2.1 随机变量

如何用数值表征随机试验的结果？

引入**随机变量**，其取值有一定的概率，用来描述随机现象。

两类试验结果

- **定量的**：雨量；候车人数；产品寿命；次品数；交通事故次数…
- **定性的**：明天天气（晴，多云…）；化验结果（阳性，阴性）…

有时样本空间Ω的元素不是一个数字，需引入一个法则，使得元素与**实数**对应。

核心问题：将试验结果数值化

例 掷一枚硬币三次，观察出现正面H和反面T情况的随机试验中，其样本空间为

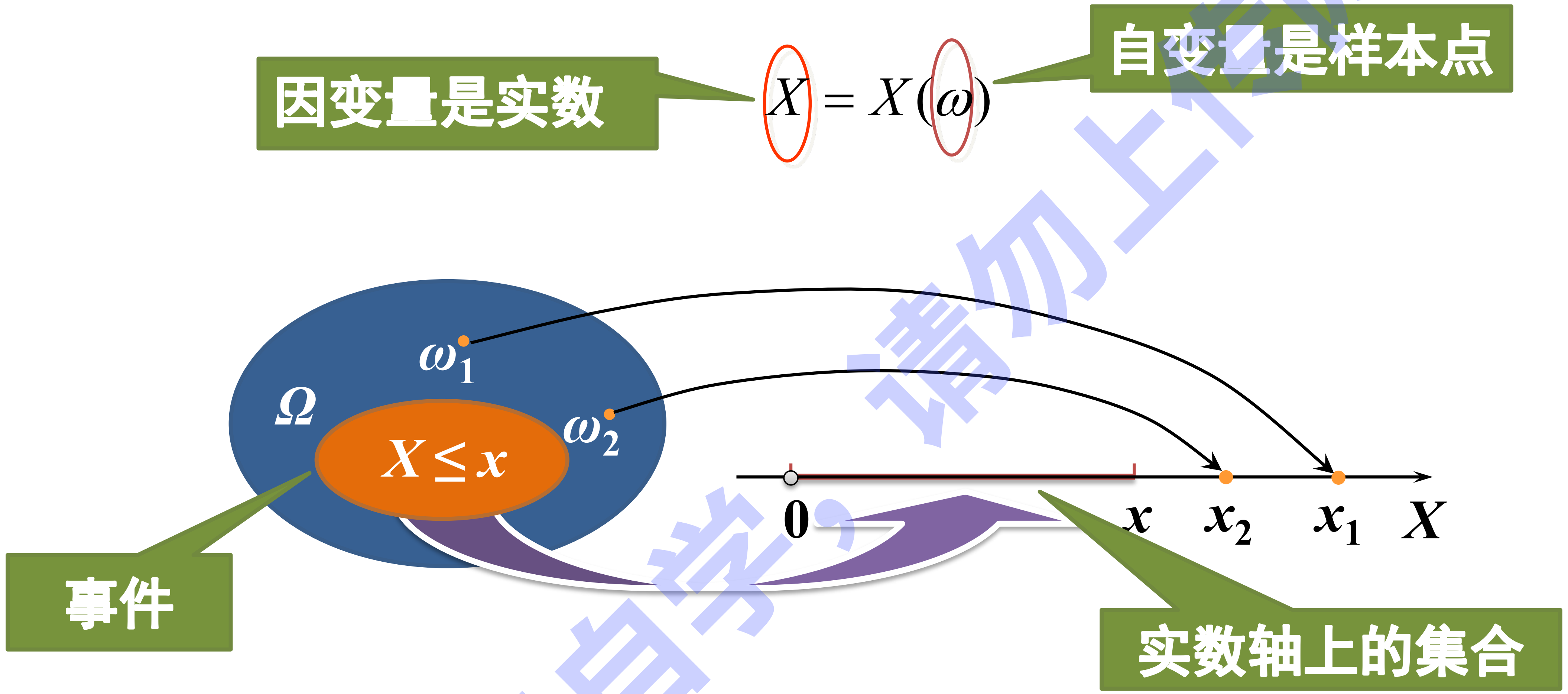
$$\Omega=\{\text{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}\}$$

以X记三次得到正面的总数，则对于样本空间$\Omega=\{\omega\}$中的每一个点ω，X都有一个数与之对应，因而X是定义在样本空间Ω上的一个单值实值函数，它的定义域是样本空间，值域是实数集合$\{0, 1, 2, 3\}$。使用函数记号，X可写成

$$X=X(\omega)=\begin{cases}0, & \omega=\text{TTT}\\ 1, & \omega=\text{HTT,THT,TTH}\\ 2, & \omega=\text{HTT,THT,TTH}\\ 3, & \omega=\text{HHT,HTH,THH}\\ 4, & \omega=\text{HHH}\end{cases}$$

这样就把原来有具体含意的样本空间变为实数轴上的抽象点集。

上述对应关系在数学上理解为定义了一种实值单值函数。定义域为样本空间$\Omega=\{\omega\}$，取值为实数。



注 随机变量的取值具有不确定性；

单值映射意味着不同取值是互不相容的。

随机变量

取值随试验结果而变

可以定义一个变量X，对样本空间$\Omega=\{\omega\}$的每个样本点ω，X都有一个实数与之对应

定义：随机试验的样本空间为$\Omega=\{\omega\}$，$X=X(\omega)$是定义在样本空间Ω上的**实值单值函数**，称 $X=X(\omega)$为随机变量

一般大写字母表示随机变量，对应小写字母表示其取值

随机变量分类
- **离散型**
- 非离散型
  - **连续型**
  - 其他（奇异型）

说明

(1) $X=X\{\omega\}$是一个变量，它的取值随试验结果而改变；

(2)由于试验结果的出现具有一定的概率，故随机变量取每个值和每个确定范围内的值也有一定的概率；

(3) 随机变量按取值方式通常分为离散型随机变量和连续型随机变量；

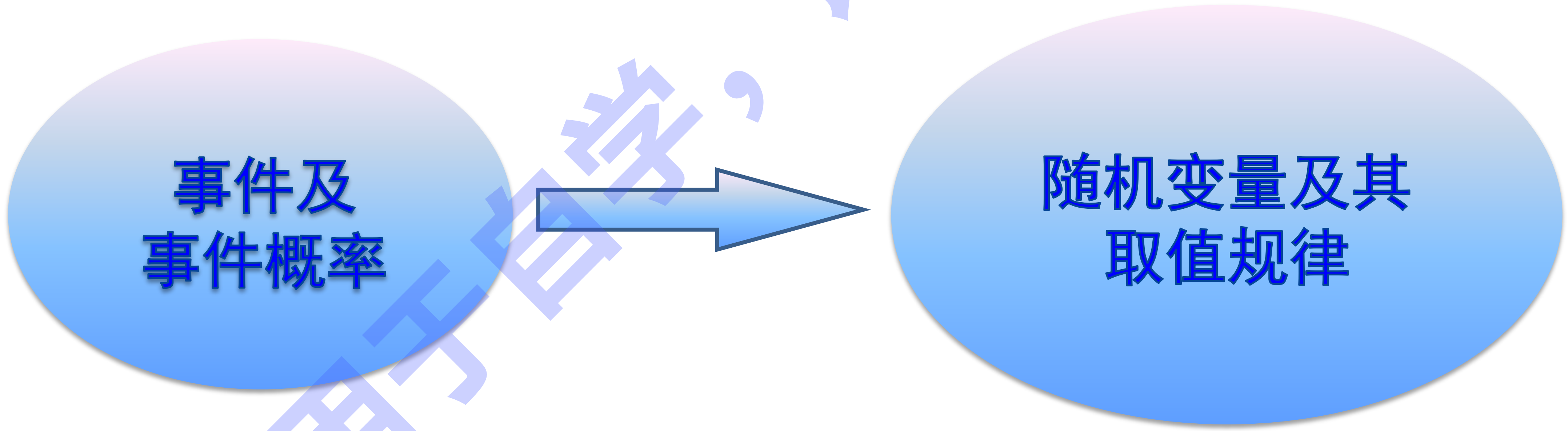
(4) 随机变量英文简记为*r. v.*，通常用大写字母X, Y, Z, W, N等表示，而表示随机变量所取的值时，一般采用小写字母x, y, z, w, n等。

一般地，$\forall L\subset \mathrm{R}$，则$\{X\in L\}$表示事件$\{\omega|X(\omega)\in L\}$，即样本空间中满足$X(\omega)\in L$的所有样本点$\omega$组成的事件。

特别地，$\forall\ x\in\mathrm{R}$，取$L=(-\infty,\ x]$，则$\{X\in L\}=\{X\le x\}$是随机事件，从而就有概率$P(X\le x)$，于是就得到一个定义在R上的函数，记为$F(x)=P(X\le x)$，$x\in\mathrm{R}$。这个函数无论在理论上，还是在应用上都有着重要的意义，它就是下面要介绍的随机变量的分布函数。

引入随机变量的意义

随机变量概念的产生是概率论发展史上的重大事件。引入随机变量后，**随机试验中的各种事件，就可以通过随机变量的关系式表达出来。**对随机现象统计规律的研究，就由对事件及事件概率的研究转化为对随机变量及其取值规律的研究。



本节回顾

随机变量的定义和意义

可以定义一个变量X，对样本空间$\Omega=\{\omega\}$的每个样本点ω，X都有一个实数与之对应

定义：随机试验的样本空间为$\Omega=\{\omega\}$，$X=X(\omega)$是定义在样本空间Ω上的**实值单值函数**，称 $X=X(\omega)$为随机变量

随机变量概念的产生是概率论发展史上的重大事件。引入随机变量后，**随机试验中的各种事件，就可以通过随机变量的关系式表达出来。**对随机现象统计规律的研究，就由对事件及事件概率的研究转化为对随机变量及其取值规律的研究。