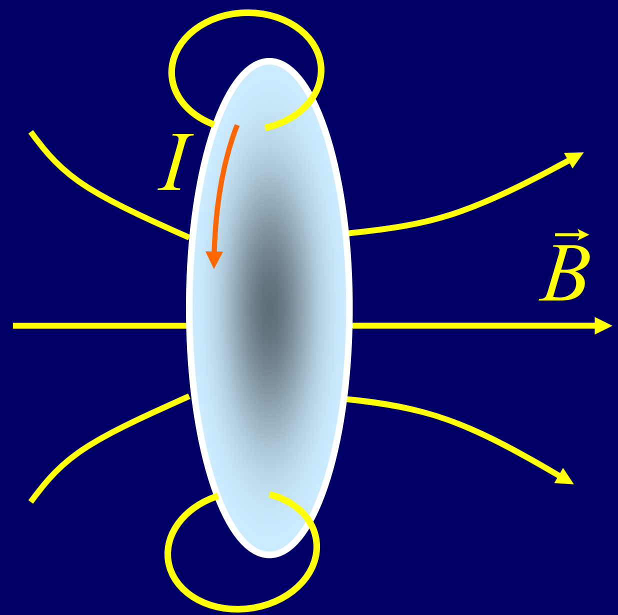
§12.3 自感　互感

一. 自感

1. 自感现象

$$I = I(t) \Longrightarrow \vec{B} = \vec{B}(t)$$

$$\Phi(t) = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \Longrightarrow \varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$



2. 自感系数

$$\boxed{\Psi = LI}$$

L　自感系数

SI:　***H***

3. 自感电动势

自感电动势 $$\varepsilon_L = -\frac{\mathrm{d}(LI)}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - I\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

若自感系数是一不变的常量 $$\boxed{\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}$$

- **自感具有使回路电流保持不变的性质** —— 电磁惯性

例：计算长直螺线管的自感系数

$$B = \mu_0 nI$$

$$\Psi = NBS = nl \cdot \mu_0 nI \cdot \pi R^2$$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 n^2 \pi R^2 l = \mu_0 n^2 V$$

例 设一载流回路由两根平行的长直导线组成。

求 这一对导线单位长度的自感L

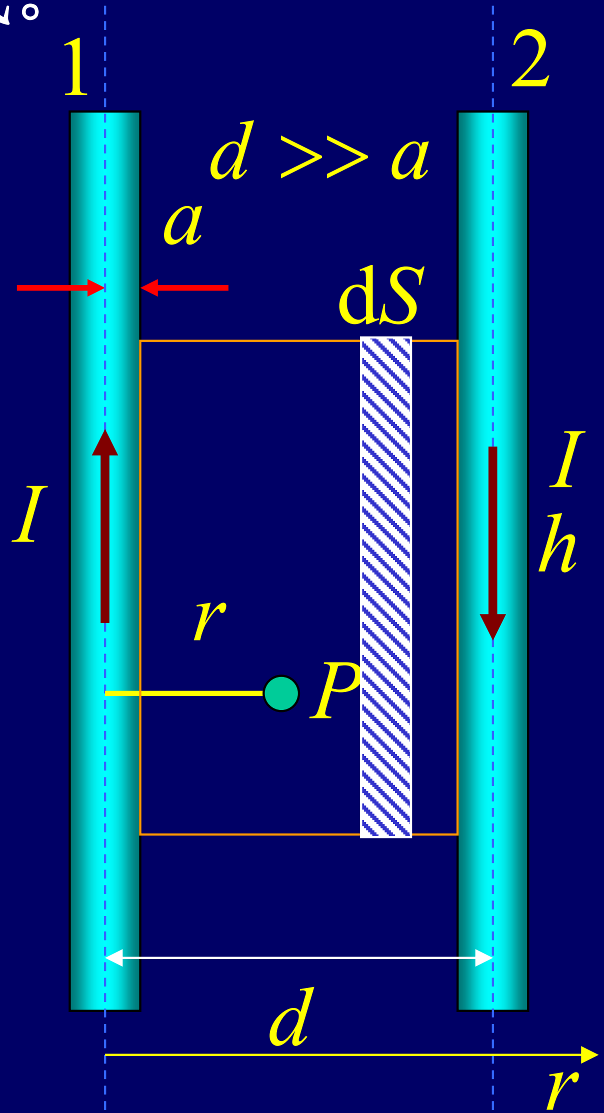
解 由题意，设电流回路 I

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi (d-r)}$$

取一段长为 h 的导线　$\Phi = \int_a^{d-a} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

$$\Phi = \int_a^{d-a} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi (d-r)}\right] h \mathrm{d}r$$

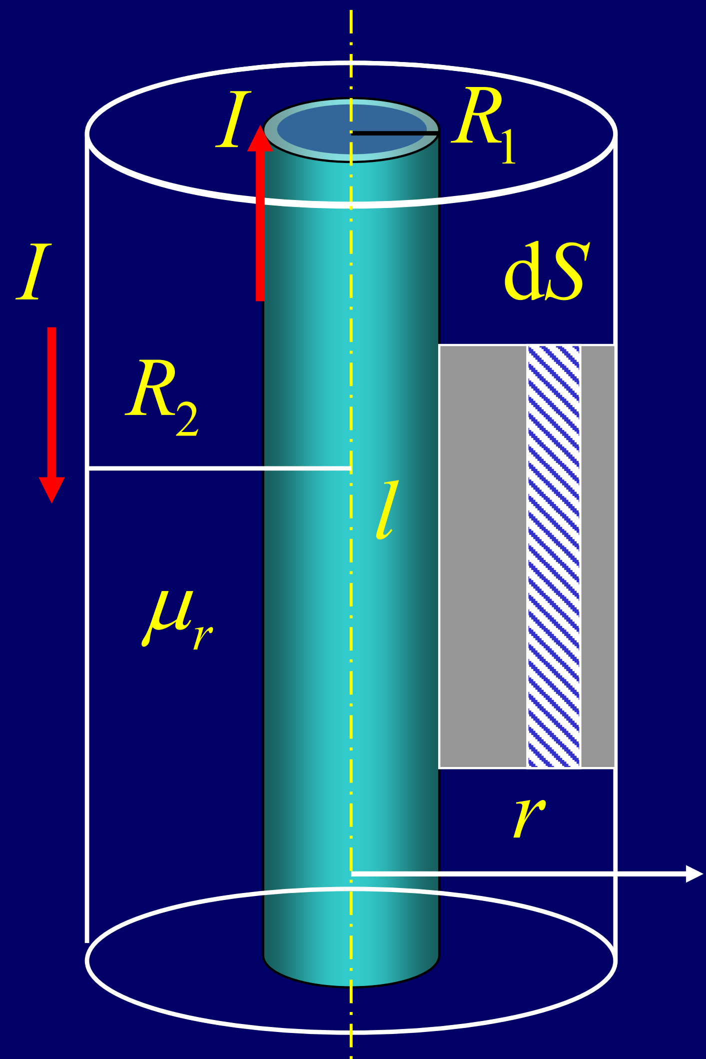
$$\Rightarrow \quad L = \frac{\Phi}{Ih}$$



例 同轴电缆由半径分别为 R_1 和 R_2 的两个无限长同轴柱面组成

求 无限长同轴电缆单位长度上的自感

解 由安培环路定理可知



$$R_1 < r < R_2 \qquad B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$$

$$r < R_1, r > R_2 \qquad B = 0$$

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} l \mathrm{d}r$$

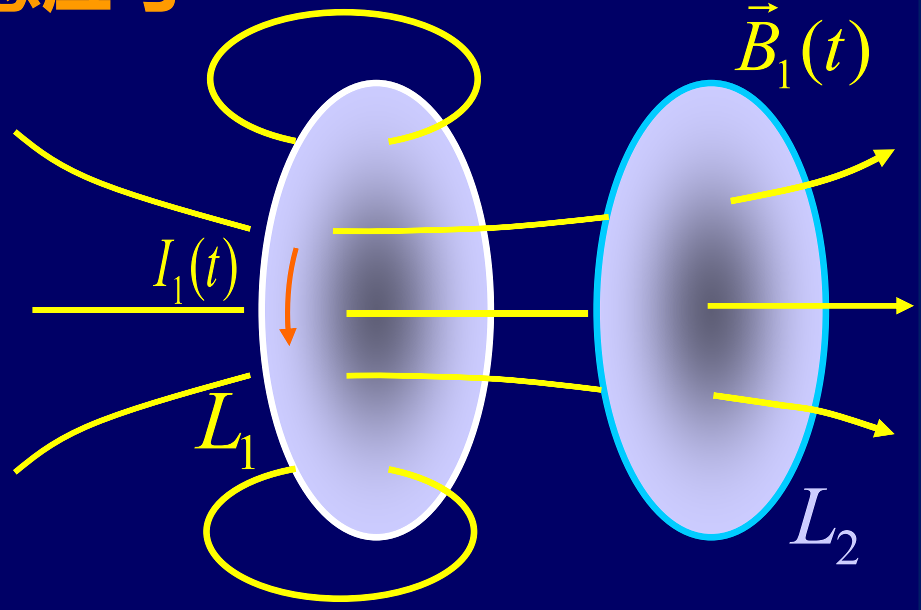
$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} l \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 \mu_r I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$L = \frac{\Phi}{Il} = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

二. 互感

线圈 1 中的电流在线圈2中产生的磁通 $\Psi_{21}(t)$

$$\boxed{\Psi_{21} = M_{21} I_1}$$



M_{21}是回路1对回路2的互感系数

- 互感电动势 $\varepsilon_{21} = -\dfrac{\mathrm{d}(M_{21}I_1)}{\mathrm{d}t} = -M_{21}\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - I_1\dfrac{\mathrm{d}M_{21}}{\mathrm{d}t}$

若互感系数是一不变的常量

$$\boxed{\varepsilon_{21} = -M_{21}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_{12} = -M_{12}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}}$$

例 计算共轴的两个长直螺线管之间的互感系数

设两个螺线管的半径、长度、匝数为 $R_1, R_2, l_1, l_2, N_1, N_2$

$$l_1 = l_2 = l, R_1 > R_2$$

解 设 $I_1 \Rightarrow B_1 = \dfrac{\mu_0 N_1 I_1}{l}$

$$\Psi_{21} = N_2 B_1 \pi R_2^2$$

$$= \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l} \pi R_2^2 I_1$$

$$M_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l} \pi R_2^2$$

设 $I_2 \Rightarrow B_2 = \dfrac{\mu_0 N_2 I_2}{l}$

$$\Psi_{12} = N_1 B_2 \pi R_2^2$$

$$M_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l} \pi R_2^2$$

$$\boxed{M_{12} = M_{21} = M}$$

- 耦合关系

耦合系数 $K=\dfrac{M}{\sqrt{L_1L_2}} \Rightarrow \begin{cases} K<1 & \text{有漏磁存在} \\ K=1 & \text{无漏磁存在} \end{cases}$

$$M_{21}=M_{12}=\frac{\mu_0 N_1 N_2}{l}\pi R_2^{\ 2}$$

$$B_1=\frac{\mu_0 N_1 I_1}{l} \Rightarrow \Psi_1=N_1 B_1 \pi R_1^{\ 2} \Rightarrow L_1=\frac{\Psi_1}{I_1}=\frac{\mu_0 N_1^{\ 2}}{l}\pi R_1^{\ 2}$$

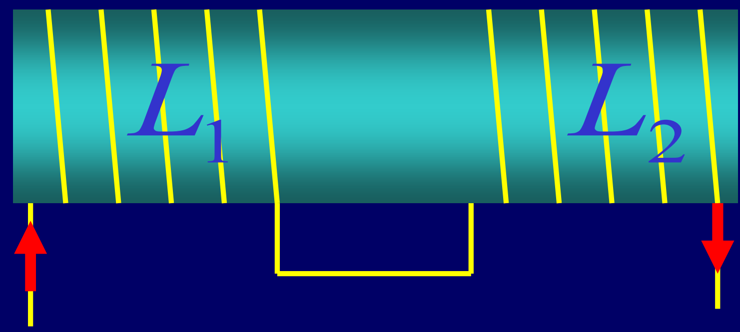
$$L_2=\frac{\mu_0 N_2^{\ 2}}{l}\pi R_2^{\ 2} \qquad \sqrt{L_1L_2}=\frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi R_1 R_2}{l}$$

$K=\dfrac{M}{\sqrt{L_1L_2}}=\dfrac{R_2}{R_1}<1$　　如　$l_1=l_2, R_1=R_2 \Rightarrow K=1$

若两线圈垂直 K=0

讨论

线圈之间的连接 — 自感与互感的关系



- 线圈的顺接

$$\Phi = \Phi_{11} + \Phi_{12} + \Phi_{21} + \Phi_{22}$$

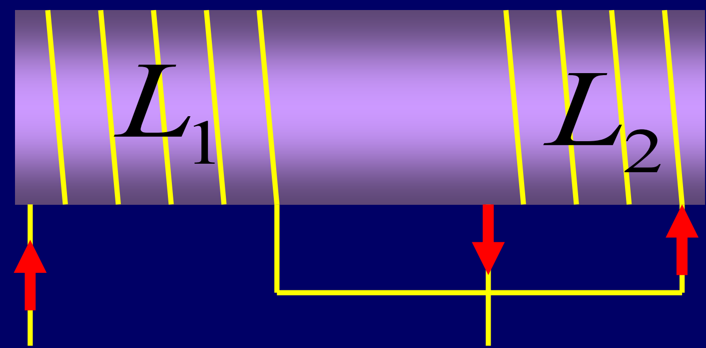
$$= L_1 I + M_{12} I + M_{21} I + L_2 I$$

$$= (L_1 + 2M_{21} + L_2) I$$

线圈顺接的等效总自感

$$\boxed{L = \frac{\Phi}{I} = L_1 + L_2 + 2M}$$

- 线圈的反接

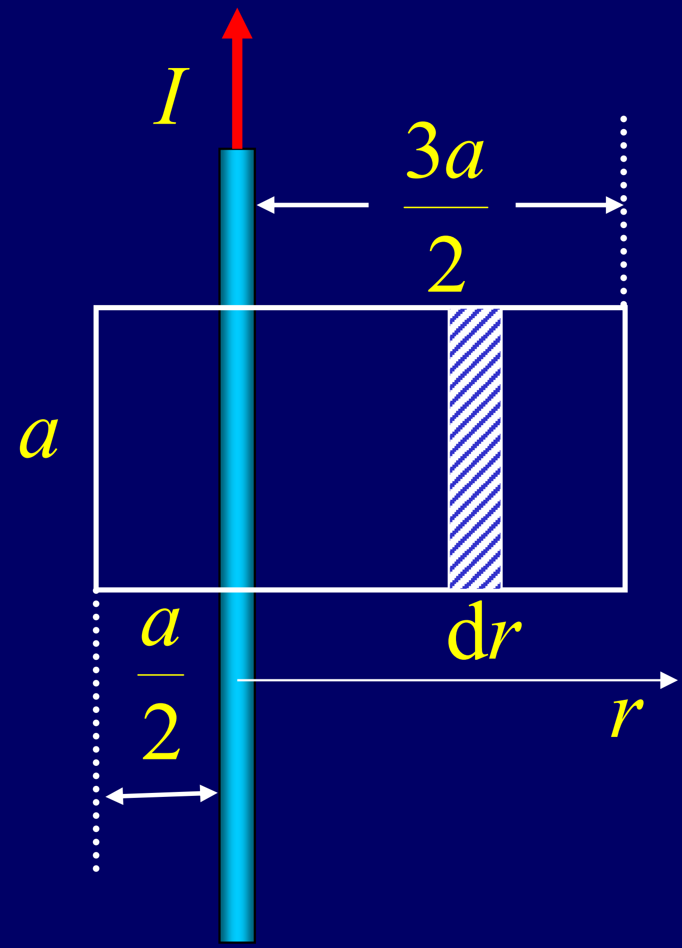


$$\Phi = L_1 I - M_{12} I - M_{21} I + L_2 I$$

$$\boxed{L = L_1 + L_2 - 2M}$$

例 一无限长导线通有电流 $I=I_0\sin\omega t$ 现有一矩形线框与长直导线共面。（如图所示）

求 互感系数和互感电动势



解 $$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

穿过线框的磁通量

$$\Phi=\int_{a/2}^{3a/2} B\,\mathrm{d}S=\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln 3$$

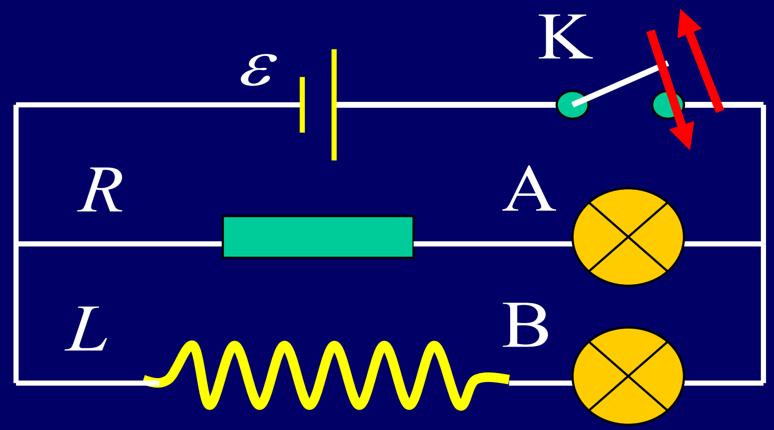
互感系数 $$M=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln 3$$

互感电动势 $$\varepsilon=-M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln 3 I_0\omega\cos\omega t$$

§ 12.4 磁场能量

一. 磁能的来源

- 实验分析



结论：**在原通有电流的线圈中存在能量 —— 磁能**

- 自感磁能

设在 dt 内通过灯泡的电量 $\mathrm{d}q = I\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}q\Delta u = \mathrm{d}q\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}I\mathrm{d}t = -LI\mathrm{d}I$$

$$A = \int \mathrm{d}A = \int_{I_0}^{0} -LI\mathrm{d}I = \boxed{\frac{1}{2}LI_0^{\ 2} = W_m}$$

(自感磁能公式)

在通电过程中

$$\varepsilon+\varepsilon_L-IR=0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\, I\mathrm{d}t=-\varepsilon_L I\mathrm{d}t+I^2R\mathrm{d}t$$

其中$\varepsilon\, I\mathrm{d}t$ 为电源做的功

$-\varepsilon_L I\mathrm{d}t$ 克服自感电动势所作的功

$I^2R\mathrm{d}t$ 为电阻消耗的焦耳热

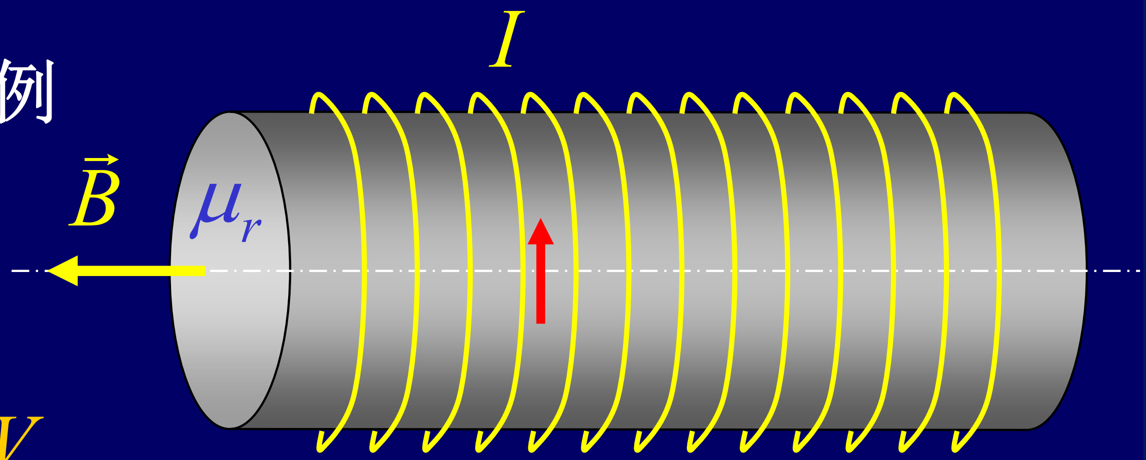
$$A'=\int_0^{I_0}-\varepsilon_L I\mathrm{d}t=\int_0^{I_0}LI\mathrm{d}I$$ 电源的功转化为磁场的能量

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2 \Leftrightarrow W_e=\frac{1}{2}CU^2$$

自感线圈也是一个储能元件，自感系数反映线圈储能的本领

二. 磁能的分布

- 以无限长直螺线管为例



$$B = \mu_0 \mu_r n I$$

$$L = \frac{N\Phi_m}{I} = \mu_0 \mu_r n^2 V$$

磁能 $$W_m = \frac{1}{2}\mu n^2 V I^2 = \frac{1}{2}\mu n^2 V \frac{B^2}{\mu^2 n^2} = \frac{B^2}{2\mu} V$$

$$\boxed{W_m = \frac{BH}{2} V \quad = w_m V}$$

磁场能量密度

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{BH}{2}$$

$$w_m = \frac{BH}{2}$$

- 在有限区域内

$$\boxed{W_m = \int_V w_m \mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\mathrm{d}V}$$

积分遍及磁场存在的空间

- $w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} \Longleftrightarrow w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$

例 同轴电缆由半径分别为 R_1 和 R_2 的两个无限长同轴导体和柱面组成

求 无限长同轴电缆长度 l 上的自感

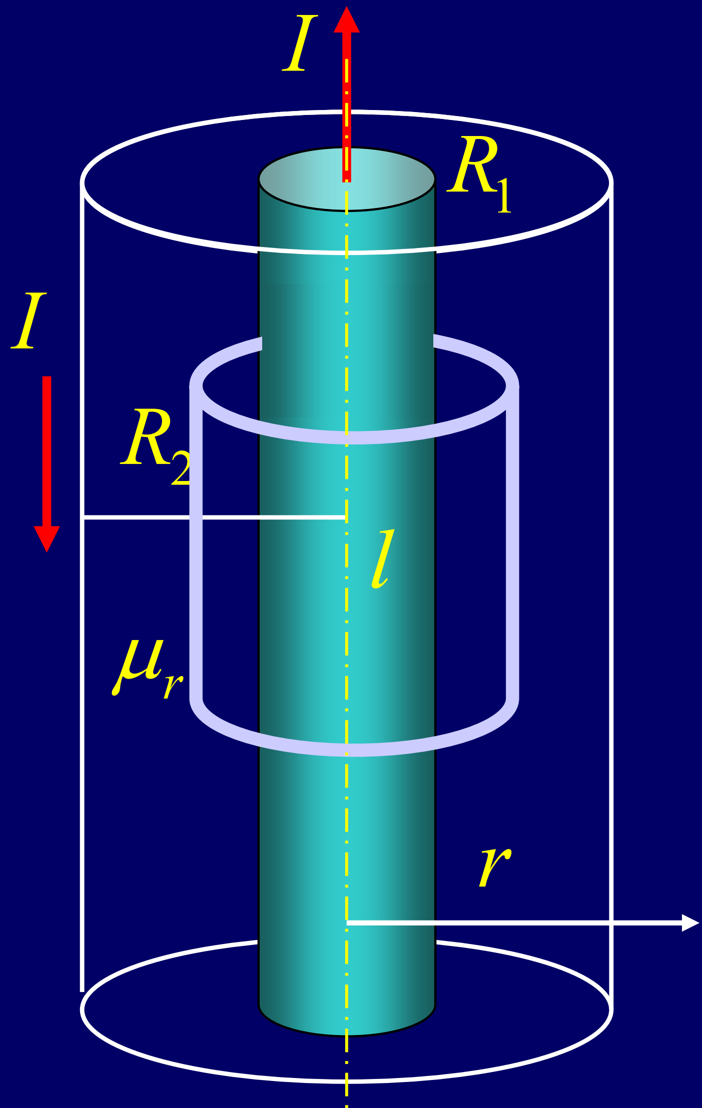
解 由安培环路定理可知

$$r < R_1 \qquad B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

$$R_1 < r < R_2 \qquad B_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$$

$$r > R_2 \qquad B = 0$$

$$\mathrm{d}W_m = w_m \mathrm{d}V = \frac{B^2}{2\mu} 2\pi r l \mathrm{d}r$$



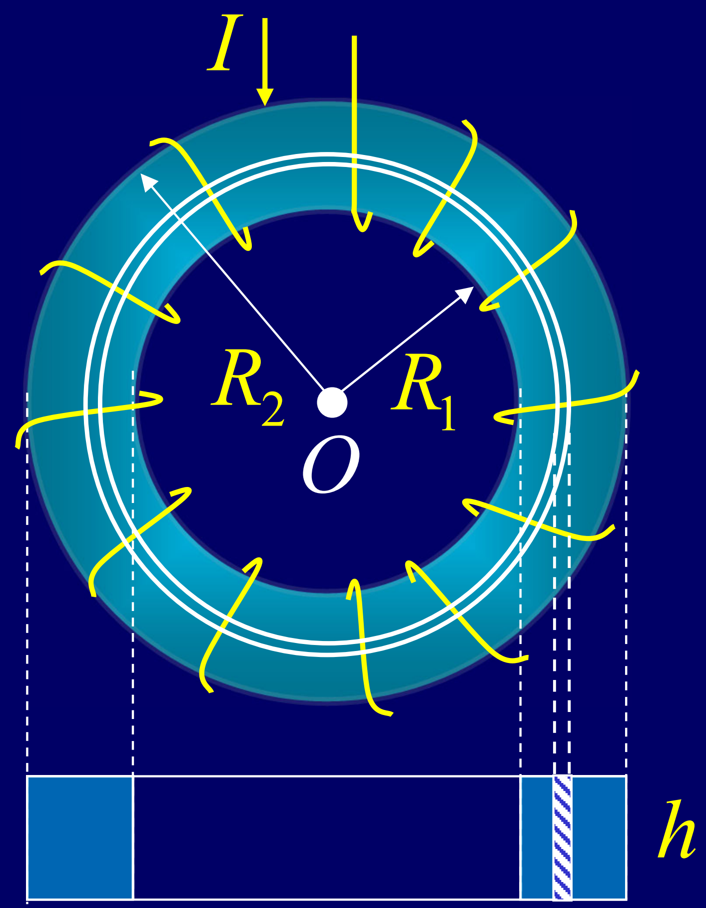
$$W_m = \int_0^{R_1} \frac{B_1^2}{2\mu_0} 2\pi r l \mathrm{d}r + \int_{R_1}^{R_2} \frac{B_2^2}{2\mu_0 \mu_r} 2\pi r l \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi} + \frac{\mu_0 \mu_r I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{8\pi} + \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

例 一由 N 匝线圈绕成的螺绕环，通有电流 I，其中充有均匀磁介质

求 磁场能量 W_m



解 根据安培环路定理,螺绕环内

$$H=\frac{NI}{2\pi r} \Longleftrightarrow B=\frac{\mu_0\mu_r NI}{2\pi r}$$

$$w_m=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}\frac{\mu_0\mu_r N^2 I^2}{4\pi^2 r^2}$$

取体积元 $\mathrm{d}V=2\pi rh\mathrm{d}r$

$$W_m=\int_V w_m\mathrm{d}V=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0\mu_r N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}2\pi rh\mathrm{d}r=\frac{\mu N^2 I^2 h}{4\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$