第三章 动态电路时域分析

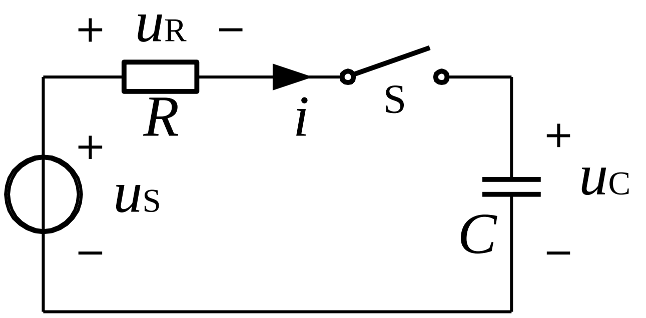
3.2 动态电路方程及其解

3.2.1 动态方程的建立

由于动态电路中的电感电容的VAR是微积分关系，可以预料，动态电路列出的方程一定是微积分方程。若描述电路的方程是一阶微分方程，相应的电路称为一阶电路(first order circuit)。

一、一阶动态电路

例1 图*RC*电路，t=0时开关S闭合，讨论t>0时的电容电压$u_C(t)$。



RC串联电路

t>0时，根据KVL方程列出回路电压方程为

$$u_R + u_C - u_S = 0$$

根据元件的VAR，有 $i = C\dfrac{du_C}{dt}$ ，$u_R = R\,i = RC\dfrac{du_C}{dt}$

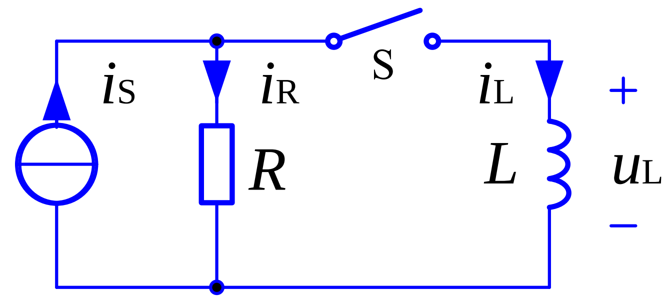
代入上式，整理得 $\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_C = \dfrac{1}{RC}u_S$

$$\boxed{\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{\tau}u_C = \dfrac{1}{RC}u_S}$$

令τ=RC，其单位是秒。因为[RC]=[(u/i)/(q/u)]=[q/i]=[库/库/秒]= [s]

故τ称为时间常数，简称时常数。

例2 图*RL*电路，t=0时开关S闭合，讨论t>0时的电感电流$i_L(t)$。



RL并联电路

t>0时，根据KCL有 $i_R + i_L = i_S$

根据元件的VAR，有

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\quad,\quad i_R = \frac{u_L}{R} = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

代入上式，整理得 $\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i_L = \frac{R}{L}i_S$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}i_L = \frac{R}{L}i_S}$$

令$\tau=L/R$，其单位是秒。因为[L/R]=[(ψ/i)/(u/i)]=[ψ/u]=[韦伯/韦伯/秒]=[s]

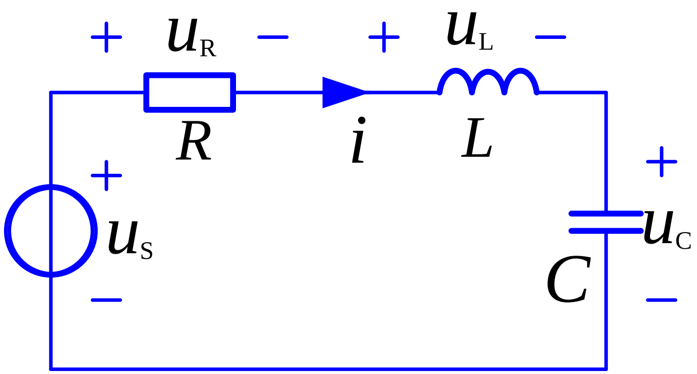
故τ称为**时间常数**，简称**时常数**。

观察上两例列出的方程，除变量不同外，均为典型的一阶微分方程，因此均为一阶电路。一阶微分方程的一般形式可写为

$$\boxed{y'(t) + ay(t) = bf(t)}$$，式中$y(t)$为响应，$f(t)$为激励

二、二阶动态电路

例1 图*RLC*串联电路，仍以电容电压$u_C(t)$作为电路的响应。



根据KVL方程有 $u_R + u_L + u_C - u_S = 0$

根据元件的VAR，有

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \quad , \quad u_R = Ri = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \quad , \quad u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}$$

代入上式，整理得 $$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}u_S$$

这是二阶微分方程，因此称该电路为二阶电路。二阶微分方程的一般形式可写为

$$\boxed{y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = b_0f(t)}$$

三. 建立动态方程的一般步骤

(1) 根据电路建立KCL或KVL方程，写出个元件的伏安关系；

(2) 在以上方程中消去中间变量，得到所需变量的微分方程。

(3)对于较复杂的动态电路，常用拉普拉斯变换进行分析。

3.2.2 动态方程的求解

一阶和二阶微分方程一般形式为

$y'(t) + ay(t) = bf(t)$ （1） ， $y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = b_0f(t)$ （2）

对于线性时不变动态电路，上式中的系数都是常数。

一、 微分方程的经典解法

高等数学学过，线性常系数微分方程的解由两部分组成：

$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ 即：完全解 =齐次解（通解）+ 特解

① 齐次解$y_h(t)$：它的函数形式取决于微分方程的特征根。

◆ 对于一阶微分方程，其特征方程为 $s + a = 0$，特征根为$s = -a$，故

$$y_h(t) = K e^{st} = K e^{-a t}$$ 式中K为待定常数。

◆ 对于二阶微分方程，其特征方程为 $s^2 + a_1 s + a_0 = 0$，特征根为s_1 和s_2，

当$s_1 \neq s_2$ 时， $y_h(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$ *不等实根*

当$s_1 = s_2 = s$时， $y_h(t) = (K_1 + K_2 t)e^{st}$ *相等实根*

当$s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$时， $y_h(t) = (K_1 \cos\beta t + K_2 \sin\beta t)e^{-\alpha t}$ *共轭复根*

式中待定常数K_1、K_2将在完全解中由初始条件确定。

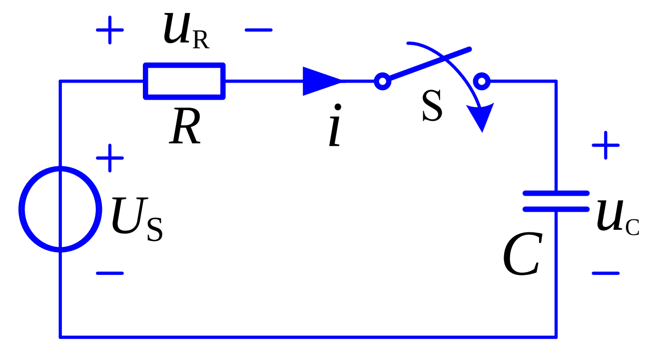
② 特解$y_h(t)$：特解具有与激励$f(t)$相同的函数形式。列表如下：

激励f(t)函数形式	特解$y_p(t)$	
直流	常数A	
t^m	$A_m t^m + A_{m-1} t^{m-1} + \ldots + A_1 t + A_0$	
$e^{\alpha t}$	$Ae^{\alpha t}$	当α不是特征根时
	$(A_1 t + A_0)e^{\alpha t}$	当α是特征单根时
	$(A_2 t^2 + A_1 t + A_0)e^{\alpha t}$	当α是二阶特征根(二阶电路）
$\cos\beta t$ 或 $\sin\beta t$	$A_1\cos\beta t + A_2\sin\beta t$	

- 当特解$y_p(t)$的函数形式确定后；
- 将其代入原微分方程中，来求待定常数A_i

二、 举例

例 如图RC电路，U_s为直流电压源，当t = 0时开关闭合，电容的初始电压$u_C(0) = U_0$，求t≥0时的$u_C(t)$。

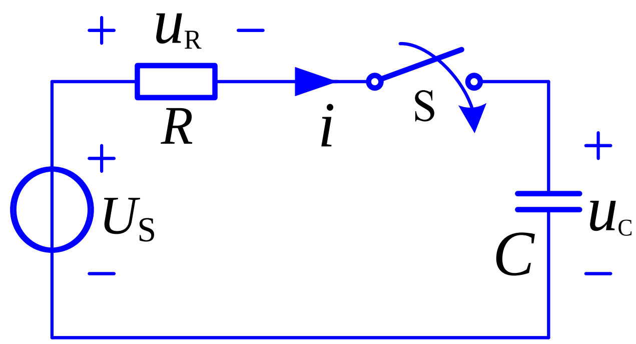


RC串联电路

解 （1）建立电路方程。前面已得 $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}u_C=\frac{1}{RC}U_S$

（2）求齐次解$u_{Ch}(t)$。特征方程为$s + 1/(RC) = 0$
其特征根 $s = - 1/(RC)$，故

$$u_{Ch}=K\mathrm{e}^{st}=K\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$$



RC串联电路

例 如图RC电路，*Us*为直流电压源，当$t = 0$时开关闭合，电容的初始电压$u_C(0) = U_0$，求$t \geq 0$时的$u_C(t)$。

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{1}{RC}U_S$$

（3）求特解$u_{Cp}(t)$。∵激励*Us*为常数，

∴特解也是常数。令 $u_{Cp}(t) = A$，将它代入上面微分方程，得

$$\frac{1}{RC}A = \frac{1}{RC}U_S$$

故得特解 $u_{Cp}(t) = A = Us$

（4）求完全解$u_C(t)$。 $u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t) = Ke^{-\frac{1}{RC}t} + U_S$

式中常数K由初试条件$u_C(0) = U_0$确定。将该条件代入上式，得

$u_C(0) = K + Us = U_0$ ，解得 $K = U_0 - Us$ ，故

$$u_C(t) = (U_0 - U_S)e^{-\frac{1}{RC}t} + U_S \quad ,t \geq 0$$

三、 固有响应和强迫响应 暂态响应和稳态响应

$$u_C(t)=\underbrace{(U_0-U_S)\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}}_{\text{固有响应}}+\underbrace{U_S}_{\text{强迫响应}} \quad ,t\geq 0$$

暂态响应　　　　稳态响应

◆ 按电路的结构特性，可分为固有响应和强迫响应，在完全解中，
第一项（即齐次解）的函数形式仅由特征根确定，而与激励的函数形式无关，称为固有响应或自由响应。
第二项（即特解）与激励具有相同的函数形式，称为强迫响应。

◆ 按电路的工作情况，也常将完全响应分为暂态响应和稳态响应。
第一项按指数规律衰减，t→∞时，该项为0，称为暂态响应。
第二项在任意时刻都保持稳定，称为稳态响应。

3.3 独立初始值

3.3.1 换路定律

一、换路现象

* 开关的闭或开动作；
* 元件参数突变；
* 电源数值突变；

统称为 “换路”

电路的初始时刻一般认为是换路时刻。设换路时刻为$t = t_0$，则

◆ 换路前瞬间为：

$$t_{0-} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} (t_0 - \varepsilon)$$

◆ 换路后瞬间为：

$$t_{0+} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} (t_0 + \varepsilon)$$

我们解微分方程所需要的初始值实际上是指在t_{0+}时刻的值。

- 求解微分方程时，需要根据给定的初始条件确定解答中的待定常数K。
- 电路的响应是电压和电流，相应的初始条件为电压或电流的初始值，即在$t = t_0$时刻的值$u(t_0)$、$i(t_0)$。

- 其中电容电压u_C和电感电流i_L的初始值$u_C(t_0)$、$i_L(t_0)$由电路的初始储能决定，称为独立初始值或初始状态。
- 其余电压电流的初始值称为非独立初始值，它们将由电路激励和初始状态来确定。

二、换路定律(Switching Law)

若电容电流i_C和电感电压u_L在t = t_0时为有限值，则换路前后瞬间电容电压u_C和电感电流i_L是连续的（不发生跃变），即有

$$u_C(t_{0+}) = u_C(t_{0-})$$

$$i_L(t_{0+}) = i_L(t_{0-})$$

三、说明

（1）强调指出：除电容电压和电感电流外，其余各处电压电流不受换路定律的约束，换路前后可能发生跃变。$i_C(.)$，$u_L(.)$

（2）换路定律以从能量的角度来理解：

由于$w_C(t) = 0.5Cu^2{}_C(t)$、$w_L(t) = 0.5Li^2{}_L(t)$，如果u_C或i_L发生跃变，则w_C或w_L也发生跃变，由于功率$p = dw/dt$，能量的跃变意味着功率为∞，这在实际电路中是不可能的。但在某些理想情况下，有可能。

（3）通常t_0= 0。此时$u_C(0_+) = u_C(0_-)$，　$i_L(0_+) = i_L(0_-)$

3.3.2 独立初始值（初始状态）的求解

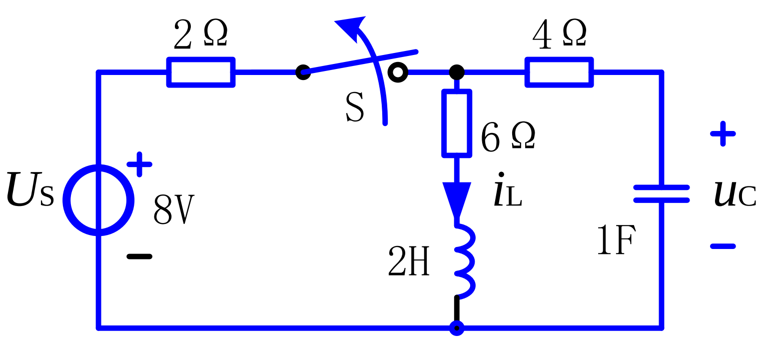
首先根据换路前电路的具体状况，求出$u_C(0_-)$和 $i_L(0_-)$。然后利用换路定律即可求得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-), \quad i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

t < 0时，电路的状态?

- 直流电源作用下并已处于稳态，此时，电路各处电压、电流均为直流。这时电容可视为开路，电感视为短路。
- t = 0-时等效电路为直流电阻电路。

"0-等效电路"

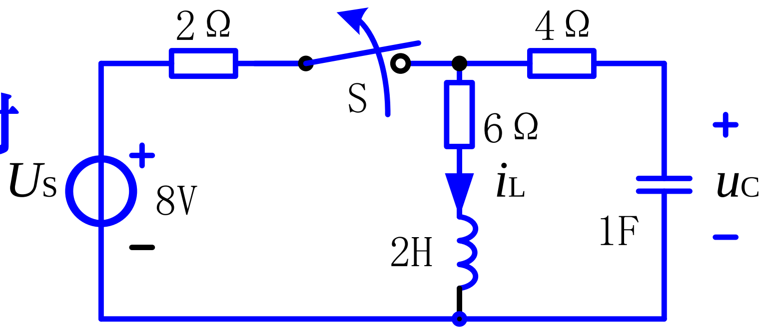


(a)

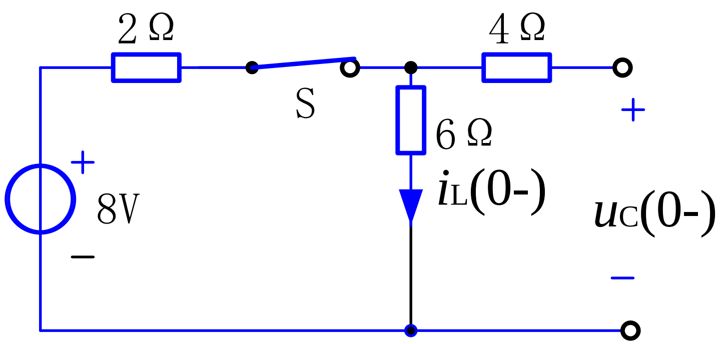
例 电路如图所示，已知t<0时，开关S是闭合的，电路已处于稳定。在t = 0时，开关S打开，求初始值$u_C(0_+)$ 和$i_L(0_+)$ 。

解: t < 0时，电路在直流电源作用下并已处于稳态；

电容开路，电感短路。得t = "0-"时的等效电路如图。



(a)



(b)

由图(b)电路容易求得:

$$i_L(0_-) = 8/(2+6) = 1\ A$$

$$u_C(0_-) = 6\ i_L(0_-) = 6\ V$$

由换路定律得:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 6\ V$$

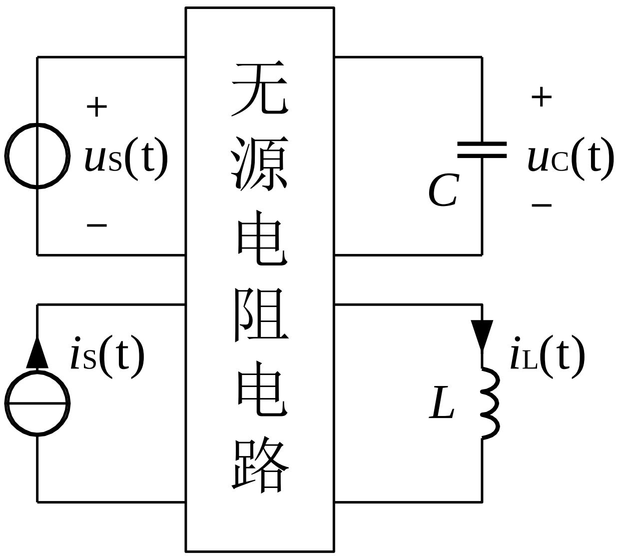
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\ A$$

3.3.3 非独立初始值的求解

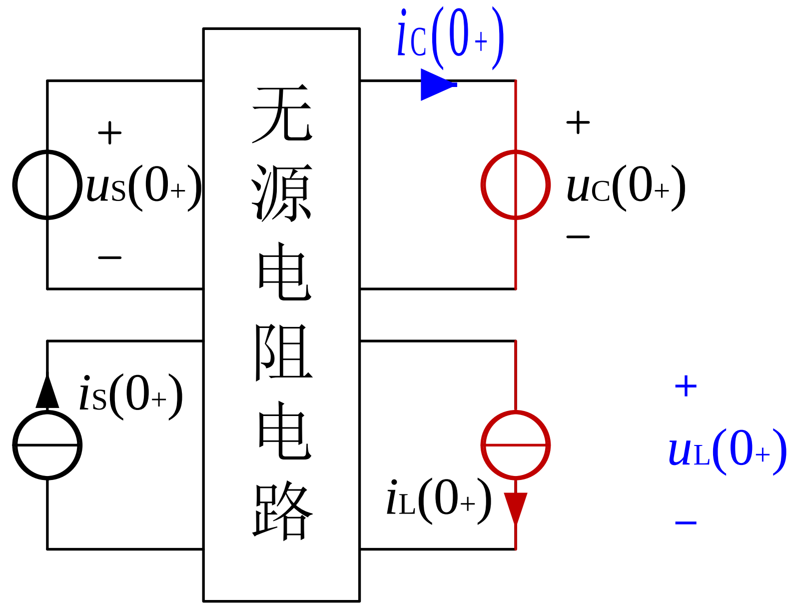
① 当初始状态求出后，根据替代定理，在$t = 0+$时刻，

- 将电容用电压等于$u_C(0_+)$ 的电压源替代
  [若$u_C(0_+) = 0$时用短路替代];
- 电感用电流等于$i_L(0_+)$的电流源替代
  [若$i_L(0_+) = 0$时用开路替代];
- 独立源均取$t = 0+$时刻的值。

②此时得到的电路是一个直流电源作用下的电阻电路，称为“0+等效电路”。由该电路求得各电流、电压就是非独立初始值。



(a) t>0 时的原电路

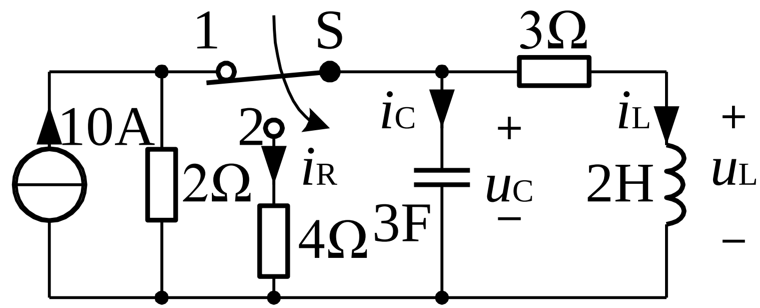


(b) 0+等效电阻电路

"0+等效电路"

由该电路求得各电流、电压就是非独立初始值。

例: 所示电路，已知$t < 0$时，开关S处于位置1，电路已达稳态。$t = 0$时，开关S切换至位置2，求初始值$i_R(0_+)$、$i_C(0_+)$和$u_L(0_+)$。

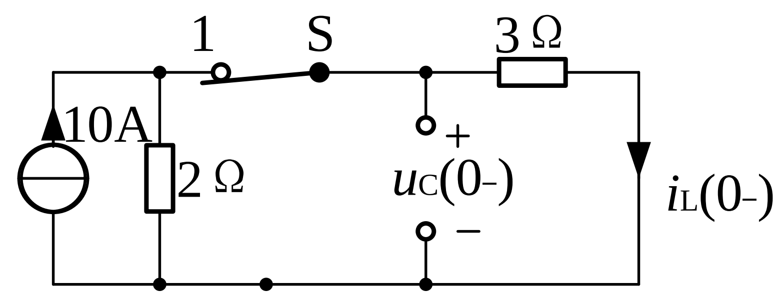


(a)

解 (1)计算$u_C(0_-)$和$i_L(0_-)$。$t = 0$-时的等效电路如图(b)。可得

$$i_L(0_-) = 2\times10/(2+3) = 4\text{A}$$

$$u_C(0_-) = 3\, i_L(0_-) = 12\ \text{V}$$



(b)

(2)根据换路定律得

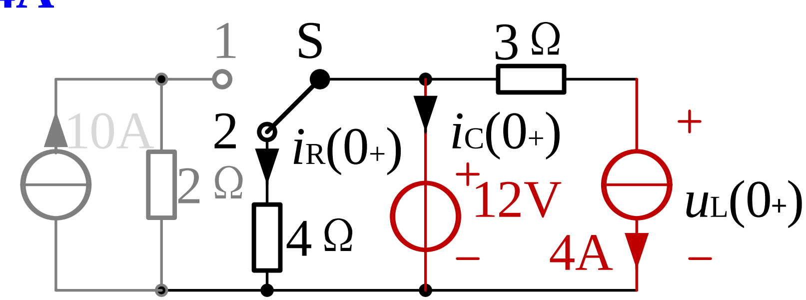
$$u_C(0_+)= u_C(0_-) =12\text{V}，\quad i_L(0_+) = i_L(0_-) = 4\text{A}$$

(3)计算非独立初始值。开关切换至位置2，画出0+等效电路

$$i_R(0_+) = 12/4 = 3\text{A}$$

$$i_C(0_+) = - i_R(0_+) - 4 = -7\text{A}$$

$$u_L(0_+) = 12 - 3\times4 = 0\text{V}$$



(c)

（1） 由t = 0- 时的等效电路，求出$u_C(0_-)$ 和$i_L(0_-)$

（特别注意：直流稳态时，L相当于短路，C相当于开路）。

（2）根据换路定律，确定初始状态$u_C(0_+) = u_C(0_-)$ ， $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ 。

（3）画出0+等效电路，利用电阻电路分析方法，求出各非独立初始值。

3 电容电压、电感电流发生强迫跃变的情况（了解）

指出: 换路定律仅在电容电流和电感电压为有限值时才成立. 在某些理想情况下，电容电流和电感电压可以为∞, u_C和i_L可能强迫跃变. 可能情况:

① 换路后，电路中存在有全部由电容组成的回路或由电容和理想电压源组成的回路，那么，电容电压可能发生跃变。

② 换路后，电路中存在节点或闭合曲面，与它相连支路全部由含电感的支路或理想电流源支路组成，那么，电感电流可能发生跃变。

◆ 在发生强迫跃变的情况下，可根据电荷守恒和磁链守恒的原理确定有关初始值。 $q(0+) = q(0-)$,$\Psi(0+) = \Psi(0-)$

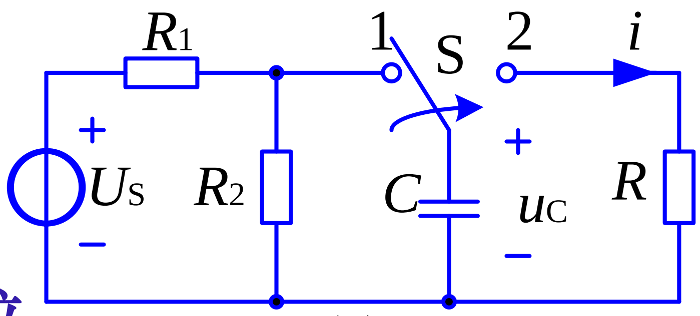
3.4 动态电路的响应

动态电路能量来源于两部分：一是外加激励，一是电路的初始储能(初始状态)。

3.4.1 零输入响应与时间常数

一、零输入响应

定义:外加激励均为零时，仅由初始状态所引起的响应，称为零输入响应，记为 $y_x(t)$ 或 $y_{zi}(t)$ 。

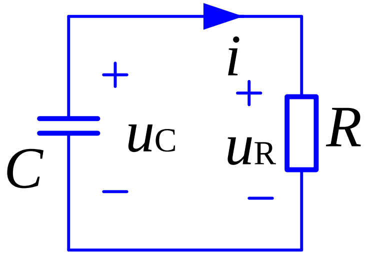


(a)

例 电路如图(a)所示，已知 $t<0$ 时，开关S是处于位置1，电路已达稳态。在 $t=0$ 时，开关S切换至位置2，求 $t\geq0$ 时，电容电压 $u_C(t)$ (零输入响应)。

解: 首先计算初始状态，容易得到

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=\frac{R_2}{R_1+R_2}U_S$$



(b)

$t\geq0$ 时，开关切换至2，电路如图(b)。由KVL列方程

$-u_R+u_C=0$ ，其中 $u_R=Ri$, $i=-Cdu_C/dt$，故有

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

或写为 $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{\tau}u_C=0$ 式中，$\tau=RC$ 为时间常数。

上面齐次微分方程的特征方程为 $s + (1/\tau) = 0$，特征根为 $s = -1/\tau$，故解为：

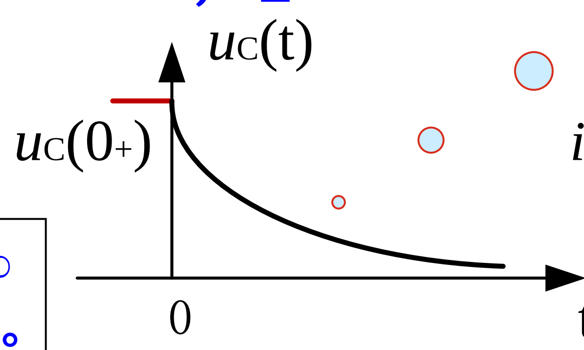
$$u_C(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t}$$

将初始值$u_C(0_+)$代入，可得常数 $K = u_C(0_+)$，最后得

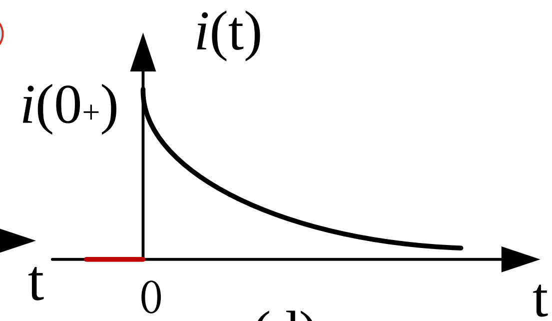
物理过程：
放电

$$u_C(t) = u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t} = \frac{R_2}{R_1+R_2}U_S\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t}\quad ,\ t\geq 0$$

$$i(t) = -C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{u_C(0+)}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$



(c)



(d)

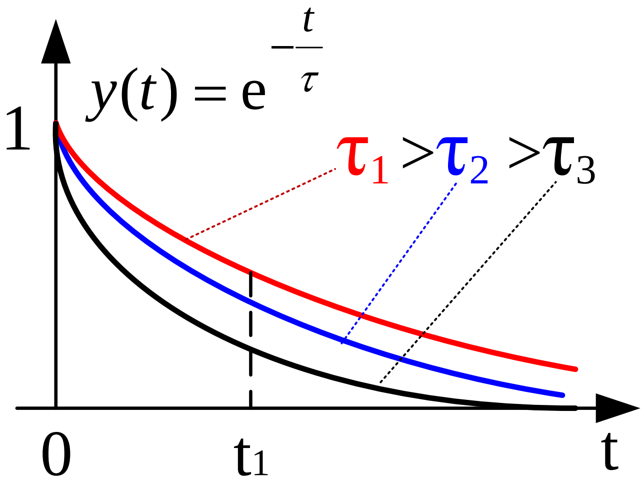
波形如图(*c*)、(*d*)。可见当$t\to\infty$时，它们衰减到零，达到稳态。这一变化过程称为**暂态过程**或**过渡过程**。

在换路前后，电容电压是连续的；而电流$i(0_-) = 0$，$i(0_+) = u_C(0_+)/R$，发生跃变。

零输入响应与初始状态之间满足齐次性。实际上，对二阶以上电路，有多个初始状态，零输入响应与各初始状态间也满足可加性。这种性质称为**零输入线性**。

二 暂态过程与时常数τ之间的关系

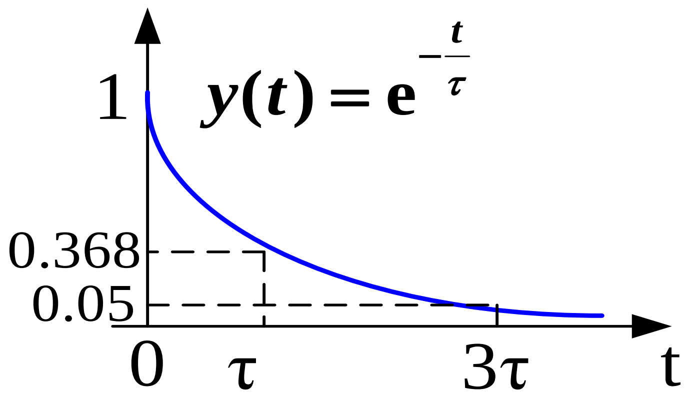
- 上述*RC*电路的放电过程的快慢取决于时常数*τ*，它越大，表达电压电流的暂态变化越慢，反之，越快。
- 注意:仅与电路内参数有关，与激励和初始状态无关。



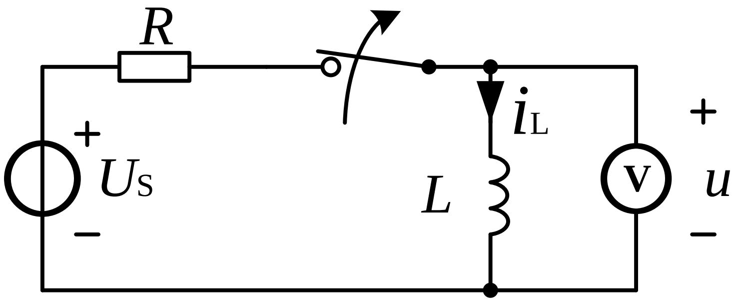
不同*t*值对应的响应

t	0	τ	2*τ*	3*τ*	4 *τ*	5 *τ*	…	∞
y(t)= $e^{-t/\tau}$	e^0 = 1	e^{-1} = 0.368	e^{-2} = 0.135	e^{-3} = 0.05	e^{-4} = 0.018	e^{-5} = 0.007	…	0

工程上，一般认为，经过3*τ*～5 *τ*的时间后，暂态响应已基本结束。



例：电路如图所示，已知$R = 4\Omega$，$L = 0.1\text{H}$，$U_S = 24\text{V}$，开关在$t = 0$打开，求$t \geq 0$时的电流i_L，其中电压表的内阻$R_V = 10\text{k}\ \Omega$，量程为100V，问开关打开时，电压表有无危险?

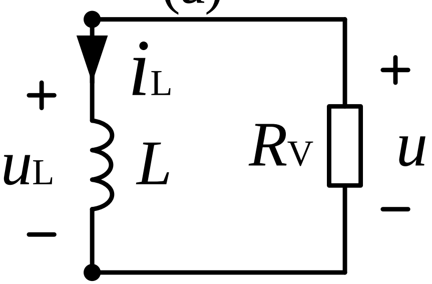


(a)

解 因$t = 0$-时，电感相当于短路。

而 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = U_S/R = 24/4 = 6\text{ A}$

换路后，等效电路如图(b)。由KVL方程有



(b)

$$u_L - u = 0$$

将$u_L = L\,di_L/dt$和 $u = -R_V i_L$代入上式得

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + R_V i_L = 0 \quad , \quad \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{R_V}{L} i_L = 0$$

记$\tau = L/R_V = 10^{-5}\text{s}$，方程变为 $\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} i_L = 0$

故 $i_L(t) = i_L(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 6\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\text{A}$

$$u(t) = -R_V\, i_L(t) = -10\times10^3\times 6\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= -60\, e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{kV}$$

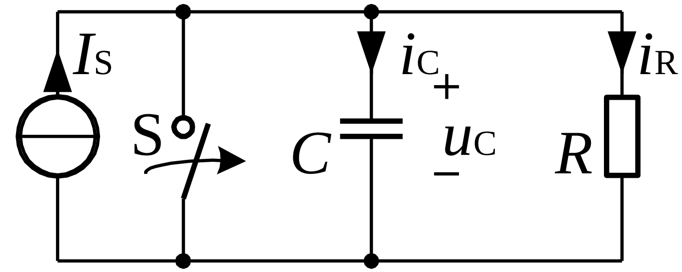
电压表换路后瞬间要承受-60kV的高压，而其量程只有100V，因此电压表立即被打坏。

暂态过程短，利用其实现汽车点火

3.4.2 一阶电路的零状态响应

定义:当电路的初始储能为零(即初始状态为零)时，仅由外加激励所引起的响应，称为**零状态响应**，记为$y_f(t)$或 $y_{zs}(t)$ 。

例:电路如图(*a*)所示，已知t < 0时，开关S是闭合，电路已达稳态。在t = 0时，开关S断开，求t≥0时，电容电压$u_C(t)$ 。



解: t < 0时开关闭合， $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$，故所求响应为零状态响应。

t≥0时，根据KCL有 $i_C + i_R = I_s$

由于 $i_C = C\,du_C/dt$， $i_R = u_C/R$，代入上式得 $C\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{R}u_C = I_S$

或写为 $\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{\tau}u_C = \dfrac{1}{C}I_S$ 式中$\tau=RC$，初始值$u_C(0_+) = 0$

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t)$$

对应的齐次解为 $u_{Ch}(t) = K\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

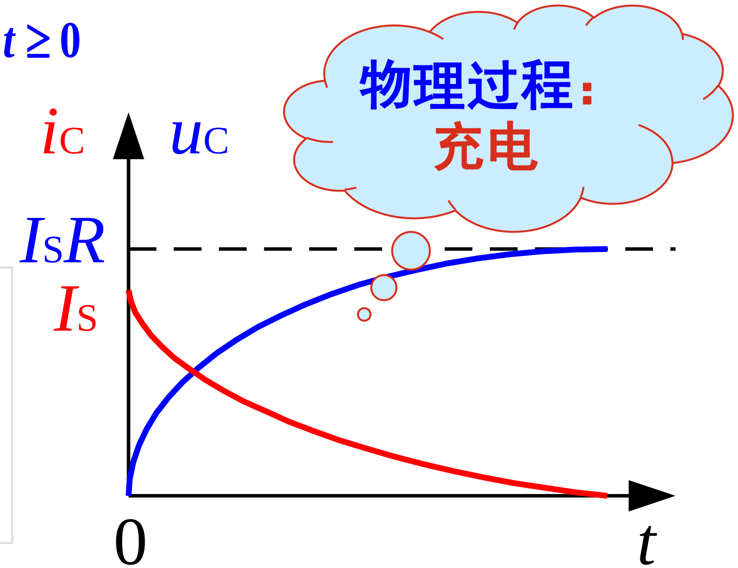
其特解为常数，令$u_{Cp}(t) = A$，将其代入微分方程得 $\frac{1}{\tau}u_{Cp} = \frac{1}{RC}A = \frac{1}{C}I_S$

故得特解 $u_{Cp}(t) = RI_S$　　完全解为 $u_C(t) = K\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + RI_S$

将初始状态$u_C(0_+) = 0$代入确定K，有 $u_C(0_+) = K + RI_S$，解得$K = -RI_S$

于是得电路的零状态响应 $u_C(t) = RI_S(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$，　$t \geq 0$

电容电流 $i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = I_S\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$



可见，当开关断开后，电容充电，u_C按指数规律上升，当t→∞时，达到稳定状态，其稳态值 $u_C(\infty) = RI_S$。而电容电流i_C按指数规律衰减，当达到稳态时，$i_C(\infty) = 0$。

零状态响应满足齐次性。若有多个激励，零状态响应与各激励之间也满足可加性。这种性质称为零状态线性。

3.4.3 全响应

定义：电路在外加激励和初始状态共同作用下所产生的响应，称为全响应。

可以将初始状态（初始储能）看作电路的内部激励。
对于线性电路，根据叠加定理，全响应又可以分解为

全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

即 $$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

因此，对于初始状态不为零，外加激励也不为零的电路。

- 初始状态单独作用时（独立源置0）时产生的响应就是零输入响应分量；
- 而外加激励单独作用时[即令$u_C(0+) = 0$]时求得的响应就是零状态响应分量。

3.5 一阶电路三要素公式

3.5.1 三要素公式

本节介绍一种直流电源激励下一阶电路响应的简便计算方法—三要素法。

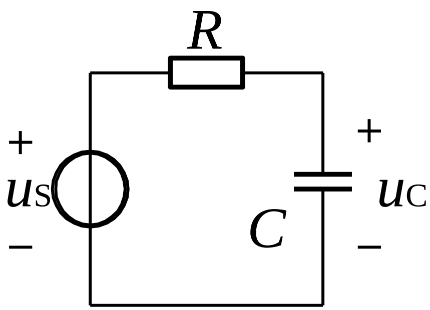
一、三要素公式的推导

一阶电路只含一个动态元件，换路后，可利用戴维南定理，将任何一阶电路简化为如图两种形式之一。

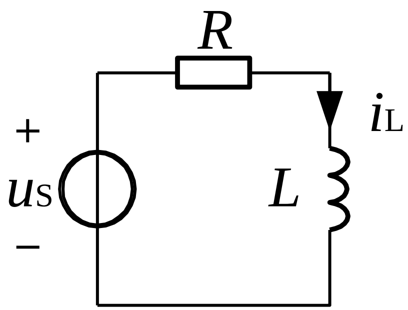
根据基氏定律和元件VAR分别列出以电容电压$u_C(t)$和电感电流$i_L(t)$为响应的方程

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}u_C=\frac{1}{RC}u_S$$

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}i_L=\frac{1}{L}u_S$$



(a)



(b)

若用$y(t)$表示响应,用$f(t)$表示激励u_S，可将上述方程统一表示为

$$\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}y(t)=bf(t)$$

τ为时常数，对RC电路，$\tau=RC$；对RL电路，$\tau=L/R$。

$$\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}\,t}+\frac{1}{\tau}y(t)=bf(t)$$

特征根 $s=-1/\tau$， $y_h(t)=Ke^{-t/\tau}$

$$y(t)=Ke^{-t/\tau}+y_p(t)$$

设初始值为$y(0_+)$，代入上式得 $K=y(0_+)-y_p(0_+)$

全响应 $y(t)=[y(0_+)-y_p(0_+)]e^{-t/\tau}+y_p(t)$

对于一阶电路，只要设法求得初始值$y(0_+)$、时常数τ和微分方程的特解$y_p(t)$，就可直接写出电路的响应$y(t)$。

◆ 当激励$f(t)$为直流时， $y_p(t)=A$，有

$$y(t)=[y(0_+)-A]e^{-t/\tau}+A$$

通常$\tau>0$，当$t\to\infty$时，电路稳态，$y(\infty)=A$ 稳态值。

直流激励时一阶电路的响应为

$$\begin{aligned}y(t)&=[y(0_+)-y(\infty)]e^{-t/\tau}+y(\infty)\\&=y(0_+)e^{-t/\tau}+y(\infty)(1-e^{-t/\tau}),\quad t\geq 0\end{aligned}$$

三要素公式

(1) 适用范围：直流激励下一阶电路中任意处的电流和电压；

(2) 三要素：

- $y(0_+)$表示该响应（电压或电流）的初始值，
- $y(\infty)$ 表示响应的稳定值;
- τ表示电路的时间常数。

(3) 三要素法不仅可以求全响应，也可以求零输入响应和零状态响应分量。

(4) $\tau< 0$时，电路不稳定。但公式仍适用。只是$y(\infty)$的含义不是稳态值，而是称为平衡状态值。

(5) 若初始时刻为$t = t_0$，则三要素公式应改为

$$y(t) = [y(t_{0+}) - y(\infty)]e^{-(t-t0)/\tau} + y(\infty),\quad t \geq t_0$$

二、 三要素公式的使用

（1）初始值$y\ (0_+)$

步骤 （1）先计算$u_C(0\text{-})$和$i_L(0\text{-})$（独立初始值），然后由换路定律得

$$u_C(0_+) = u_C(0\text{-}),\quad i_L(0_+) = i_L(0\text{-})$$

（2）画0+等效电路，求其它电压、电流的初始值（非独立初始值）。

（2）稳态值$y\ (\infty)$

换路后 $t\to\infty$时，电路进入直流稳态，此时，电容开路，电感短路。

步骤：（1）换路后，电容开路，电感短路，画出稳态等效电阻电路。

（2）求解该电路得稳态(或平衡）值$y\ (\infty)$。

（3）时常数τ

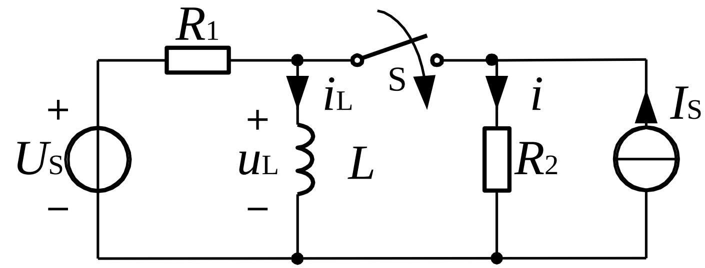
对于一阶RC电路， $\tau= R_0C$；

对于一阶RL电路， $\tau= L\ /R_0$；

R_0是换路后从动态元件C或L看进去的戴维南等效内阻。

三、 三要素公式的使用

例1 所示电路，$I_S = 3A$，$U_S = 18V$，$R_1 = 3\Omega$，$R_2 = 6\Omega$，$L=2H$，在$t < 0$时电路已处于稳态，当$t = 0$时开关S闭合，求$t \geq 0$时的$i_L(t)$、$u_L(t)$和$i(t)$。

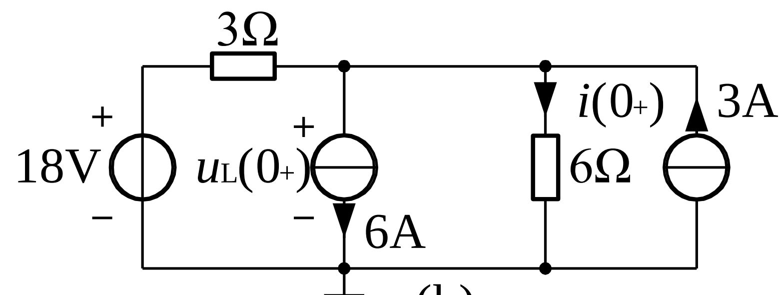


(a)

解 (1) 求$i_L(0_+) = i_L(0_-) = U_S / R_1 = 6A$

(2) 0+等效电路，如图(b)。节点方程

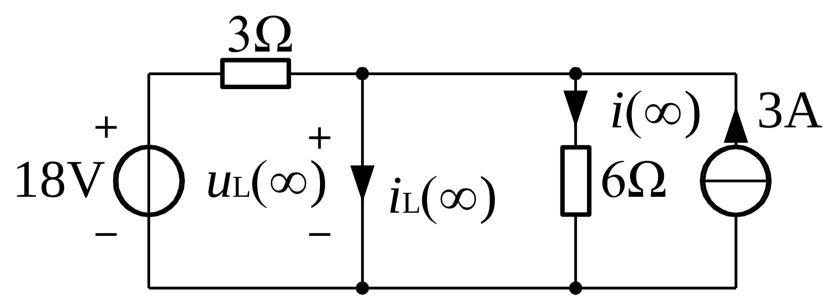
$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)u_L(0_+)=\frac{18}{3}-6+3$$



(b)

得$u_L(0_+) = 6V$，$i(0_+) = u_L(0_+)/6=1A$

(3) ∞等效电路，如图(c)。

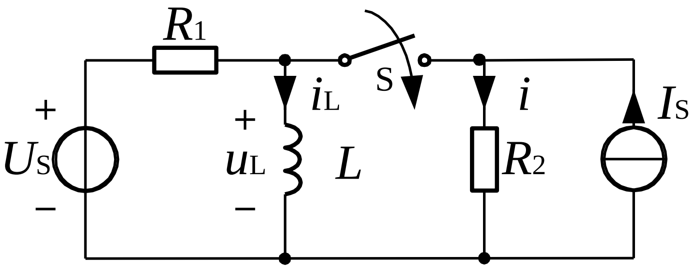


(c)

有 $u_L(\infty) = 0$，$i(\infty) = 0$，

$i_L(\infty) = 18/3 + 3 = 9A$

例1 所示电路，$I_S = 3\text{A}$， $U_S = 18\text{V}$， $R_1 = 3\Omega$，$R_2 = 6\Omega$，L=2H，在t < 0时电路已处于稳态，当t = 0时开关S闭合，求t≥0时的$i_L(t)$、$u_L(t)$和$i(t)$ 。

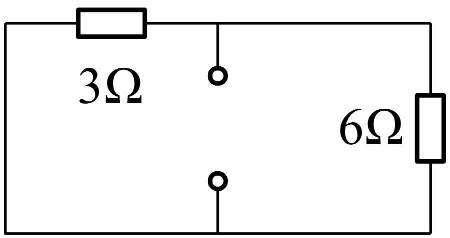


(a)

（4）计算时常数τ。

$$R_0 = 3//6 = 2\Omega$$

$$\tau = L/R_0 = 2/2 = 1\text{s}$$



(d)

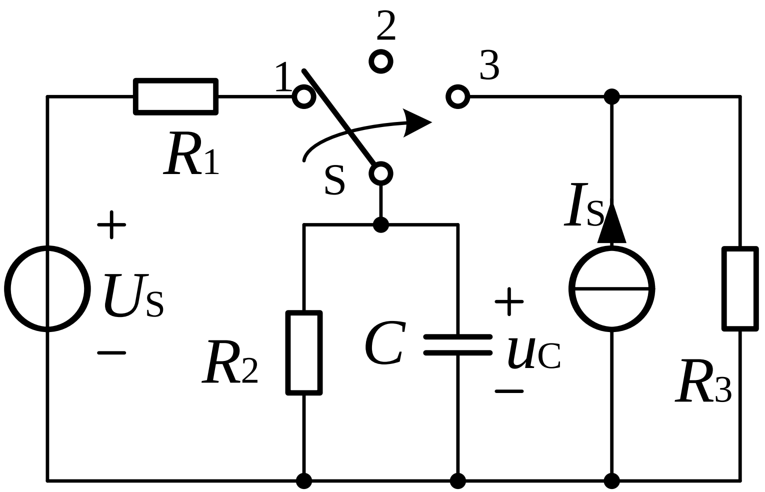
（5）代入三要素公式得

$$i_L(t) = [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + i_L(\infty) = (6-9)e^{-t} + 9 = 9 - 3e^{-t}\ (A) \qquad t \ge 0$$

$$u_L(t) = [u_L(0_+) - u_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + u_L(\infty) = 6e^{-t}\ (V) \qquad t \ge 0$$

$$i(t) = [i(0_+) - i(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + i(\infty) = e^{-t}\ (A) \qquad t \ge 0$$

例2 如图所示电路，$U_S=5V$，$I_S=2A$，$R_1=1\Omega$，$R_2=R_3=4\Omega$，$C=0.5F$，在$t<0$时开关S位于"1"，电路已处于稳态。$t=0$时开关S由"1"闭合到"2"，经过2s后，开关S又由"2"闭合到"3"。求$t\geq0$时的电压$u_C(t)$。



(a)

解 (1) $u_C(0_-)$。S接于1，电路直流稳态。

$$u_C(0\_)=\frac{R_2}{R_1+R_2}U_s=\frac{4}{1+4}\times5=4V$$

(2)当$0<t<2s$时，开关S接于"2"，此时电路处于零输入状态，故稳态值 $u_C(\infty)=0$；时常数$\tau_1=R_2C=4\times0.5=2(s)$，由换路定律，有 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=4V$；代入三要素公式有

$$u_C(t)=4e^{-t/2}(V)\ ,\ 0<t<2s\quad ,\quad u_C(2_-)=4\,e^{-1}=1.47(V)$$

(3)当$t>2s$时，开关S闭合至"3"，由换路定律 $u_C(2_+)=u_C(2_-)=1.47V$

电路的稳态值 $u_C(\infty)=(R_2//R_3)I_s=2\times2=4(V)$，时常数$\tau_2=(R_2//R_3)C=1s$

$$u_C(t)=4-2.53e^{-(t-2)}\ (V)\ ,\ t\geq2s$$

四、 零输入响应和零状态响应的三要素求解

- 三要素法不仅可以求全响应，也可以求零输入响应和零状态响应分量;

$$y(t) = [y(0_+) - y(\infty)]e^{-t/\tau} + y(\infty)$$
$$= y(0_+)\, e^{-t/\tau} + y(\infty)\,(1 - e^{-t/\tau}),\quad t \geq 0$$

$$y(t) = \underbrace{y(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{零输入响应?}} + y(\infty)(\underbrace{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{零状态响应?}}) \qquad t > 0$$

- 一般情况下，除了$u_C(t)$和$i_L(t)$。不能把响应直接分为零输入响应和零状态响应，

- 零输入响应和零状态响应应为

$$y_{zi}(t)=\underbrace{y_{zi}(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{零输入响应}}\qquad t>0$$

$$y_{zs}(t)=(y_{zs}(0_+)-\mathrm{y}(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}+\mathrm{y}(\infty)\qquad t>0$$

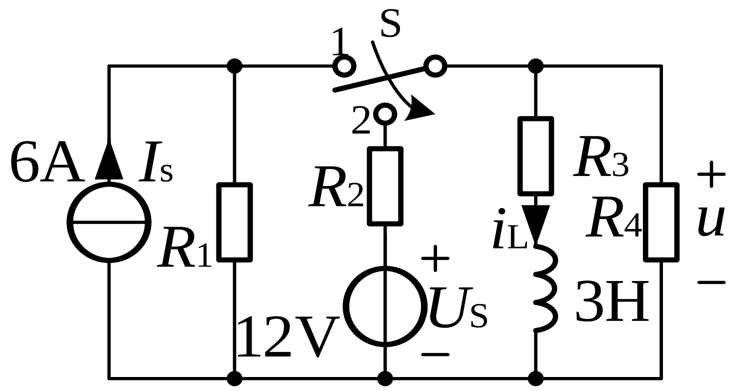
例3 如图 (a)所示电路，$R_1=6\Omega$，$R_2=R_4=6\Omega$，$R_3=3\Omega$，在$t<0$时开关S位于“1”，电路已处于稳态。$t=0$时开关S由“1”闭合到“2”。求$t\geq0$时的电流$i_L(t)$和电压$u(t)$的零输入响应和零状态响应。

解 (1)首先求出$i_L(0_-)$。

S接于1，电路直流稳态。

电感短路，利用分流公式得

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=3A$$



(a)

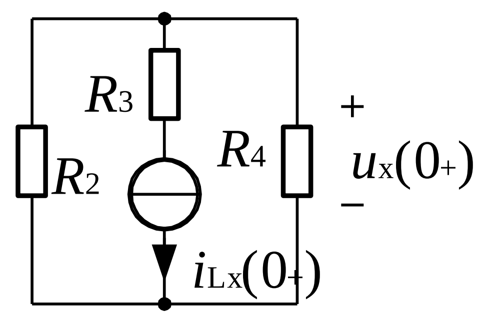
(2)求解零输入响应$i_{LZi}(t)$和$u_{Zi}(t)$ 。

零输入响应是令外加激励为零，仅由初始状态引起的响应

$$i_{Lzi}(0_+) = i_L(0_+) = 3A$$

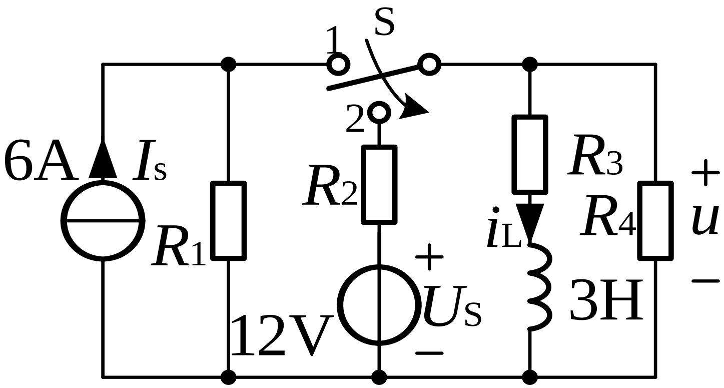
画出其0+等效电路，

注意将电压源U_S短路，如图所示



(c)

例3 如图 (a)所示电路，$R_1=6\Omega$，$R_2=R_4=6\Omega$，$R_3=3\Omega$，在$t<0$时开关S位于“1”，电路已处于稳态。$t=0$时开关S由“1”闭合到“2”。求$t\geq0$时的电流$i_L(t)$和电压$u(t)$的零输入响应和零状态响应。



(a)

解 (2)求解零输入响应$i_{LZi}(t)$和$u_{Zi}(t)$ 。

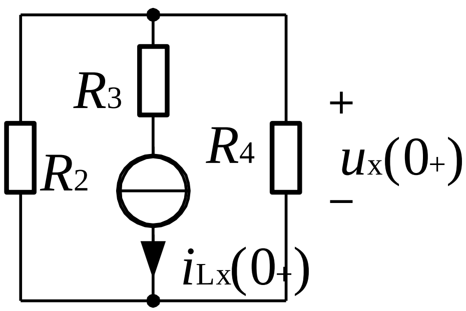
$$u_{zi}(0_+) = -(R_2//R_4)\, i_{Lzi}(0_+) = -3\times3 = -9(\text{V})$$

外加激励为零，所以

$$u_{zi}(\infty) = 0, \qquad i_{Lzi}(\infty) = 0$$

时常数 $R_0=\dfrac{R_2R_4}{R_2+R_4}+R_3=3+3=6$

$$\tau= L/R_0= 0.5\text{s}$$



(c)

零输入响应$i_{LZi}(t)$和$u_{Zi}(t)$

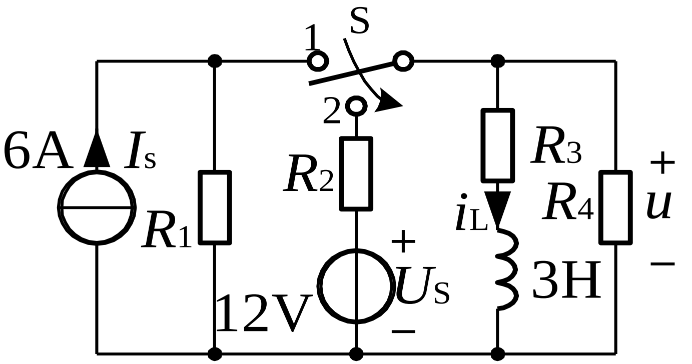
$$i_{Lzi}(t) = 3e^{-2t}\ (\text{A})$$

$$u_{zi}(t) = -9e^{-2t}\ (\text{V})，\quad t\geq0$$

5 举例

例3 如图 (a)所示电路，R_1 =6Ω，R_2 =R_4=6Ω，R_3=3Ω，在t <0时开关S位于“1”，电路已处于稳态。t=0时开关S由“1”闭合到“2”。求t≥0时的电流$i_L(t)$和电压$u(t)$的零输入响应和零状态响应。

解 (3)求解零状态响应$i_{Lzs}(t)$和$u_{zs}(t)$ 。

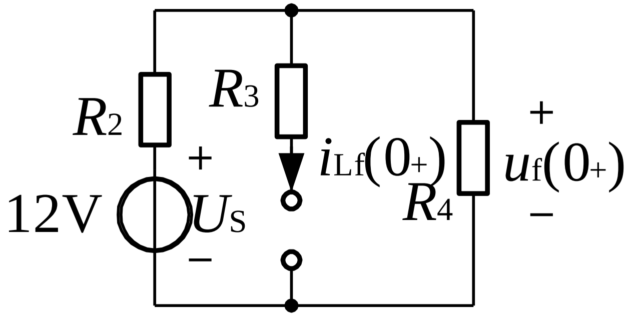


(a)

零状态响应是初始状态为零，仅由独立源所引起的响应；故

$$i_{Lzs}(0_+)=0$$

电感相当于开路。画出其0+等效电路，如图 (b)所示



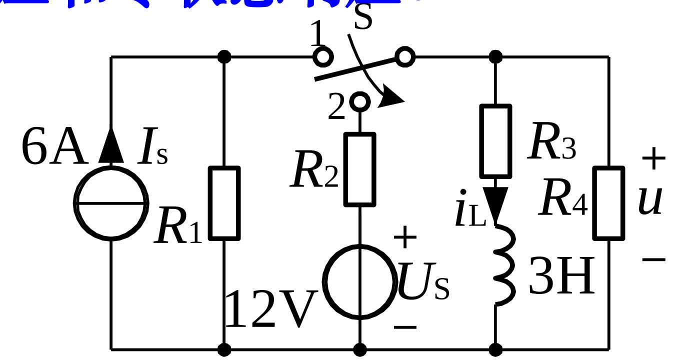
(b)

$$u_{ZS}(0_+)=\frac{R_4}{R_2+R_4}U_S=\frac{6}{6+6}\times 12=6V$$

$$u_{ZS}(\infty)=\frac{R_3\,//\,R_4}{R_3\,//\,R_4+R_2}U_S=\frac{2}{2+6}\times 12=3V$$

$$i_{LS}(\infty)=u_{ZS}(\infty)/R_3=3/3=1(A)$$

例3 如图 (*a*)所示电路，R_1=6Ω，$R_2=R_4$=6Ω，R_3=3Ω，在t<0时开关S位于“1”，电路已处于稳态。t=0时开关S由“1”闭合到“2”。求t≥0时的电流$i_L(t)$和电压$u(t)$的零输入响应和零状态响应。



(a)

解 (3)求解零状态响应$i_{LZS}(t)$和$u_{ZS}(t)$。

时常数相同 $\tau = L/R_0 = 0.5\text{s}$

利用三要素公式，求出零状态响应

$$i_{LZS}(t) = 1 - e^{-2t}\ (\text{A})$$

$$u_{ZS}(t) = 3 + 3e^{-2t}\ (\text{V})，\ t \ge 0$$

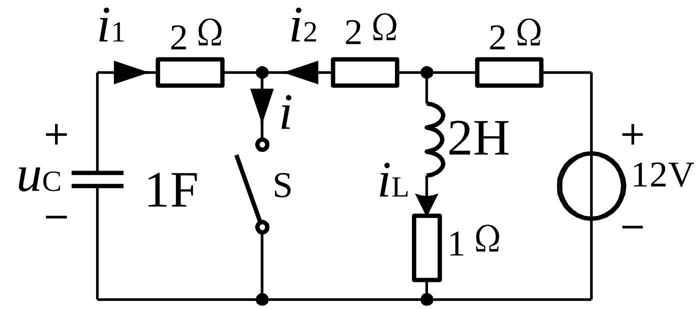
【评注】本题中，求$i_L(t)$的零输入响应和零状态响应时，也可利用下列方法：先用三要素法求出$i_L(t)$的全响应，$i_L(t) = i_L(0_+)e^{-t/\tau} + i_L(\infty)(1 - e^{-t/\tau})$，

$$i_{LZi}(t) = i_L(0_+)e^{-t/\tau}$$

$$i_{LZS}(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-t/\tau})$$

即若所求响应为$i_L(t)$或$u_C(t)$时，可直接从全响应的三要素公式中把其零输入响应和零状态响应分离出。

例4 如图 (a)所示电路，在$t<0$时开关S是断开的，电路已处于稳态。$t=0$时开关S闭合。求$t\geq 0$时的电流$i(t)$。



(a)

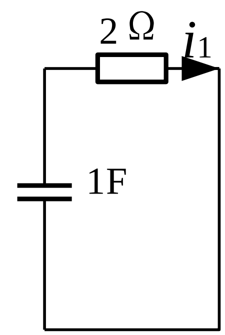
解 分析:开关S闭合后电路变为两个一阶电路，先利用三要素法分别求出两个一阶电路的电流$i_1(t)$和$i_2(t)$，然后利用KCL求得$i(t)=i_1(t)+i_2(t)$。

$t=0_-$时开关S断开，电路为直流稳态，

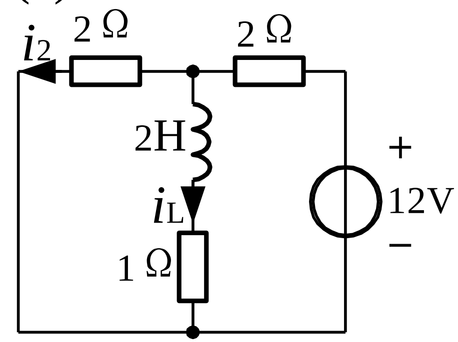
$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=12/(2+1)=12/3=4(A)$$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=1\times i_L(0_-)=4(V)$$

$\tau_C=R_C C=2\times 1=2s$，$\tau_L=L/R_L=2/(2//2+1)=1s$

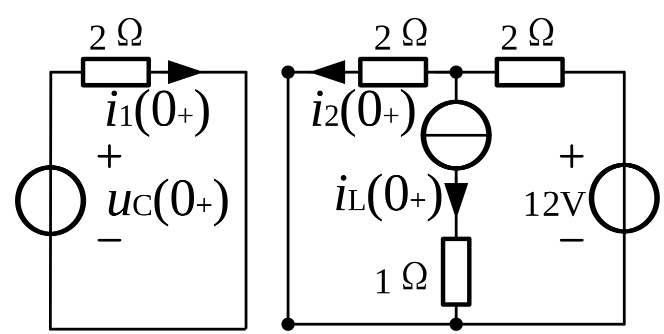


(b)



(c)

画出换路后的0_+等效电路如图 (d)所示。



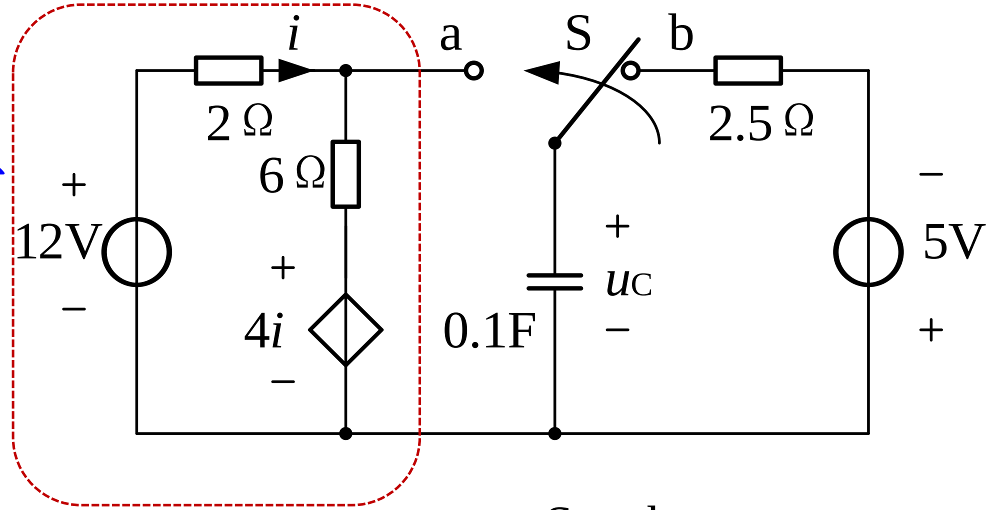
(d)

$i_1(0_+)=2A$，$i_2(0_+)=1A$。$i_1(\infty)=0$，$i_2(\infty)=1.5A$

$i_1(t)=2e^{-0.5t}(A)$，$i_2(t)=1.5-0.5e^{-t}(A)$，$t\geq 0$

$i(t)=i_1(t)+i_2(t)=2e^{-0.5t}+1.5-0.5e^{-t}(A)$，$t\geq 0$

例5 如图 (a)所示电路，在$t<0$时开关S位于b点，电路已处于稳态。$t=0$时开关S由b点切换至a点。求$t\ge 0$时的电压$u_C(t)$和电流$i(t)$。



解 化简电路。进行戴维南等效。

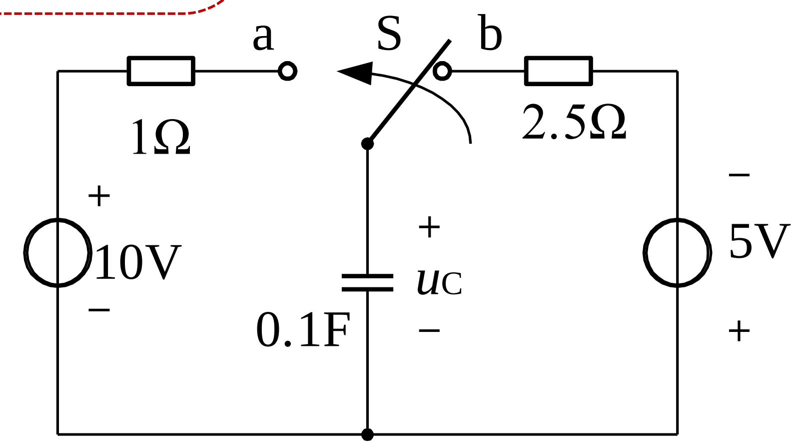
伏安关系法

$U_{oc}=10\text{V},\ R_0=1\Omega$

$u_C(0_+)=u_C(0_-)=-5\text{V}$

$u_C(\infty)=10\text{V}$

$\tau_C=R_0C=1\times0.1=0.1\text{s}$



利用三要素公式，得

$$u_C(t)=10+(-5-10)e^{-10t}=10-15e^{-10t}(\text{V}),t>0$$

回到原电路计算电流$i(t)$。

$2i(t)+u_C(t)-12=0$。

$$i(t)=\frac{12-u_C(t)}{2}=1+7.5e^{-10t}(A),t>0$$

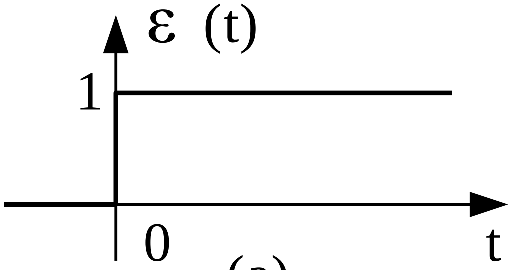
3.6 阶跃函数与阶跃响应

3.6.1 阶跃函数

一、 阶跃函数的定义

单位阶跃函数用ε(t)表示，其定义为：

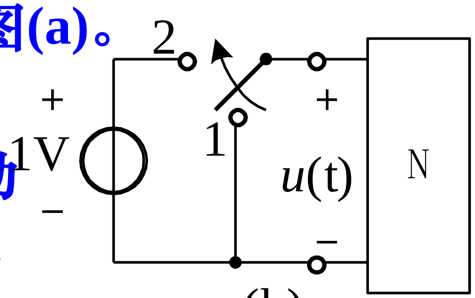
$$\varepsilon(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & ,t>0 \\ 0 & ,t<0 \end{cases}$$



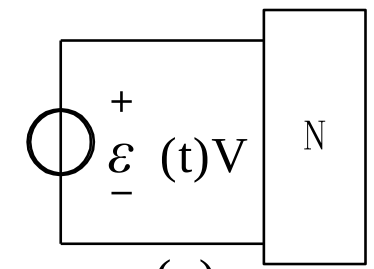
(a)

该函数在t = 0处发生单位跃变，波形如图(a)。

- 阶跃函数的应用之一是描述某些情况下的开关动作。如图 (b)所示的开关动作，表示在t = 0时把电路接入1V直流源时 u(t)的值，即： $u\ (t)= \varepsilon(t)$ V
电路简画为图(c)。

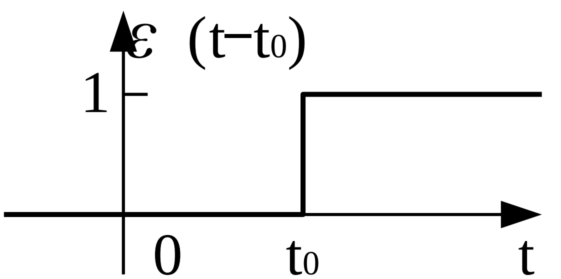


(b)



(c)

- 若单位直流电源接入的时刻为t_0，则可用延迟单位阶跃函数表示，其波形如图(d)。



(d)

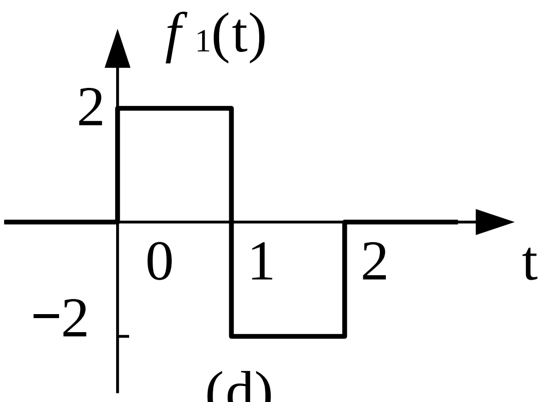
$$\varepsilon(t-t_0) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & ,t>t_0 \\ 0 & ,t<t_0 \end{cases}$$

二、 阶跃函数特性

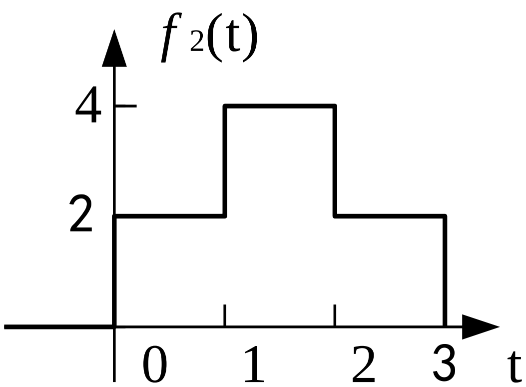
◆ 阶跃函数另一个重要应用是可以简洁地表示某些信号。

如图(a)的矩形脉冲信号，可以看成是图(b)和(c)两个阶跃信号之和。

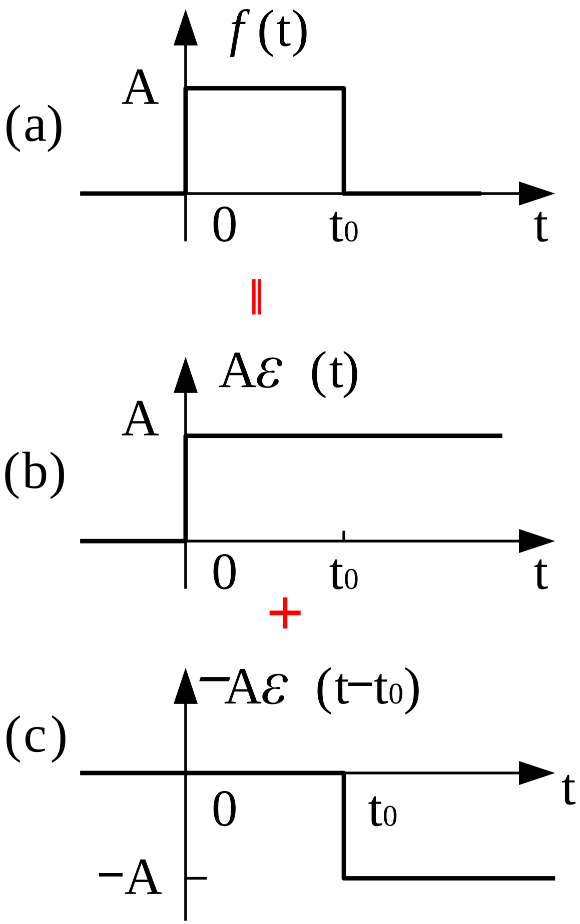
$$f(t) = A\varepsilon(t) - A\varepsilon(t-t_0)$$



(d)



(e)



$$f_1(t) = 2\varepsilon(t) - 4\varepsilon(t-1) + 2\varepsilon(t-2)$$

$$f_2(t) = 2\varepsilon(t) + 2\varepsilon(t-1) - 2\varepsilon(t-2) - 2\varepsilon(t-3)$$

此外，还可以用$\varepsilon(t)$表示任意函数的作用区间。

$f_3(t) = t\,[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]$，画出波形。

3.6.2 阶跃响应

一、 阶跃响应

当激励为单位阶跃函数$\varepsilon(t)$时，电路的零状态响应称为单位阶跃响应，简称阶跃响应，用$g(t)$表示。

单位阶跃函数$\varepsilon(t)$作用于电路相当于单位直流源(1V或1A)在t = 0时接入电路，因此，一阶电路的阶跃响应仍可用三要素法求得。

二、 线性时不变电路的性质

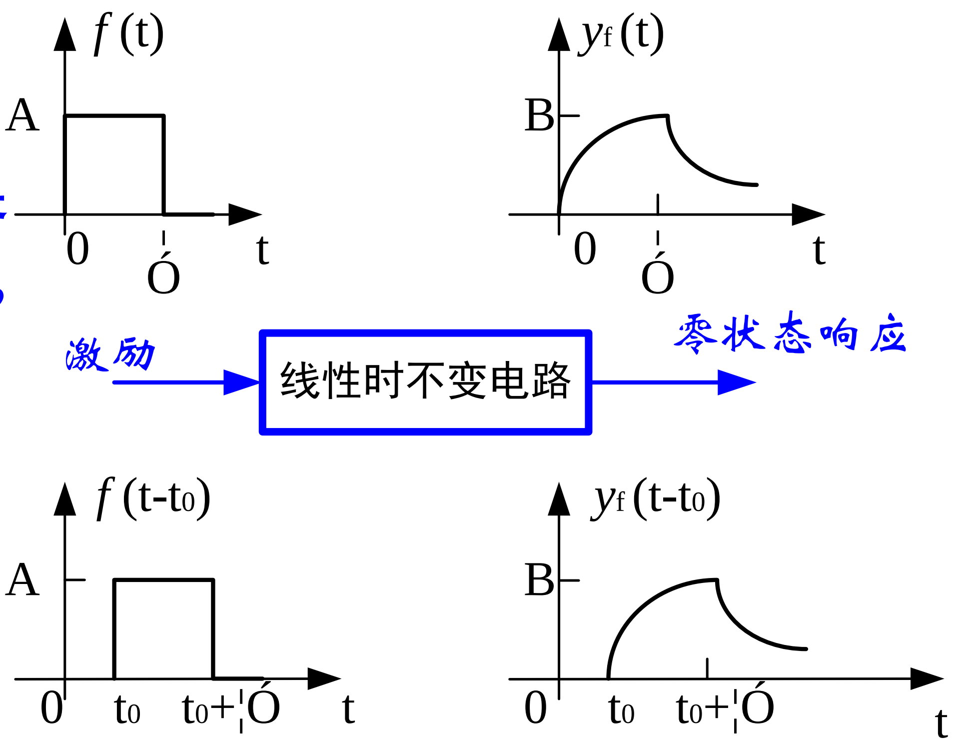
(1) 零状态响应与外加激励之间满足齐次性和叠加性(称零状态线性)。即，

若$f_1(t) \rightarrow y_{f1}(t)$， $f_2(t) \rightarrow y_{f2}(t)$，则$a\, f_1(t) + b\, f_2(t) \rightarrow a\, y_{f1}(t) + b y_{f2}(t)$

(2) 满足时不变性：

若$f(t) \rightarrow y_f(t)$，

则$f(t - t_0) \rightarrow y_f(t - t_0)$



例 如图 (a)所示电路，

(1)以$u_C(t)$为输出，求电路的阶跃响应g(t)；

(2)若激励i_S的波形如图(b)，求电路的零状态响应$u_C(t)$。

解

(1)用三要素法。根据阶跃响应g(t) 的定义，

知$u_C(0_+) = 0$；激励$i_S = \varepsilon(t)$ A,可得

$$u_C(\infty) = 6\times 1 = 6\text{V}$$

$$\tau = RC = (6+4)\times 0.2 = 2\text{s}$$

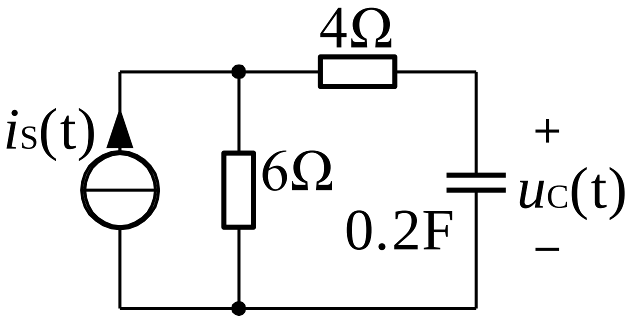
故 $g(t) = 6(1 - e^{-t/2})\,\varepsilon(t)$

(2) $i_S = 2\,\varepsilon(t) - 2\,\varepsilon(t-2)$ A，

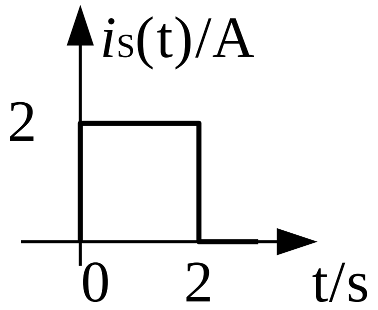
根据线性时不变性质，得零状态响应

$$u_C(t) = 2\,g(t) - 2\,g(t-2)$$

$$= 12(1 - e^{-t/2})\,\varepsilon(t) - 12[1 - e^{-(t-2)/2}]\,\varepsilon(t-2)\ \text{V}$$



(a)



(b)

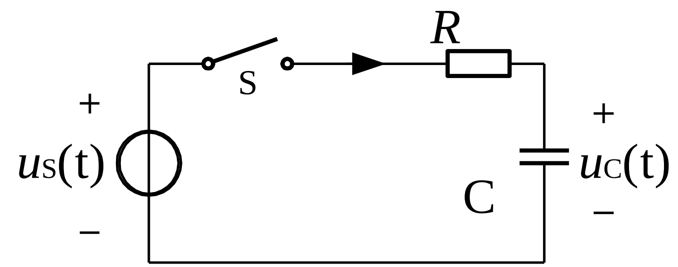
3.7 正弦激励下一阶电路的响应

实际电路中，除直流电源外，另一类典型的激励就是正弦电源。

- 正弦电源激励下电路的响应为齐次解和特解。
- 特解为同频率的正弦信号。
  以一阶电路为例讨论正弦电源激励下电路的完全响应。

一、 正弦稳态激励全响应求解

例 如图所示电路，$t=0$时开关闭合。已知电容电压的初始值$u_C(0_+)=U_0$。激励 $u_S(t)=U_{Sm}\cos(\omega t+\varphi_S)$ V，求$t\geq 0$时的$u_C(t)$。



(a)

解 $t\geq 0$时开关闭合，列方程为

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_{Sm}\cos(\omega t+\varphi_S)$$

$$u_C(t)=u_{Ch}(t)+u_{Cp}(t)\,,\qquad u_{Ch}(t)=K\,e^{-t/(RC)}$$

其特解为与激励具有相同频率的余弦函数，即

$$u_{Cp}(t)=U_{Cm}\cos(\omega t+\varphi_C)$$

代入方程得

$$-RC\omega U_{Cm}\sin(\omega t+\varphi_C)+U_{Cm}\cos(\omega t+\varphi_C)=U_{Sm}\cos(\omega t+\varphi_S)$$

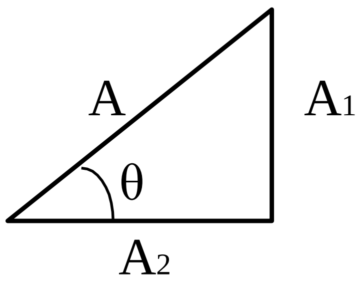
例 如图所示电路，t =0时开关闭合。已知电容电压的初始值$u_C(0_+) = U_0$。激励 $u_S(t)= U_{Sm}\cos(\omega t+\varphi_S)$ V，求t≥0时的$u_C(t)$。

解

$$-RC\omega U_{Cm}\sin(\omega t+\varphi_C)+U_{Cm}\cos(\omega t+\varphi_C)=U_{Sm}\cos(\omega t+\varphi_S)$$

设 $A_1=\omega RCU_{Cm}$，$A_2=U_{cm}$ 构成直角三角形，如图(b)，则

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=U_{Cm}\sqrt{(\omega RC)^2+1} \qquad \theta=\arctan\frac{A_1}{A_2}=\arctan\omega RC$$



$A_1=A\sin\theta$，$A_2=A\cos\theta$，故

$$-A\sin\theta\sin(\omega t+\varphi_C)+A\cos\theta\cos(\omega t+\varphi_C)=U_{Sm}\cos(\omega t+\varphi_S)$$

利用$\cos x\cos y-\sin x\sin y=\cos(x+y)$，得

$$A\cos(\omega t+\varphi_C+\theta)=U_{Sm}\cos(\omega t+\varphi_S)$$

$$A=U_{Cm}\sqrt{(\omega RC)^2+1}=U_{Sm} \qquad \varphi_C+\theta=\varphi_S$$

例 如图所示电路，t =0时开关闭合。已知电容电压的初始值$u_C(0_+) = U_0$。激励 $u_S(t)= U_{Sm}\cos(\omega t +\varphi_S)$ V，求t≥0时的$u_C(t)$。

解 解得 $A = U_{Cm}\sqrt{(\omega RC)^2+1} = U_{Sm}$　　$\varphi_C + \theta = \varphi_S$

$$U_{Cm} = \frac{U_{Sm}}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}}$$　　$$\varphi_C = \varphi_S - \theta = \varphi_S - \arctan(\omega RC)$$

由初始条件确定常数K，即 $u_C(0_+) = K + U_{Cm}\cos(\varphi_C) = U_0$，解得

$$K = U_0 - U_{Cm}\cos(\varphi_C)$$

$$u_C(t) = (U_0 - U_{Cm}\cos\varphi_C)\, e^{-t/(RC)} + U_{Cm}\cos(\omega t + \varphi_C)$$

前一项是暂态响应，后一项为稳态响应，称为正弦稳态响应。

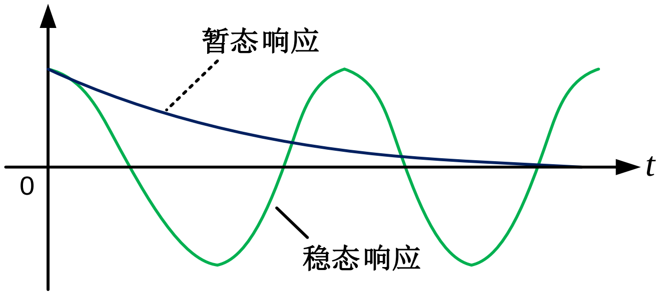
在稳定系统前提下，正弦激励下的全响应由暂态和稳态响应组成。我们特别关注稳态响应，当电路复杂时，求解稳态响应较烦，下一章学习一种简便方法—相量法。

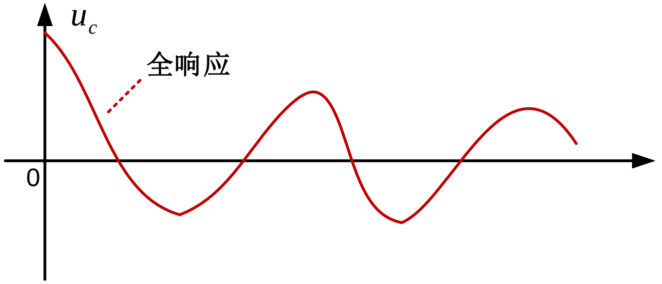
二、 正弦稳态激励全响应分解

$$u_c(t)=\underbrace{(U_0-U_{cm}\cos\varphi)e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{暂态响应}}+\underbrace{U_{cm}\cos(\omega t+\varphi)}_{\text{稳态响应}},\quad t>0$$

$$=\underbrace{U_0e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{零输入响应}}-\underbrace{U_{cm}[\cos\varphi e^{-\frac{t}{RC}}-\cos(\omega t+\varphi)]}_{\text{零状态响应}},\quad t>0$$

- 由于RC>0，第一项为暂态响应，第二项是正弦稳态响应。
- 通常认为，经3 τ到 5 τ的时间暂态响应近似为零，响应近似等于稳态响应。若t→∞，则电路就达到稳态，暂态响应为零。





三、 正弦激励响应三要素法

$$u_C(t) = (U_0 - U_{Cm}\cos\varphi_C)\, e^{-t/(RC)} + U_{Cm}\cos(\omega t + \varphi_C)$$

正弦稳态激励下一阶电路的三要素公式

$$y(t) = [y(0_+) - y_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} + y_p(t)$$

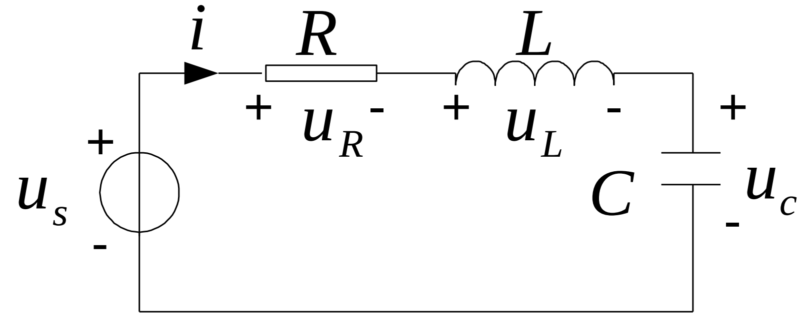
求全响应时，先求特解，即求解稳态响应，带入三要素公式。

求解稳态响应过程过于繁琐；

下一章主要学习求稳态响应的简单方法—相量法。

3.8 二阶电路分析

用二阶微分方程描述的电路为二阶电路。本节以RLC串联电路为例讨论二阶电路的零输入响应。



$(t>0)$

一 RLC串联电路的方程

以 $u_C(t)$为响应，列电路的方程

$$u_R + u_L + u_C = u_S$$

由*R*、*L*、*C*元件的VCR

$$i = i_L = i_C = C\frac{du_c}{dt} \qquad u_R = Ri = RC\frac{du_C}{dt} \qquad u_L = L\frac{di_L}{dt} = LC\frac{d^2u_c}{dt^2}$$

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = \frac{1}{LC}u_s$$

令激励为零，求 *RLC*串联电路的零输入响应：

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = 0$$

令 $2\alpha=R/L$， 称衰减常数， $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 称串联电路谐振频率，表示为

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + 2\alpha\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$$

二、RLC串联电路零输入响应

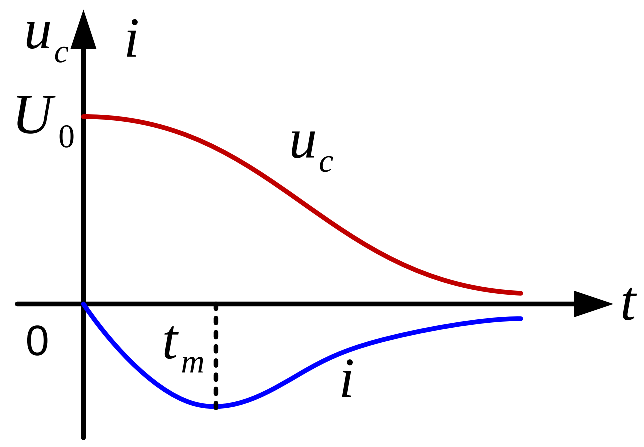
特征根为 $p_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$

当R、L、C取不同值时，特征根有4种不同情况，零输入响应也有4种不同情况。下面分别讨论4种不同情况的零输入响应 。

(1) $\alpha>\omega_0$ ($R^2>4L/C$)称过阻尼情况。电阻R的值较大，对电能损耗较大，对电流的阻碍作用较大。根为不相等的负实根，分别为：

$$\left.\begin{aligned} p_1&=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}=-\alpha_1 \\ p_2&=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}=-\alpha_2 \end{aligned}\right\}$$

$$u_C(t)=C_1e^{-\alpha_1 t}+C_2e^{-\alpha_2 t} \qquad i(\infty)=0$$



过阻尼时 u_c、i 的波形

(2) $\alpha=\omega_0$ ($R^2=4L/C$)称临界阻尼。这种情况下，电阻R的值比过阻尼时小，因此，对能量的损耗和对电流的阻碍作用较过阻尼情况要小。根为相等的负实根，即

$$p_1 = p_2 = -\alpha$$

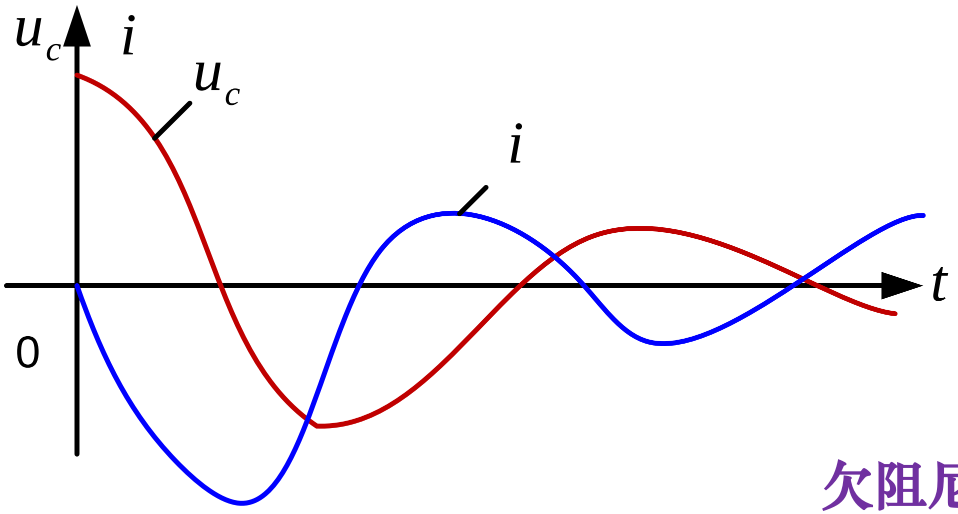
零输入响应形式 $$u_c(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t}$$

(3) $\alpha>\omega_0$ ($R^2>4L/C$)称欠阻尼情况. 这种情况下，电阻的值较临界阻尼情况更小，对电能的损耗和对电流的阻碍作用也更小。根是一对共轭复根，分别为:

$$p_{1,2}=-\alpha\pm j\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}=-\alpha\pm j\omega_d$$

$$\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$$

$$u_c(t)=Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_d t-\varphi)$$

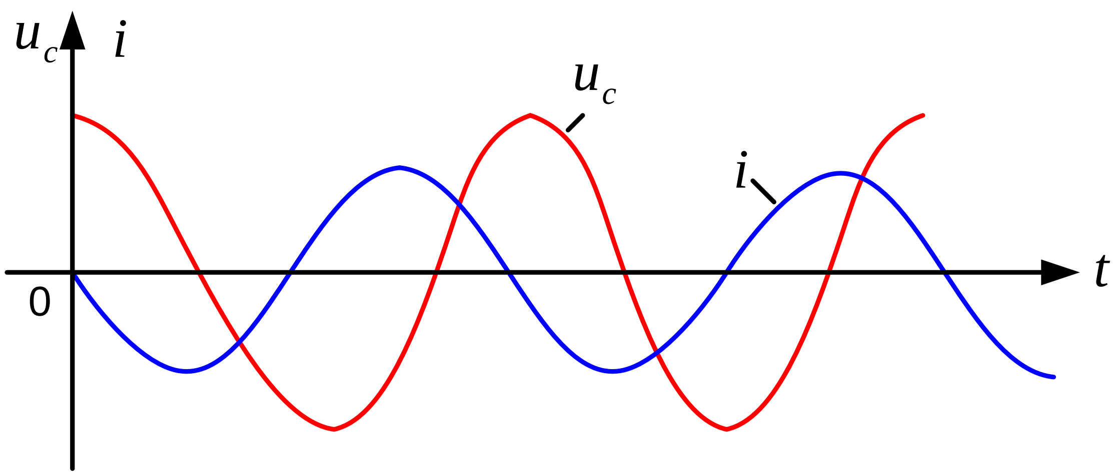


欠阻尼时 u_c、i 的波形

(4) α=0 (R=0)无阻尼情况，由于电阻R=0，电路中无能量损耗，电路中的贮能通过两个动态元件的充放电，在两个动态元件之间转换，形成等幅的正弦振荡。

$$p_1 = p_2 = \pm \mathrm{j}\beta = \pm \mathrm{j}\omega_0$$

$$u_c(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t)$$



无阻尼时 u_c、i 的波形

3.8.2 RLC串联电路的阶跃响应

下面以讨论阶跃响应为例讨论*RLC*串联电路的零状态响应。

阶跃响应是单位阶跃信号ε(t)激励下电路的零状态响应。

令 $u_s(t)=\varepsilon(t)$， u_c为响应，求阶跃响应$u_c(t)$ 。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2u_c}{dt^2}+2\alpha\frac{du_c}{dt}+\omega_0^2u_c=\omega_0^2\varepsilon(t)\\&u_c(0_+)=0,\frac{du_c}{dt}\Big|_{t=0+}=\frac{i(0_+)}{C}=0\end{aligned}\right\}$$

$$u_c(t)=u_{ch}(t)+u_{cp}(t)$$

由于 $t>0$ 时$\varepsilon(t)=1$，故$u_{cp}=1$ 。

特征根也分4种情况。每种情况对应的齐次解形式也相同。

以特征根为一对共轭复根，即欠阻尼情况为例，求齐次解u_{ch}和阶跃响应。

特征根p_1和p_2分别为：

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \alpha^2}$$

$$u_{\mathrm{ch}}(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_d t - \varphi)$$

$$A = \frac{\omega_0}{\omega_d}$$

u_c(t)的阶跃响应为：

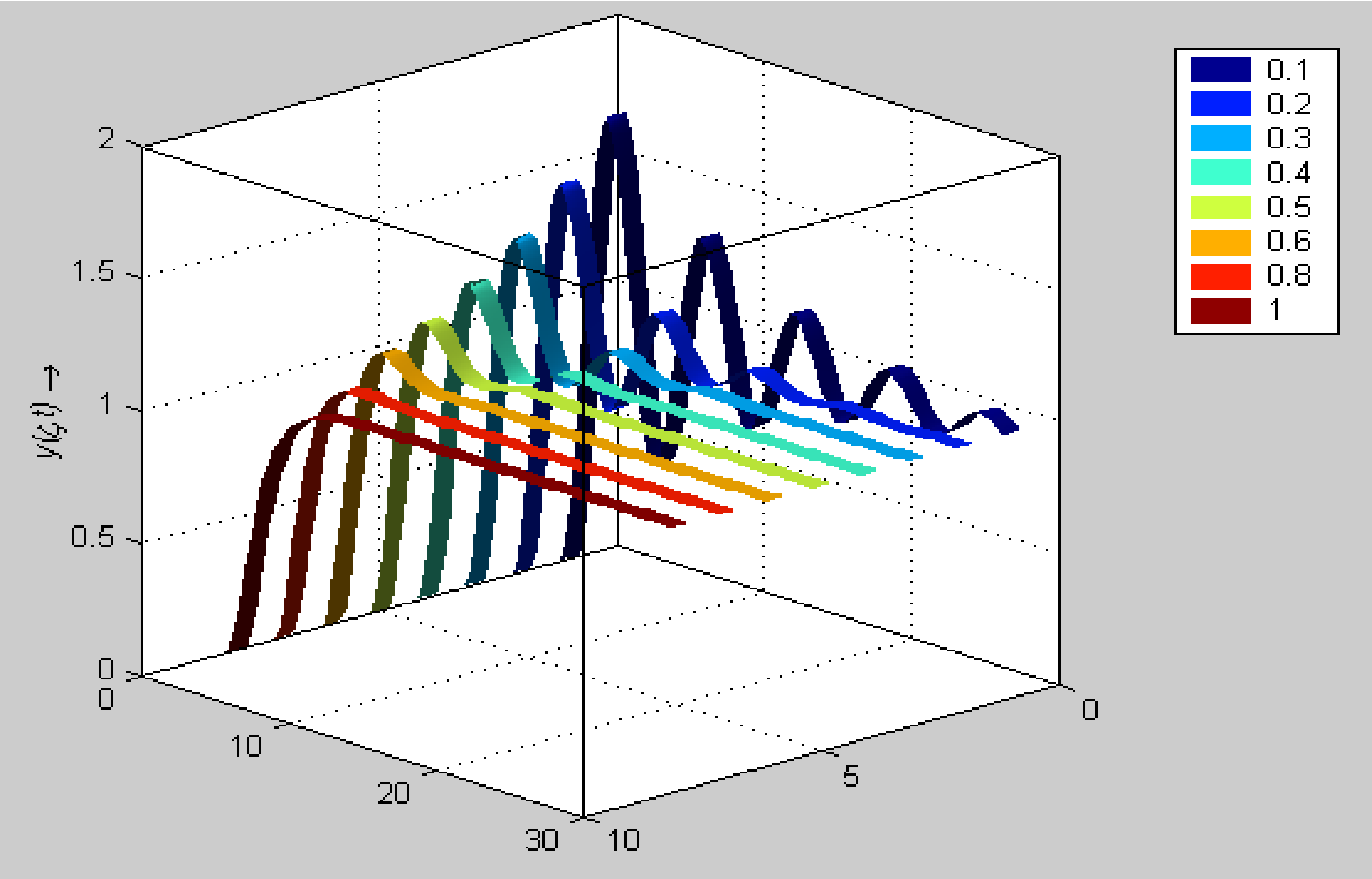
$$u_c(t) = 1 + Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_d t - \varphi)$$

$$\varphi = \arctan\frac{\alpha}{\omega_d}$$

代入初始条件：

$$u_c(0_+) = 0, \frac{du_c}{dt}\Big|_{t=0+} = 0$$

$$u_c(t) = 1 - \frac{\omega_0}{\omega_d}e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t - \arctan\frac{\alpha}{\omega_d}), \qquad t > 0$$


0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.8
1
y(ζ,t) →
2
1.5
1
0.5
0
0
10
20
30
10
5
0