西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

第5章 大数定律及中心极限定理

概率论与数理统计课程组

CHAPTER 5

大数定律及中心极限定理

5.3 中心极限定理

有许多随机变量，它们是由大量的相互独立的随机变量的综合影响所形成的，而其中每个个别因素对总的影响的作用都很小，这种随机变量往往服从或近似服从正态分布，或者说它的极限分布是正态分布，中心极限定理正是从数学上论证了这一现象，它在长达两个世纪的时期内曾是概率论研究的中心课题。

中心极限定理

本章介绍三个常用的中心极限定理

独立同分布中心极限定理

又称为*Lindeberg-Levy*（*林德伯格–勒维*）中心极限定理

设$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$是相互独立且同分布的随机变量序列，且具有相同的数学期望$E(X_k)=\mu$，与相同的方差$D(X_k)=\sigma^2>0\ (k=1, 2, \ldots)$，

则随机变量之和 $\sum_{k=1}^{n} X_k$ 的标准化变量

$$Y_n=\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k-E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数$F(x)$满足，对任意的x

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le x\right)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$$

数理统计中抽样理论的基础

该定理在实际中有着广泛的应用。当n充分大时，独立同分布且具有相同均值μ，方差$\sigma^2>0$的随机变量$X_1, X_2, \dots X_n$之和$\sum_{k=1}^{n} X_k$近似服从以它的均值为均值，它的方差为方差的正态分布，即

当n充分大时，有 $\sum_{k=1}^{n} X_k \overset{\text{近似地}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$ 或者 $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1)$

因此对于任意的实数x及$a<b$，有

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \le x\right) \approx \Phi\left(\frac{x-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) \qquad P\left(a<\sum_{k=1}^{n} X_k \le b\right) \approx \Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 则上述结果变为

当n充分大时，有 $\overline{X} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(\mu, \sigma^2/n)$ 或者 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1)$

例 设某种电器元件的寿命服从均值为100小时的指数分布，现随机取得16只，设它们的寿命是相互独立的，求这16只元件的寿命的总和大于1920小时的概率。

解 设第 i 个元件的寿命为X_i，有 $E(X_i)=100$，$D(X_i)=100^2$

16个元件的寿命总和为X，$X=\sum_{i=1}^{16}X_i$

根据独立同分布中心极限定理：

$$Y=\frac{\sum_{i=1}^{16}X_i-16\times 100}{4\times 100}=\frac{X-1600}{400}$$ 近似服从$N(0,1)$

$$P(X>1920)=1-P(X\le 1920)\approx 1-\Phi(\frac{1920-1600}{400})=1-\Phi(0.8)=0.2119$$

不能认为 $X=16X_1$ 将问题转为$X_1>1920/16$

例 测量一个物理量a共n次，每次测量的误差记为X_i (i=1, 2, …, n)，假设在适当选取单位的条件下X_i (i=1, 2, …, n)在区间(−0.5，0.5)上服从均匀分布，取 n次测量结果的算术平均值作为 a 的估计值。试求：

(i)它与真值a之差的绝对值小于预先指定的正数ε的概率；

(ii)若要估计值与真值a之差的绝对值小于0.1的概率不小于0.95，至少需要进行多少次测量?

解 (i) 设X表示n次测量结果的算数平均值，由于各次测量结果为 $a+X_i$ (i=1, 2, …, n)，故

$$X = a + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

又X_i (i=1, 2, …, n)在区间(−0.5，0.5)上服从均匀分布 $E(X_i) = 0,\ D(X_i) = \frac{1}{12}$

根据独立同分布中心极限定理： $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 近似服从$N(0, n/12)$ $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 0}{\sqrt{n/12}}$ 近似服从$N(0, 1)$

$$P\left(\left|X-a\right|<\varepsilon\right)=P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right|<\varepsilon\right)=P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}X_i\right|<n\varepsilon\right)\approx\Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{n/12}}\right)-\Phi\left(\frac{-n\varepsilon}{\sqrt{n/12}}\right)$$

$$=2\Phi\left(\sqrt{12n}\varepsilon\right)-1$$

(ii) 取ε =0.1，可知 $2\Phi\left(0.01\sqrt{12n}\right)-1\geq 0.95$

$$2\Phi\left(0.1\sqrt{12n}\right)-1\geq\frac{0.95+1}{2}=0.975$$

查表得 $0.1\sqrt{12n}\geq 1.96$

从而 $n\geq\dfrac{1.96^2}{12\times 0.1^2}\approx 32.01$

例 检查员逐个地检查某种产品，每次需花 10 秒钟检查一个产品，但也可能有的产品需要重复检查一次再用去 10 秒钟。假定每个产品需要重复检查的概率为 1 / 2 ，求在8 小时内检查员检查的产品不少于 1900 个的概率。

$$\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{19}}\right)=0.9162$$

解 设X_i $(i=1, 2, \ldots, 1900)$ 表示检查第i个产品所需要花费的时间，则$X_1, X_2, \ldots, X_{1900}$相互独立同分布

$\sum_{i=1}^{1900} X_i$ 表示检查1900个产品所需花费的总时间，由题设知

$$X_i=\begin{cases}10, \text{第}i\text{个产品没有重复检查}\\ 20, \text{第}i\text{个产品重复检查}\end{cases} \qquad P(X_i=10)=P(X_i=20)=\frac{1}{2},\ i=1,2,\ldots,1900$$

$$E(X_i)=15,\ D(X_i)=E(X_i^2)-\left[E(X_i)\right]^2=25$$

根据独立同分布中心极限定理： $\sum_{i=1}^{1900} X_i$ 近似服从$N(1900\times5,\ 1900\times25)$

故所求的概率为 $$P\left(\sum_{i=1}^{1900} X_i \le 8\times3600\right)\approx\Phi\left(\frac{28800-28500}{\sqrt{47500}}\right)=\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{19}}\right)=0.9162$$

Lyapunov（李雅普诺夫）中心极限定理

设随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$相互独立，其具有如下数学期望和方差：

$E(X_k)=\mu_k$, $D(X_k)=\sigma_k^2>0$ ($k=1, 2, \ldots$)，记 $B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$

若存在正数δ使得当$n\to\infty$时 $\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}E\left[\left|X_i-\mu_i\right|^{2+\delta}\right]\to 0$

则 $\sum_{k=1}^{n}X_k$ 的标准化变量 $Y_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-\sum_{k=1}^{n}\mu_k}{B_n}$ 的分布函数$F(x)$满足，对任意的x有

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-\sum_{k=1}^{n}\mu_k}{B_n}\le x\right)=\Phi(x)$$

很多问题随机变量Y可表示为大量独立随机变量（不一定是同分布，也不一定正态）的和，则Y近似正态分布

De Moivre-Laplace（棣莫弗-拉普拉斯）中心极限定理

独立同分布中心极限定理的特殊情况

设随机变量n_A表示n重*Bernoulli*试验中事件A发生的次数，p是A在一次试验发生的概率，$P(A)=p$，即n_A服从参数n, p $(0<p<1)$的二项分布，则对于任意的x，随机变量

$Y_n=\dfrac{n_A-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 的分布函数$F(x)$满足 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{n_A-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right)=\Phi(x)$

即，若$X\sim B(n,p)$，则当n充分大时 $X\overset{\text{近似地}}{\sim}N(np,np(1-p))$

证明思路：二项分布可分解为若干个独立同分布的0-1分布之和，即二项分布X有 $X=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$
其中X_k $(k=1,2,\dots)$服从0-1分布， $X_k\sim B(1,p)$。然后再由独立同分布中心极限定理推出

说明：正态分布是二项分布的极限分布

$$P(X\le x)\approx\Phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)\qquad P(a<X\le b)\approx\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

例 某车间有200台车床，由于各种原因每台车床只有60%的时间在开动，每台车床开动期间耗电量为1单位，问至少供给此车间多少电量才能以不少于99.9%的概率保证此车间不因供电不足而影响生产。

解 设不影响生产需要开动的车床数为n，X表示200台车床中开动的车床数，则$X \sim B(200, 0.6)$

$$E(X) = 200 \times 0.6 = 120,\ D(X) = 200 \times 0.6 \times 0.4 = 48$$

由*De Moivre-Laplace*中心极限定理， X近似地服从正态分布N (120，48)，所以n取决于如下条件:

$$P(X \le n) \approx \Phi\left(\frac{n-120}{\sqrt{48}}\right) \ge 0.999$$

查表得 $\dfrac{n-120}{\sqrt{48}} \ge 3.01$ $\qquad n \ge 141$

例 对于一个学生而言，来参加家长会的家长人数是一个随机变量，设一个学生无家长、有 1 名家长与有2名家长来参加会议的概率分别为0.05， 0.80与0.15，若学校共有400名学生，设各学生参加会议的家长人数相互独立，且服从同一分布。

(i)求参加会议的家长人数X超过450的概率;

(ii)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于 340的概率($\Phi(1.147)=0.8749$，$\Phi(2.5)=0.9938$)。

解 (i) 设X_i (i=1, 2, …, 400)表示第i个学生来参加会议的家长人数，X_i 分布律为

X_i	0	1	2
P	0.05	0.80	0.15

$$E(X_i)=1.1,\ D(X_i)=0.19,\ i=1,2,...,400$$

由独立同分布中心极限定理，$X=\sum_{i=1}^{400}X_i$ 近似地服从正态分布$N(400\times1.1，400\times0.19)$，所求概率为:

$$P(X>450)=1-P(X\le 450)\approx 1-\Phi\left(\frac{450-440}{20\sqrt{0.19}}\right)=1-\Phi(1.147)=0.1251$$

例 对于一个学生而言，来参加家长会的家长人数是一个随机变量，设一个学生无家长、有 1 名家长与有2名家长来参加会议的概率分别为0.05， 0.80与0.15，若学校共有400名学生，设各学生参加会议的家长人数相互独立，且服从同一分布。

(i)求参加会议的家长人数X超过450的概率;

(ii)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于 340的概率($\Phi(1.147)=0.8749$，$\Phi(2.5)=0.9938$)。

解 (ii) 设Y表示有1名家长参加会议的学生人数，则$Y \sim B(400, 0.80)$

$$E(Y)=400\times 0.80=320,\ D(Y)=400\times 0.80\times 0.20=64$$

由*De Moivre-Laplace*中心极限定理，Y近似地服从正态分布$N(320，64)$，所求概率为:

$$P(Y\le 340)\approx \Phi\left(\frac{340-320}{\sqrt{64}}\right)=\Phi(2.5)=0.9938$$

例 某单位有200部电话,每部电话机大约有5%的时间要使用外线通话。若每部电话机是否使用外线是相互独立的，问该单位总机至少需要安装多少条外线，才能以90%以上的概率保证每部电话机需要外线时不需要等待(Φ(1.29)=0.90)。

解 设X表示同一时刻200部电话机中需要使用外线的部数，则$X \sim B(200, 0.05)$

$$E(X) = 200 \times 0.05 = 10,\ D(X) = 200 \times 0.05 \times 0.95 = 9.5$$

由*De Moivre-Laplace*中心极限定理， X近似地服从正态分布N (10，9.5)，所以单位装的外线条数m取决于如下条件:

$$P(0 \le X \le m) \approx \Phi\left(\frac{m-10}{\sqrt{9.5}}\right) - \Phi\left(\frac{0-10}{\sqrt{9.5}}\right) > 0.90$$

查表得 $\frac{m-10}{\sqrt{9.5}} \ge 1.29$ $n \ge 13.976$ $\Phi\left(\frac{0-10}{\sqrt{9.5}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{9.5}}\right) = 0.0006$

故该单位总机至少需要安装14 条外线才能以90%以上的概率保证每部电话机需要外线时不需要等待

例 一台总机共有300台分机，总机拥有 20条外线，假设每台分机向总机要外线的概率为 5%，试求:

(i) 每台分机向总机要外线时，能及时得到满足的概率;

(ii) 同时向总机要外线的最可能台数的概率($\Phi(1.32)=0.9066$，$\Phi(0.13)=0.5517$)。

解 (i) 设 X 表示同时向总机要外线的分机台数，则 $X\sim B(300, 0.05)$

从而 $E(X)=300\times0.05=15$，$D(X)=300\times0.05\times0.95=14.25$

由 *De Moivre-Laplace* 中心极限定理，X 近似地服从正态分布 $N(15，14.25)$，所求概率为

$$P(0\le X\le 20)\approx\Phi\left(\frac{20-15}{\sqrt{14.25}}\right)-\Phi\left(\frac{0-15}{\sqrt{14.25}}\right)=\Phi(1.32)-\Phi(-3.97)$$

$$=\Phi(1.32)+\Phi(3.97)-1=0.9066$$

$\Phi(3.97)\approx1$

例 一台总机共有300台分机，总机拥有 20条外线，假设每台分机向总机要外线的概率为 5%，试求：

(i) 每台分机向总机要外线时，能及时得到满足的概率；

(ii) 同时向总机要外线的最可能台数的概率；已知Φ (1.32)=0.9066，Φ(0.13)=0.5517.

解 (ii) 题设的问题可视为n重*Bernoulli*试验，则最可能的台数k为

概率最大项的确定可用$\{X=k\}$与$\{X=k\text{-}1\}$二事件的概率比值

[ ]表示向下取整

$$k=\begin{cases}\lfloor (n+1)p \rfloor, & \text{当}(n+1)p\text{不为整数时}\\ (n+1)p \text{ 或 } (n+1)p-1, & \text{当}(n+1)p\text{为整数时}\end{cases}$$

$$\frac{C_n^k p^k(1-p)^{n-k}}{C_n^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n+1-k}}=\frac{(n+1-k)p}{k(1-p)}>1$$

$$k<(n+1)p$$

所以最可能台数为⌊ (300+1) ×0.05 ⌋=⌊ 15.05 ⌋=15，其概率为

$$P(X=15)=P(15-\frac{1}{2}<X<15+\frac{1}{2})\approx\Phi\left(\frac{15.5-15}{\sqrt{14.25}}\right)-\Phi\left(\frac{14.5-15}{\sqrt{14.25}}\right)=2\Phi(0.13)-1=0.1034$$

离散型二项分布的数值范围(0, 1， …, n)与连续型正态分布(-∞, +∞)不同，近似时应注意

例 某保险公司的重疾保险有1万人参加，每人每年交200元，若被保险人在该年内罹患条款中的疾病，公司付给受益人1万元。设患疾病率为0.017，试求保险公司在一年内这项保险亏本的概率。

解 设X为一年中投保人的患病数，则$X \sim B(10000, 0.017)$

由*De Moivre-Laplace*中心极限定理，亏本概率为

$$P(10000X > 10000\times 200) = P(X > 200)$$

$$\approx 1-\Phi\left(\frac{200-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 1-\Phi(2.321) \approx 0.0102$$

思考：求保险公司至少盈利10万元的概率　0.937

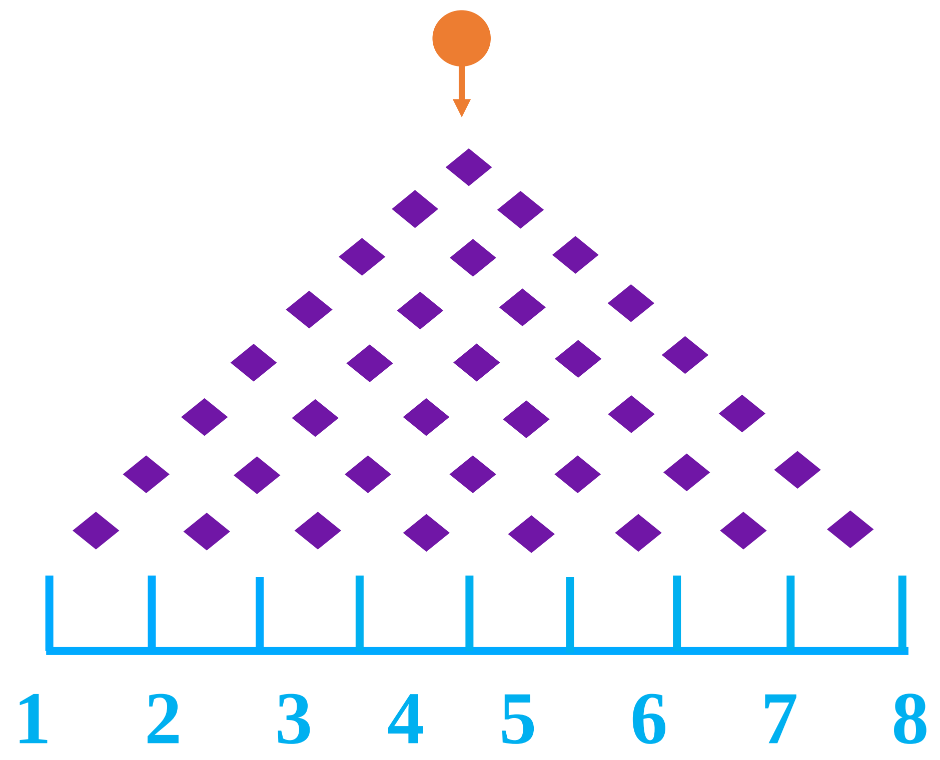
实例：伽尔顿板

下面是等间隔的竖槽，中间是规则排列的横杆，上面容器中装有大量颗粒。**大量颗粒从上向下泻下来，与各级横杆碰撞后落入槽中。**模拟颗粒运动轨迹，统计各槽中的颗粒数及占总粒子数比例。

假设一个粒子落下来都会与每层中的一个横杆发生碰撞，碰撞后向左和向右运动的概率相等。

共n个竖槽，每个粒子落在第m个槽中的概率为

$$P_n^m = \frac{C_n^{m-1}}{2^n}$$



说明

- ✓ 大量试验的平均值就趋于理论值。
- ✓ 每次试验的结果不同，但是每次试验值都在二项分布的理论值附近波动（涨落）。

二项分布在n很大时可用正态分布和泊松分布（p很小）来近似

泊松分布$np_n = \lambda$

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n{}^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

正态分布 $N(np, np(1-p))$

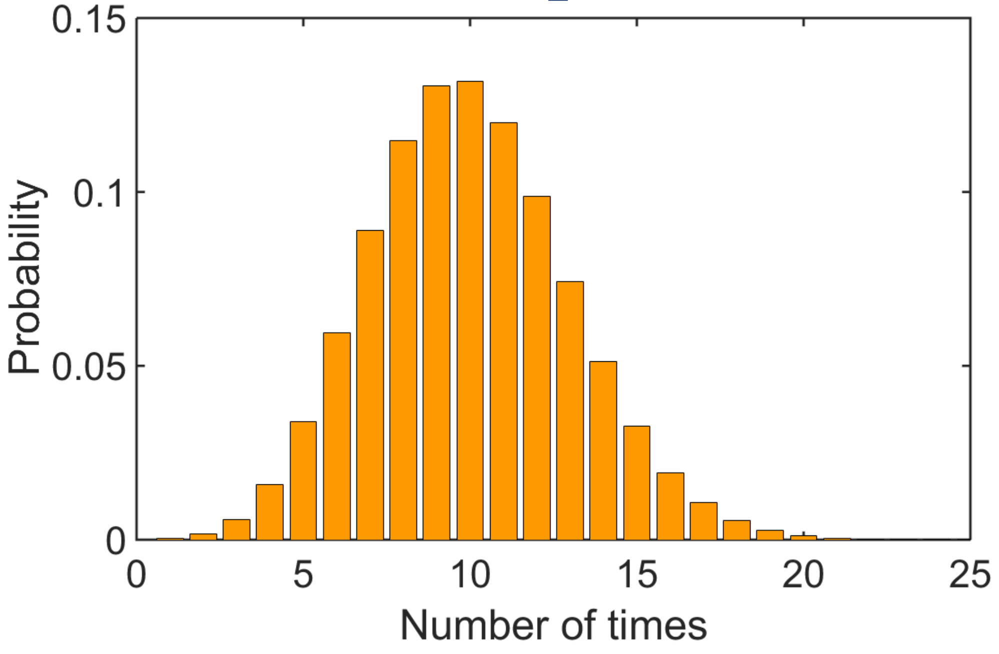
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) = \Phi(x)$$

p值不够小！

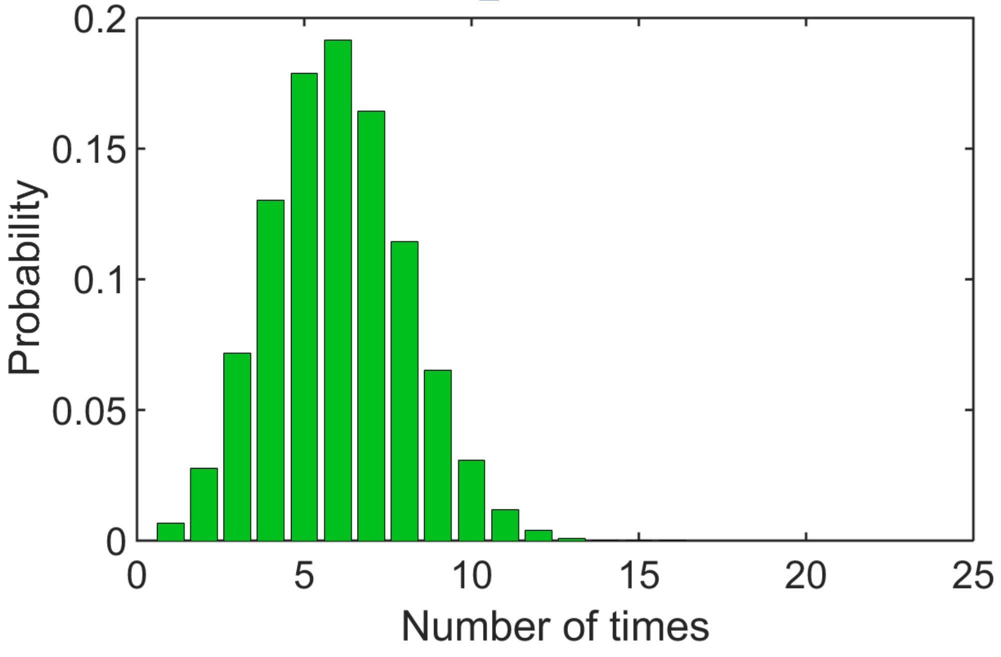
一般地$n \geq 20, p \leq 0.05$

二项分布

n=100, p=0.1

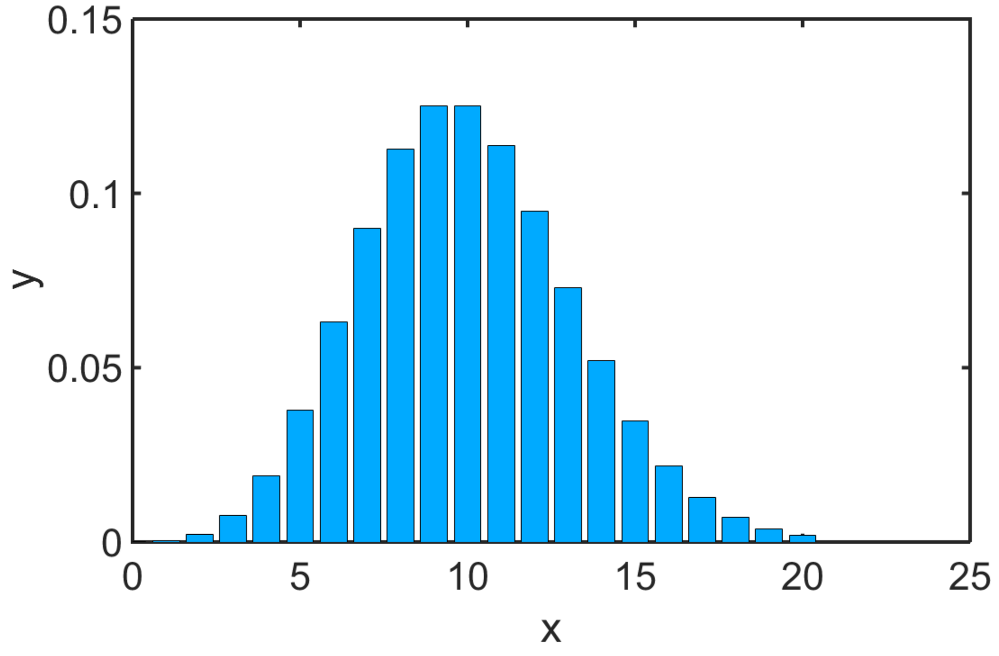


n=20, p=0.3

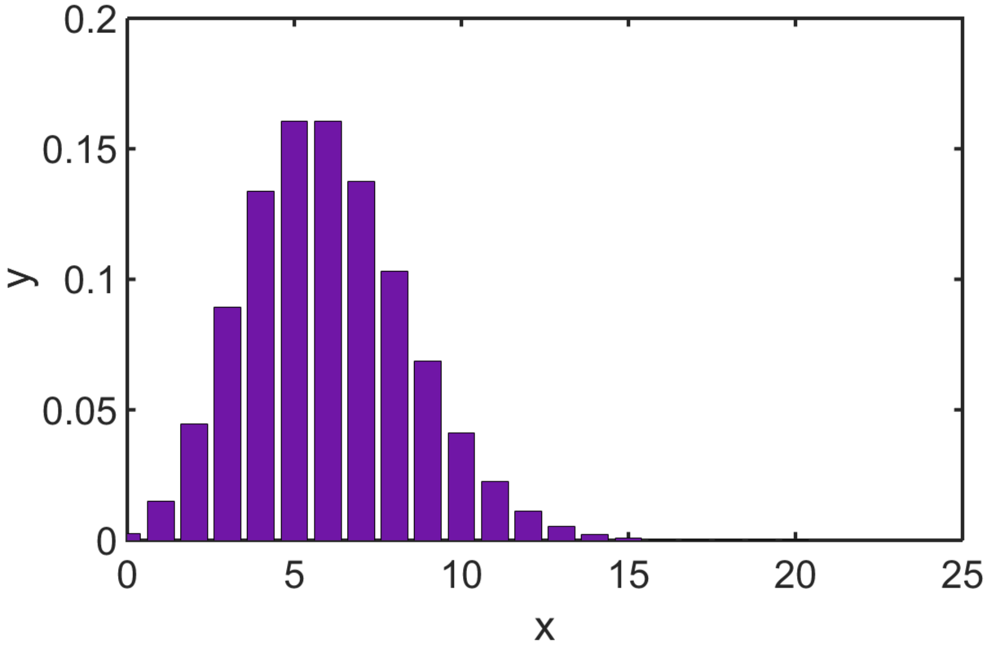


泊松分布

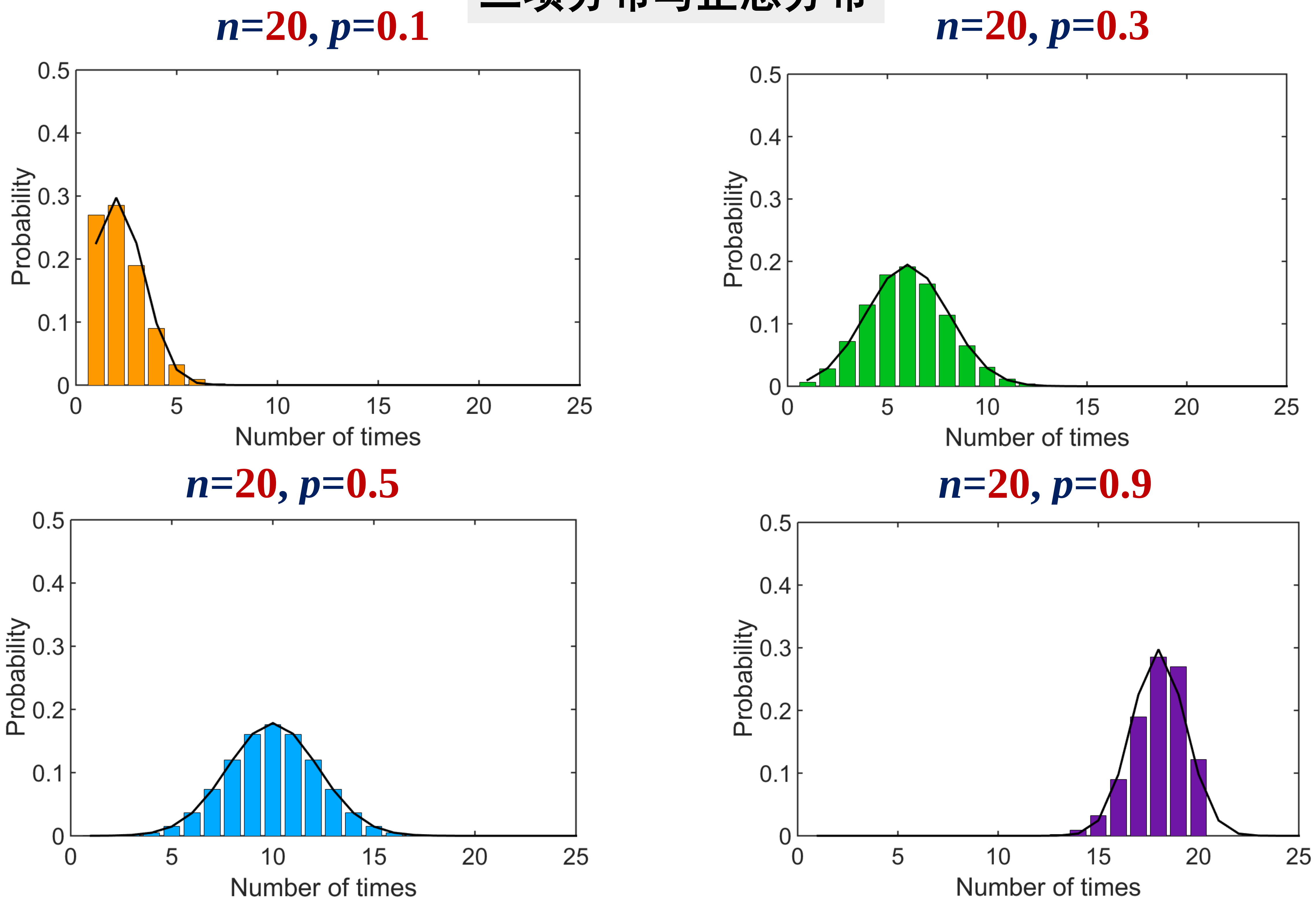
λ=10



λ=6

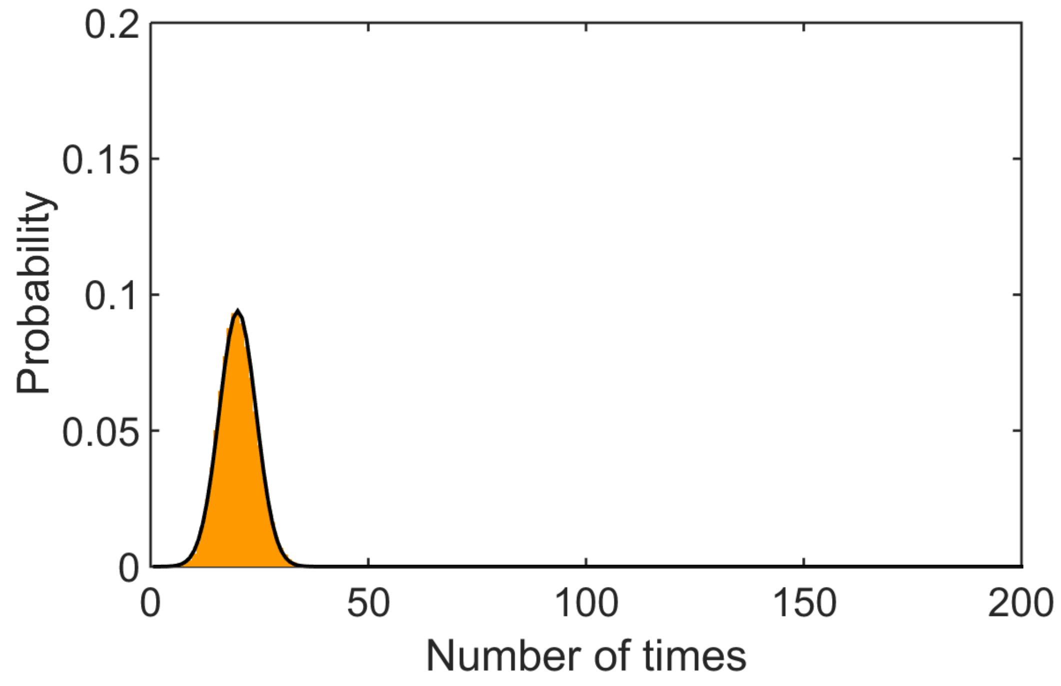


二项分布与正态分布

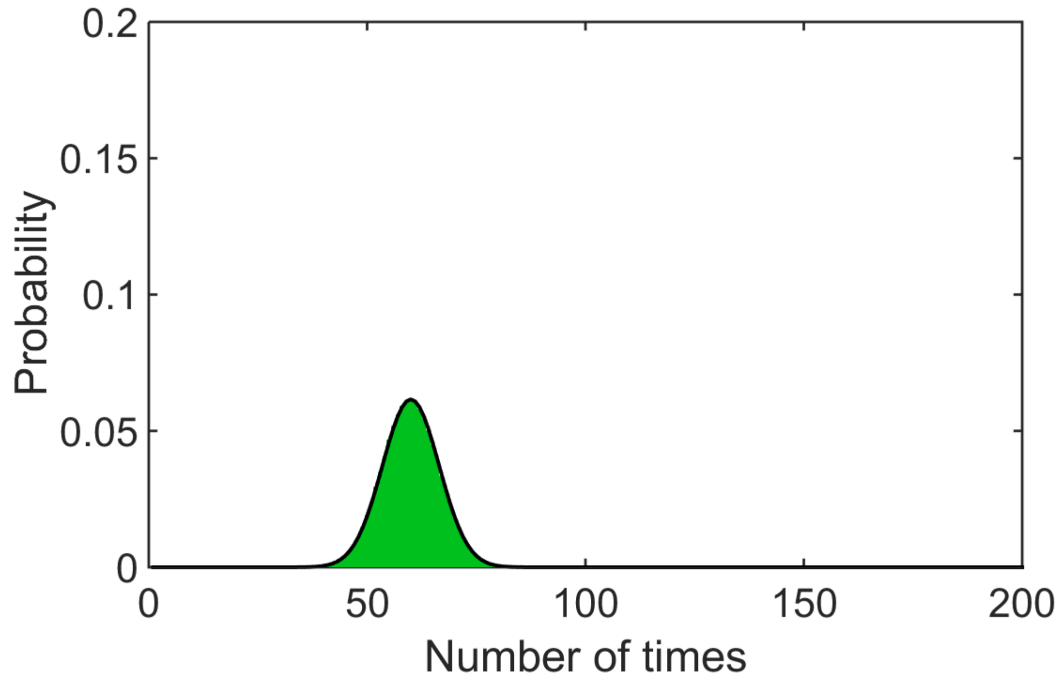

n=20, p=0.1
n=20, p=0.3
n=20, p=0.5
n=20, p=0.9
Probability
Number of times
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
5
10
15
20
25

二项分布与正态分布

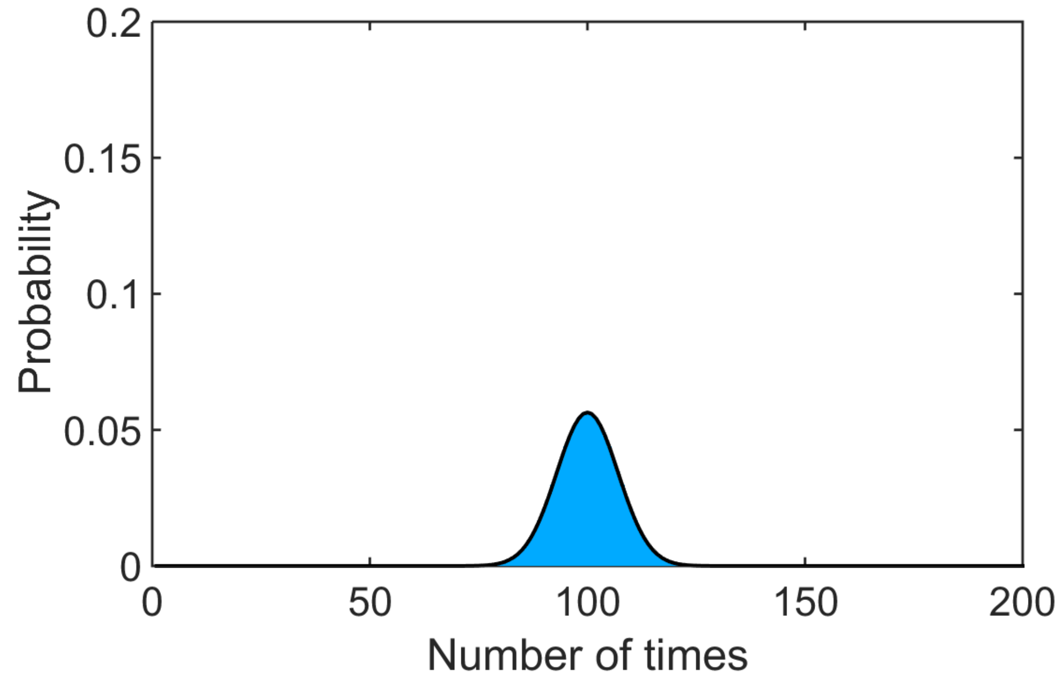
n=200, p=0.1



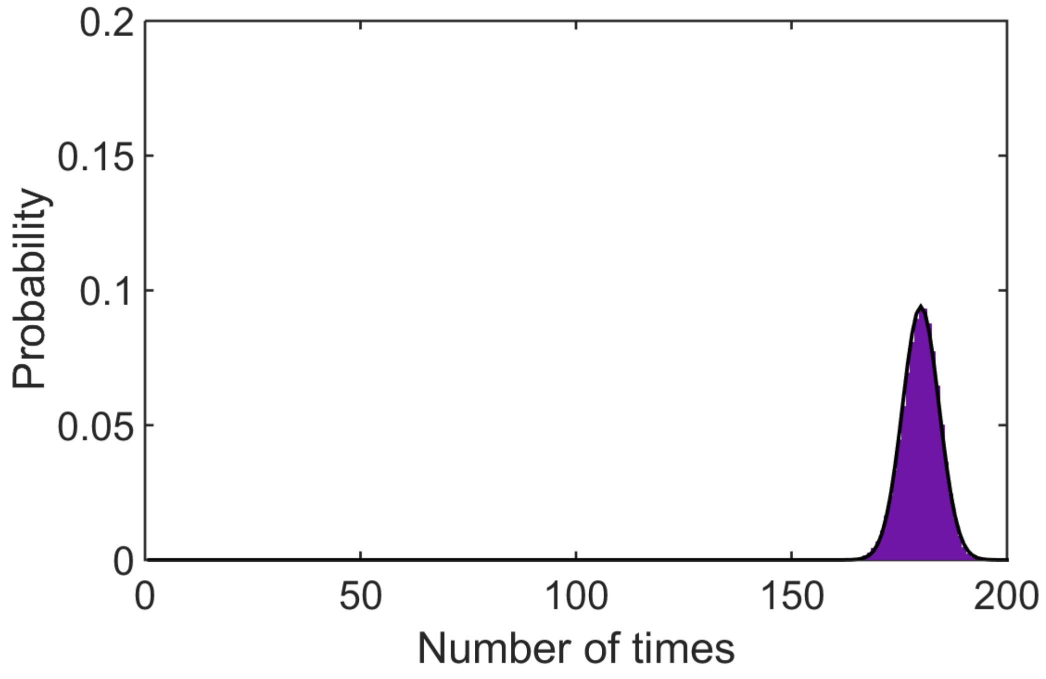
n=200, p=0.3



n=200, p=0.5



n=200, p=0.9



例 设某工厂有400台同类机器，各台机器发生故障的概率都是0.02，各台机器工作是相互独立的，试求机器出故障的台数不小于2的概率。

解 设X 为机器故障台数，$X \sim B(400, 0.02)$，三种方法求解

(i) 二项分布 $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$

$$= 1 - 0.98^{400} - 400 \times 0.02 \times 0.98^{399} = 0.9972$$

(ii) 泊松分布近似 $\lambda = np = 400 \times 0.02 = 8$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - 0.000335 - 0.002684 \approx 0.9969$$

(iii) 正态分布近似 $\sqrt{npq} = \sqrt{400 \times 0.02 \times 0.98} = 2.8$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 1 - \Phi\left(\frac{1 - np}{\sqrt{npq}}\right) = 0.9938$$

本节回顾

- 独立同分布中心极限定理

当n充分大时，有 $\sum_{k=1}^{n} X_k \overset{\text{近似地}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$ 或者 $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1)$

- Lyapunov（李雅普诺夫）中心极限定理

- De Moivre-Laplace（棣莫弗-拉普拉斯）中心极限定理

若$X \sim B(n, p)$，则当n充分大时 $X \overset{\text{近似地}}{\sim} N(np, np(1-p))$