}_5 \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + \frac{q_3}{\varepsilon_0}$$

代数求和



结论： $\vec{E}$与所有电荷及其分布有关，Φ_e 只与内部电荷有关。

高斯定理

$$\boxed{\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i(\text{内})}$$

（不连续分布的源电荷）

$$\boxed{\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V}$$

（连续分布的源电荷）

真空中的任何静电场中，穿过任一闭合曲面的电通量，在数值上等于该曲面内包围的电量的代数和乘以 $1/\varepsilon_0$

意义

反映静电场的性质—— 有源场

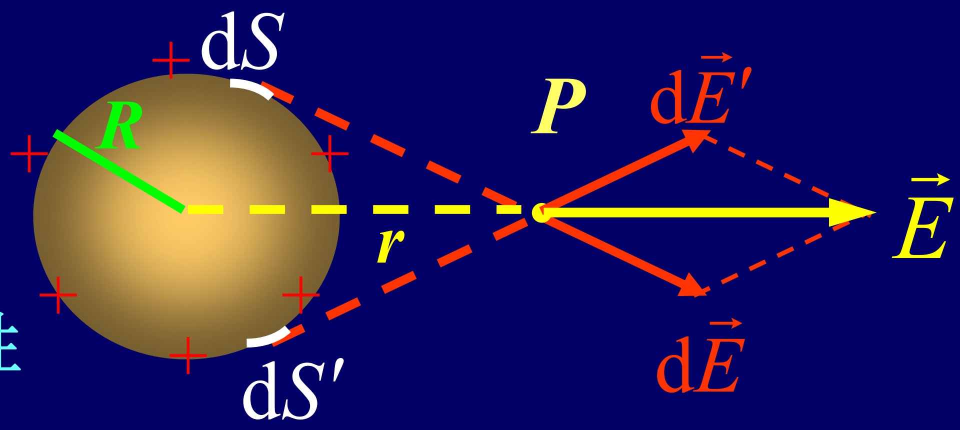
四.用高斯定理求特殊带电体的电场强度

例　均匀带电球面，总电量为Q，半径为R

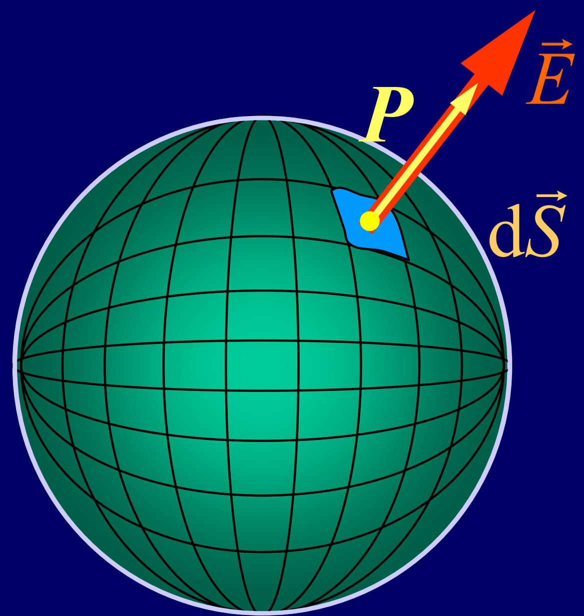
求　电场强度分布

解　对球面外一点P：

电场分布具有球对称性



取过场点 P 的同心球面为高斯面



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S E dS = E\oint_S dS = E4\pi r^2$$

根据高斯定理

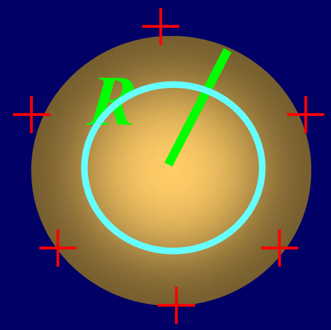
$$E4\pi r^2 = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

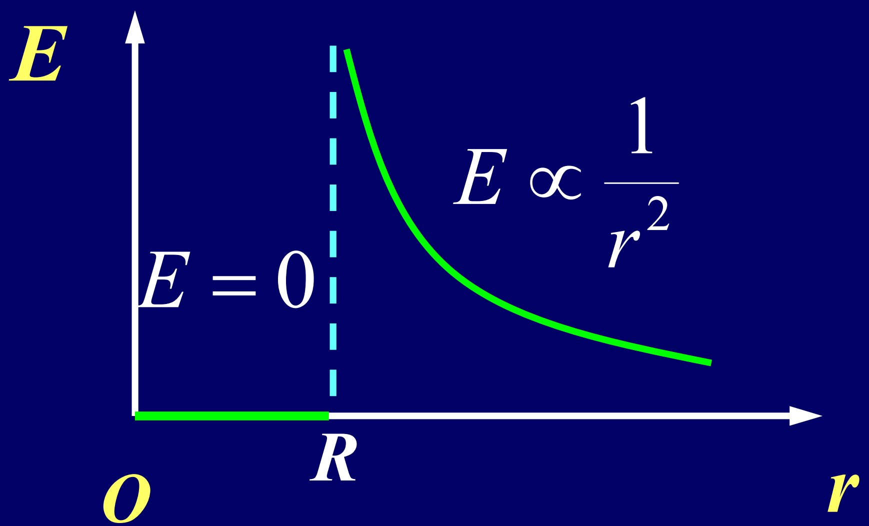
对球面外一点：

$$r > R \quad \sum_i q_i = Q \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\,0}$$

对球面内一点：

$$r < R \quad \sum_i q_i = 0 \qquad \boldsymbol{E = 0}$$



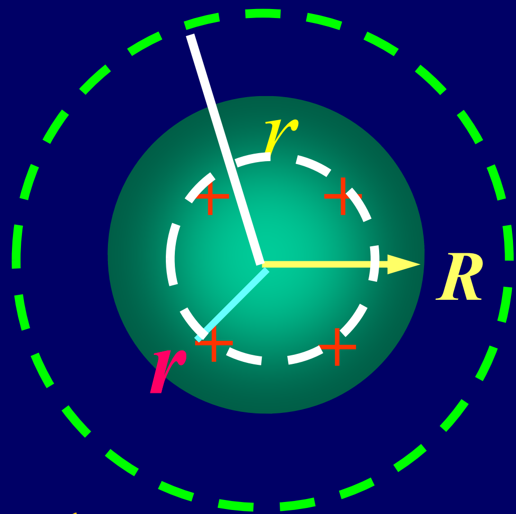


电场分布曲线

例　已知球体半径为R，带电量为q（电荷体密度为ρ）

求　均匀带电球体的电场强度分布

解　球外$(r \geq R)$

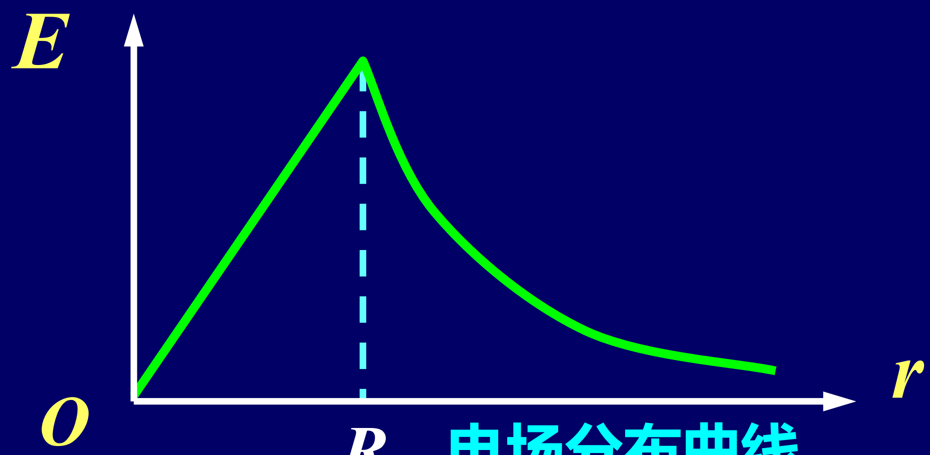


$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{r}^{\,0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\vec{r}^{\,0}$$

球内$(\ r < R\ )$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3\rho = \frac{1}{\varepsilon_0}q'$$

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r = \frac{rq}{4\pi R^3\varepsilon_0}$$

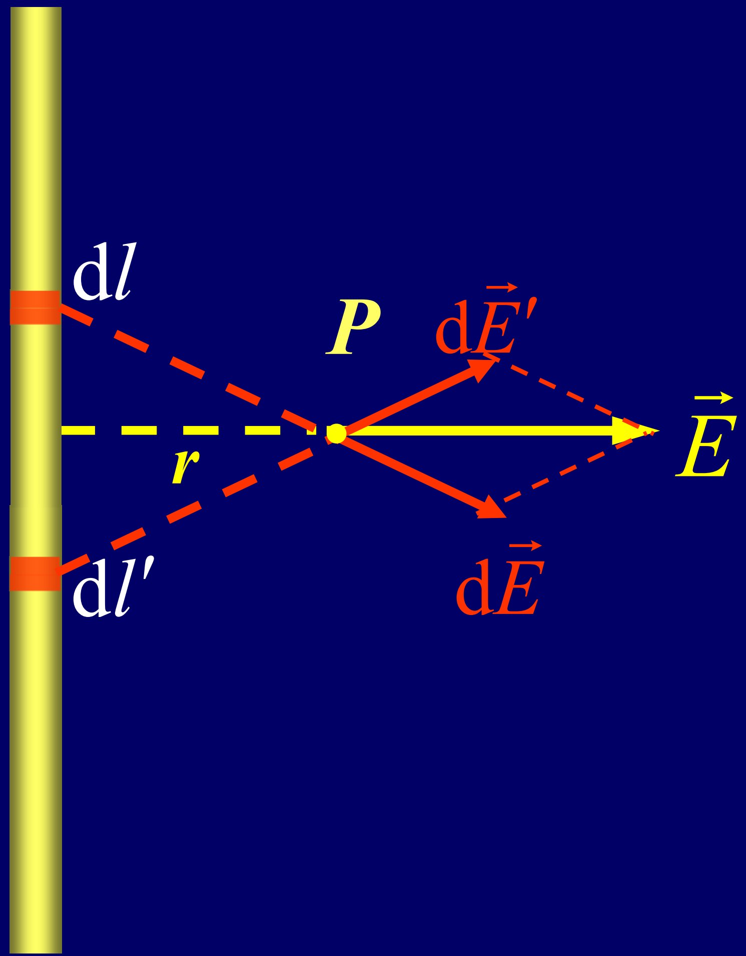


电场分布曲线

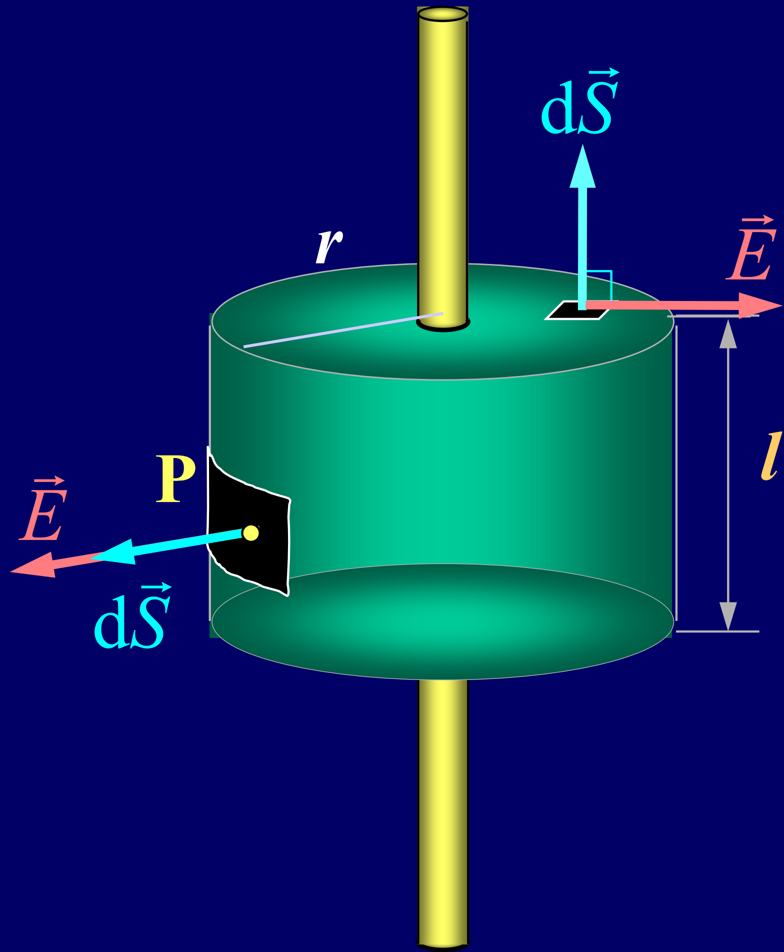
例 已知"无限长"均匀带电直线的电荷线密度为$+\lambda$

求 距直线r 处一点P 的电场强度

解



电场分布具有轴对称性

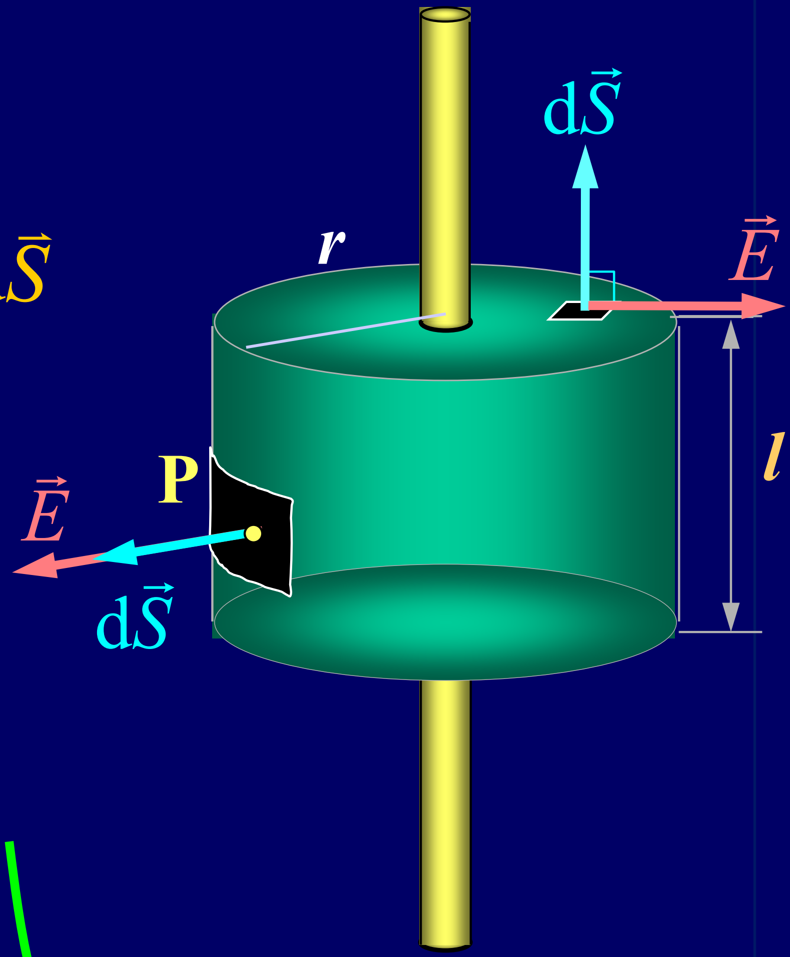


过P点作一个以带电直线为轴，以l 为高的圆柱形闭合曲面S 作为高斯面

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{侧} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{上底} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{下底} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{侧} E\mathrm{d}S = E\int_{侧} \mathrm{d}S = E\cdot 2\pi r\cdot l$$

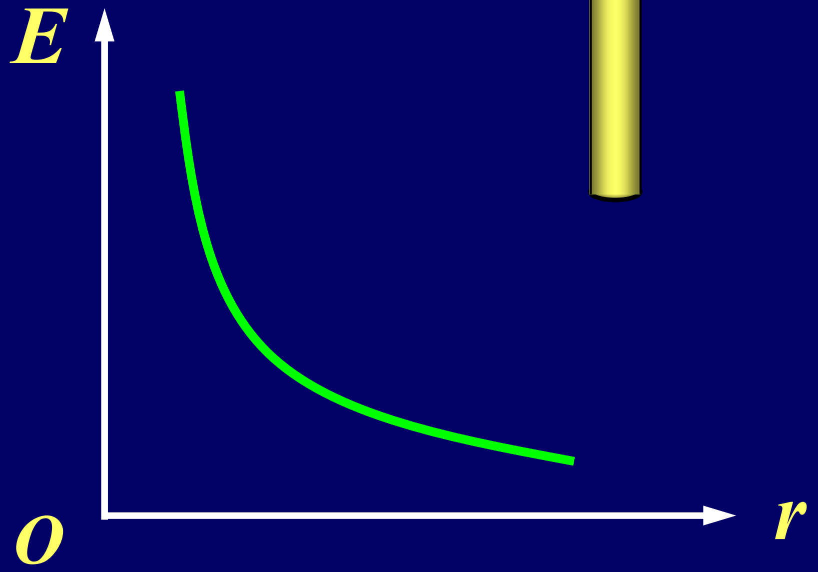


根据高斯定理得

$$E\cdot 2\pi r\cdot l = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda l$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

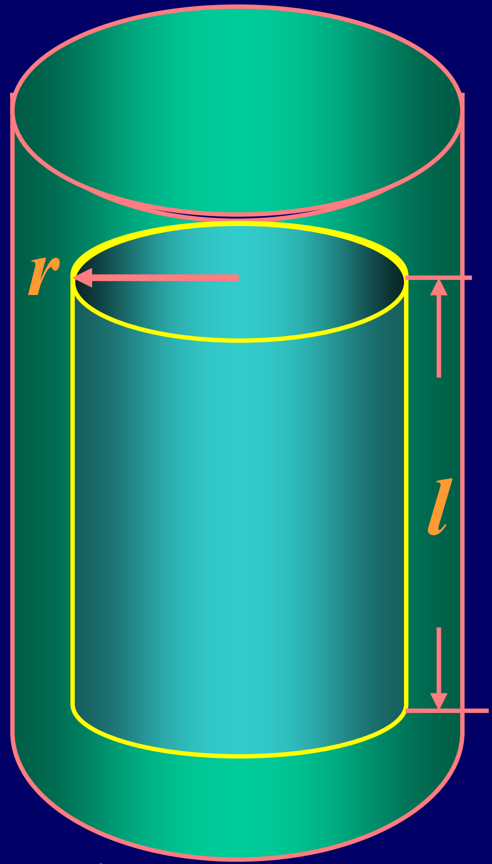
电场分布曲线



例 “无限长”均匀带电圆柱面, 半径为R ,沿轴向单位长度带电为$+\lambda$

求 场强分布

解 $\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} \quad = E\cdot 2\pi r\cdot l$

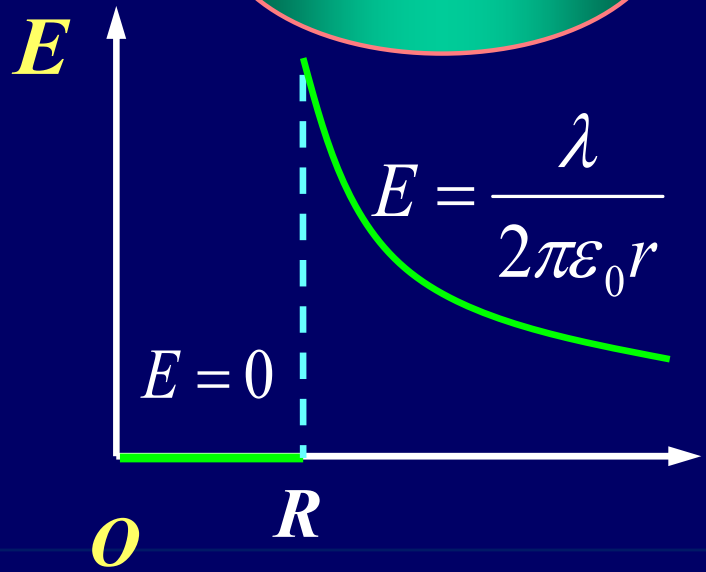


$$r < R \qquad E_1 = 0$$

$$r > R \quad E_2 \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$$

电场分布曲线



总结

用高斯定理求电场强度的步骤：

(1) 分析电荷对称性；

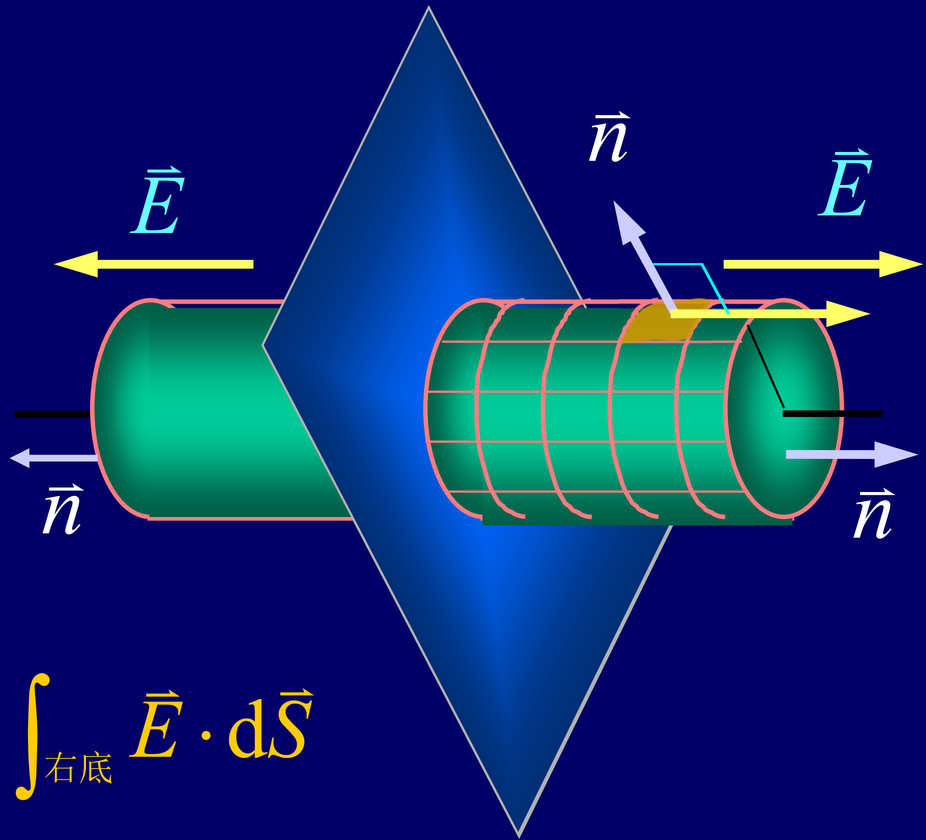
(2) 根据对称性取高斯面；

- * 高斯面必须是闭合曲面
- * 高斯面必须通过所求的点
- * 高斯面的选取使通过该面的电通量易于计算

(3) 根据高斯定理求电场强度。

例 已知“无限大”均匀带电平面上电荷面密度为σ

求 电场强度分布



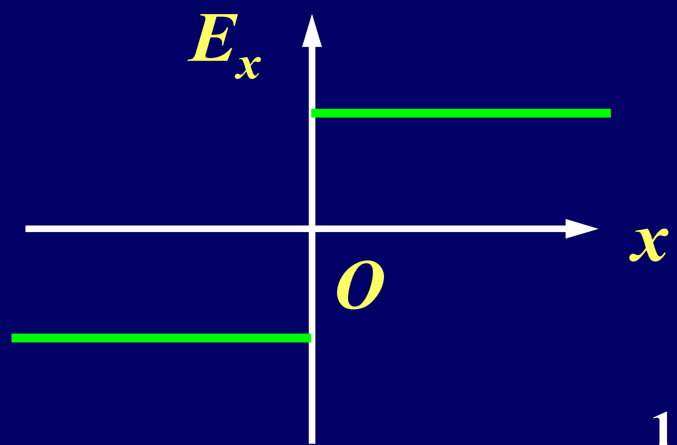
解 电场强度分布具有面对称性

选取一个圆柱形高斯面

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{侧} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{左底} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{右底} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= 0 + ES + ES = 2ES$$



根据高斯定理有

$$2ES = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S \qquad \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$