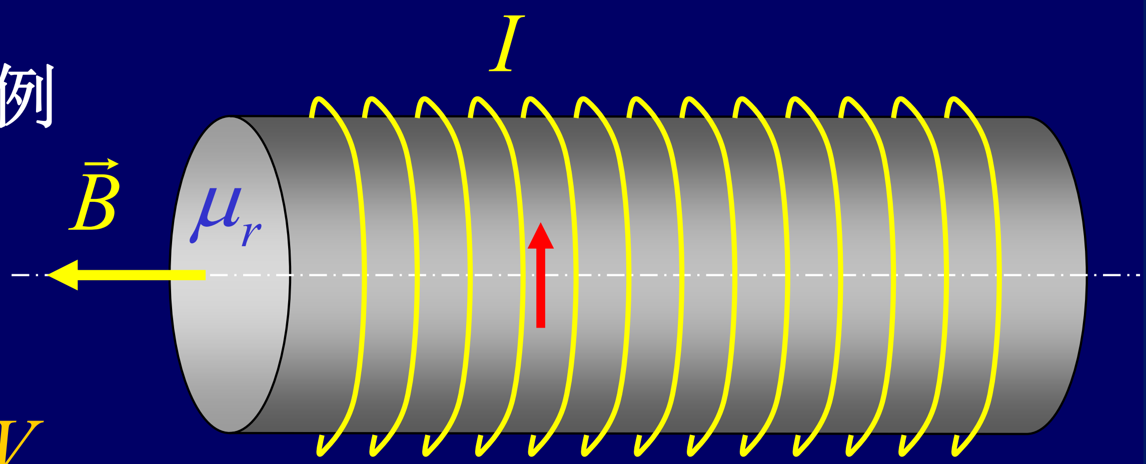
二. 磁能的分布

- 以无限长直螺线管为例



$$B = \mu_0 \mu_r n I$$

$$L = \frac{N\Phi_m}{I} = \mu_0 \mu_r n^2 V$$

磁能 $$W_m = \frac{1}{2}\mu n^2 V I^2 = \frac{1}{2}\mu n^2 V \frac{B^2}{\mu^2 n^2} = \frac{B^2}{2\mu} V$$

$$\boxed{W_m = \frac{BH}{2} V \;= w_m V}$$

磁场能量密度

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{BH}{2}$$

$$w_m = \frac{BH}{2}$$

- 在有限区域内

$$\boxed{W_m = \int_V w_m \mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\mathrm{d}V}$$

积分遍及磁场存在的空间

- $\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} \Longleftrightarrow w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$

例 同轴电缆由半径分别为 R_1 和 R_2 的两个无限长同轴导体和柱面组成

求 无限长同轴电缆长度 l 上的自感

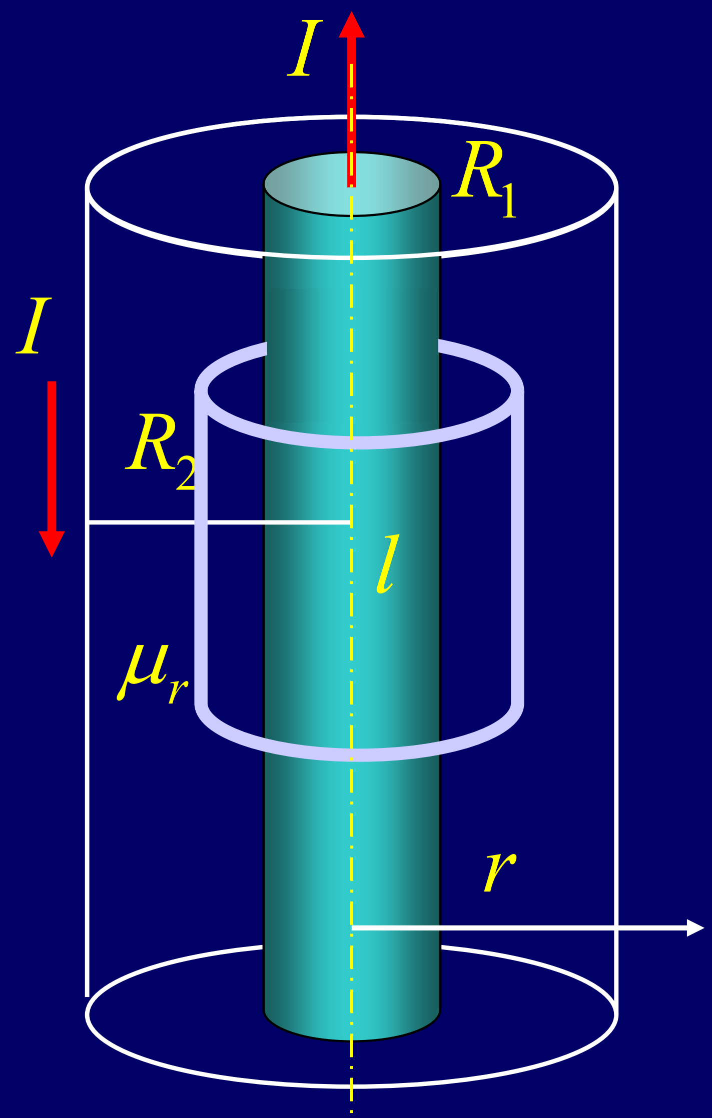
解 由安培环路定理可知

$$r < R_1 \qquad B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

$$R_1 < r < R_2 \qquad B_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$$

$$r > R_2 \qquad B = 0$$

$$\mathrm{d}W_m = w_m \mathrm{d}V = \frac{B^2}{2\mu} 2\pi r l \mathrm{d}r$$



$$W_m = \int_0^{R_1} \frac{B_1^2}{2\mu_0} 2\pi r l \mathrm{d}r + \int_{R_1}^{R_2} \frac{B_2^2}{2\mu_0\mu_r} 2\pi r l \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi} + \frac{\mu_0 \mu_r I^2 l}{4\pi} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{8\pi} + \frac{\mu l}{2\pi} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

例 一由 N 匝线圈绕成的螺绕环，通有电流 I，其中充有均匀磁介质 μ_r

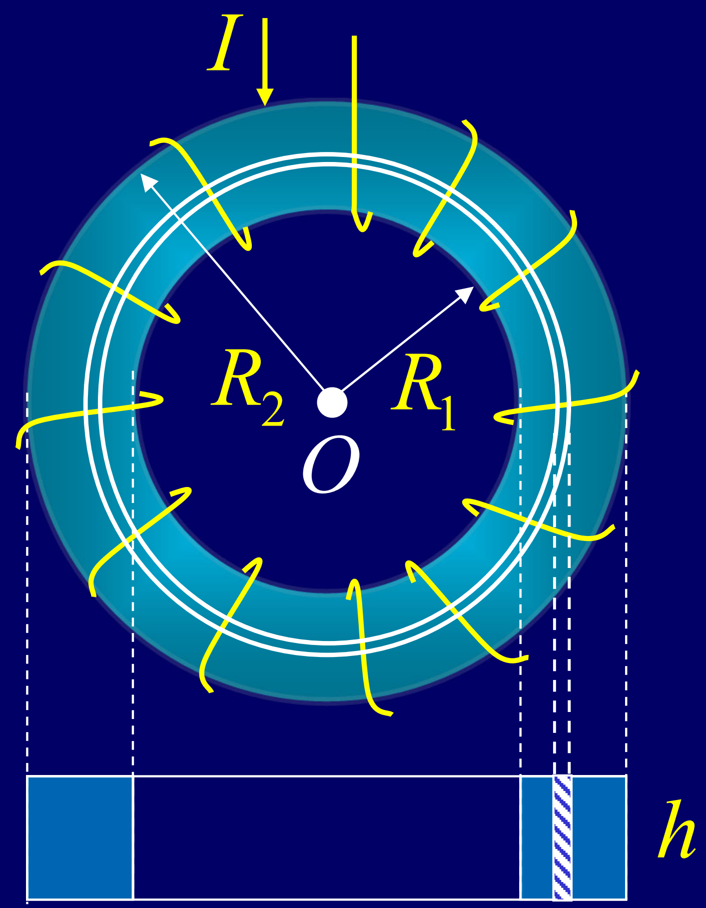
求 磁场能量 W_m

解 根据安培环路定理,螺绕环内

$$H=\frac{NI}{2\pi r} \Longleftrightarrow B=\frac{\mu_0\mu_r NI}{2\pi r}$$

$$w_m=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}\frac{\mu_0\mu_r N^2 I^2}{4\pi^2 r^2}$$

取体积元 $\mathrm{d}V=2\pi rh\mathrm{d}r$

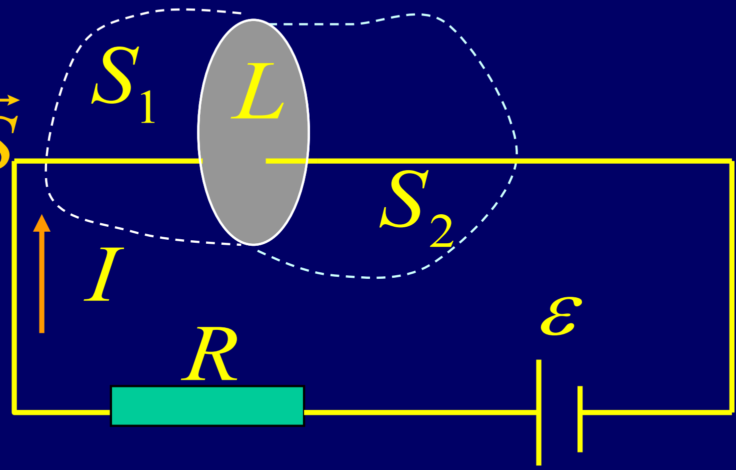


$$W_m=\int_V w_m \mathrm{d}V=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0\mu_r N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}2\pi rh\mathrm{d}r=\frac{\mu N^2 I^2 h}{4\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

§ 12.5 麦克斯韦电磁场理论简介

变化磁场 $\longrightarrow$ 产生感生电场　　变化电场 $\xrightarrow{?}$ 产生磁场

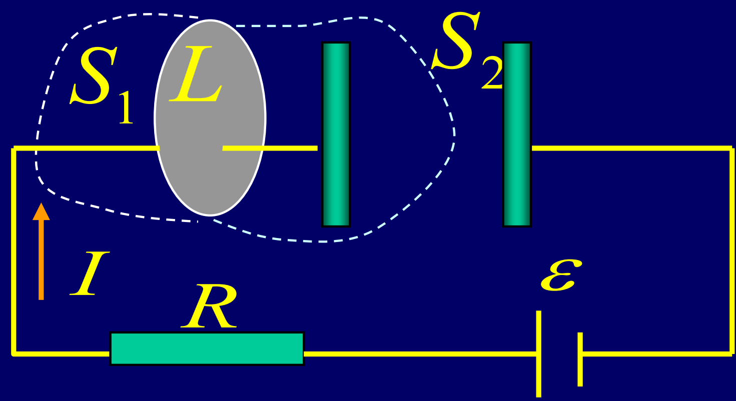
一. 问题的提出



对稳恒电流 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$

$$\left.\begin{aligned} &\text{对}S_1\text{面} \quad \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I \\ &\text{对}S_2\text{面} \quad \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = 0 \end{aligned}\right\}\text{矛盾}$$

二. 位移电流假设

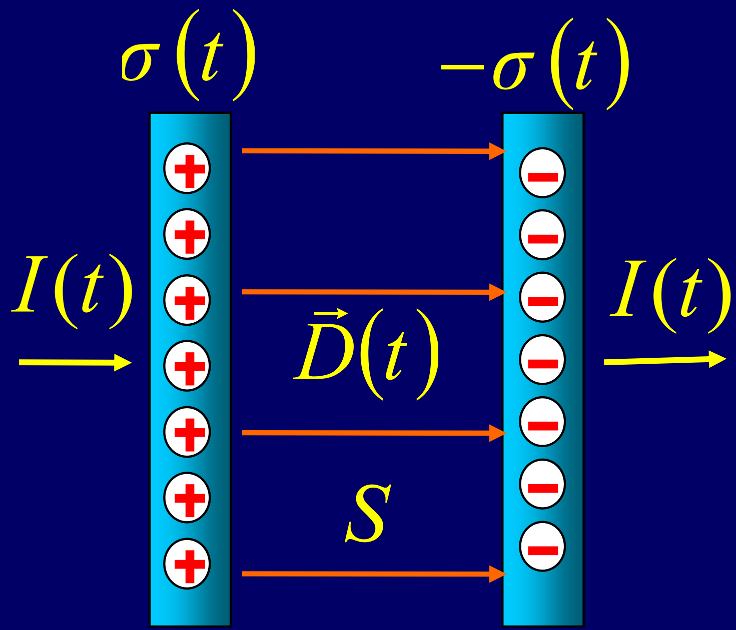


- $dq/dt = I$

极板上电荷的时间变化率等于传导电流

- 电荷分布的变化必引起电场的变化

电位移通量



$$\Phi_D = DS = \Phi_D(t)$$

$$D = \sigma$$

$$\Phi_D(t) = \sigma(t)S = q(t)$$

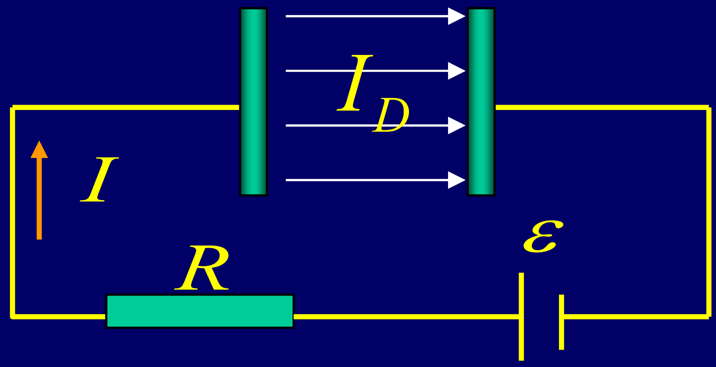
$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \boxed{\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = I_D}$$

—位移电流（电场变化等效为一种电流）

一般情况位移电流 $I_D = \dfrac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

- 全电流

$$\boxed{I_{\text{全}} = I_{\text{传导}} + I_{\text{位移}}}$$



全电流在空间永远是连续的.

位移电流密度 $\vec{j}_D$

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_{\text{全}} = I_{\text{传导}} + I_{\text{位移}} = I_{\text{传导}} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

(全电流安培环路定理)

若传导电流为零

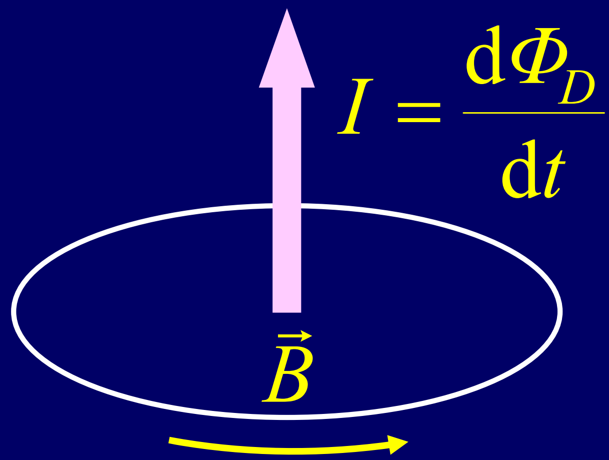
$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

变化电场产生磁场

三. 位移电流、传导电流的比较

1. 位移电流具有磁效应 —**与传导电流相同**

2. 位移电流与传导电流不同之处



(1) 产生机理不同

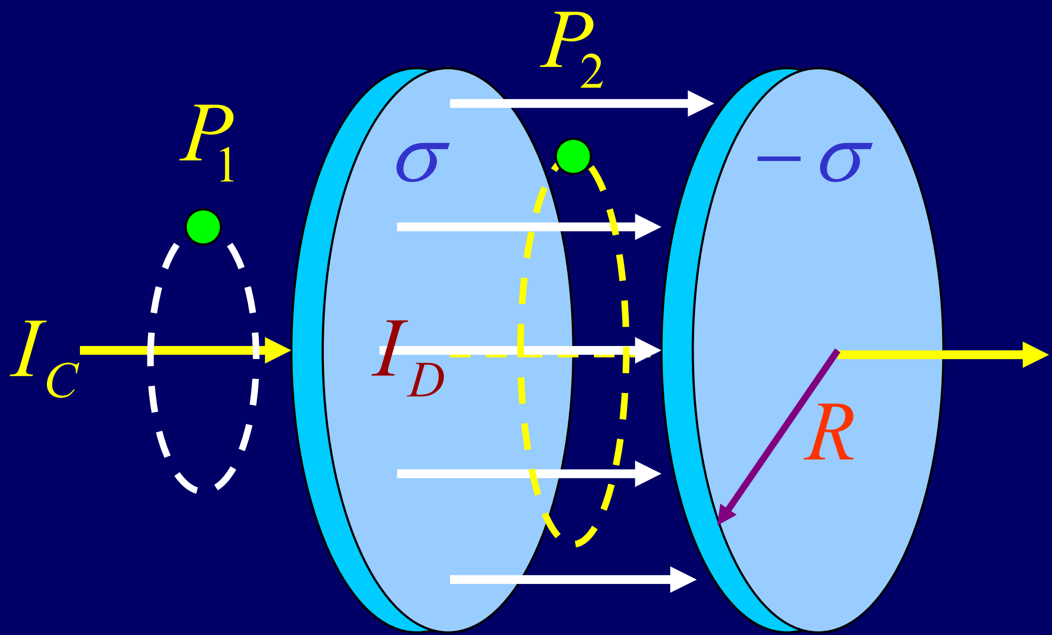
位移电流的实质是变化的电场

(2) 存在条件不同

（3）位移电流没有热效应，传导电流产生焦耳热

例 设平行板电容器极板为圆板，半径为R，两极板间距为d，用缓变电流 I_C 对电容器充电

求 P_1，P_2 点处的磁感应强度



解 任一时刻极板间的电场

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{D}{\varepsilon_0}$$

极板间任一点的位移电流

$$j_D=\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{\partial \sigma}{\partial t}=\frac{I_C}{\pi R^2}$$

由全电流安培环路定理

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=I_C+\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\begin{cases} P_1 \quad H_1 2\pi r_1 = I_C \Rightarrow B_1=\dfrac{\mu_0 I_C}{2\pi r_1} \\ P_2 \quad H_2 2\pi r_2 = \pi r_2^2 j_D \\ \qquad B_2=\dfrac{\mu_0 I_C}{2\pi R^2} r_2 \end{cases}$$

四. 麦克斯韦方程组

电荷激发静电场 $E_1\ ,D_1$

变化的磁场激发有旋电场 $E_2\ ,D_2$

传导电流激发磁场 $B_1\ ,H_1$

位移电流激发磁场 $B_2\ ,H_2$

$$\oint_S \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \sum_{内} q_0 \qquad \oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = 0$$

有源无旋场

$$\oint_S \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \qquad \oint_L \vec{H}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum I_{传导}$$

无源有旋场

有旋电场假设 $$\oint_L \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{D}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

位移电流假设 $$\oint_l \vec{H}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{B}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

1. 电场的高斯定理

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S (\vec{D}_1 + \vec{D}_2)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_i + 0$$

$$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_i \ \left(= \int_V \rho \mathrm{d}V\right)}$$

静电场是有源场、感应电场是涡旋场

2. 磁场的高斯定理

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 + 0 = 0$$

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$$

传导电流、位移电流产生的磁场都是无源场

3. 电场的环路定理

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \oint_L (\vec{E}_1+\vec{E}_2)\cdot d\vec{l} = 0 - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}}$$

静电场是保守场，变化磁场可以激发涡旋电场

4. 全电流安培环路定理

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_L (\vec{H}_1+\vec{H}_2)\cdot d\vec{l} = \sum I_i + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{j}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S}}$$

传导电流和变化电场可以激发涡旋磁场

- **麦克斯韦方程组的积分形式.**