西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

第4章　随机变量的数字特征

概率论与数理统计课程组

CHAPTER 4

随机变量的数字特征

4.3 协方差与相关系数

二维随机变量(X,Y)除讨论X与Y的期望和方差外，还需讨论描述X与Y之间相互关系的数字特征。

协方差

定义

量 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 称为随机变量X与Y的**协方差**，记为$\mathrm{cov}(X, Y)$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

实际中$\mathrm{cov}(X, Y)$可用下式计算 $\mathrm{cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

证明按定义式展开，$\mathrm{cov}(X, Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} = E\{XY - YE(X) - XE(Y) + E(X)E(Y)\}$

$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$ $=E(XY)-E(X)E(Y)$

回顾方差定义，$D(X+Y) = E\{[X+Y-E(X+Y)]^2\} = E\{X^2+Y^2+[E(X+Y)]^2+2XY-2E(X+Y)X-2E(X+Y)Y\}$

$= E\{X^2+Y^2+[E(X)+E(Y)]^2+2XY-2E(X)X-2E(Y)X-2E(Y)Y-2E(X)Y\}$

$=D(X)+D(Y)+2\mathrm{cov}(X, Y)$

协方差的性质

1° $\mathrm{cov}(X, X)=D(X)$

2° $\mathrm{cov}(X, Y)=\mathrm{cov}(Y, X)$

3° a, b, c, d是常数，$\mathrm{cov}(aX+b, cY+d)=ac\,\mathrm{cov}(X, Y)$

4° $\mathrm{cov}(X_1+X_2, Y)=\mathrm{cov}(X_1, Y)+\mathrm{cov}(X_2, Y)$

推广至线性组合 $\mathrm{cov}(aX+bY, cX+dY) = acD(X)+bdD(Y)+(ad+bc)\mathrm{cov}(X,Y)$

5° $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{cov}(X, Y)$

推广至线性组合 $D(aX+bY)= a^2D(X)+b^2D(Y)+2ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$

例 随机变量X和Y有如下联合分布律，求X和Y的协方差。

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.6	0	0.1
1	0	0.1	0
2	0.1	0	0.1

解 先求X和Y的边缘分布律

X	0	1	2
P	0.7	0.1	0.2

Y	0	1	2
P	0.7	0.1	0.2

从而 $$E(X)=0\times 0.7+1\times 0.1+2\times 0.2=0.5$$

$$E(Y)=0\times 0.7+1\times 0.1+2\times 0.2=0.5$$

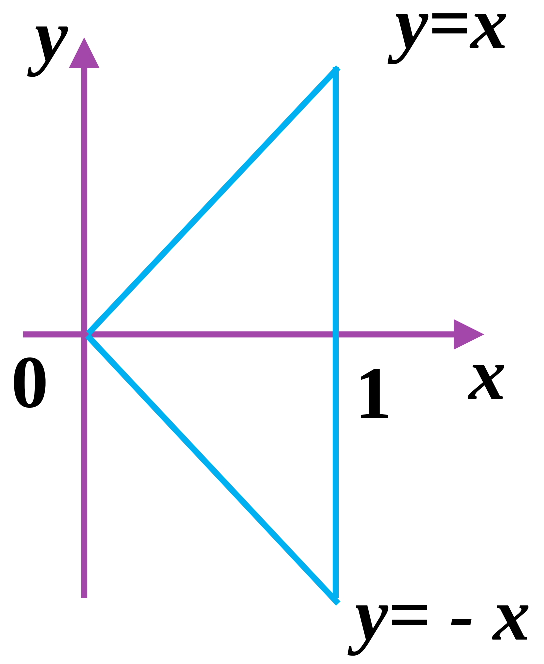
$$E(XY)=0+1\times 1\times 0.1+2\times 2\times 0.1=0.5$$

故 $$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.5-0.5\times 0.5=0.25$$

也可以用协方差的原始定义验证这里的结果

例 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

求协方差$\mathrm{cov}(X, Y)$。



解 据题意，(X, Y) 概率密度的图像如右所示

则 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy=\iint\limits_G xdxdy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} xdy=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy=\iint\limits_G ydxdy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} ydy=0$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\iint\limits_G xydxdy=\int_0^1 xdx\int_{-x}^{x} ydy=0$$

从而 $\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

例 随机变量X和Y有如下联合分布律，求cov(X-Y, Y)

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/4	0	1/4
1	0	1/3	0
2	1/12	0	1/12

解 先求X和Y的边缘分布律

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	4
P	7/12	1/3	1/12

从而 $E(X)= 0\times 1/2+1\times 1/3+2\times 1/6 = 2/3$

$$E(Y)= 0\times 1/3+1\times 1/3+2\times 1/3 = 1$$

$$E(XY)=0+1\times 1\times 1/3+2\times 2\times 1/12 = 2/3$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

$$E(Y^2)=0^2\times 1/3+1^2\times 1/3+2^2\times 1/3=5/3 \qquad D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=2/3$$

$$\mathrm{cov}(X-Y,Y)=\mathrm{cov}(X,Y)-D(Y)=0-2/3= -2/3$$

例 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

求$D(2X-3Y+8)$

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy=\iint_G xdxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 x(x+y)dy=\dfrac{7}{12}$

则 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 x^2(x+y)dy=\dfrac{5}{12}$

类似地 $E(Y)=\dfrac{7}{12},\ E(Y^2)=\dfrac{5}{12}$ $D(X)=D(Y)=\dfrac{11}{144}$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\iint_G xydxdy=\int_0^1 xdx\int_0^1 y(x+y)dy=\frac{1}{3}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{144}$$

从而 $D(2X-3Y+8)=4D(X)+9D(Y)-12\operatorname{cov}(X,Y)=\dfrac{155}{144}$

相关系数

定义

设X、Y是随机变量，若$D(X)>0$，$D(Y)>0$，则

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

ρ_{XY}无量纲

称为随机变量X与Y的**相关系数**

相关系数的性质证明需用到下述定理

定理 (*Cauchy – Schwarz*不等式)

若X、Y是随机变量，且 $E(X^2)<+\infty$，$E(Y^2)<+\infty$，则 $[E(XY)]^2\le E(X^2)\,E(Y^2)$

相关系数的性质

1° $|\rho_{XY}|\le 1$ 可由*Cauchy-Schwarz*不等式证明

2° 若 X、Y 相互独立且方差都大于零，则$\rho_{XY}=0$

3° $|\rho_{XY}|=1$ 的充要条件是，存在常数a ($a\neq 0$)，b使 $P(Y=aX+b)=1$

性质3证明 考虑以X线性函数$a+bX$近似表示Y，以均方误差

$$e(a,b)=E\left\{[Y-(a+bX)]^2\right\}=E(Y^2)+b^2E(X^2)+a^2-2bE(XY)+2abE(X)-2aE(Y)$$

来衡量以$a+bX$近似表达Y的好坏程度　　$e(a, b)$越小，$a+bX$与Y的近似程度越好

求最佳近似式 $e(a_0,b_0)=\min\limits_{a,b} e(a,b)$

对e关于a, b求偏导 $\begin{cases}\dfrac{\partial e(a,b)}{\partial a}=2a+2bE(X)-2E(Y)=0\\ \dfrac{\partial e(a,b)}{\partial b}=2bE(X^2)-2E(XY)+2aE(X)=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_0=E(Y)-b_0E(X)=E(Y)-E(X)\dfrac{cov(X,Y)}{D(X)}\\ b_0=\dfrac{cov(X,Y)}{D(X)}\end{cases}$

将a_0, b_0带入e， $e(a_0,b_0)=E\{[Y-(a_0+b_0X)]^2\}=D[Y-(a_0+b_0X)]+\{E[Y-(a_0+b_0X)]\}^2$

$$=D(Y-b_0X)+0=D(Y)+b_0^2D(X)-2b_0\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$=D(Y)-\frac{[\operatorname{cov}(X,Y)]^2}{D(X)}=(1-\rho_{XY}^2)D(Y)$$

1° 由 $e(a_0, b_0)$和$D(Y)$的非负性 $1-\rho_{XY}^2\geq 0$ $|\rho_{XY}|\leq 1$

3° $|\rho_{XY}|=1 \Leftrightarrow E\{[Y-(a_0+b_0X)]^2\}=0 \Leftrightarrow D[Y-(a_0+b_0X)]=0$ 且 $[Y-(a_0+b_0X)]=0 \Leftrightarrow P\{Y-(a_0+b_0X)=0\}=1$

特别地

当$\rho_{XY}=1$时，$\operatorname{cov}(X,Y)>0$，$b_0=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)}>0$ 当$\rho_{XY}=-1$时，$\operatorname{cov}(X,Y)<0$，$b_0<0$

当$|\rho_{XY}|$较大时，$e(a_0,b_0)$较小，表明X和Y的线性关系的程度较好；

当$|\rho_{XY}|$较小时，$e(a_0,b_0)$较大，表明X和Y的线性关系的程度较差；

当$|\rho_{XY}|=0$，$e(a_0,b_0)$最大，表明X和Y之间不存在线性关系

不相关的判断及等价条件

定义 设X、Y是随机变量，若$\rho_{XY}=0$，则称X与Y不相关

定理 若随机变量X、Y相互独立且方差均大于0，则X与Y不相关，但反之不然（不相关无法推知相互独立）

相关是针对线性关系而言的；
独立是针对任意、一般关系而言

独立性的成立更加苛刻

定理 若随机变量X、Y方差均大于0，则X与Y不相关的充要条件包括

$$\rho_{XY}=0 \Leftrightarrow \operatorname{cov}(X,Y)=0 \Leftrightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$$

$$\Leftrightarrow D(X\pm Y)=D(X)+D(Y) \Leftrightarrow D(X+Y)=D(X-Y)$$

定理 若二维随机变量(X, Y)服从二维正态分布，则X、Y不相关的充要条件是X、Y相互独立

一般而言，“X、Y不相关”和“X、Y相互独立”不是等价条件，前者是后者的必要不充分条件。二者等价的一个连续型分布如下；浙大盛骤等四版117页习题 30是一个离散型的例子。

定理

若(X,Y)是二维正态随机变量，$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$，则 $\rho_{XY}= \rho$，即

$$\boxed{X\text{和}Y\text{相互独立} \Leftrightarrow \rho=0 \Leftrightarrow X\text{和}Y\text{不相关}}$$

即二维正态变量(X, Y)联合概率密度中的参数ρ就是X和Y的相关系数，因而二维正态变量的分布完全可由X、Y各自的均值、方差以及它们的相关系数所确定

例 对二维正态分布的随机变量(X, Y)，联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

求X、Y的相关系数，并证明X与Y相互独立等价于X与Y不相关 。

证 X、 Y的边缘概率密度为 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$ $\qquad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$

因此 $E(X)=\mu_1,\ \ D(X)=\sigma_1^2$ $\qquad E(Y)=\mu_2,\ \ D(Y)=\sigma_2^2$

而 $\operatorname{cov}(X,Y)=E\left[(X-\mu_1)(Y-\mu_2)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)dxdy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\mu_1)}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)2}{2\sigma_1^2}}dx\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(y-\mu_2)}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\left[y-\left(\mu_2+\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right)\right]^2\right\}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\mu_1)}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)2}{2\sigma_1^2}}\left[\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right]dx$$

$$=\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\mu_1)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)2}{2\sigma_1^2}}dx=\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\cdot\sigma_1^2=\rho\sigma_1\sigma_2$$

$D(X)=E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}$

于是 $\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho$

ρ值是否为0判断独立性， ρ_{XY}的大小判断线性相关程度

例 二维连续随机变量(X, Y)有联合概率密度 $f(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)]$

其中$\varphi_1(x,y)$、 $\varphi_2(x,y)$ 都是二维正态随机变量的联合概率密度，且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为 1/3和 -1/3，它们的边缘概率密度对应随机变量的的期望都为 0，方差都为 1，求以下问题。

(1) (X, Y)关于X、 Y的边缘概率密度； (2) X与 Y的相关系数；

(3) X与 Y是否相互独立，为什么？

$\varphi_1(x,y)$ 对应的分布是$N(0, 0; 1, 1; 1/3)$， $\varphi_2(x,y)$ 对应的分布是$N(0, 0; 1, 1; -1/3)$

解 (1) 由二维正态变量的边缘概率密度是一维正态随机变量的概率密度，可知的两个边缘概率密度均是标准正态随机变量的概率密度，从而

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)]dy=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2},\quad -\infty<x<+\infty$$

类似地 $$f_Y(y)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2},\quad -\infty<y<+\infty$$

例 二维连续随机变量(X, Y)有联合概率密度 $f(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)]$

其中$\varphi_1(x,y)$、 $\varphi_2(x,y)$ 都是二维正态随机变量的联合概率密度，且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为 1/3和 -1/3，它们的边缘概率密度对应随机变量的的期望都为 0，方差都为 1，求以下问题。

(1) (X, Y)关于X、 Y的边缘概率密度； (2) X与 Y的相关系数；

(3) X与 Y是否相互独立，为什么？

$\varphi_1(x,y)$ 对应的分布是$N(0, 0; 1, 1; 1/3)$， $\varphi_2(x,y)$ 对应的分布是$N(0, 0; 1, 1; -1/3)$

解 (2) 依题意，$X\sim N(0,1)$， $Y\sim N(0,1)$

该积分项是$\varphi_1(x,y)$对应二维正态分布的协方差定义式，由于方差为1，故协方差等于相关系数（第5个参数）

$E(X) = E(Y) =0$， $D(X) = D(Y) =1$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi_1(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi_2(x,y)dxdy\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right]=0$$

$\mathrm{cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = 0$$

例 二维连续随机变量(X, Y)有联合概率密度 $f(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)]$

其中$\varphi_1(x,y)$、 $\varphi_2(x,y)$ 都是二维正态随机变量的联合概率密度，且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为 1/3和 -1/3，它们的边缘概率密度对应随机变量的的期望都为 0，方差都为 1，求以下问题。

(1) (X, Y)关于X、 Y的边缘概率密度；　(2) X与 Y的相关系数；

(3) X与 Y是否相互独立，为什么？

$\varphi_1(x,y)$ 对应的分布是$N(0, 0; 1, 1; 1/3)$， $\varphi_2(x,y)$ 对应的分布是$N(0, 0; 1, 1; -1/3)$

解 (3) 由于 $\varphi_1(x,y)=\frac{3}{4\pi\sqrt{2}}e^{-\frac{9}{16}(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2)}$， $\varphi_2(x,y)=\frac{3}{4\pi\sqrt{2}}e^{-\frac{9}{16}(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2)}$

将5个参数代入二维正态分布的定义式可得

(X, Y)的联合概率密度为 $f(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)]=\frac{3}{8\pi\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{9}{16}(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2)}+e^{-\frac{9}{16}(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2)}\right]$

$$\neq f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

X与 Y不独立

(X, Y)不是二维正态分布！

对二维正态随机变量的小结 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}$$

1 联合分布与边缘分布的关系

联合概率密度可以推导出边缘概率密度；
但仅知两边缘概率密度不能推知联合概率密度

2 X、Y相互独立的判断条件

其充要条件是 $\rho=0$

3 X、Y相互独立与不相关的等价性

X、Y相关系数 $\rho_{XY}=\rho$

例 设 $X\sim N(0,1)$， $Y=X^3$, 求X与Y的相关系数。

解 采用随机变量函数的期望公式 $E(Y)=E\left[g(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

$$E(X)=0,\quad D(X)=1,\quad E(X^2)=D(X)+\left[E(X)\right]^2=1$$

$$E(Y)=E(X^3)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0$$

$$E(XY)=E(X^4)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^4\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 d(e^{-\frac{x^2}{2}})=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^3e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+3\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=3E(X^2)=3$$

$$E(X^6)=5E(X^4)=15 \qquad D(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2=E(X^6)=15$$

故 $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(X^4)-E(X)E(X^3)=3$ $\qquad \rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\dfrac{3}{\sqrt{15}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

例 设X、Y服从同一分布，其分布律如右图，已知 $P\left(|X|=|Y|\right)=0$，判断X和Y是否不相关？是否不独立？

X_k	-1	0	1
p_k	1/4	1/2	1/4

解 X、Y联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1	$P(X=i)$
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
$P(Y=j)$	1/4	1/2	1/4	

$$E(X)=(-1)\times 1/4+0\times 1/2+1\times 1/4=0$$

$$E(XY)=(-1)\times 0\times 1/4+0\times(-1)\times 1/4+0\times 1\times 1/4+1\times 0\times 1/4=0$$

$\operatorname{cov}(X,Y)=0$，$X$、$Y$ 不相关

$P(X=-1,Y=-1)\neq P(X=-1)P(Y=-1)$，$X$、$Y$ 不独立

例 设X，Y相互独立并服从同一分布，记$U=X-Y$， $V=X+Y$，则随机变量U与V是否一 定不相关，是否一定独立？

解 先求U、V协方差 $\text{cov}(X-Y, X+Y)=D(X)-D(Y)=0$

所以U与V一定不相关

但是U与V不一定独立

例如设X与Y相互独立并服从正态分布，则(U, V)也服从正态分布，二维正态分布独立与不相关等价，从而U与V独立

例如，设$X\sim B(1, 0.5)$ 即0-1分布

$$P(U=1, V=0)=P(X-Y=1, X+Y=0)=0$$

$$P(U=1)=P(X-Y=1)=P(X=1, Y=0)=1/4$$

$$P(V=0)=P(X+Y=0)=P(X=0, Y=0)=1/4$$

$$P(U=1, V=0)\neq P(U=1)P(V=0)$$

从而U与V不独立

例 设 X，Y 在单位圆盘上服从均匀分布，即 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & -1\le x\le 1,-1\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

试证 X 与 Y 是不相关的，但不是相互独立的

解 依题意，X, Y 的边缘概率密度容易求得分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

显然 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故 X，Y 不相互独立

但由对称性 $E(Y)=E(X)=\int_{-1}^{1}x\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}dx=0$

又 $E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}xy\dfrac{1}{\pi}dxdy=\dfrac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}xdx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}ydy=0$

从而 $\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0,$ 即 $\rho_{XY}=0$ 故 X，Y 是不相关的

本节回顾

协方差

量 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 称为随机变量X与Y的**协方差**，记为$\mathrm{cov}(X, Y)$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$\mathrm{cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

相关系数

设X、Y是随机变量，若$D(X)>0$，$D(Y)>0$，则 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$ 称为随机变量X与Y的**相关系数**

不相关的判断

设X、Y是随机变量，若$\rho_{XY}=0$，则称X与Y不相关

若(X,Y)是二维正态随机变量，$(X, Y)\sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$，则 $\rho_{XY}=\rho$，即

X和Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ $\rho=0$ $\Leftrightarrow$ X和Y 不相关

CHAPTER 4

随机变量的数字特征

4.4 n维正态随机变量

矩的概念

定义 设X、Y是随机变量

若$\mu_k=E(X^k)$, $k=1, 2, 3, \ldots$存在，

则称为X的**k阶原点矩，简称k阶矩**

若 $v_k=E\left\{[X-E(X)]^k\right\}$, $k=2,3,\ldots$ 存在，

则称为X的**k阶中心矩**

若$\mu_{kl}=E(X^kY^l)$, $k, l=1, 2, 3, \ldots$存在，

则称为X和Y 的**$k+l$ 阶混合原点矩，简称 $k+l$ 阶混合矩**

若 $v_{kl}=E\left\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\right\}$， $k,l=1,2,3,\ldots$ 存在，

则称为X和Y 的**$k+l$ 阶混合中心矩**

一二阶的原点矩和中心矩更常用

X的数学期望$E(X)$是X的一阶原点矩

X的方差$D(X)$是X的二阶中心矩

协方差$\mathrm{cov}(X, Y)$是X和Y的二阶混合中心矩

一阶矩和二阶矩之间有如下关系：

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2$$

实际应用中高于 4 阶的矩很少使用。三阶中心矩主要用来衡量随机变量的分布是否有偏，四阶中心矩主要用来衡量随机变量的分布在均值附近的陡峭程度如何

n维正态随机变量

定义

设二维随机变量(X_1, X_2)的四个二阶中心矩都存在，即

$$\begin{pmatrix} D(X_1) & \operatorname{cov}(X_1,X_2) \\ \operatorname{cov}(X_2,X_1) & D(X_2) \end{pmatrix}$$

称该矩阵为随机变量(X_1, X_2) 的**协方差矩**

定义

设n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的二阶混合中心矩

$$\operatorname{cov}(X_i,X_j)=E\left\{\left[X_i-E(X_i)\right]\left[X_j-E(X_j)\right]\right\},$$

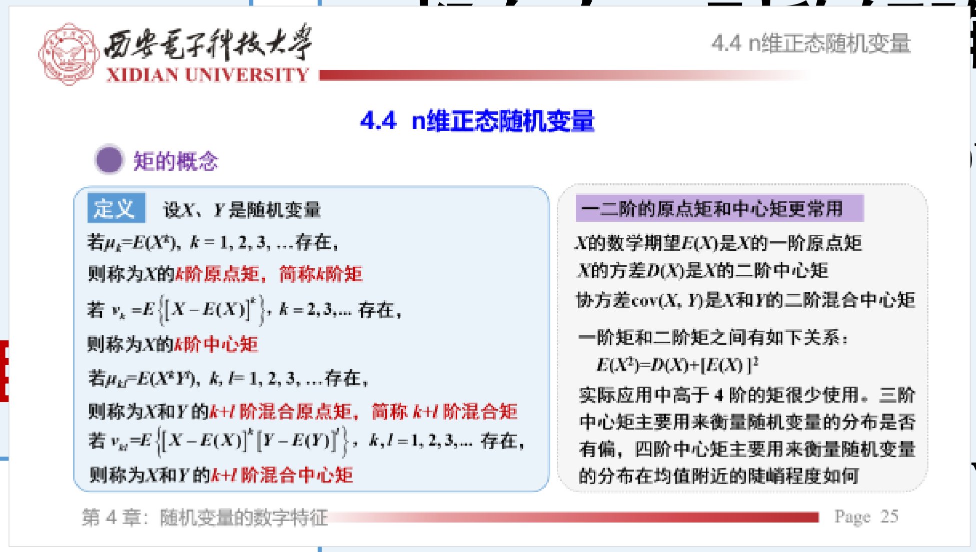
$$i,j=1,2,\cdots n$$

阵

$$\begin{matrix} \mathrm{v}(X_1,X_2) & \cdots & \operatorname{cov}(X_1,X_n) \\ D(X_2) & \cdots & \operatorname{cov}(X_2,X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{v}(X_n,X_2) & \cdots & D(X_n) \end{matrix}$$

为随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的**协方差矩阵**

协方差矩阵一定是对称阵


XIDIAN UNIVERSITY 西安电子科技大学　4.4 n维正态随机变量

4.4 n维正态随机变量

矩的概念

定义　设X、Y是随机变量

若$\mu_k=E(X^k)$，$k=1, 2, 3, \ldots$存在，

则称为X的k阶原点矩，简称k阶矩

若 $v_k=E\left\{\left[X-E(X)\right]^k\right\}$，$k=2,3,\ldots$ 存在，

则称为X的k阶中心矩

若$\mu_{kl}=E(X^kY^l)$，$k, l=1, 2, 3, \ldots$存在，

则称为X和Y的$k+l$阶混合原点矩，简称$k+l$阶混合矩

若 $v_{kl}=E\left\{\left[X-E(X)\right]^k\left[Y-E(Y)\right]^l\right\}$，$k,l=1,2,3,\ldots$ 存在，

则称为X和Y的$k+l$阶混合中心矩

一二阶的原点矩和中心矩更常用

X的数学期望$E(X)$是X的一阶原点矩

X的方差$D(X)$是X的二阶中心矩

协方差$\operatorname{cov}(X, Y)$是X和Y的二阶混合中心矩

一阶矩和二阶矩之间有如下关系：

$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2$

实际应用中高于4阶的矩很少使用。三阶中心矩主要用来衡量随机变量的分布是否有偏，四阶中心矩主要用来衡量随机变量的分布在均值附近的陡峭程度如何

第 4 章：随机变量的数字特征　Page 25

利用协方差矩阵，可由二维正态变量的概率密度推广，得到*n*维正态变量的联合概率密度

设 (X_1, X_2)服从二维正态分布，其概率密度为

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

引入列矩阵 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}$

(X_1, X_2) 的协方差矩阵 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$

B的行列式 $|\mathbf{B}|=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$

B的逆矩阵 $\mathbf{B}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{B}|}\begin{pmatrix}\sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2\\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2\end{pmatrix}$

经计算 $(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})=\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$

(X_1, X_2) 的概率密度为 $f(x_1,x_2)=\frac{1}{(2\pi)^{2/2}|\mathbf{B}|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})\right\}$

推广到n维正态随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的情况

引入列矩阵 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}$

n维正态随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的概率密度为

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\mathbf{B}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

其中B为随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的协方差矩阵

n维正态变量的五条重要性质

1° n维正态随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的每一个分量X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$都是正态随机变量；反之，若$X_1, X_2, \ldots, X_n$都是正态随机变量且相互独立，则$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$是n维正态随机变量

2° n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$服从n维正态分布的充要条件是：$X_1, X_2, \ldots, X_n$的任意线性组合$l_1X_1+l_2X_2+\ldots+l_nX_n$服从一维正态分布（其中$l_1, l_2, \ldots, l_n$不全为0）

3° 若$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$服从n维正态分布，设$Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$是X_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ 线性变换，则$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$也服从k维正态分布

正态变量的线性变换不变性

4° 设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是n维正态变量，$m<n$，则$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的任意m个分量是m维正态变量

5° 设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 服从n维正态分布，则"$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立"与"$X_1, X_2, \ldots, X_n$两两不相关"等价

例 设 X 和 Y 相互独立 $X \sim N(1, 2)$，$Y \sim N(0, 1)$，求 $Z = 2X - Y + 3$ 的概率密度。

解 依题意 X 和 Y 的联合分布为正态分布，则 X 和 Y 的线性组合服从正态分布

于是 $Z \sim N(E(Z), D(Z),)$

而 $E(Z) = 2E(X) - E(Y) + 3 = 2 + 3 = 5$

$D(Z) = 4D(X) + D(Y) = 8 + 1 = 9$

即 $Z \sim N(5, 9)$

故 Z 的概率密度是 $f(z) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{18}(z-5)^2}$， $-\infty < z < +\infty$

例 设 (X,Y)服从二维正态分布，且 $X\sim N(1,9),\ Y\sim N(0,16),\ \rho_{XY}=-0.5,\ Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$

(1) 求 Z 的数学期望和方差；　　(2) 求 X 和 Z 的相关系数；

(3) 问 X 和 Z 是否不相关？是否独立？为什么？

解 (1) 依题意 $E(X)=1,\ D(X)=9,\ E(Y)=0,\ D(Y)=16$　　于是 $E(Z)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}$

$$D(Z)=D(\frac{X}{3})+D(\frac{Y}{2})+2\operatorname{cov}(\frac{X}{3},\frac{Y}{2})=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+\frac{1}{3}\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$=\frac{1}{9}\times 9+\frac{1}{4}\times 16+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=1+4-2=3$$

(2) 由协方差的性质 $\operatorname{cov}(X,Z)=\operatorname{cov}(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}\operatorname{cov}(X,X)+\frac{1}{2}\operatorname{cov}(X,Y)$

$$=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=0$$ 故 $$\rho_{XZ}=\frac{\operatorname{cov}(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}}=0$$

(3) 因 X 和 Z 的相关系数为零故不相关，因为 (X,Y) 服从二维正态分布，又 $(X,Z)=(X,Y)\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

故由正态分布的线性不变性知，(X,Z) 服从二维正态分布，于是 X,Z 相互独立

本节回顾

矩

设X、Y是随机变量　　若$\mu_k=E(X^k)$，$k=1, 2, 3, \ldots$存在，则称为X的k阶原点矩，简称k阶矩

若 $v_k=E\left\{\left[X-E(X)\right]^k\right\}$，$k=2,3,\ldots$ 存在，则称为X的k阶中心矩

若$\mu_{kl}=E(X^kY^l)$，$k, l=1, 2, 3, \ldots$存在，则称为X和Y的$k+l$阶混合原点矩，简称 $k+l$ 阶混合矩

若 $v_{kl}=E\left\{\left[X-E(X)\right]^k\left[Y-E(Y)\right]^l\right\}$，$k,l=1, 2, 3,\ldots$ 存在，则称为X和Y的$k+l$阶混合中心矩

n维正态随机变量

复习思考题

1. 叙述$E(X)$和$D(X)$的定义。
2. 设有一批数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$， 记 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，则 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=0$，对吗？
3. 试述计算随机变量X函数$g(X)$的期望$E[g(X)]$的两种方法。
4. 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,用如下两种方法求$E(X^2)$：
   (i) $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\sigma^2+\mu^2$；
   (ii) $E(X^2)=E(X.X)=E(X)$，$E(X)=\mu^2$；
   两种结果不一样，哪一种错？为什么？
5. 试问$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)$ 对吗？

6. 已知随机变量X具有概率密度：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3(2x-x^2)}{4}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求$E(X)$，下列哪种解法是正确的？

解法1：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2 x\cdot\dfrac{3(2x-x^2)}{4}dx=1$

解法2：$E(X)=\begin{cases}\int_0^2 x\cdot\dfrac{3(2x-x^2)}{4}dx=1, & 0<x<2\\ \int_{-\infty}^{0}0\cdot xdx+\int_2^{+\infty}0\cdot xdx=0, & \text{其他}\end{cases}$

7. 设X 和Y 为两随机变量，且已知 $D(X)=6$，$D(Y)=7$，则 $D(X-Y)=D(X)-D(Y) = 6-7= -1 < 0$，这与任意一个随机变量的方差都不小于零矛盾，为什么？

8. 考虑100包水泥的总重量Y 用以下两种方式表示：

(i) 设第i袋水泥的重量为X_i，$i=1, 2, \ldots, 100$，由题意知，$X_i \sim N(50, 2.5^2)$，$Y=\sum X_i$，则 $Y \sim N(100\times 50, 100\times 2.5^2)$；

(ii) 设一包水泥的重量为X，由题意 $X \sim N(50, 2.5^2)$，若将100包水泥的总重量看成是1包水泥的100倍，即

$Y=100X$，Y 是X 的线性函数，则：

$E(Y)=100E(X)=100\times 50$，$D(Y)=100^2D(X)=100^2\times 2.5^2$

$Y \sim N(100\times 50, 100^2\times 2.5^2)$

这两种方法得到的总重量的分布不一样（因为方差不同，后者方差是前者的100倍），试问哪一种正确？