复变函数课程简介

课程性质———工程数学

Complex Functions

历史上，数学的发展至少有两个线索。一个是纯理性的形式化的线索：理论数学，另一个是与物理等实体科学和工程问题的发展密切相关的线索：工程数学。从阿基米德到达芬奇，从德沙格到欧拉，牛顿，拉格朗日，拉普拉斯，乃至高斯，冯纽曼。这些大师把数学和实体科学和工程的发展完美的结合到一起。计算机出现后的高技术本质上是一种数学技术。

工程数学关注的是：如何把数学用到实际中去，而非单纯的智力游戏。

复变函数课程简介

公共基础课—高数、大学物理

专业基础课—数字电路、模拟电路、信号与系统

工程课—VHDL设计、DSP实验

专业课—人工智能、模式识别、机器学习

基础理论-----？ -----工程技术

线性代数，概率论，数学物理方程

复变函数课程简介

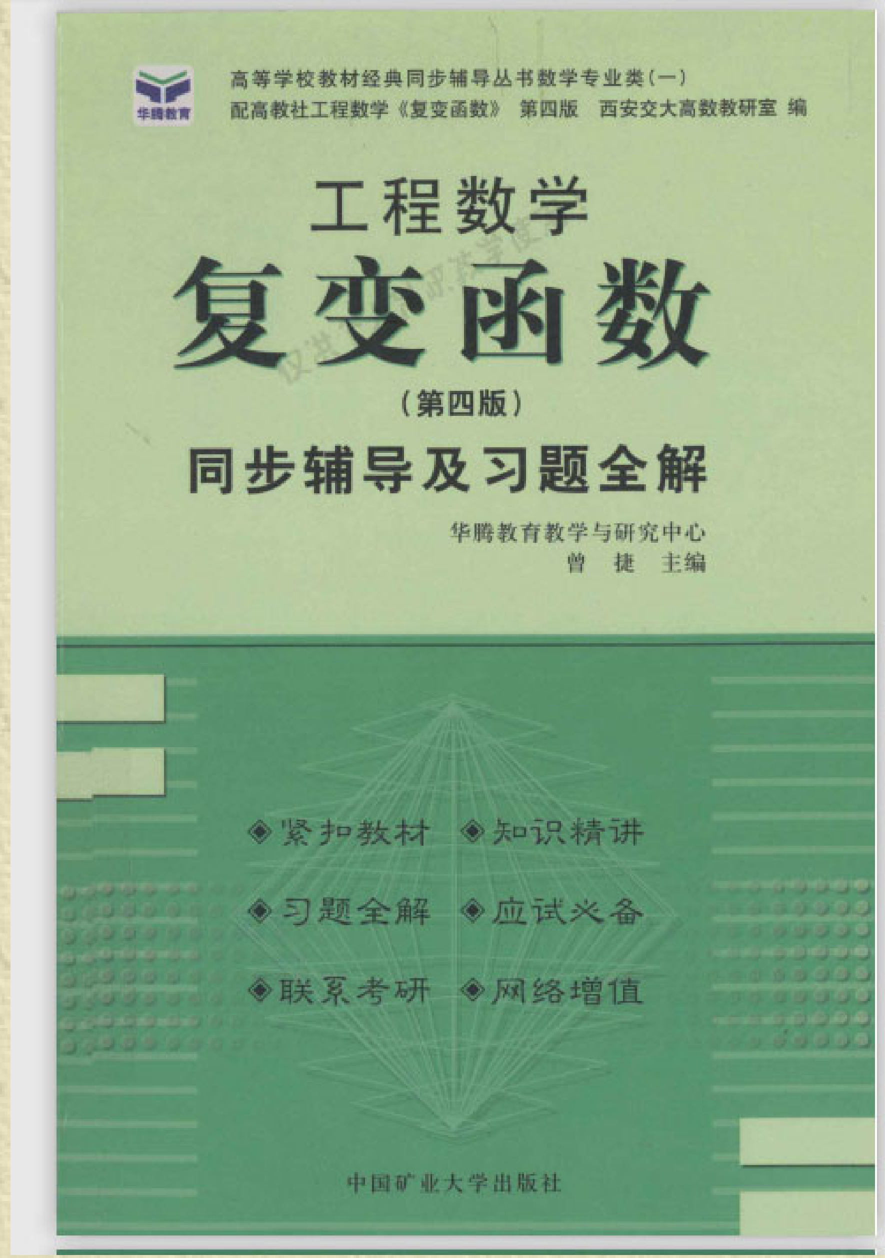
学习目的—用复变函数的理论解决工程技术中的实际问题

学习方法—与高等数学类似

冯志玺，88204298，北校区 主楼II-419

Email: zxfeng@xidian.edu.cn


高等学校教材
工程数学
复变函数
（第四版）
西安交通大学高等数学教研室 编
高等教育出版社


高等学校教材经典同步辅导丛书数学专业类(一)
配高教社工程数学《复变函数》第四版 西安交大高数教研室 编
工程数学
复变函数
（第四版）
同步辅导及习题全解
华腾教育教学与研究中心
曾 捷 主编
◈紧扣教材 ◈知识精讲
◈习题全解 ◈应试必备
◈联系考研 ◈网络增值
中国矿业大学出版社

复变函数的发展历史

1.创立于19世纪，被誉为“19世纪的数学享受”

2.1776年，Euler利用复变函数计算实函数积分

3.1782年，Laplace把实函数积分转化成复函数积分

4.1825年，Gauss“-1的真正奥秘是难以捉摸的”

5.Cancy是把复函数作为基本实体研究的第一人

从1821年，花了25年时间发展了复变函数理论

6.1843年，Laurent建立了洛朗级数展开

7.Weierstrass建立了解析函数理论与解析开拓

8.1951年，Riemann研究了共性映射

简介

复变函数———复数变量函数

主要研究对象——复变量函数，特别是解析函数

主要内容—— Cauchy 积分理论

*Weierstrass 级数理论

*Riemann 保形变换理论

理论奠基人——Augustin Louis Canchy

——karl Weierstrass

——George Fridrich Riemann

教材架构

复数 ⟶ 复变函数 $\xrightarrow{\text{连续，可导}}$ 解析函数

ch1　　　　　　ch2

↓ 可积

复变函数的积分 $\xrightarrow{\text{计算}}$ 留数定理　ch5

ch3

级数 ⟶ 复数项级数 ⟶ 幂级数,泰勒级数,洛朗级数

ch4

映射 ⟶ 共形映射

ch6

第一章　复数与复变函数

第一、二、三节　复数及其代数运算

第四、五、六节　复变函数（概念、极限、连续）

§1-- §3 复数及其代数运算

一、复数的概念

$z = x + iy, \quad i = \sqrt{-1}$ 为虚数单位，$x, y \in R$

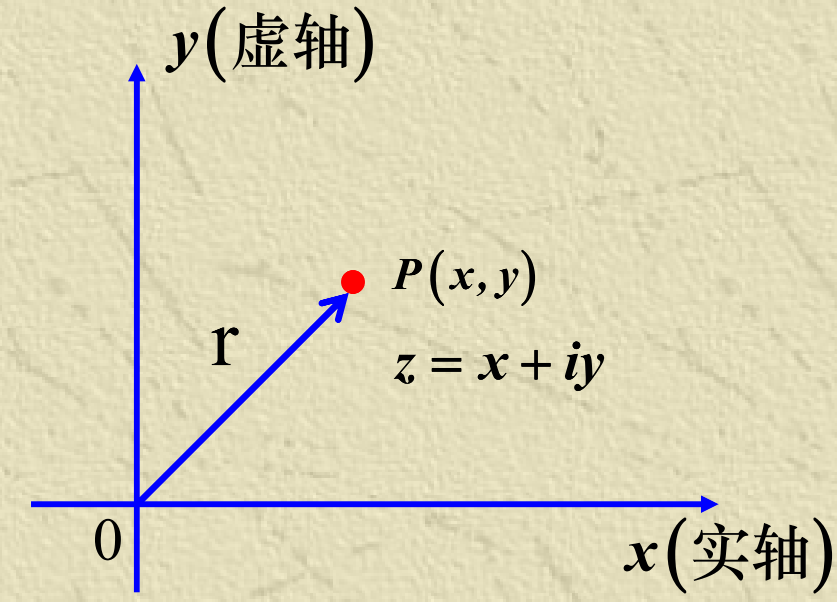
记 $x = Re(z)$ —— z的实部, $y = Im(z)$ —— z的虚部

$\overline{z} = x - iy$ —— z的共轭复数

注意： 复数不能比较大小.

二、复数的几种表示方法

1. 代数法： $z = x + iy$



2. 几何法： $z = x + iy \leftrightarrow (x, y) \leftrightarrow$ 平面上点 p

由实轴x及虚轴y构成的平面

称为复平面或z平面

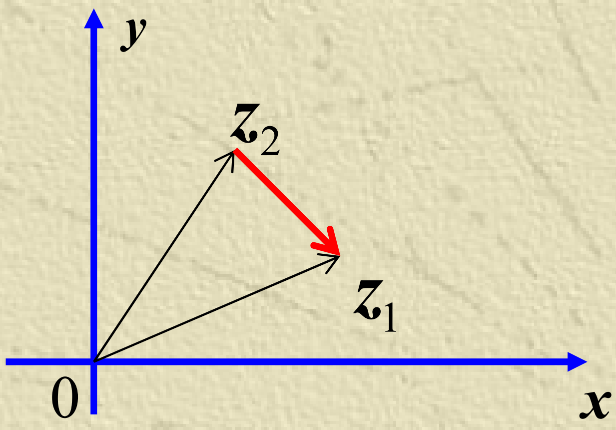
3. 向量法: $z = x + iy \leftrightarrow \overrightarrow{op}$

复数的模 $\quad |z| = |\overrightarrow{op}| \overset{\Delta}{=} r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$|x| \le |z|,\ |y| \le |z|,\ |z| \le |x| + |y|$$

三角不等式 $\quad |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|,\quad |z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$

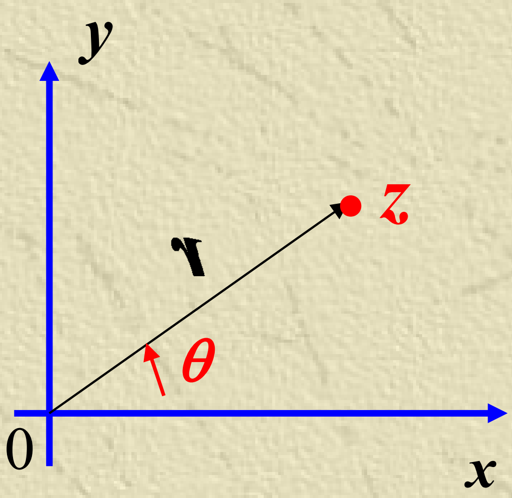
几何上 $\quad |z_1 - z_2|$ — 表示z_1与z_2两点间的距离



复数的辐角：

$z \neq 0$时，主辐角 $\arg z \overset{\Delta}{=} \theta_0,\ (-\pi < \theta_0 \leq \pi)$

辐角 $Arg\, z = \arg z + 2k\pi \quad (k \in Z)$



且 $\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & z\text{在}I, IV\text{象限} \\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & x = 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} \pm \pi, & z\text{在}II\text{、}III\text{象限} \\ \pi, & y = 0, x < 0 \end{cases}$

其中 $-\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$.

特别的，$z=0$时，$|z|=0$，辐角不确定

4. 三角法： $\because z \leftrightarrow p(x,y) \leftrightarrow p(r,\theta)$

又 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$$\therefore z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

5. 指数法：

由欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

则 $z = re^{i\theta} = |z|e^{i\,Arg\,z}$

三、复数的运算

设 $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ $\quad z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

1. $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

2. $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$$= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

即 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\quad Arg(z_1 z_2) = Arg\, z_1 + Arg\, z_2$

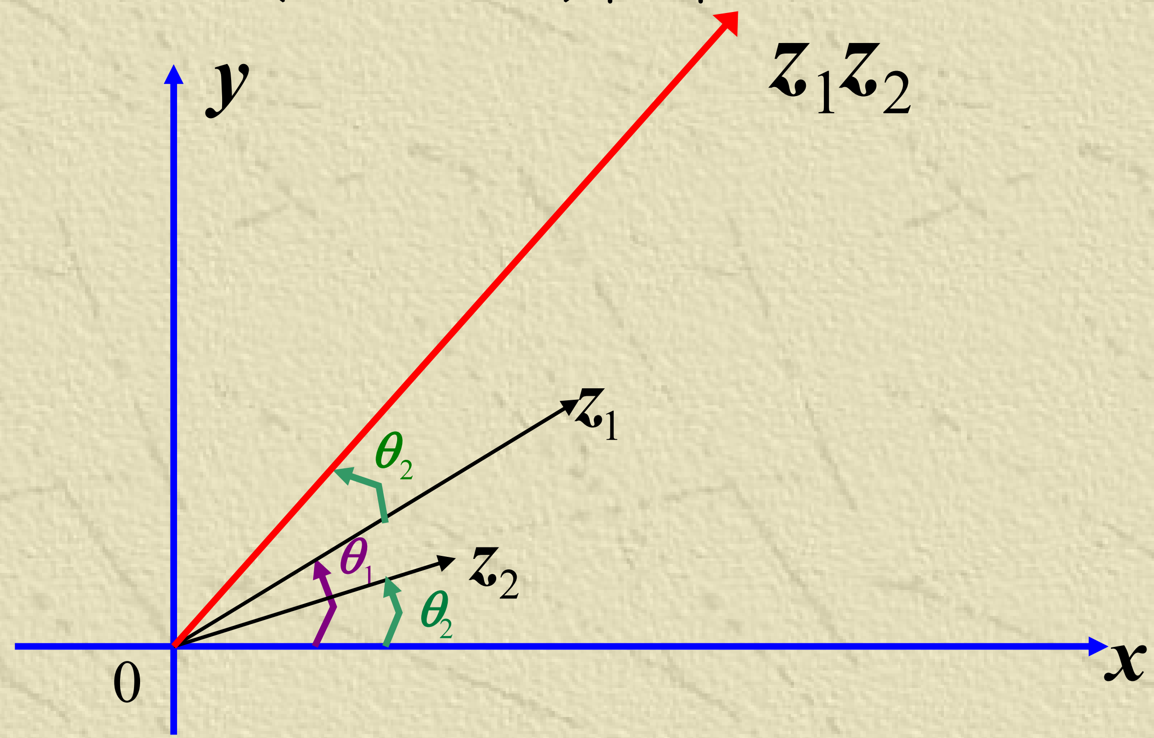
（指集合相等）

特别的 $\quad z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^2|$

几何意义:

z_1z_2表示将向量z_1旋转角度$\mathrm{Arg}\, z_2$

并伸长(或缩短)$|z_2|$倍.



3. $$\frac{z_1}{z_2}(z_2 \neq 0) = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

即 $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg\, z_1 - Arg\, z_2$$ （指集合相等）

第一节 复数及其代数运算

4. 共轭复数的运算

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$； $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$； $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

(2) $\overline{\overline{z}} = z$

(3) $z\overline{z} = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2 = |z|^2 = |z^2|$

(4) $z + \overline{z} = 2\,Re(z) \Rightarrow Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$

$z - \overline{z} = 2i\,Im(z) \Rightarrow Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

(5) $|z| = |\overline{z}|$， $arg\, z = -arg\, \overline{z}$ (不包含z为负实轴及原点)

第一节 复数及其代数运算

4. 幂与根

设 $z = re^{i\theta}$

幂: $z^n \overset{\Delta}{=} zz\cdots z = r^n e^{in\theta} = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$

$$\left|z^n\right| = \left|z\right|^n, \quad Arg\, z^n = n\, Arg\, z$$

当 $|z| = 1$ 时, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

(德摩佛公式——De Moivre)

$$z^{-n} \overset{\Delta}{=} \frac{1}{z^n}$$

方根: 使 $w^n = z$ 的w称为z的n次方根，记作$\sqrt[n]{z}$

即 $w = \sqrt[n]{z}$

若设 $w = \rho e^{i\varphi}$， $z = re^{i\theta}$

则 $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$ $(k = 0,1,\cdots,n-1)$

$$w = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

$$(k = 0,1,\cdots,n-1)$$

(1) 设 $z=\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$，求 $Re\,z$、$Im\,z$、共轭复数、模与幅角

(2) 将复数 $z=\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(2-2i\right)}{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(2+2i\right)}$ 化为三角形式与指数形式。

$$2)\ \frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=-i-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-i-\frac{3i-3}{2}=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$$

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{3}{2};\ \mathrm{Im}(z)=-\frac{5}{2};\ \bar{z}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i};$$

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{-5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2};$$

$$\arg z=-\operatorname{arctg}\frac{5}{3};$$

$$\operatorname{Arg} z=-\operatorname{arctg}\frac{5}{3}+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

解 将 z 的分子与分母同乘以 $(\sqrt{3}+i)(2-2i)$，得 $z=\frac{(\sqrt{3}+i)^2}{|\sqrt{3}+i|^2}\cdot\frac{(2-2i)^2}{|2-2i|^2}=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(-i)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$，所以 $|z|=1$，$\arg z=\operatorname{arctg}(-\frac{\sqrt{3}}{3})=-\frac{\pi}{6}$. 从而得到 z 的三角形式与指数形式：

$$z=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}=e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$

另一种解法是，由于分子与分母恰为一对共轭复数，故其模相同，于是

$$|z|=\frac{|(\sqrt{3}+i)(2-2i)|}{|(\sqrt{3}-i)(2+2i)|}=1$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg} z &=2[\operatorname{Arg}(\sqrt{3}+\mathrm{i})+\operatorname{Arg}(2-2i)]\\ &=-\frac{\pi}{6}+2k\pi.\end{aligned}$$

四、曲线的复数方程

已知曲线：$F(x,y)=0,$

若令 $z=x+iy,$ 则 $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2},\ y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

代入得：$F\left(\dfrac{z+\overline{z}}{2},\dfrac{z-\overline{z}}{2i}\right)=0$ 为曲线的复数形式方程.

例1 指出下列方程表示的曲线

(1) $|z+i|=2$

解：法 1.

由几何意义 $|z+i|=2$ 即 $|z-(-i)|=2$ 表示到 $-i$

距离为2的点的轨迹，即圆 $x^2+(y+1)^2=4$

法 2. 将 $z=x+iy$ 代入得：$|x+(y+1)i|=2$

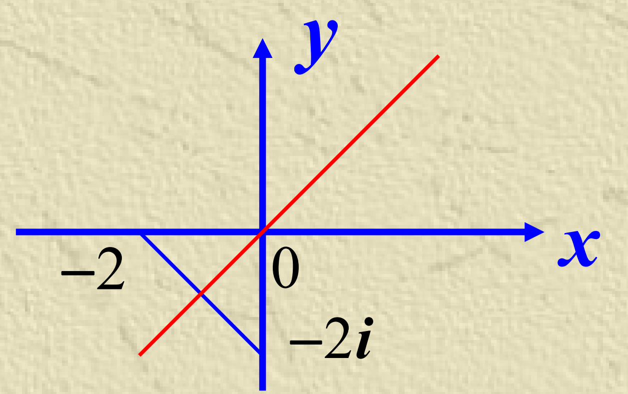
$\therefore\ |x+(y+1)i|^2=4$ 即 $x^2+(y+1)^2=4$

(2) $|z+2i|=|z+2|$

解: 由几何意义，$|z+2i|=|z+2|$ 即 $|z-(-2i)|=|z-(-2)|$

表示到 $-2i$ 与到 -2 距离相等的点的轨迹

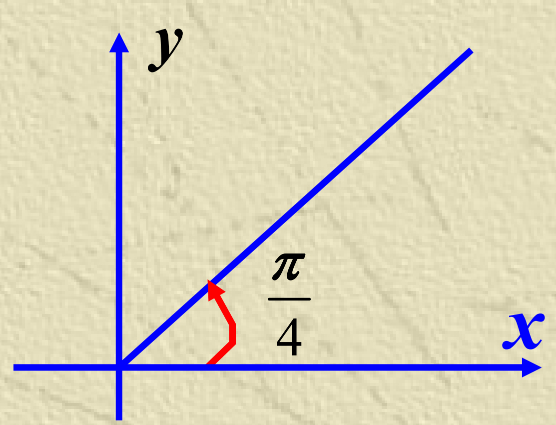
即 $y=x$



(3) $\arg z=\dfrac{\pi}{4}$

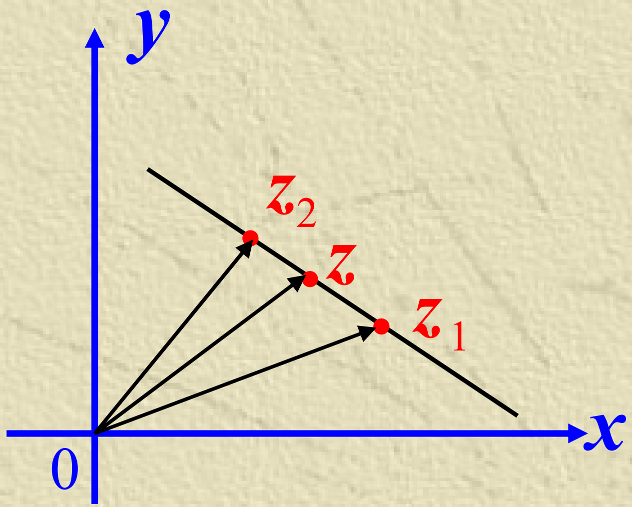
解: 由几何意义，$\arg z=\dfrac{\pi}{4}$ 表示主

辐角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的射线 $y=x\ (x>0)$



例2　求通过 z_1, z_2 两点的直线方程.

解:　由向量的性质



$$z - z_1 = t(z_2 - z_1) \quad t\text{是实数}$$

$$\therefore\ z = z_1 + t(z_2 - z_1), -\infty < t < +\infty$$

称为复数的参数方程

而 $z = z_1 + t(z_2 - z_1), 0 \le t \le 1$ 表示 z_1 到 z_1 的直线段

显然 z_1 与 z_2 的中点 $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$

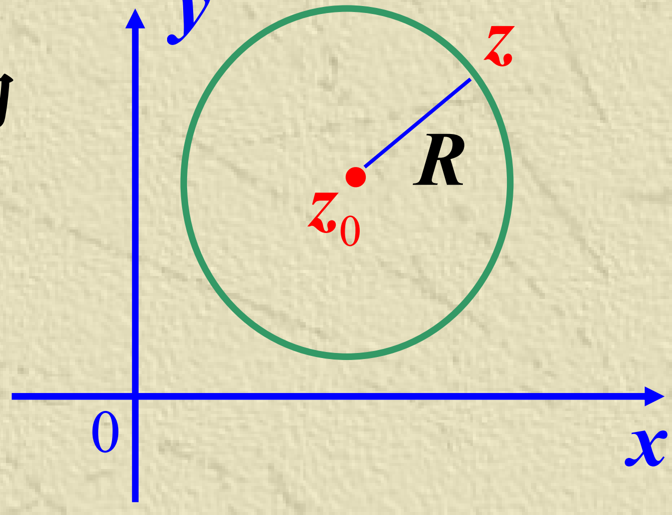
由此可知: 三点 z_1, z_2, z_3,共线 $\Leftrightarrow \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = t$ (实数)

例3 求以z_0为中心，R为半径的圆周方程.

解：由几何意义，圆的方程为

$$|z - z_0| = R \text{ 或 } z = z_0 + Re^{i\theta}$$

$$(0 \le \theta \le 2\pi, \theta\text{为参数})$$

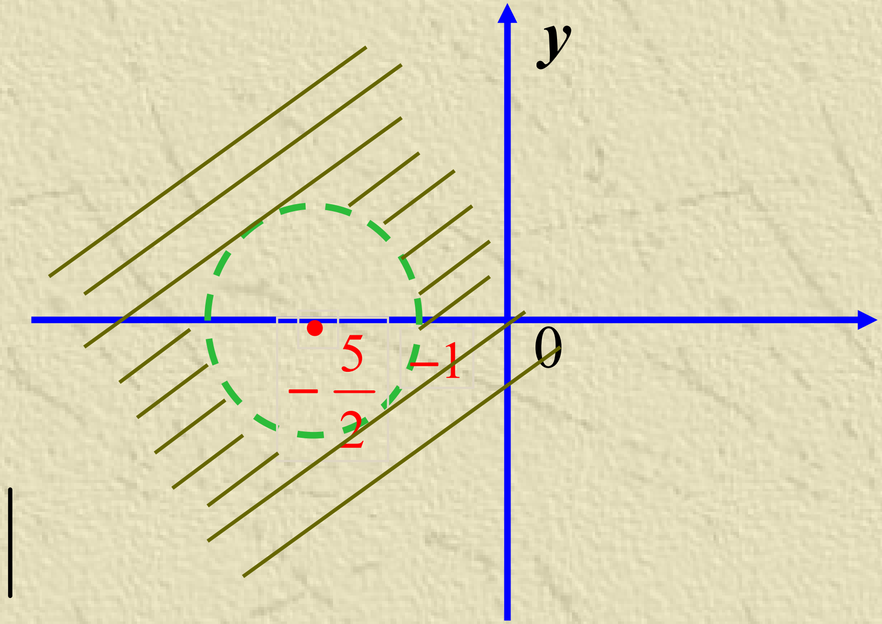


特别的，z_0为坐标圆点时，$|z| = R$ 或 $z = Re^{i\theta}$

$$(0 \le \theta \le 2\pi, \theta\text{为参数})$$

例4 指出满足下列条件的点 z 的全体所构成的图形.

(1) $\left|\dfrac{z-2}{z+2}\right|<3$



解: 设 $z=x+iy$,

则 $|z-2|<3|z+2|$

即为 $|(x-2)+iy|<3|(x+2)+iy|$

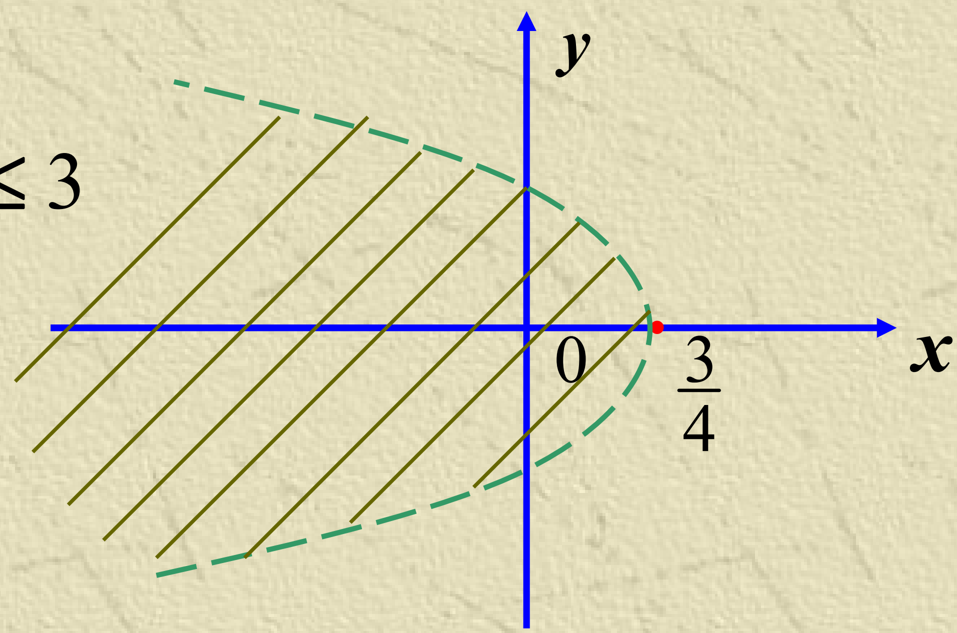
$$(x-2)^2+y^2<9(x+2)^2+9y^2$$

整理得: $\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+y^2>\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

(2) $2|z| + 2\,Re\,z \le 3$

解: 设 $z = x + iy$, 则 $2|z| + 2\,Re\,z \le 3$

即为 $2\sqrt{x^2 + y^2} + 2x \le 3$



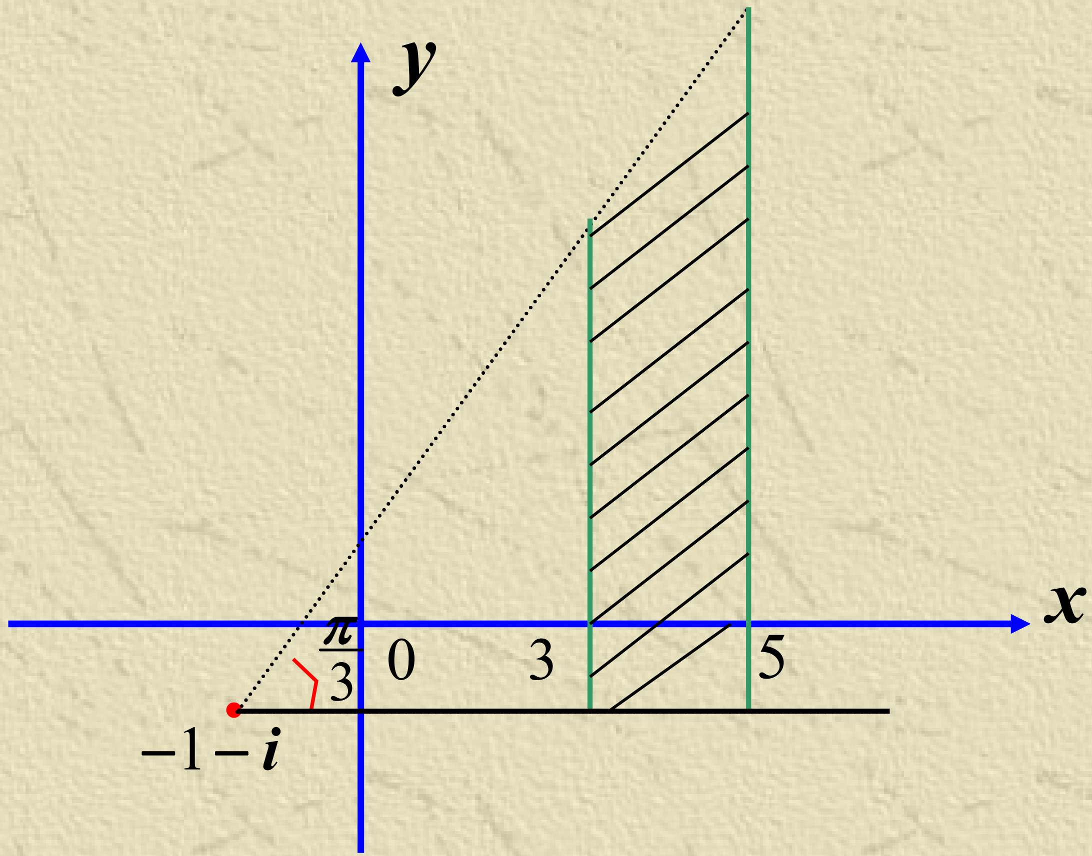
整理得: $y^2 < -3x + \dfrac{9}{4}$

第一节 复数及其代数运算

(3) $0 \le \arg(z+1+i) < \frac{\pi}{3}$ 且 $3 \le \operatorname{Re} z \le 5$

解: 由几何意义: $\begin{cases} 0 \le \arg[z-(-1-i)] < \frac{\pi}{3} \\ 3 \le \operatorname{Re} z \le 5 \end{cases}$

如图:



另解:

设 $z = x + iy$, 则由 $0 \le arg\left[\left(x+1\right)+i\left(1+y\right)\right] < \dfrac{\pi}{3}$

得 $0 \le arctan\dfrac{1+y}{1+x} < \dfrac{\pi}{3}$

即 $0 \le \dfrac{1+y}{1+x} < \sqrt{3}$

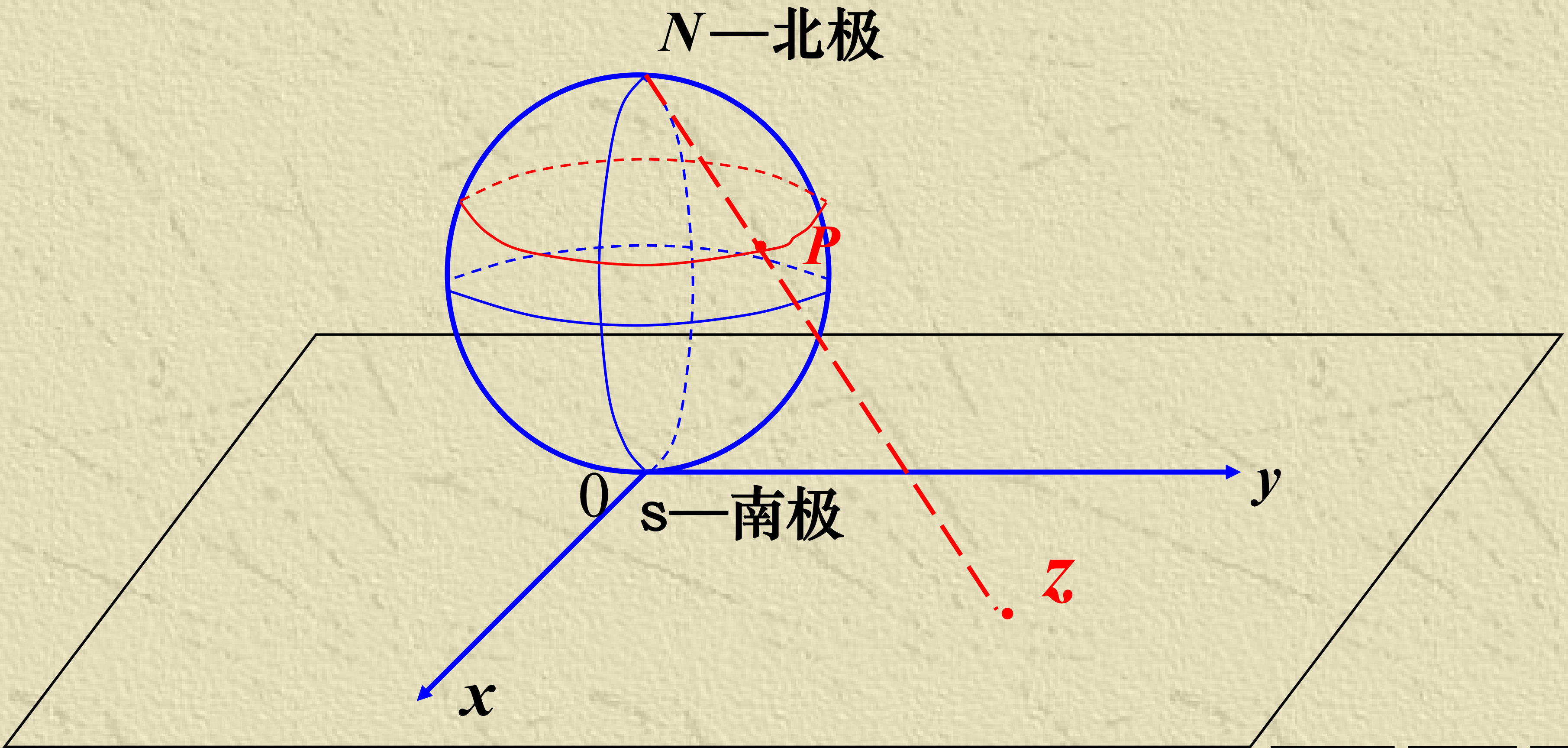
解出: $-1 \le y < \left(\sqrt{3}-1\right)+\sqrt{3}x$ 且 $3 \le x \le 5$, 如图.

五、复球面

作一球面与复平面在坐标圆点相切

则复平面上点$z \xleftrightarrow{\text{一一对应}}$球面上点$P$(除$N$点)

当$|z| \to +\infty$时，$P \to N$



规定: N极 $\leftrightarrow$ 平面上无穷远点

$\leftrightarrow$ 复数为无穷大，记作∞

称球面为复球面 —— 对应的平面(含∞)为扩充复平面；

而不含∞的平面为有限复平面.

关于∞的四则运算:

加法: $a+\infty=\infty+a=\infty \quad (a\neq\infty)$

减法: $a-\infty=\infty-a=\infty \quad (a\neq\infty)$

乘法: $a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty \quad (a\neq 0)$

除法: $\dfrac{a}{\infty}=0,\quad \dfrac{\infty}{a}=\infty \quad (a\neq\infty),\quad \dfrac{a}{0}=\infty \ (a\neq 0)$

满足下列条件的点 z 的全体所构成的图形

$(1)\ |z+1| = |z-1|$

$(2)\ |z+1| + |z-1| \le 4$

$(3)\ 0 < \arg(z-1) < \dfrac{\pi}{4}$ 且 $2 \le \mathrm{Re}\, z \le 3$

解　(1) 等式 $|z+1|=|z-1|$ 的几何意义为动点 z 到点 -1 的距离等于到点 1 的距离，这样的点 z 的轨迹为连接点 -1 与 1 的线段的中垂线.

令
$$z=x+iy$$
则由
$$|z+1|=|z-1|$$
得
$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$
即
$$x=0$$

(2) 等式 $|z+1|+|z-1|=4$ 的几何意义为：动点 z 到定点 -1 的距离与到定点 1 的距离之和为 4，这表示以 -1，1 为焦点，4 为长轴长度的椭圆，所以 $|z+1|+|z-1|\leqslant 4$ 表示这个椭圆的内部及边界所成的闭区间域.

设 $z=x+iy$，则

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=4-\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

两边平方后化简，得

$$3x^2+4y^2=2$$

即

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

所以

$$|z+1|+|z-1|\leqslant 4$$

为

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\leqslant 1$$

(3) 令 $z=x+iy$,则 $\operatorname{Re}z=x$

由 $2\leqslant \operatorname{Re}z\leqslant 3$ 知 $2\leqslant x\leqslant 3$, $z-1=x-1+iy$ ①

由

$$0<\arg(z-1)<\frac{\pi}{4},\ \arg(z-1)=\arctan\frac{y}{x-1}$$

即

$$0<\arctan\frac{y}{x-1}<\frac{\pi}{4}$$

所以

$$0<\frac{y}{x-1}<1$$

由于

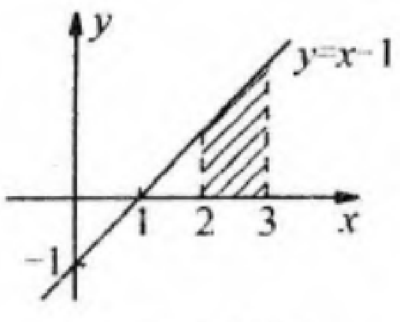
$$x-1>0$$

所以

$$0<y<x-1 \qquad ②$$

由①②式知,所求图形为

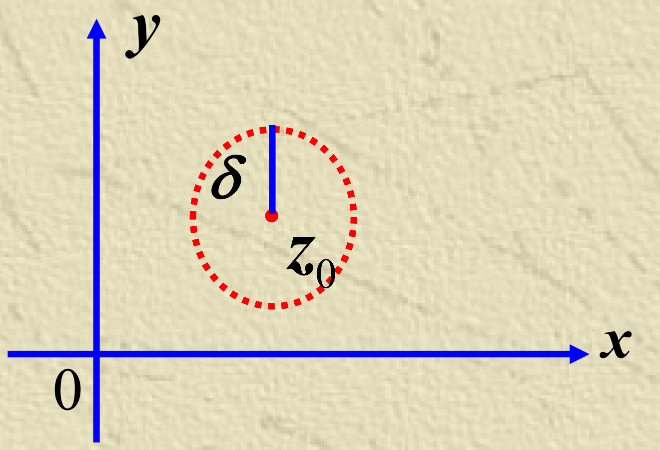
$$\begin{cases}0<y<x-1\\ 2\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$



§ 4 - § 6 复变函数（极限、概念、连续）

一、区域

1. 邻域:



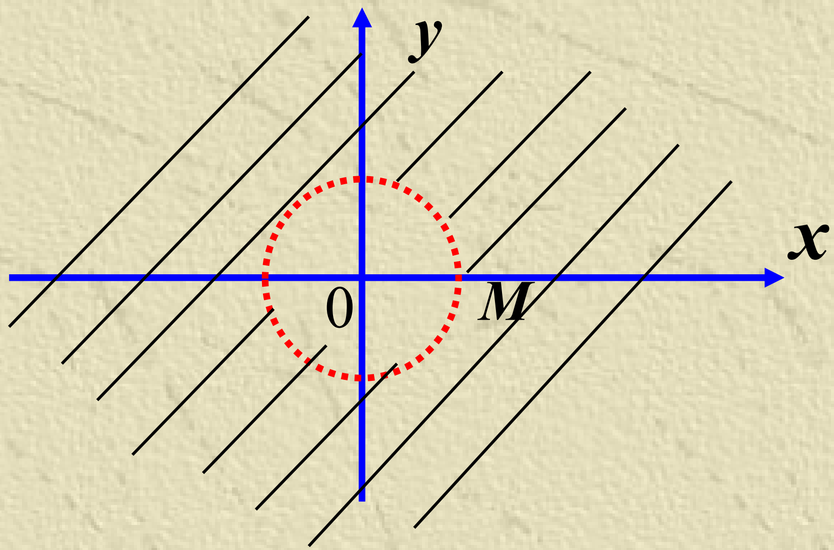
已知复数z_0，实数$\delta > 0$

$$N_\delta(z_0) = \{ z \mid |z - z_0| < \delta \}$$

去心邻域：$N_\delta(\hat{z}_0) = \{ z \mid 0 < |z - z_0| < \delta \}$

无穷远点邻域：$N_M(\infty)=\{z \mid |z|>M, M>0\}$

去心邻域：$N_M(\hat{\infty})=\{z \mid M<|z|<+\infty\}$



2. 内点：

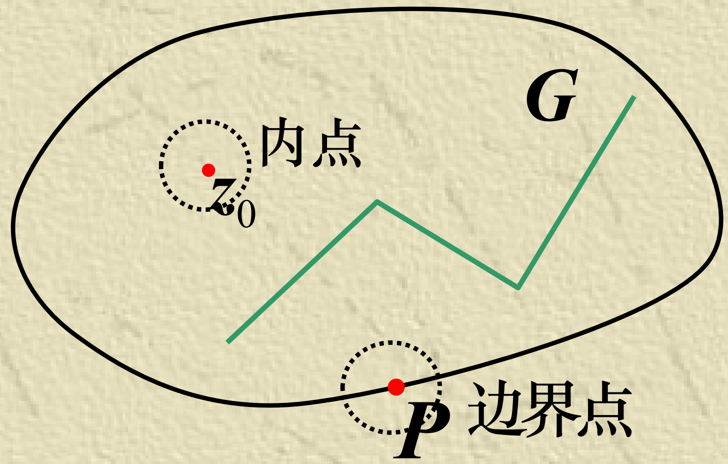
设G为平面点集，$z_0 \in G$,若$\exists N_\delta(z_0) \subset G$

称z_0为G的内点

3. 开集： 若G内每一点都是内点，称G是开集

4. 区域： 连通的开集称为开区域，简称区域

（连通集是指集合内任何两点可用完全属于集合的折线连接起来）



5. 边界点：

设D为一区域，若点P的任意$N_\delta(P)$内，有属于D的点，也有不属于D中的点，称P为D的边界点。

边界：D的边界点的全体.记作∂D

6. 闭区域：开区域$+$边界$=$闭区域，记作$\overline{D}$

7. 有界区域：若$\exists M>0$,对$\forall z\in D$,有$|z|\le M$

称D为有界区域，否则，为无界区域.

二、单连通与复连通域

1. 平面曲线的几个概念

(1) 连续曲线:

设 $x(t), y(t)$ 是实变量 t 的连续函数，则

曲线C: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(a \le t \le b)$为平面上连续曲线.

如果令 $z(t) = x(t) + iy(t)$，则曲线C又记为$z = z(t)$，

称为复变量实参数曲线方程。

(2) 光滑曲线:

设 $x'(t), y'(t)$ 连续，且对 $\forall t \in [a,b]$

$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$, 则曲线 $z = z(t)$ 为光滑曲线.

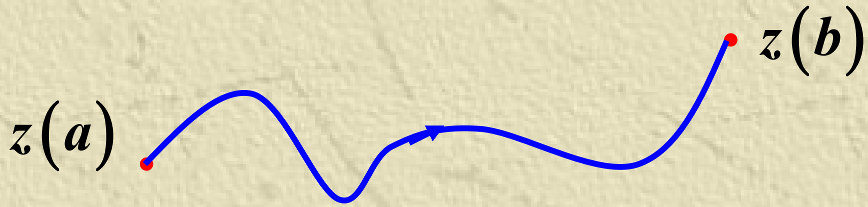
(3) 简单曲线: 对连续曲线 C: $z = z(t)$ $(a \leq t \leq b)$

1° 若 $t_1 \neq t_2$ 时，$z(t_1) \neq z(t_2)$, 则称 C 为简单曲线

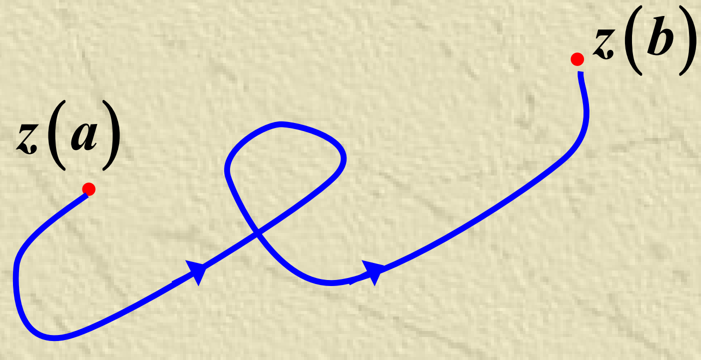
或若当曲线 $(Jardan)$ (直观上为无重点曲线);

2° 若只有 $z(a) = z(b)$ (即起点、终点重合),

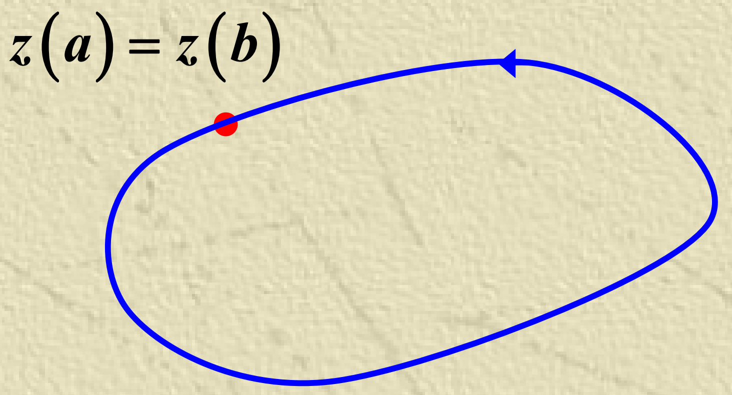
则称曲线为简单闭曲线.



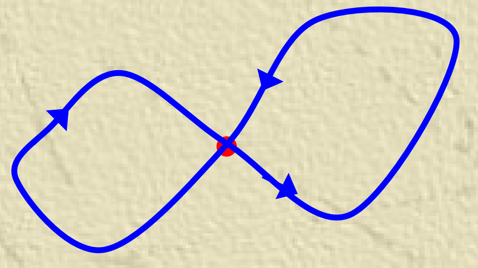
简单曲线



非简单曲线



简单闭曲线

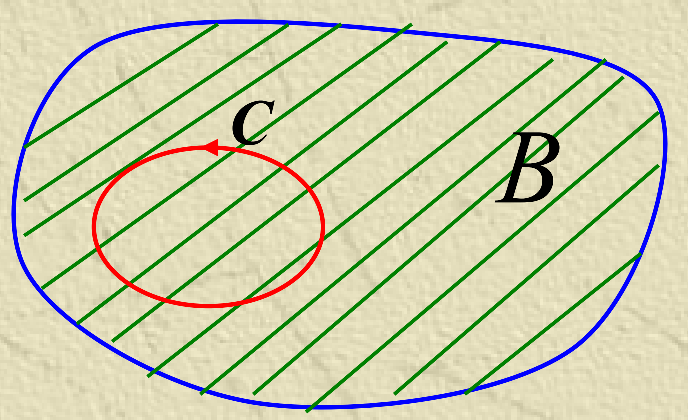


非简单闭曲线

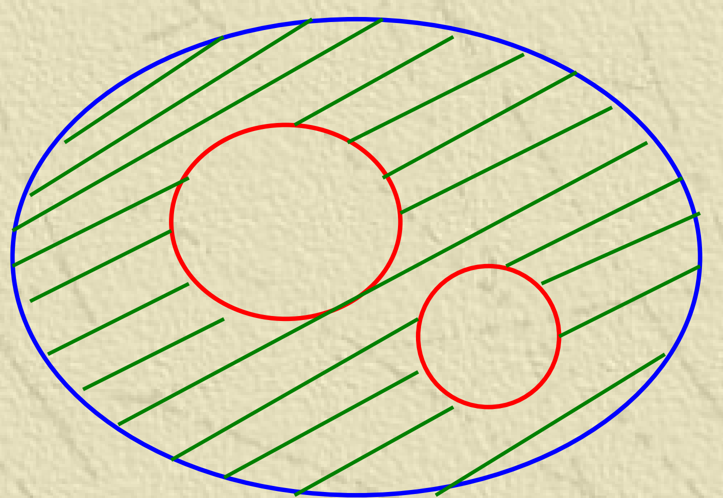
2. 单连通区域:

若区域B内任何一条简单闭曲线，在B内可以经过连续的变形而缩成一点，则称B为单连通区域.

多连通区域: 不是单连通的连通区域.



单连通域（无洞）



多连通域（有洞）

三、复变函数

1. 定义： 设G是复数$z=x+iy$构成的集合，

若对$\forall z\in G \xrightarrow{\text{按法则}} \exists$（一个或多个）$w=u+iv$对应

则称复变数w是复变数z的函数.

记作：$w=f(z)$，$z\in G$

G—定义域，$G^*=\{w \mid w=f(z), z\in G\}$—值域

单值函数：如 $w=z^2$, $w=\operatorname{Re} z$, $w=\bar{z}$等等.

多值函数：如 $w=\sqrt[3]{z}$, $w=\operatorname{Arg} z$等等.

2. 复变函数与实变函数的关系

$$\because\ z = x + iy \leftrightarrow (x, y)\ ,\quad w = u + iv \leftrightarrow (u, v)$$

$$\therefore\quad w = f(z):\ \forall (x, y) \in G \xrightarrow{\ f\ } \exists (u, v) \in G^{*}$$

等价于确定了两个实变量二元函数

$$u = u(x, y),\ v = v(x, y)$$

故记 $\quad w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

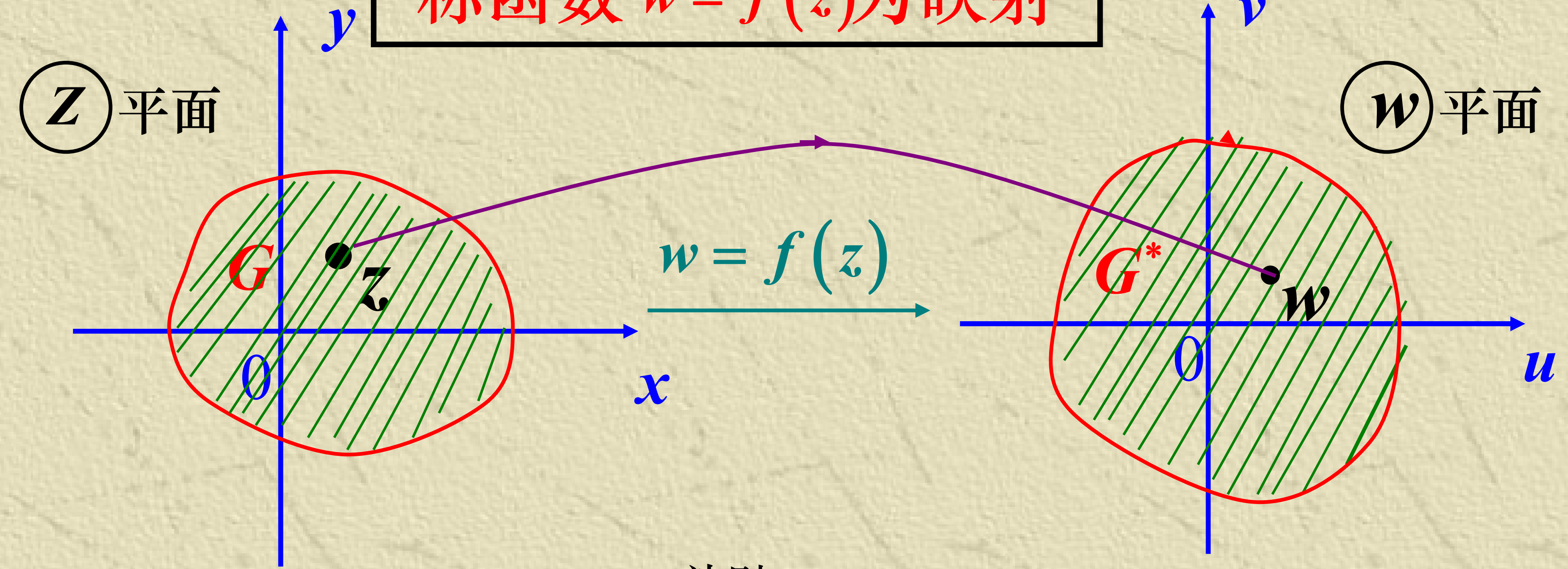
例如: $\quad w = z^2 \Leftrightarrow u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

即 $\quad u = x^2 - y^2\ ,\quad v = 2xy$

3. $w=f(z)$的几何意义

定义域$G \xrightarrow[\text{或变换}]{\text{映射}}$值域$G^*$ 即 $\forall z \in G \to w \in G^*$
(原象点) (象点)

$\boxed{\text{称函数 } w=f(z) \text{为映射}}$



反之：若$\forall w \in G^* \xrightarrow{\text{法则}\varphi} \exists z \in G$,

称此映射为逆映射(或反变换、反函数)

例1 问：下列区域在映射 $w=z^2$ 下的象图形是怎样的?

$$(1)\quad G:\begin{cases}|z|<1\\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

解: 设 $z=re^{i\theta}$， $w=\rho e^{i\varphi}$

$\because\ w=z^2 \quad \therefore\ \rho e^{i\varphi}=r^2e^{i\cdot 2\theta}$ 故 $\rho=r^2$， $\varphi=2\theta$

$$\therefore\ G:\begin{cases}|z|<1\\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\xrightarrow[w=z^2]{\text{映射}} G^*:\begin{cases}|w|<1\\ 0<\arg w<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

(2) $1 < \mathrm{Re}\, z < 2$

解： 设 $z = x + iy$, $w = u + iv$

则 $w = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$,

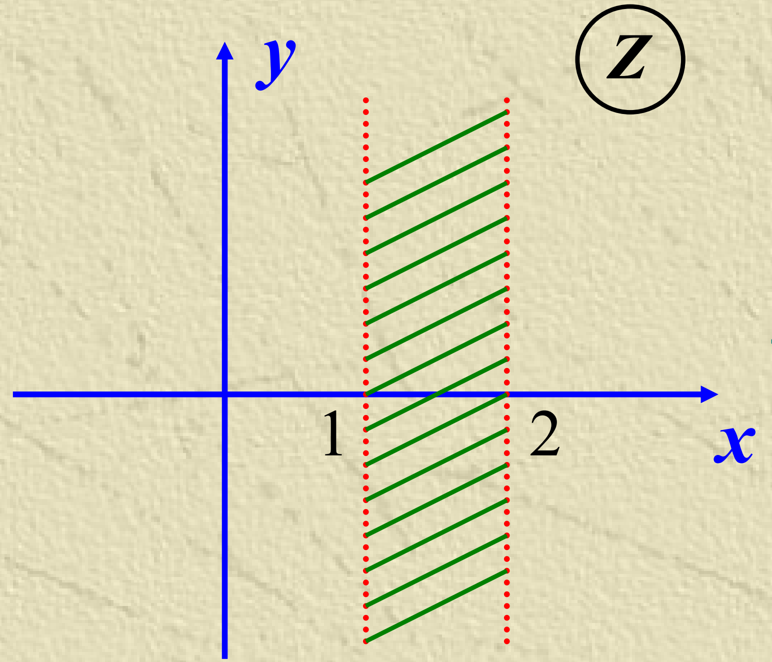
即 $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$

$\therefore$ 直线 $x = 1 \xrightarrow{\text{映射}} \begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = 2y \end{cases}$

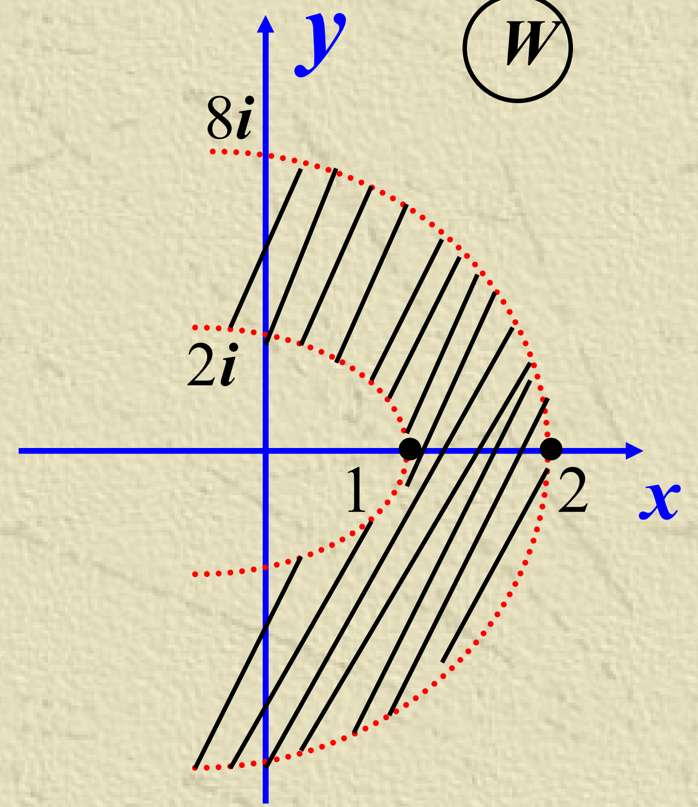
消去y得：$u = 1 - \dfrac{v^2}{4}$ (抛物线)

直线 $x=2 \xrightarrow{\text{映射}} \begin{cases} u=4-y^2 \\ v=4y \end{cases}$

消去y得：$u=4-\dfrac{v^2}{16}$ (抛物线)

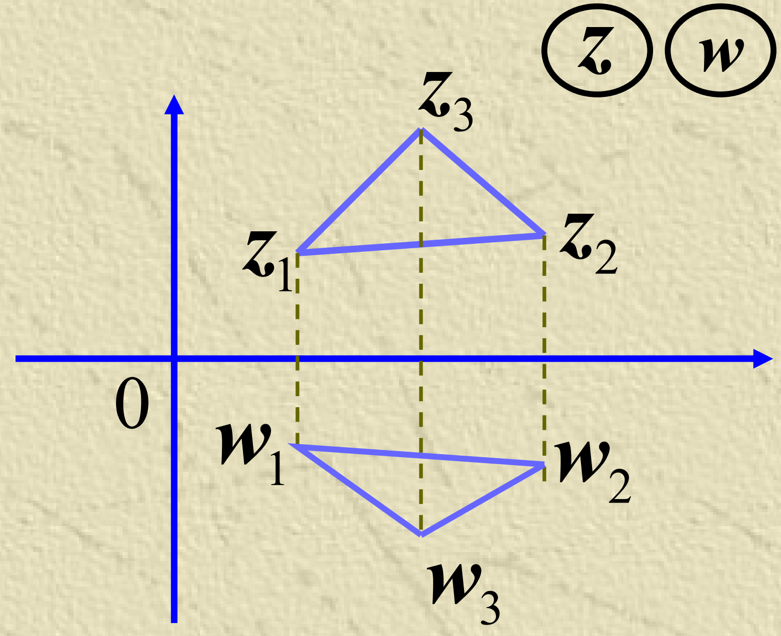


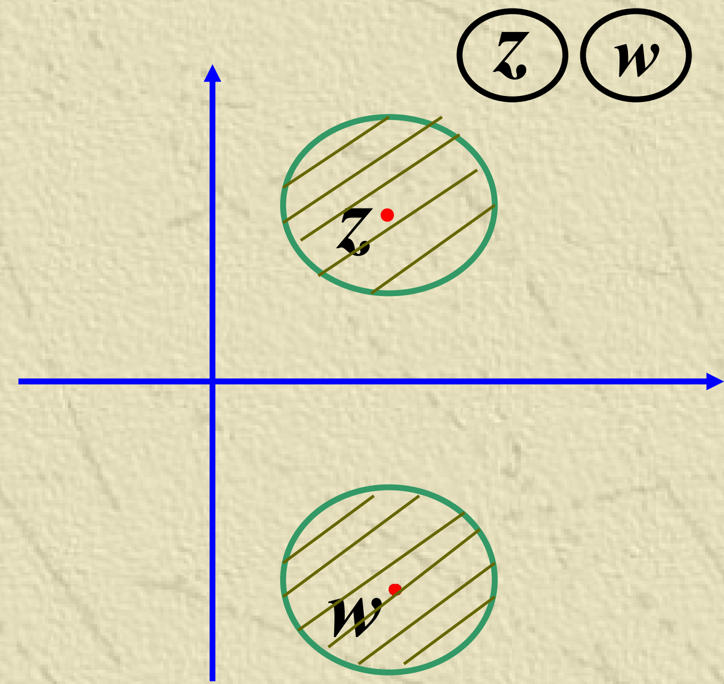
$\xrightarrow[\text{映射}]{w=z^2}$



例2 对称映射 $w=\bar{z}$ 将任何图形映射为关于实轴对称的全同图形.

例如:





注: Z平面与W平面重合.

例3. 求曲线 $x^2+y^2=4$ 在反演映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 下的象曲线.

解: **法 1 .** 设 $z=x+iy,\quad w=u+iv$

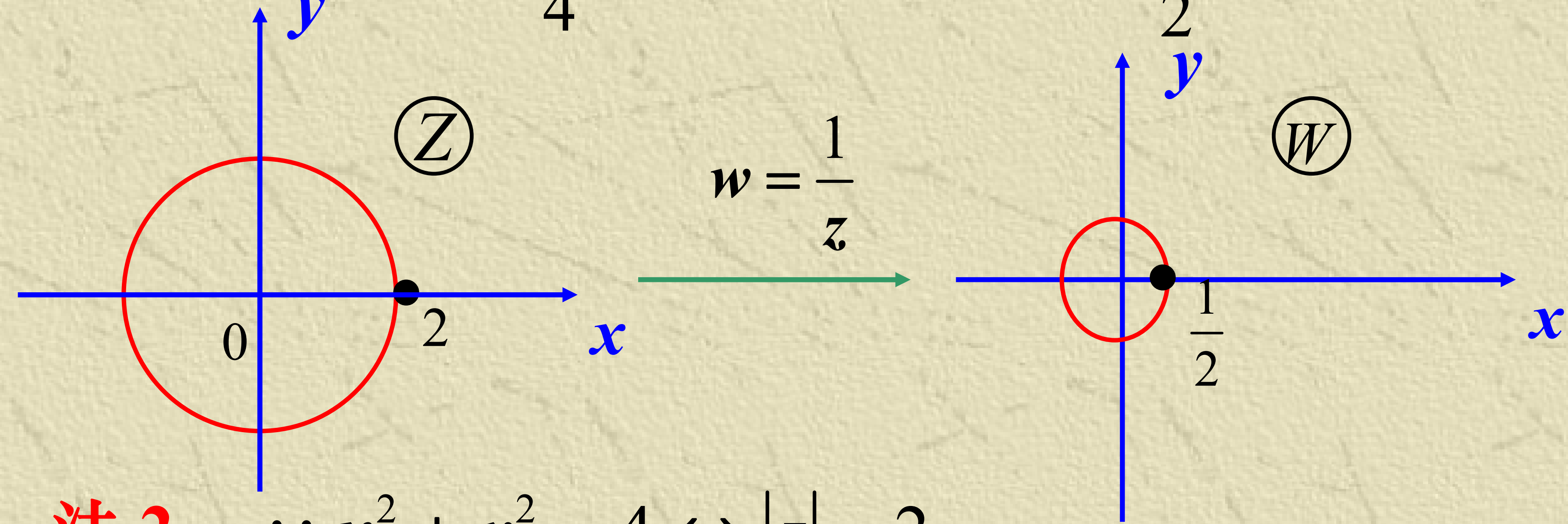
则由 $w=\dfrac{1}{z}\Rightarrow z=\dfrac{1}{w}$,

$$x+iy=\frac{1}{u+iv}=\frac{u}{u^2+v^2}-i\frac{v}{u^2+v^2}$$

得 $x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$, $y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}$

$$\therefore \text{曲线 } x^2+y^2=4 \xrightarrow[\text{映射}]{w=\frac{1}{z}} \left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2+\left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)^2=4$$

化简得：$u^2+v^2=\dfrac{1}{4}$ 　即象线是半径为$\dfrac{1}{2}$的圆



法 2 　$\because x^2+y^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$

$$\therefore \quad |w|=\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{2}$$

即象线为$|w|=\dfrac{1}{2}$，是半径为$\dfrac{1}{2}$的圆.

四、复变函数的极限和连续性

1. 极限定义： 已知 $w=f(z)$ 在 $(\hat{z}_0)$ 内有定义

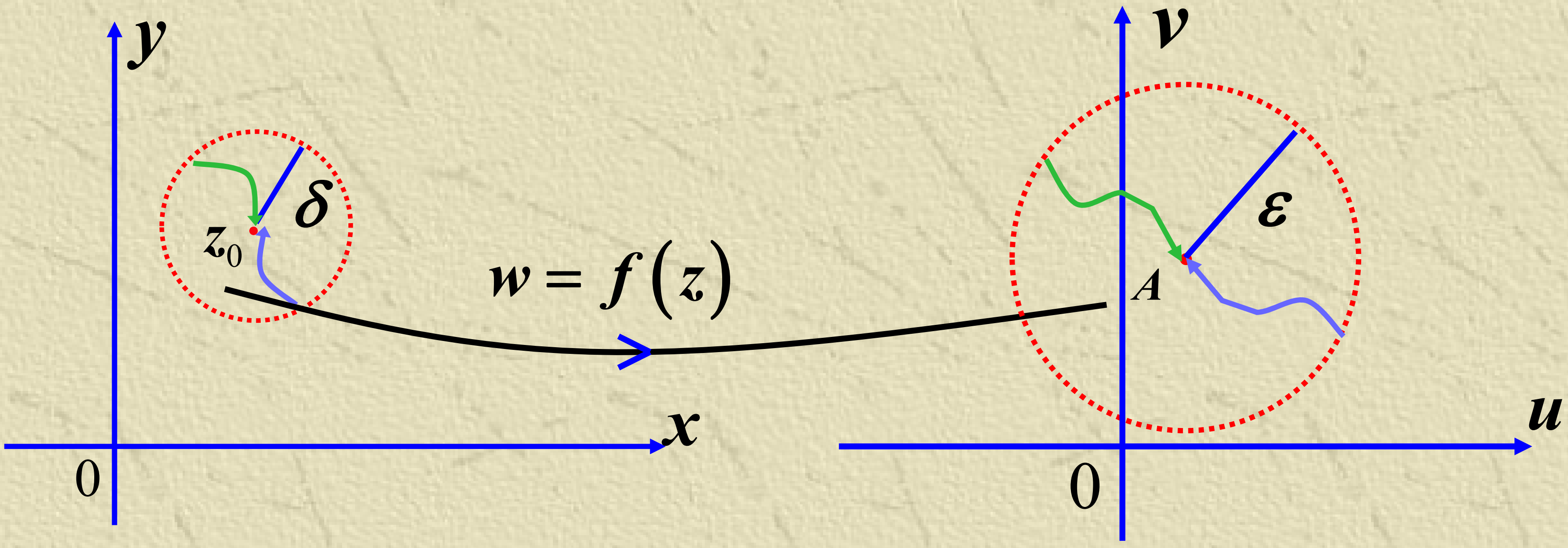
如果 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0$，当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$\left|f(z)-A\right|<\varepsilon$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z\to z_0$ 时的极限.

记作：$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 或 $z\to z_0$ 时，$f(z)\to A$

几何意义：



说明： $f(z)\to A$ 是指 z 以任何方式趋于 z_0 时，

极限值都为 A，否则，极限不存在.

定理1: 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$,

$$A=u_0+iv_0\ ,\ z_0=x_0+iy_0$$

则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$

$$\overset{\text{充要}}{\underset{\text{条件}}{\Longleftrightarrow}} \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0\ ,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$$

证明：书上26页

注: 此定理的意义在于，复变量函数极限问题，可转化为求实变量二元函数的极限问题.

例4 设 $f(z)=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}}-\dfrac{\bar{z}}{z}\right)\quad(z\neq 0)$

证明：当 $z\to 0$时，$f(z)$的极限不存在

证明： **法 1：** 令 $z=x+iy$

则 $$f(z)=\frac{z^2-\bar{z}^2}{2i\,\bar{z}z}=\frac{4xyi}{2i\left(x^2+y^2\right)}=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$\therefore\ u(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}\ ,\quad v(x,y)=0$$

而当$(x,y)\xrightarrow{\text{设 } y=kx}(0,0)$时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} u(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2}$$

k取不同时，极限值不相等.

$$\therefore \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)\text{不存在}$$

故 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$不存在

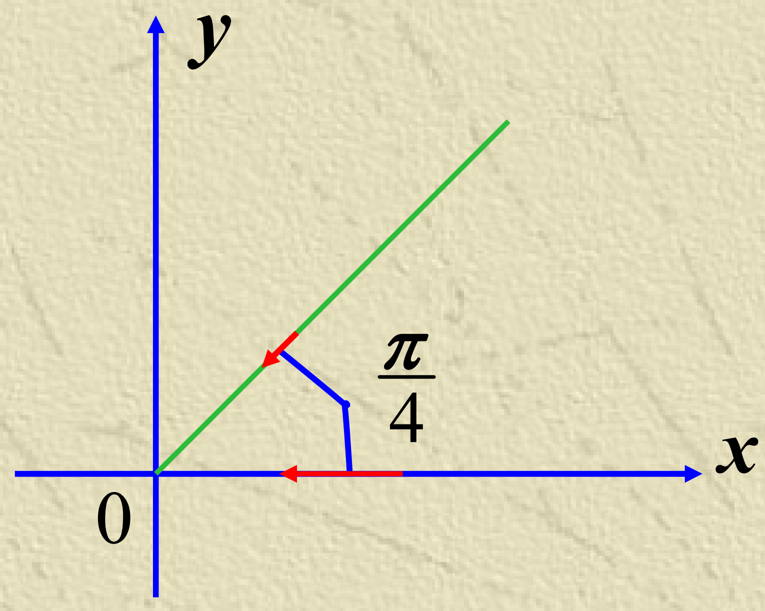
法 2： 令 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

则 $$f(z)=\frac{z^2-\bar{z}^2}{2i\bar{z}z}=\frac{1}{2i}\cdot\frac{4r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}=\sin 2\theta$$

故当 $z\xrightarrow{沿\theta=0}0$时，$\lim\limits_{\substack{z\to 0\\(\theta=0)}}f(z)=0$

当 $z\xrightarrow{沿\theta=\frac{\pi}{4}}0$时，

$$\lim_{\substack{z\to 0\\\left(\theta=\frac{\pi}{4}\right)}}f(z)=1$$



故 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)$不存在

定理2 （四则运算法则）

若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A,\ \lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, 则

$$(1)\quad \lim_{z\to z_0}\left[f(z)\pm g(z)\right]=A\pm B$$

$$(2)\ \lim_{z\to z_0} f(z)g(z)=AB$$

$$(3)\ \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0)$$

2. 连续定义：

(1)如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续；

(2)如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续，称 $f(z)$ 在 D 内连续.

连续的等价定义：

(1) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$\left|f(z)-f(z_0)\right|<\varepsilon$$

(2) $\lim\limits_{\Delta z\to 0} f(z_0+\Delta z)=f(z_0)$ ，

(3) $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\Delta w=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left[f(z_0+\Delta z)-f(z_0)\right]=0$ ，

定理 3:

函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在$z_0=x_0+iy_0$点连续

$\overset{\text{充要}}{\underset{\text{条件}}{\Leftrightarrow}}$ $u(x,y)$和$v(x,y)$在(x_0,y_0)点连续

例5 (1) $f(z)=\bar{z}=x-iy$在Z平面上处处连续

(2) $g(z)=z^2=x^2-y^2+2xyi$在Z平面上处处连续

(3) $\varphi(z)=ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$除$(0,0)$点外处处连续

定理4:

(1) 连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍连续.

(2) 若 $h=g(z)$ 在 z_0 点连续, $w=f(h)$ 在 $h_0=g(z_0)$ 连续

则复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 z_0 点连续.

例如:

(1) 多项式 $P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 在 Z 平面处处连续.

(2) 有理分式 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}=\dfrac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n}$ 除使 $Q(z)=0$

的点外处处连续.

特别指出：

(1) $f(z)$在曲线C上 z_0 点连续的意义是指

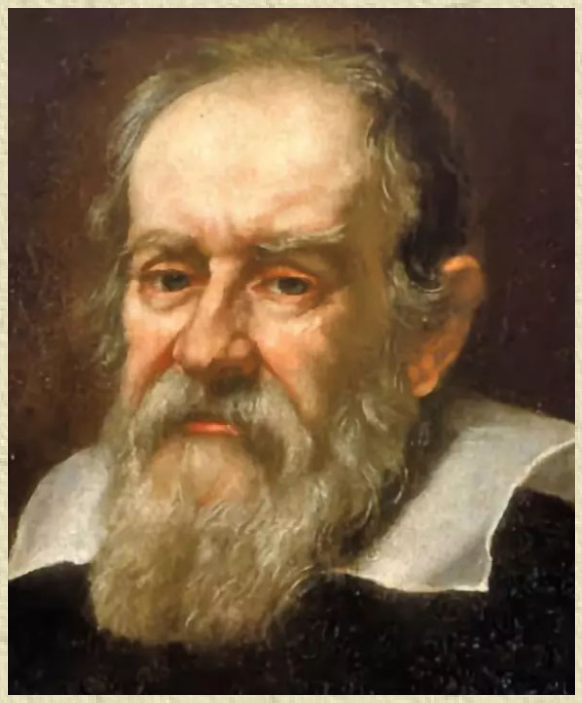
$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0) \quad z\in C$$

(2) 在闭曲线或包括曲线端点上连续的函数$f(z)$，

必在曲线C上是有界的

即$\exists M>0$，在C上恒有 $|f(z)|\le M$.

作业：P_{33}　25　1)~4)，26，27，29，32



阿基米德（公元前287年—公元前212年），伟大的古希腊哲学家、百科式科学家、数学家、物理学家、力学家，静态力学和流体静力学的奠基人，并且享有“力学之父”的美称，阿基米德和高斯、牛顿并列为世界三大数学家。

- 真假皇冠：物体在液体中所受浮力等于它所排开液体的重量
- 保卫西拉斯鸠：应用杠杆原理于战争
- 确立了静力学和流体静力学的基本原理
- 给出许多几何图形重心的求法
- 采用分割法求椭球体、旋转抛物体等的体积

德国著名数学家、物理学家、天文学家、大地测量学家，近代数学奠基者之一。一生成就极为丰硕，以他名字“高斯”命名的成果达110个，属数学家中之最。他对数论、代数、统计、微分几何、大地测量学、地球物理学、力学、静电学、天文学、矩阵理论和光学皆有贡献

- 11岁时发现了二项式定理
- 17岁时发明了二次互反律
- 18岁时发明了正十七边形的尺规作图法
- 等差数列求和、质数分布定理
- 高斯钟形曲线，标准正态分布（或高斯分布）
- 谷神星的椭圆轨道：最小二乘法

牛顿（1643年1月4日—1727年3月31日），爵士，英国皇家学会会长，英国著名的物理学家，百科全书式的“全才”。他在1687年发表的论文《自然定律》里，对万有引力和三大运动定律进行了描述。这些描述奠定了此后三个世纪里物理世界的科学观点，并成为了现代工程学的基础。

- 微积分学：牛顿与莱布尼茨独立发展
- 证明了广义二项式定理，提出了“牛顿法”以趋近函数的零点，并为幂级数的研究做出了贡献
- 反射望远镜：棱镜可以将白光发散为彩色光谱，而透镜和第二个棱镜可以将彩色光谱重组为白光

科学(S)：发现客观存在事实和规律的过程，“发现”

技术(T)：关于“做什么”、“怎么做”的知识，“发明”

工程(E)：是一个活动，它是制作产品的过程，“建造”

数学(M)：对数量关系的研究

理论几何学、三角学、拓扑学、测度论、分形理论、实分析、复分析、泛函分析、微分方程、动力系统、混沌理论、

组合数学、计算理论、密码学、图论、

数学物理、数学流体力学、数值分析、最优化、概率论、统计学、

计量金融、博弈论、数理经济学、生物数学、控制论