

第二章 电阻电路分析

电阻电路：仅包含电阻、独立源和受控源的电路，不含动态元件

章节目录

2.1 图与电路方程

- 1、网络（电路）的拓扑图
- 2、回路、割集、树
- 3、KCL和KVL的独立方程

2.2 $2b$ 法和支路法

- 1、 $2b$ 法
- 2、支路法

2.3 回路法与网孔法

- 1、回路法
- 2、网孔法

2.4 割集法与节点法

- 1、割集法
- 2、节点法

章节目录

2.5 齐次定理和叠加定理

1、齐次定理

2、叠加定理

2.6 替代定理

1、替代定理

2、应用举例

2.7 等效电源定理

1、戴维南定理

2、诺顿定理

3、等效内阻的计算

4、定理的应用举例

5、最大功率传输定理

2.8 特勒根定理和互易定理

1、特勒根定理

2、互易定理



2.5 齐次定理和叠加定理

- ◆ 线性电路是指由线性元件、线性受控源及独立源组成的电路。
- ◆ 线性性质:包括 齐次性和叠加性。
- ◆ 齐次定理和叠加定理就是线性电路具有齐次和叠加特性的体现。

数学里的线性，指的是线性映射 f ，它满足：

1、齐次性（比例性）

$$f(ax)=af(x)$$

2、可加性(叠加性)

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$$

也可以将两者合在一起，记为

$$f(ax_1+bx_2)=af(x_1)+bf(x_2)$$

注意：直线方程 $y=f(x)=ax+b$ 是线性方程，但是不满足齐次性，也不满足可加性。

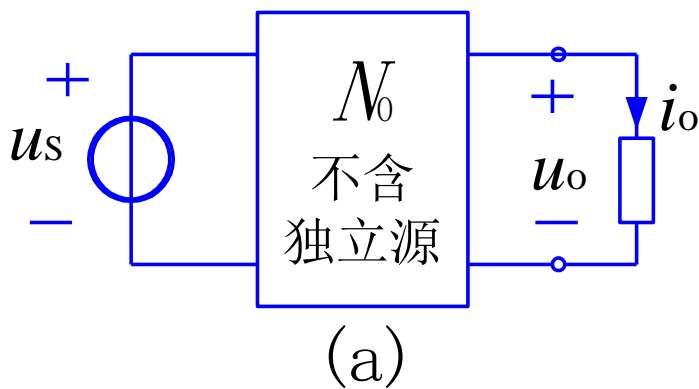


2.5.1 齐次定理

一、基本内容

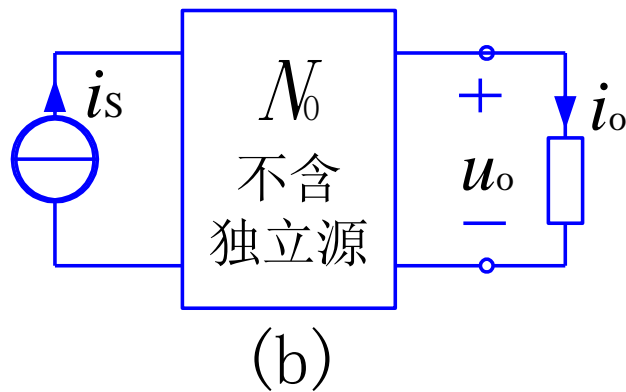
对于具有唯一解的线性电路，当只有一个激励源(独立电压源或独立电流源) $x(t)$ 作用时，其响应 $y(t)$ (电路任意处的电压或电流) 与激励成齐次(比例)关系。

$$y(t) = kx(t)$$



$$i_o = K_1 u_s$$

$$u_o = K_2 u_s$$



$$i_o = K_3 i_s$$

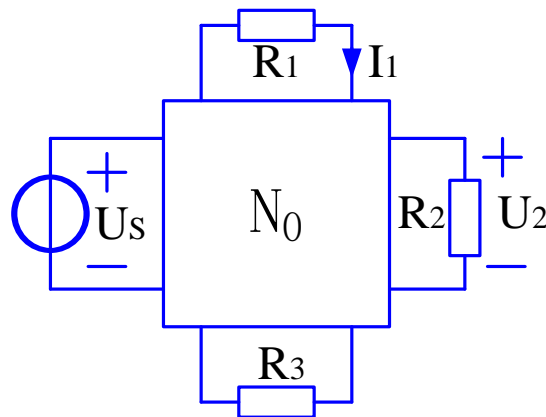
$$u_o = K_4 i_s$$

常量 k 单位不一样, 分别为 S、无单位、 Ω



二、例题分析

例1 如图电路， N_0 是不含独立源的线性电路，当 $U_S=100\text{V}$ 时， $I_1=3\text{A}$ ， $U_2=50\text{V}$ ， R_3 的功率 $P_3=60\text{W}$ ，今若 U_S 降为 90V ，试求相应的 I'_1 ， U'_2 ， P'_3



解: 该电路只有一个独立源，根据齐次定理各处响应与该激励成齐次关系

即激励增加或减少多少倍，则各处电流电压也相应增加或减少多少倍。现激励降为原来的 $90/100=0.9$ 倍，所以有

$$I'_1=0.9 I_1=0.9 \times 3=2.7(\text{A});$$

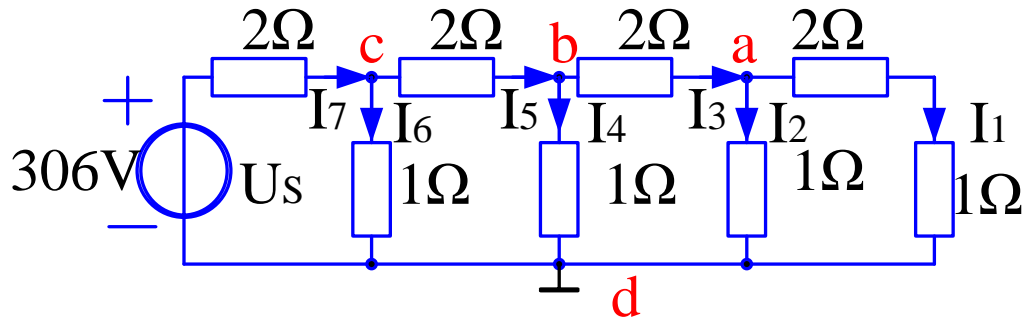
$$U'_2=0.9 U_2=0.9 \times 50=45\text{V};$$

功率变化为多少？

$$\begin{aligned} P'_3 &= U'_3 I'_3 = 0.9 U_3 \times 0.9 I_3 \\ &= \mathbf{0.81} U_3 I_3 = 0.81 P_3 = 48.6\text{W} \end{aligned}$$

可见，功率与电源大小没有齐次关系。

解: 该电路只有一个独立源, 根据齐次定理, 各处响应与该激励成正比。



可采用逆推方式，设定 I_1 推出 U_s ，
找出 I_1 与 U_s 之间的比例常数 k 。

设 $I_1=1\text{A}$ ，则利用OL，KCL，KVL逐次求得

$$U_a = (2+1)I_1 = 3V$$

$$I_2 = U_a / 1 = 3A$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = 1 + 3 = 4\text{A}$$

$$U_b = 2I_3 + U_a = 2 \times 4 + 3 = 11V$$

$$I_4 = U_b / 1 = 11\text{A}$$

$$I_5 = I_3 + I_4 = 4 + 11 = 15\text{A}$$

$$U_c = 2I_5 + U_b = 2 \times 15 + 11 = 41 \text{ V}$$

$$I_6 = U_c / 1 = 41\text{A}$$

$$I_7 = I_5 + I_6 = 15 + 41 = 56\text{A}$$

$$U_s = 2I_7 + U_c = 2 \times 56 + 41 = 153V$$

故 $k = I_1/U_S = 1/153 \text{ S}$

所以，当 $U_s = 306V$ 时电流

$$I_1 = kU_s = 306/153 = 2A$$



二、齐次定理的说明

- (1) 齐次定理只适用于具有唯一解的线性电路，不能用于非线性电路。
- (2) 电路的响应(response)也称为输出(output)，指电路中任意处的电流或电压；功率与激励源之间不存在线性关系；
- (3) 激励源(excitation)也称为输入(input)，指电路中的独立电压源或独立电流源；受控源不是激励源。



2.6.2 叠加定理

一、基本内容

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$$

对于具有唯一解的线性电路，多个激励源共同作用时引起的响应(电路中各处的电流、电压)等于各个激励源单独作用时(其它激励源的值置零)所引起的响应之和。

例如：两个激励源情况下，激励分别是 x_1, x_2

激励 x_1 单独作用引起的响应 $y'(t)=f(x_1)$

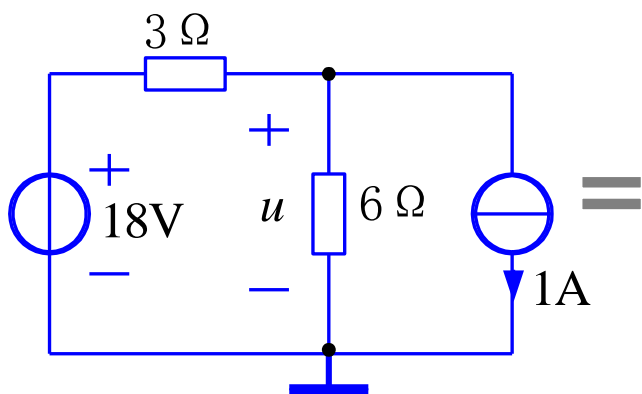
激励 x_2 单独作用引起的响应 $y''(t)=f(x_2)$

激励 x_1 和 x_2 共同作用引起的响应 $y(t)=f(x_1+x_2)$

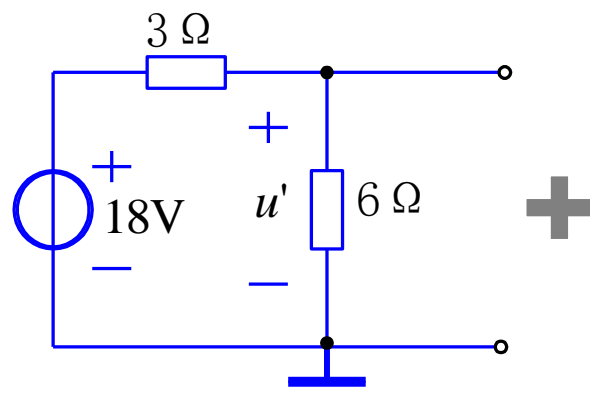
激励 x_1 和 x_2 共同作用引起的响应等于它们各自单独作用引起的响应之和。

$$y(t) = y'(t) + y''(t)$$

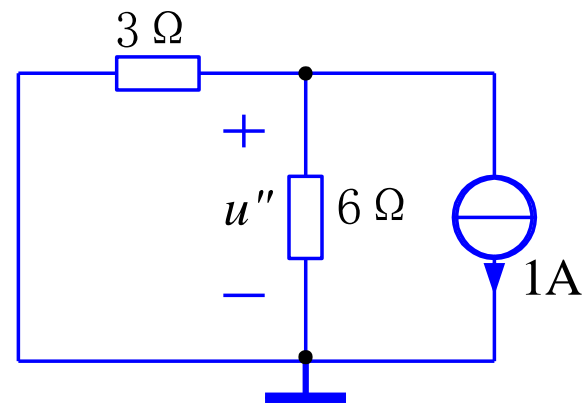
二、说明和验证



(a) 两激励源共同作用时



(b) 电压源单独作用时



(c) 电流源单独作用时

$$u = u' + u''$$

电流源置零：开路

电压源置零：短路

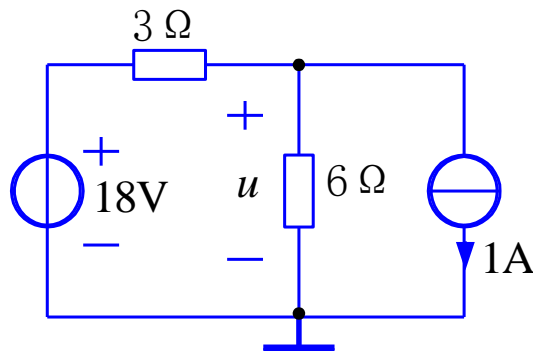


验证

(1) 求解支路电压 u

利用节点法列方程得

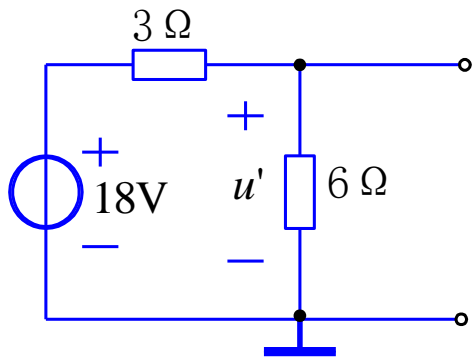
$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)u = \frac{18}{3} - 1$$



解得 $u = 10(\text{V})$

(a) 两激励源共同作用时

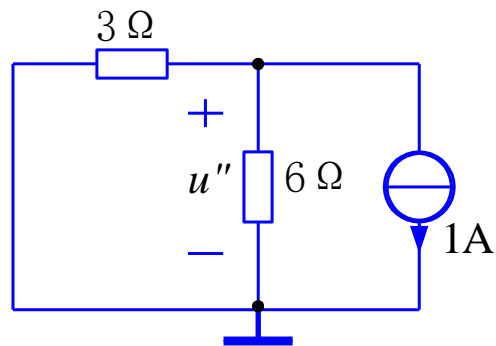
(2) 叠加定理验证



(b) 电压源单独作用时

当电压源单独作用时, 电流源置零,
既电流源开路。分压公式得

$$u' = 12(\text{V})$$



(c) 电流源单独作用时

当电流源单独作用时, 电压源置
零, 即电压源短路可得

$$u'' = -2(\text{V})$$

$$u = u' + u'' = 10(\text{V})$$

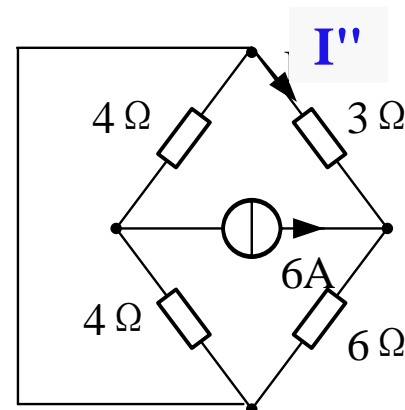
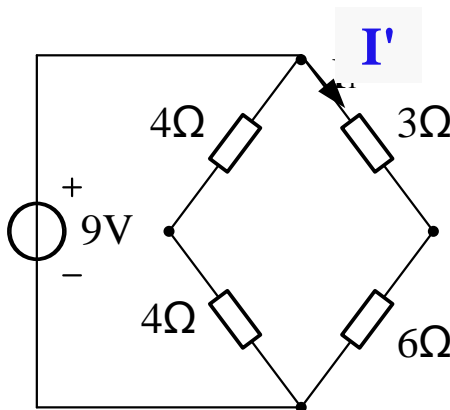
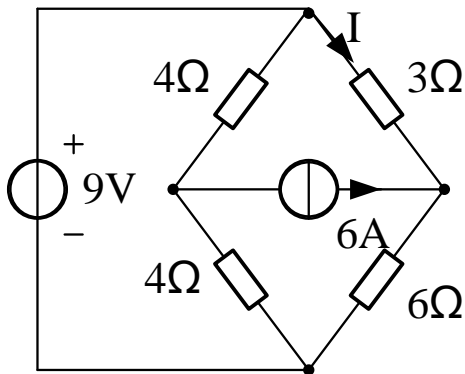


- (1) 叠加定理仅适用于线性电路求解电压和电流响应，而不能用来计算功率。
- (2) 当一独立源单独作用时，其它独立源的值都应等于零；（即，独立电压源短路，独立电流源开路），而电路的结构和所有电阻和受控源均应保留。注意：受控源保留。
- (3) 叠加的方式是任意的，可以一次使一个独立源单独作用，也可以一次使几个独立源同时作用；即：可以将独立源分成若干组分别单独作用，每组的独立源数目可以是一个或多个。



三、举例

例1 求如图电路电流 I



解:根据叠加定理,分为电压源单独作用时(电流源置零)和电流源单独作用(电压源置零)时电流的和。

(1)电压源单独作用时:
电流源置零即**电流源开路**, 由欧姆定律得:

$$I' = 1A$$

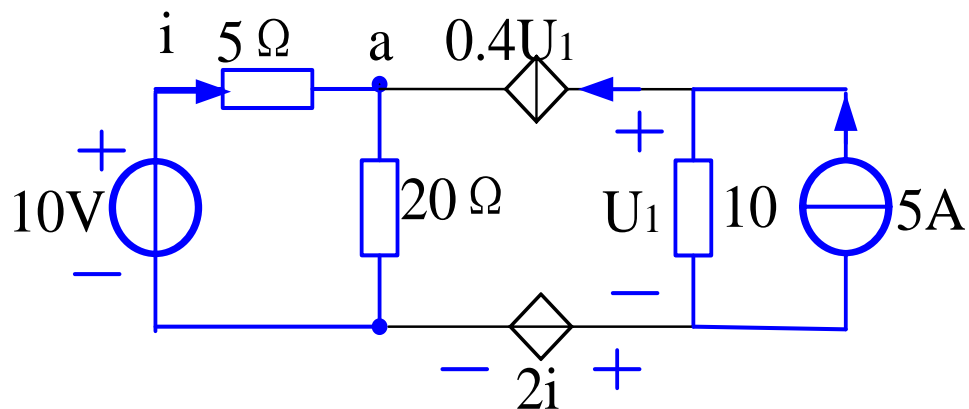
(2)电流源单独作用时:**电压源短路**,
电路等效如图,由分流公式(注意方向)

$$I'' = -4A$$

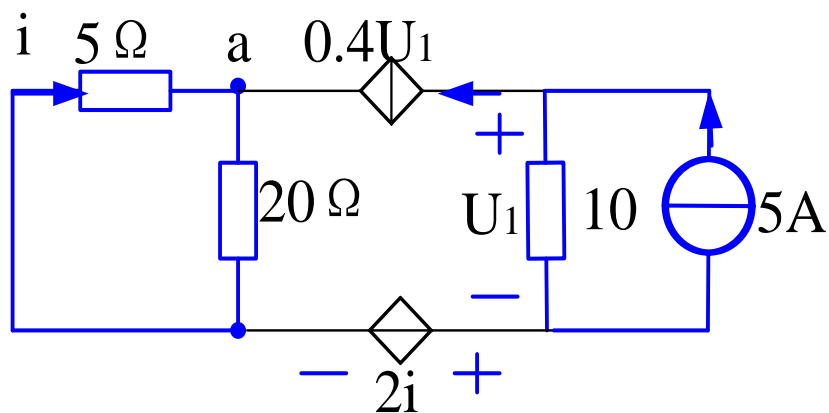
(3) 根据叠加定理, 电流为

$$I = I' + I'' = -3A$$

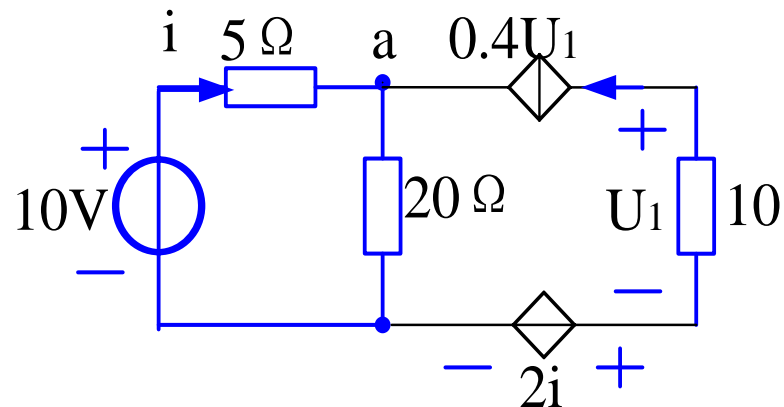
注意：电源单独作用时，受控源保留(不当做独立源处理)，如图



||



+





对于一些未知结构(黑盒子)电路,利用性质进行分析,用叠加定理求解更为方便。

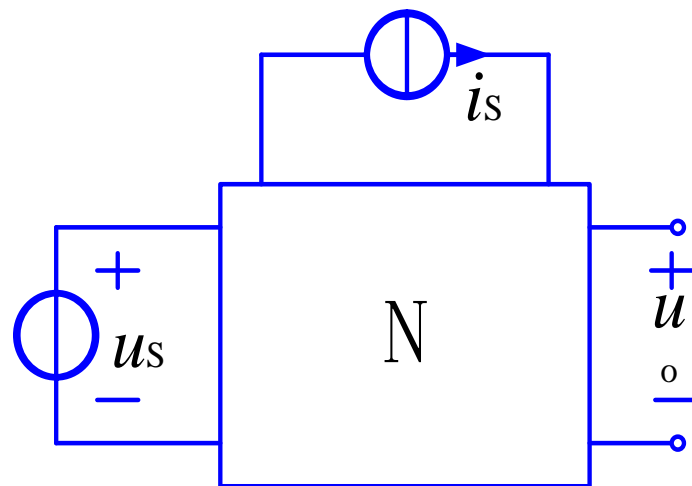
例2 如图电路,N是含有独立源的线性电路,已知

当 $u_s = 6\text{V}$, $i_s = 0$ 时, 开路电压 $u_o = 4\text{V}$;

当 $u_s = 0\text{V}$, $i_s = 4\text{A}$ 时, $u_o = 0\text{V}$;

当 $u_s = -3\text{V}$, $i_s = -2\text{A}$ 时, $u_o = 2\text{V}$;

求当 $u_s = 3\text{V}$, $i_s = 3\text{A}$ 时的电压 u_o 。



分析

N是含有独立源的线性电路, 将激励源分为三组:

①电压源 u_s ;

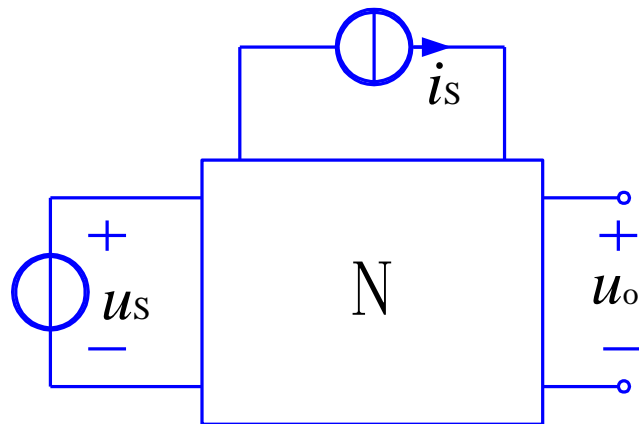
②电流源 i_s ;

③N内的全部独立源。



仅由电压源 u_s 单独作用时引起的响应为 u_o' 仅由
电流源 i_s 单独作用时引起的响应为 u_o'' 仅由N内
部所有独立源引起的响应记为 u_o'''

根据叠加定理, 有 $u_o = u_o' + u_o'' + u_o'''$



解:

- ① 电压源 u_s , 齐次性 $\rightarrow u_o' = K_1 u_s$
- ② 电流源 i_s , 齐次性 $\rightarrow u_o'' = K_2 i_s$;
- ③ N内的全部独立源, $\rightarrow u_o'''$

$$u_o = K_1 u_s + K_2 i_s + u_o'''$$

将已知条件代入得

$$6 K_1 + u_o''' = 4$$

$$4 K_2 + u_o''' = 0$$

$$-3 K_1 - 2 K_2 + u_o''' = 2$$

得 $K_1 = 1/3$, $K_2 = -1/2$, $u_o''' = 2$

因此 $u_o = u_s/3 - i_s/2 + 2$

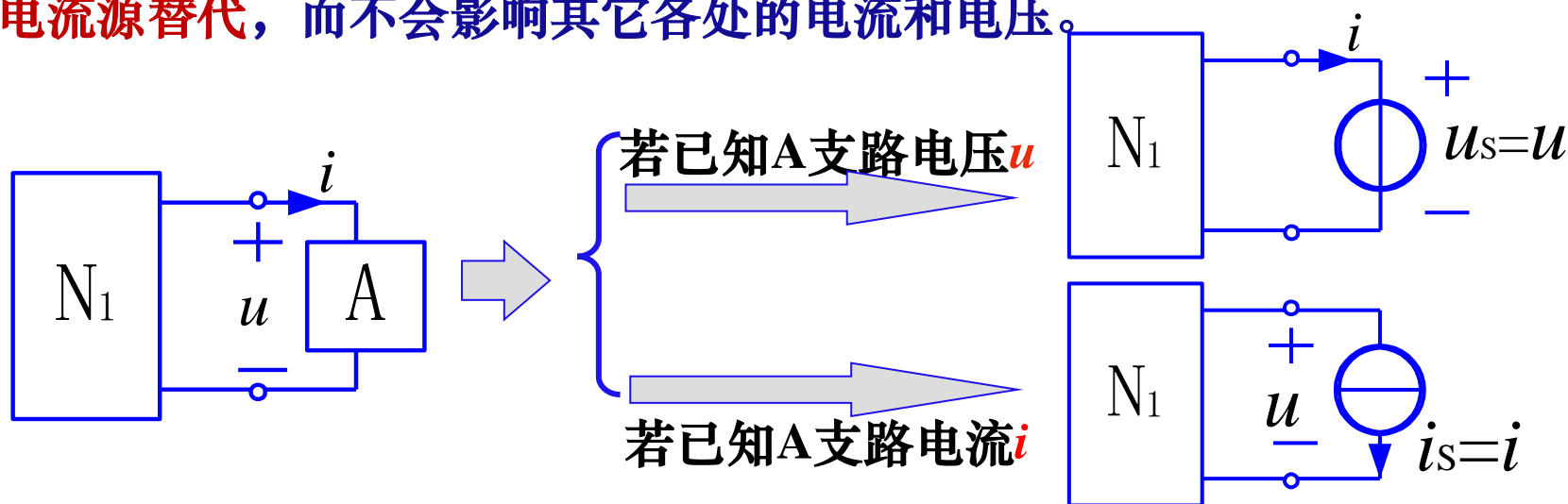
当 $u_s = 3V$, $i_s = 3A$ 时, $u_o = 1.5V$

2.6 替代定理

替代定理也称为置换定理，它对于简化电路的分析非常有用。它既可用于线性电路，也可用于非线性电路。

一 基本内容

对于具有唯一解的线性或非线性电路，若某支路的电压 u 或电流 i 已知，则该支路可用方向和大小与 u 相同的电压源替代，或用方向和大小与 i 相同的电流源替代，而不会影响其它各处的电流和电压。



支路A用电压源或电流源替代后， N_1 中的电流、电压保持不变。



二 举例说明

对图(a)电路，求节点电压 u_a

① 列节点方程

$$(1+0.5+0.5)u_a = 4/2 + 8/2 = 6$$

解得 $u_a = 3V$,

$$i_1 = u_a / 1 = 3A ,$$

$$i_2 = (4 - u_a) / 2 = 0.5A$$

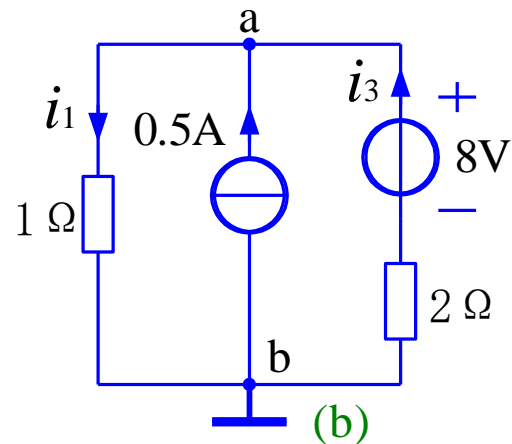
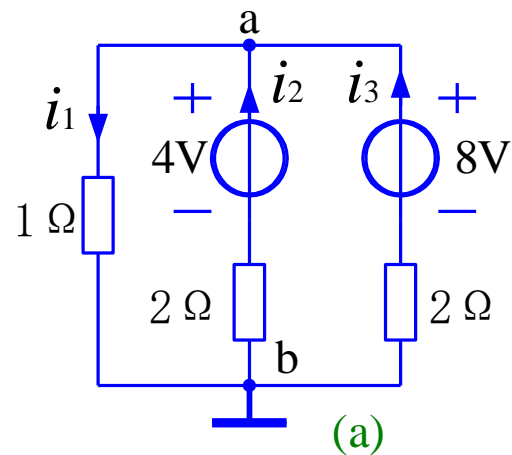
$$i_3 = (8 - u_a) / 2 = 2.5A$$

② 替代:

用 $i_2 = 0.5A$ 替代 i_2 支路，再计算，列节点方程为

$$(1+0.5)u_a = 0.5 + 8/2 = 4.5$$

解得 $u_a = 3V$



三 说明

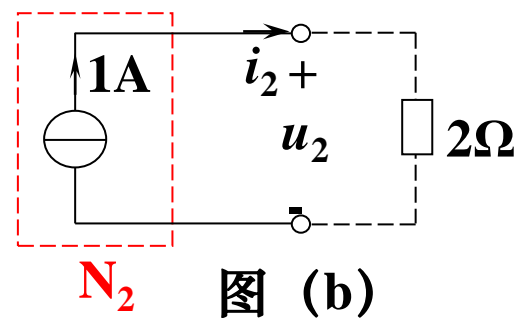
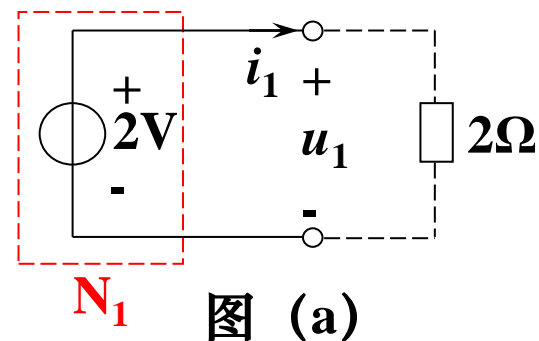
(1) 替代定理对线性和非线性电路均适用。

(2) 替代与等效变换有本质区别。

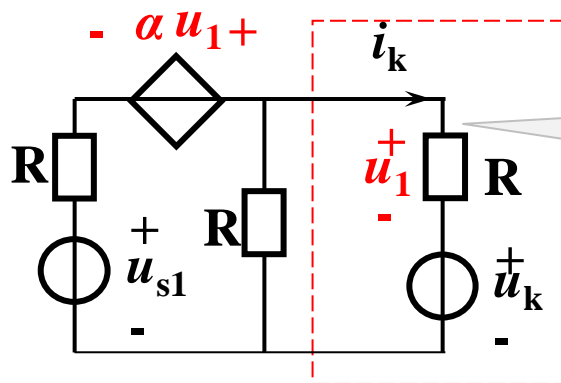
➤ 替代定理针对**某个具体电路**, 在替代前后, 被替代支路以外电路的拓扑结构和元件参数不能改变, 否则无法替代;

➤ 等效变换针对**任意电路**, 与变换以外的电路无关。

如图(a)中的 N_1 与图(b)中的 N_2 是替代关系, 不是等效关系。



(3) 替代定理应用时, 注意不要把受控源的控制量替换掉。



支路中有受控源的控制量不能被替代

四 替代定理例题

例1 如图(a)所示电路，已知电压 $u = 9\text{V}$ ，求二端电路 N 吸收的功率 P_N 。

解：利用替代定理将电路 N 用电压为 9V 的电压源替代，得到图(b)；

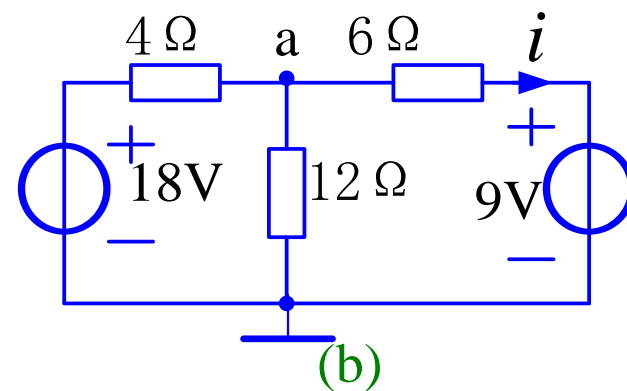
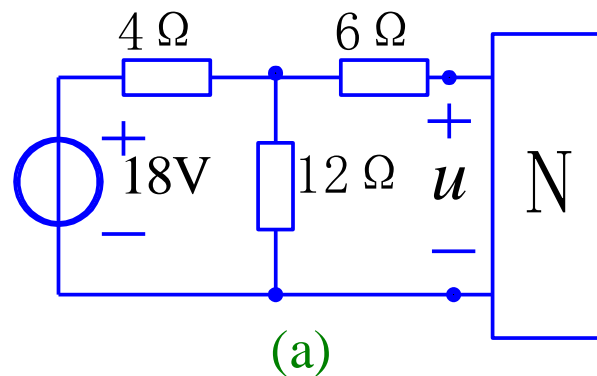
9V 电压源吸收的功率就是电路 N 吸收的功率。设参考点及节点 a 如图所标，列节点方程为

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \right) u_a = \frac{18}{4} + \frac{9}{6}$$

解得 $u_a = 12\text{V}$

$$i = (u_a - 9)/6 = (12 - 9)/6 = 0.5\text{A}$$

故 $P_N = ui = 9 \times 0.5 = 4.5 \text{ (W)}$



例2 如图(a)所示电路, N 为**线性电阻电路**, 当改变电阻 R 时, 电路中各处电流都将改变。

当 $R = R_1$ 时, 测得 $i_1 = 5\text{A}$, $i_2 = 4\text{A}$;

当 $R = R_2$ 时, 测得 $i_1 = 3.5\text{A}$, $i_2 = 2\text{A}$ 。

问 当 $R = R_3$ 时, 测得 $i_2 = 4/3\text{A}$, 此时测得的 i_1 为多少?

解: 根据替代定理将支路 R 用电流源 i_s ($i_s = i_2$) 替代

根据线性电路的齐次性和叠加性, 响应 i_1

- 由电流源 i_s 单独作用所产生的电流 i_1' 为 $K_1 i_s$;
- 当 $i_s = 0$ 时, 由电路 N 内部独立源产生的电流为 i_1'' ,

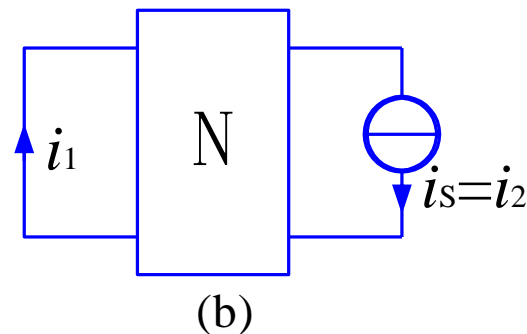
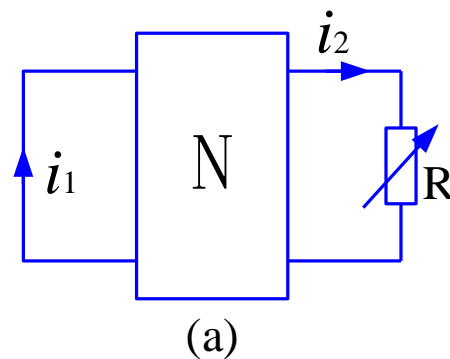
$$i_1 = K_1 i_s + i_1'' = K_1 i_2 + i_1''$$

将已知条件代入, 有

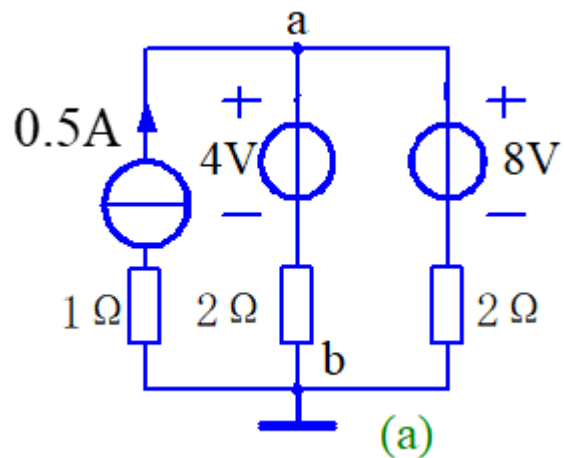
$$4 K_1 + i_1'' = 5, \quad 2 K_1 + i_1'' = 3.5$$

解得 $K_1 = 3/4$, $i_1'' = 2$ 。于是有 $i_1 = (3/4) i_s + 2$

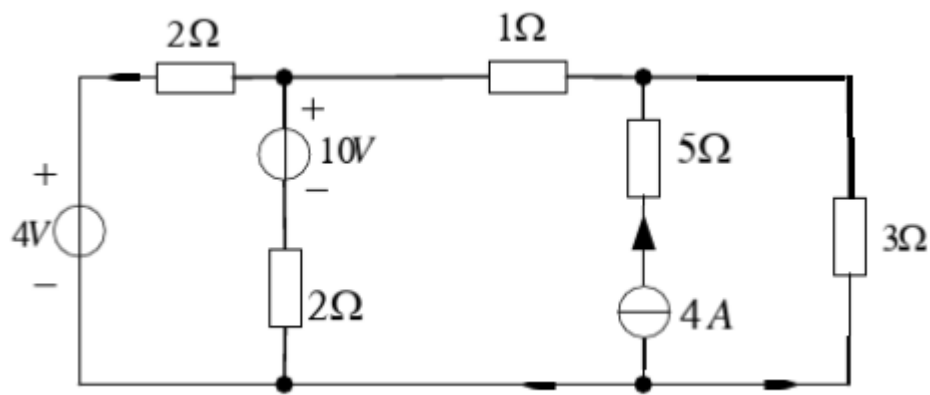
因此, 当 $i_2 = 4/3\text{A}$ 时, $i_1 = 3\text{A}$



1、试着列出下图的节点方程

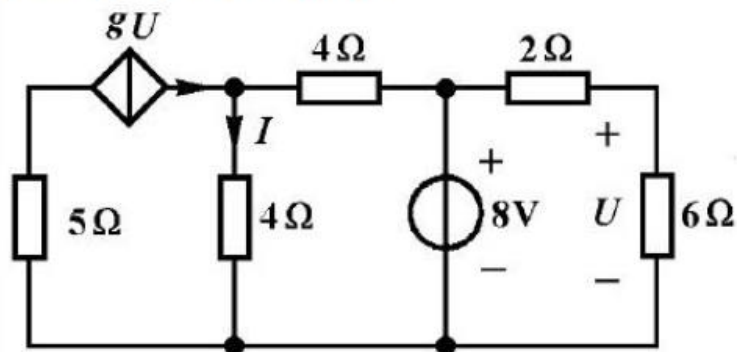


2、试着列出下图的网孔方程





下图电路中 $g=2S$ ，试求电流 I 。

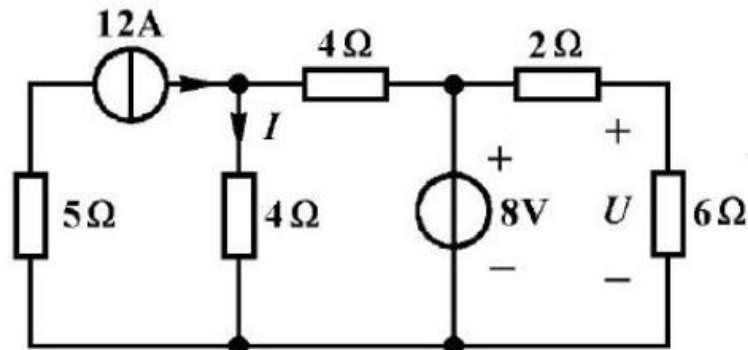


(a)

利用分压公式，可得 $U=6V$

受控源此时电流为 $gU=12A$

采用 $12A$ 电流源替代受控源支路，
得到电路 (b)



(b)

采用叠加定理：

$12A$ 单独作用时， $8V$ 所在支路短路，得 $I' = 6A$

$8V$ 单独作用时， $12A$ 所在支路开路，得 $I'' = 1A$

$$I = I' + I'' = 7A$$

