§ 15.5 微观粒子的波粒二象性 不确定关系

一. 德布罗意假设(1924年)

	波动性 (λ, ν)	粒子性 (m , p)
光	+	+
实物粒子	?	+

假设：实物粒子具有 波粒二象性。

$$p = m\upsilon = \frac{h}{\lambda}$$

$$E = mc^2 = h\nu$$

德布罗意关系式

$$p = m\upsilon = \frac{h}{\lambda}$$

$$E = mc^2 = h\nu$$

波长 $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{m\upsilon} = \dfrac{h}{m_0\upsilon}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$

$$= \frac{hc}{\sqrt{E^2 - E_0^2}} = \frac{hc}{\sqrt{2E_0E_k + E_k^2}}$$

$$\left(\begin{aligned} E^2 &= p^2c^2 + E_0^2 \\ E &= E_0 + E_k \end{aligned}\right)$$

$E_k << E_0$ $\quad \lambda \approx \dfrac{h}{\sqrt{2mE_k}}$

频率 $\nu = \dfrac{E}{h} = \dfrac{mc^2}{h} = \dfrac{m_0c^2}{h\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$

例 计算经过电势差 $U_1 = 150\ \mathrm{V}$ 和 $U_2 = 10^4\ \mathrm{V}$ 加速的电子的德布罗意波长（**不考虑相对论效应**）。

解
$$\frac{1}{2}m_0\upsilon^2 = eU \qquad \upsilon = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}$$

根据德布罗意关系 $p = h/\lambda$，电子的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{m_0\upsilon} = \frac{h}{\sqrt{2m_0e}}\frac{1}{\sqrt{U}} = \frac{1.225}{\sqrt{U}}\ \mathrm{nm}$$

波长分别为 $\lambda_1 = 0.1\ \mathrm{nm}$ $\qquad \lambda_2 = 0.0123\ \mathrm{nm}$

说明

$\boxed{\text{电子波波长}} \ll \boxed{\text{光波波长}}$

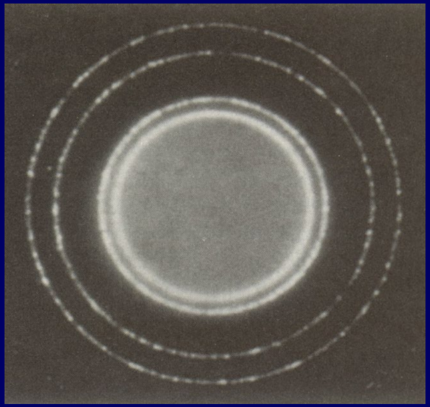
观测仪器的分辨本领 $R = \dfrac{D}{1.22\,\lambda}$

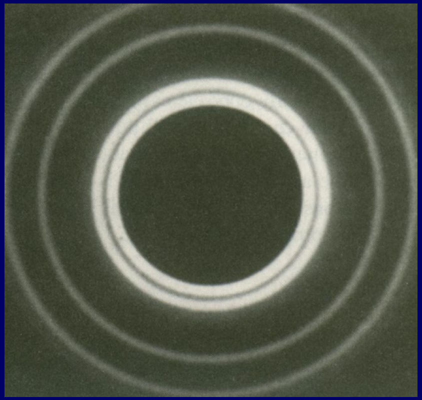
$\rightarrow$ **电子显微镜分辨率远大于光学显微镜分辨率**

物质波的实验验证：

革末—戴维孙电子散射实验(1927年)，观测到电子衍射现象。

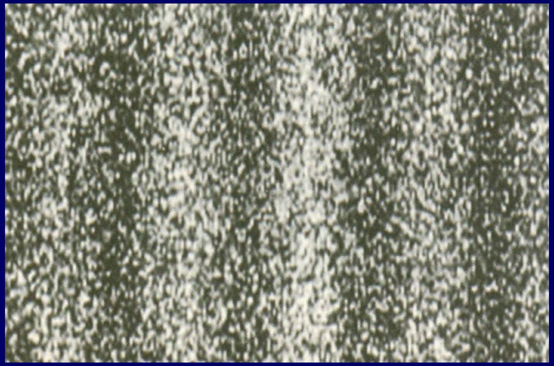
电子束



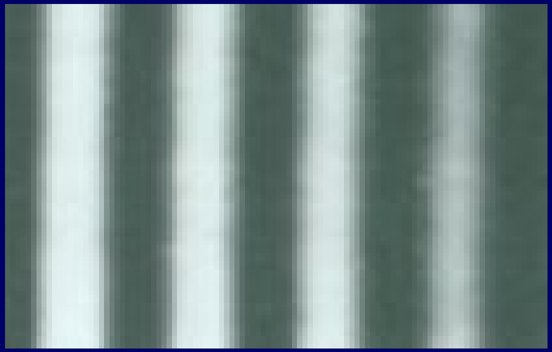


X射线

衍射图样 (波长相同)

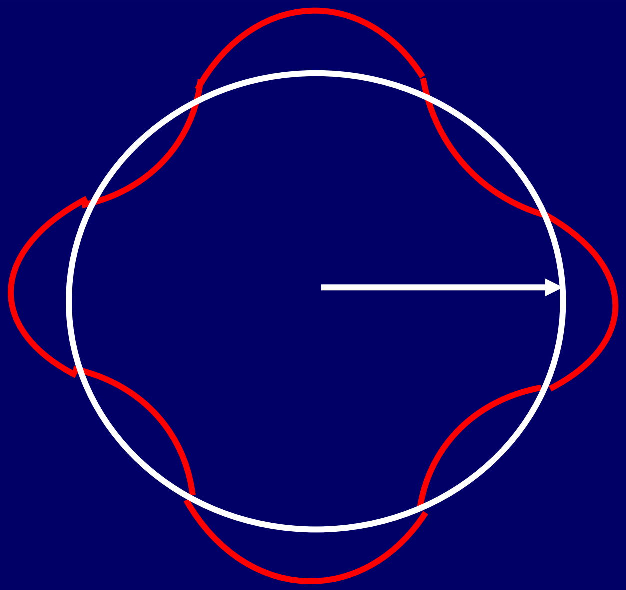


电子双缝干涉图样



杨氏双缝干涉图样

$$2\pi r = n\lambda \quad = n\frac{h}{m\upsilon}$$



$$L = m\upsilon r \quad = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

能量的量子化与粒子的波动性相联系

二. 不确定关系

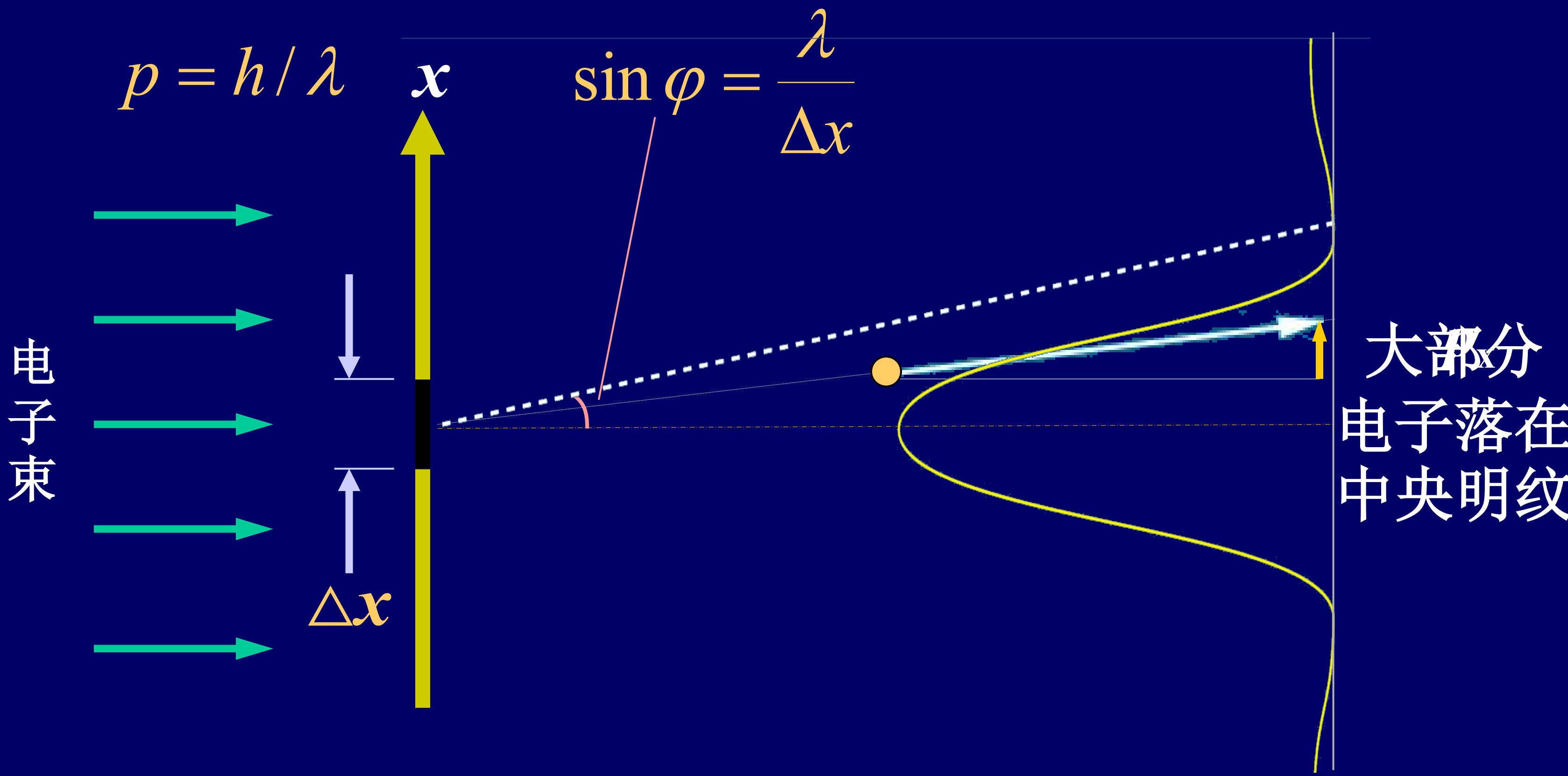
1. 动量 — 坐标不确定关系

微观粒子的位置坐标 x 和同方向的动量 分量 p_x 不能同时具有确定的值。

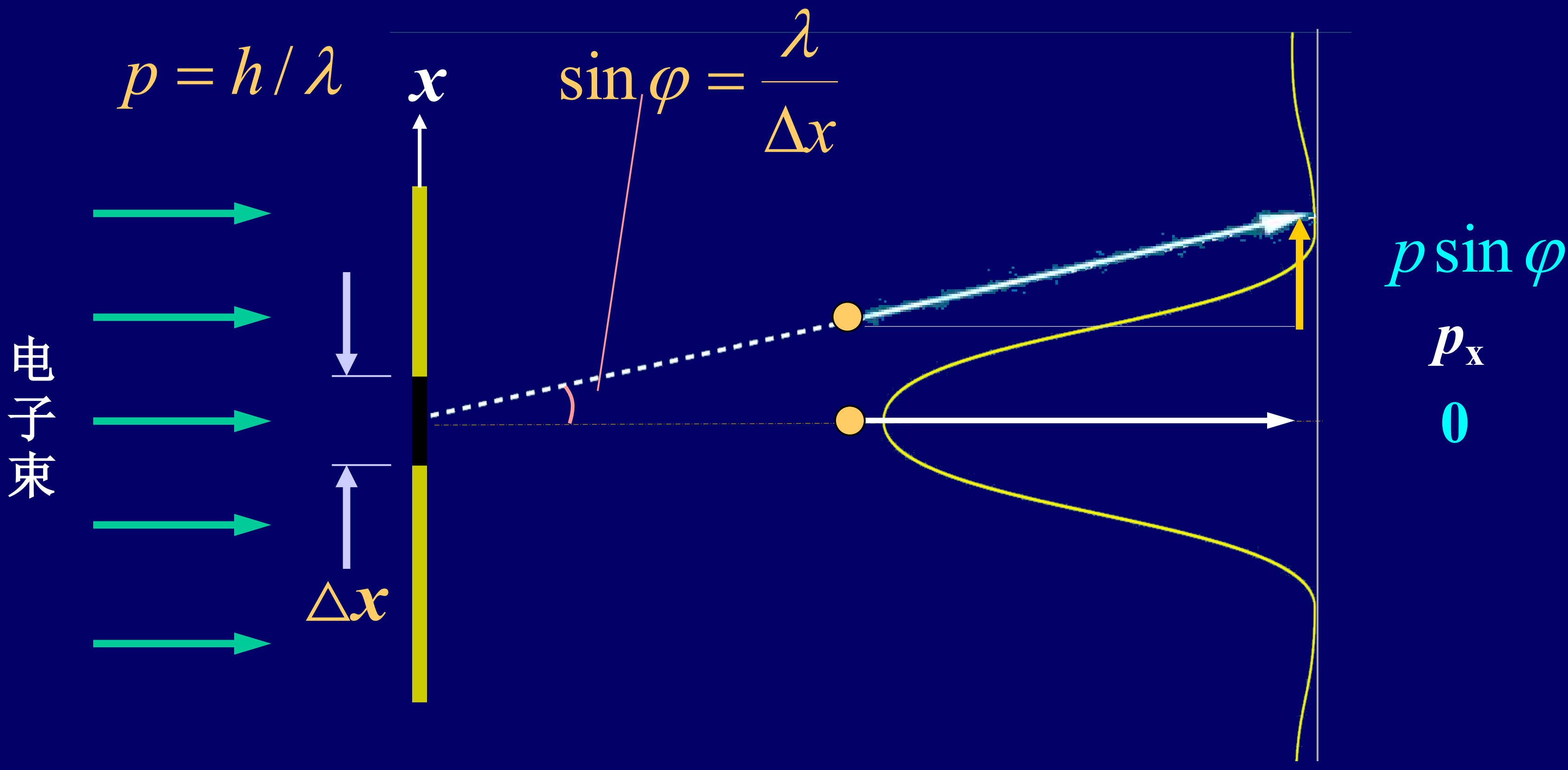
Δx、Δp_x分别是 x、p_x 的不确定量，其乘积

$$\Delta x \, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

一个量确定的越准确，另一个量的不确定程度就越大。



电子经过狭缝，其坐标 x 的不确定量为 Δx ；



电子经过狭缝，其坐标 x 的不确定量为 Δx ； 动量分量 p_x 的不确定量为

$$\Delta p_x = p\sin\varphi = h/\Delta x \qquad \Delta x\,\Delta p_x = h$$

减小缝宽 Δx，x 确定的越准确 → **p_x的不确定度，即Δp_x越大**

说明

不确定关系是微观粒子波粒二象性的直接体现

“轨道”的概念失去意义

划分了量子力学与经典力学的界限

例 原子的线度约为 10^{-10} m，求原子中电子速度的不确定量。

解 原子中电子的位置不确定量 10^{-10} m，由不确定关系

$$\Delta x\,\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

电子速度的不确定量为

$$\Delta \upsilon_x = \frac{\Delta p_x}{m} \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} = \frac{6.63\times 10^{-34}}{4\times 3.14\times 9.1\times 10^{-31}\times 10^{-10}}$$

$$= 5.8\times 10^{5}\ \mathrm{m/s}$$ **氢原子中电子速率约为 10^{6} m/s。**

电子射线束直径10^{-4} m，加速电压9000V

$$\Delta \upsilon_x \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} \sim 0.58 m/s \quad << \quad \upsilon_y = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \sim 10^7\, m/s$$

例 波长 λ =500nm， $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda}=10^{-7}$

求： 光子坐标的不确定量。

解 $p_x = h/\lambda$ $\Delta p_x = h\Delta\lambda/\lambda^2$

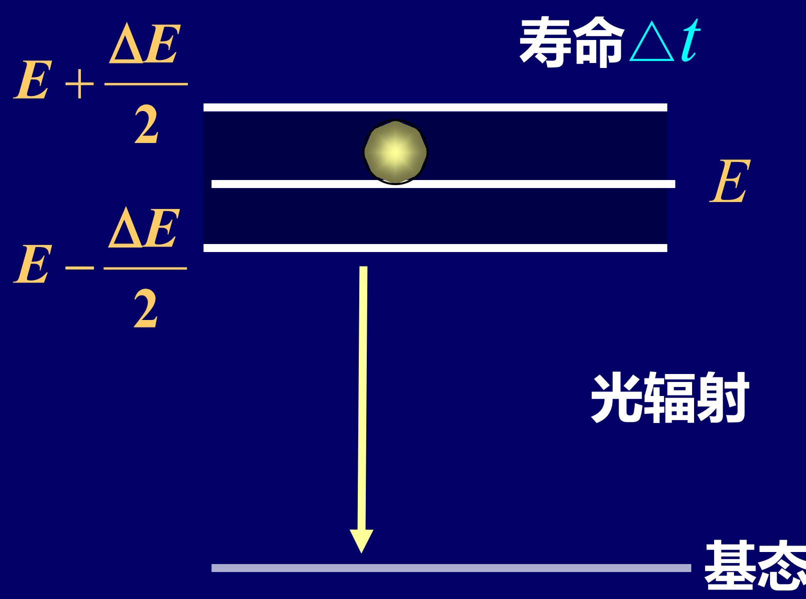
$$\Delta x\ \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda} = 0.4m$$

2. 能量 — 时间不确定关系

$$\boxed{\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}}$$

反映了原子能级宽度$\triangle E$ 和原子在该能级的平均寿命 $\triangle t$ 之间的关系。



激发态

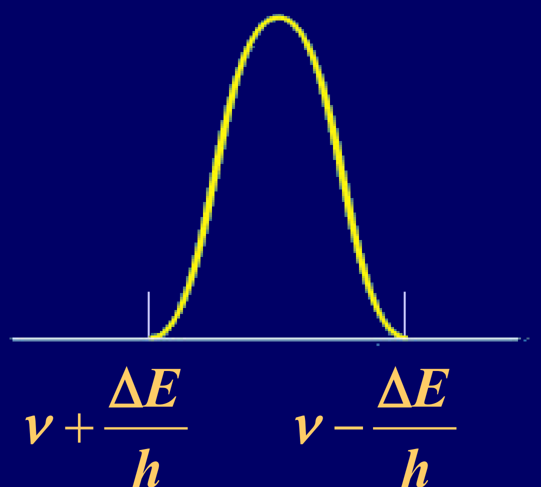
平均寿命 $\triangle t \sim 10^{-8}$ s

能级宽度 $\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} \sim 10^{-8}$ eV

基态

平均寿命 $\triangle t \to \infty$

能级宽度 $\triangle E \to 0$



辐射光谱线固有宽度