第四章　级数

第一节　复数项级数

第二节　幂级数

第三节　泰勒级数

第四节　罗朗级数

第一节 复数项级数

一.复数列极限

定义: 已知复数列 $\{\alpha_n\}=\{a_n+ib_n\}\quad(n=1,2\cdots)$,

$\alpha=a+ib$ 为复常数.

若 $\forall\,\varepsilon>0,\exists\,N$,当 $n>N$ 时,$|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$,

则称 $\{\alpha_n\}$ 收敛于 α,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$

例1.$\{\alpha_n\}$: $\dfrac{1}{2}(1+i),\dfrac{2}{3}(1+i),\ \dfrac{3}{4}(1+i),\ \cdots,\ \dfrac{n}{n+1}(1+i),\ \cdots$

$\to 1+i\ \ (n\to\infty)$

定理1(数列收敛的充要条件)

数列$\{\alpha_n\}$收敛于$\alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

证明: $\Rightarrow \because \forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当$n > N$时, $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$

即 $|(a_n + ib_n) - (a + ib)| = |(a_n - a) + i(b_n - b)| < \varepsilon$

又$\because |a_n - a| \le |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon,\quad |b_n - b| \le |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

$\Leftarrow \because \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当$n > N$时, $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2},\quad |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\therefore |\alpha_n - \alpha| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$

二. 级数概念

定义： 设 $\{\alpha_n\}=\{a_n+ib_n\}$ ，

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots$ 为无穷级数

$s_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$ —为部分和

若 $\lim_{n\to\infty}s_n=s$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛，s 为其和，

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=s$，否则，称 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 发散.

定理2 (判别定理)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \text{收敛} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{和} \sum_{n=1}^{\infty}b_n \text{均收敛}$$

证明: 令 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n, \sum_{n=1}^{\infty}a_n, \sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和分别为 s_n, σ_n, τ_n

则 $s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \sigma_n + i\tau_n$

而由定理1知, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s = \sigma + i\tau$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \sigma, \lim_{n\to\infty}\tau_n = \tau$$

即: $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛

推论.（收敛的必要条件）

$$\text{若}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\text{收敛}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$$

证明: 由$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛

从而有 $\lim_{n\to\infty}a_n=0,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=0$

所以得出 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$

定理3： 若$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛，且$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$

证明： $(1)\because \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$收敛，

而 $|a_n| \le \sqrt{a_n^2+b_n^2}$, $|b_n| \le \sqrt{a_n^2+b_n^2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n, \sum_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛　　故$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛

(2)由于 $\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right| \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|$　即$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$

绝对收敛: 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛,则称 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 为绝对收敛

条件收敛: 非绝对收敛的收敛级数称为条件收敛.

注: $\because \sqrt{a_n^2+b_n^2} \le |a_n|+|b_n|$

$\therefore$ 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 也绝对收敛

故: $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \sum a_n, \sum b_n$ 绝对收敛

例1. 判别下列级数的敛散性，若收敛，是绝对收敛,还是条件收敛?

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$

解: $\because \left|\frac{(8i)^n}{n!}\right| = \frac{8^n}{n!}$,而$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$收敛 (由正向级数比值法知)

$\therefore$ 原级数绝对收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n}\right]$

解: $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$条件收敛,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$绝对收敛

$\therefore$ 原级数条件收敛.

$$(3)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}$$

解: $$\frac{i^n}{\ln n}=\frac{1}{\ln n}\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

而 $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\cos\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\ln 2k}$$ 条件收敛

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\sin\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\ln(2k+1)}$$ 条件收敛

$\therefore$ 原级数条件收敛.

第二节　幂级数

1. 幂级数的概念

1)函数项级数： 设$\{f_n(z)\}$ $(n=1,2,\cdots)$为一复变函数序列，$z\in D$

则$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$为函数项级数

$s_n(z)=\sum_{k=1}^{n} f_k(z)$—部分和函数

若$z_0\in D$，有$\lim_{n\to\infty} s_n(z_0)\overset{\text{收敛}}{=}s(z_0)$，

称$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$z_0$点收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)=s(z_0)$

若级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$D$内处处收敛，则有和函数$s(z)$

即$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = s(z)$，$z \in D$, D为收敛域

2) 幂级数：形如$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + \cdots --(1)$

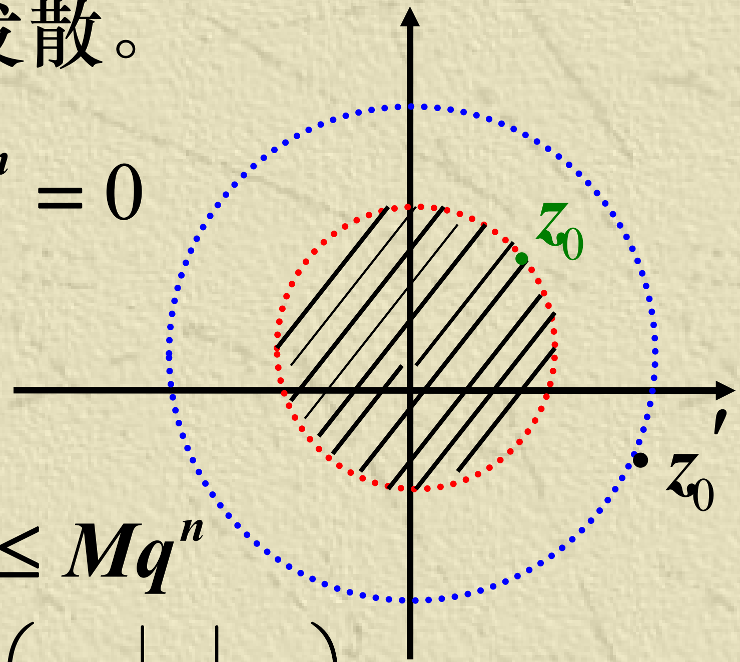
或$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + \cdots \ --(2)$ 为幂函数，

若令$\zeta = z - a$,则(1)为$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$同$(2)$式

定理1（Abel Th）：

若$\sum c_n z^n$在$z=z_0\left(z_0\neq 0\right)$收敛，则在$|z|<|z_0|$内绝对收敛；

若在$z=z_0'$发散，则在$|z|>|z_0'|$内发散。



证明： 1° $\because$ 在z_0收敛 $\quad\therefore \lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^{\,n}=0$

故$\exists M>0,\forall n,\left|c_n z_0^{\,n}\right|\leq M$

当$|z|<|z_0|$时，$\left|c_n z^n\right|=\left|c_n\right|\left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n\cdot\left|z_0\right|^n\leq Mq^n$

$$\left(q=\left|\frac{z}{z_0}\right|<1\right)$$

而$\sum\limits_{n=0}^{\infty} Mq^n$收敛 $\quad\therefore\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$绝对收敛

2° 反证法

综上得结论：幂级数(2)的收敛情况有三种

(1) 在复平面上处处收敛，　$R=+\infty$

(2) 只在$z=0$收敛，　$R=0$

(3) $\exists R>0$，在圆C_R: $|z|=R$内绝对收敛，$|z|>R$内发散，

而$|z|=R$上不定，

称R为收敛半径，圆C_R: $|z|=R$为收敛圆.

例2 求$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$的收敛域及和函数.

解: $\because s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \dfrac{1-z^n}{1-z}$

而 $|z| < 1$时， $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-z}$

即 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$收敛于$\dfrac{1}{1-z}$

当 $|z| \geq 1$时, $\because \lim\limits_{n\to\infty} z^n \neq 0$ (一般项) $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} z^n$发散

故$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$, $|z| < 1$, 即收敛域为$|z| < 1$,和函数为$\dfrac{1}{1-z}$.

第二节 幂级数

3) 收敛半径求法.

定理2（比值法）： 已知$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda$

则 1° 当$\lambda \neq 0$时，$\mathrm{R} = \dfrac{1}{\lambda}$

2° 当$\lambda = 0$时，$\mathrm{R} = +\infty$

3° 当$\lambda = +\infty$时，$\mathrm{R} = 0$

定理3（根值法）： 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \mu \neq 0$，则$R = \dfrac{1}{\mu}$.

例2.求下列级数的收敛半径.

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^n}{2^n}$$

解: $\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}=\frac{1}{2}\quad \therefore R=2$

$$(2)\ \sum_{n=0}^{\infty}(\cos in)z^n$$

解: $\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(e^{n+1}+e^{-n-1}\right)/2}{\left(e^{n}+e^{-n}\right)/2}=e$

$\therefore R=\frac{1}{e}$

$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$

解: $\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1,\qquad \therefore R = 1$

收敛圆C_R: $|z-1| = 1$　其中$z = 0, z = 2$在圆上,

而$z = 0$时,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛; $z = 2$时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散

可见,收敛圆C_R上,有收敛点,也有发散点.

4) 幂级数的运算性质

(1) 有理运算:

若 $f(z) \overset{\text{收敛}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \ R = r_1,$

$g(z) \overset{\text{收敛}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, R = r_2$

则

$1^\circ \ f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n, \ |z| < R, \ R = min\{r_1, r_2\}$

$2^\circ \ f(z) \cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \ R = min\{r_1, r_2\},$

其中$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n$

对角线法:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \quad a_n \\
\hline
b_0 & a_0b_0 & a_1b_0 & a_2b_0 & a_3b_0 & \cdots \\
b_1 & a_0b_1 & a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots \\
b_2 & a_0b_2 & a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \cdots \\
 & \vdots & & & & \\
b_n & & & & &
\end{array}
$$

$$c_0 = a_0b_0$$

$$c_1 = a_1b_0 + a_0b_1$$

$$c_2 = a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2$$

$$\vdots$$

（2）复合运算—代换运算

若 $|z| < r$ 时，$f(z) \overset{\text{收敛}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，

又在 $|z| < R$ 时，$g(z)$解析，且 $|g(z)| < r$

则 $f[g(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [g(z)]^n$，$|z| < R$

例4 把 $\dfrac{1}{z-b}$ 表示成 $z-a$ 的幂级数，其中 $a \neq b$.

解： $$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{(a-b)+(z-a)}=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}$$

$$\overset{\text{当}\left|\frac{z-a}{b-a}\right|<1\text{时}}{=}\frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(b-a)^{n+1}}(z-a)^n$$

$\left(|z-a|<|b-a|,\text{故收敛域为}R=|b-a|\right)$

第二节 幂级数

（3）分析运算性质：

定理4： 设$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$的收敛半径为$R$,

则 1° 和函数$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$在收敛圆

$C_R: |z-a|<R$内解析.

2° $f(z)$在$C_R: |z-a|<R$内部可逐项求导，

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} nc_n (z-a)^{n-1}$$

3° 在$C_R: |z-a|<R$内可逐项积分，

$$\int_C f(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_C (z-a)^n dz$$

或$\int_a^z f(\zeta)d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$

第三节　泰勒级数（Taylor）

问题：解析函数$f(z)$是否能展开为幂级数，

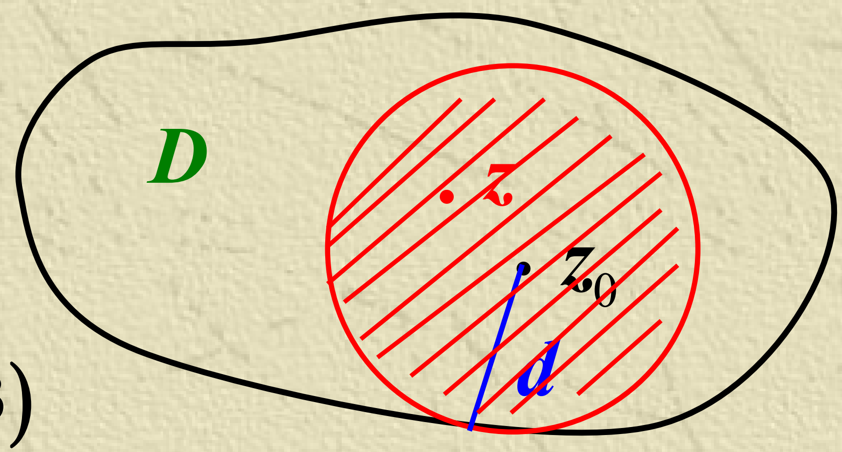
即：$f(z)$是否能展开为$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, z\in D$

讨论过程见P_{117}

定理（Taylor展开定理）：

设$f(z)$在区域D内解析，$z_0 \in D$，$d = \min\limits_{z\in\partial D}\{|z - z_0|\}$，

则当 $|z - z_0| < d$ 时，



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad —(3)$$

(3)式称为$f(z)$在z_0点的泰勒展开式，且展开式惟一.

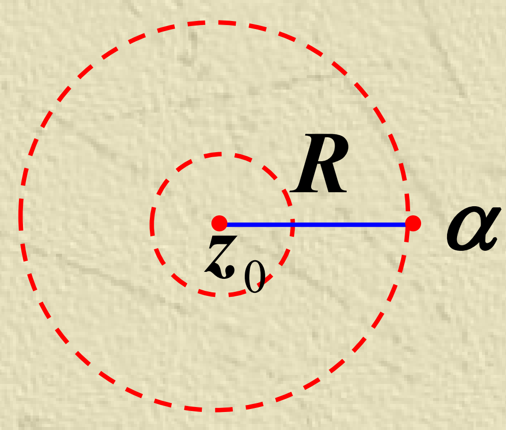
其中$c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(n = 0,1,2\cdots)$称为Taylor系数

而$|z - z_0| < d$为$f(z)$在D内z_0点的最大展开范围.

注:

1° 由定理可得：若$f(z)$在z_0点解析，则可在z_0的解析邻域内$T-$展开.

而最大展开邻域半径R等于z_0到$f(z)$的最近奇点α的距离，即$R=|z_0-\alpha|$.



2° $f(z)$在z_0点解析 $\Leftrightarrow$ $f(z)$在z_0点可展开为$T-$级数.

(判别解析的另一定理)

3° 特别的，当$z_0=0$时，$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n}$

函数展开为T—级数的方法：直接法及间接法

例1 求$f(z)=e^z$及$f(z)=\sin z$, $f(z)=\cos z$在$z=0$的$T-$展式.

解: $$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots\quad(|z|<+\infty)$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\quad(|z|<+\infty)$$

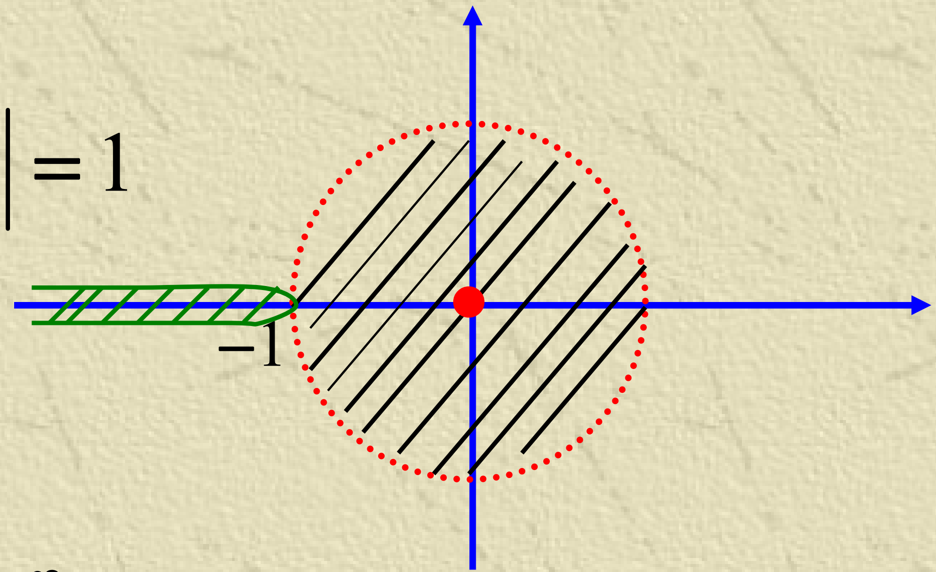
$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots\quad(|z|<+\infty)$$

例2 求对数函数主值 $\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处的 $T-$展式.

解: 显然 $z=-1$ 是 $\ln(1+z)$ 离 $z=0$ 的最近奇点

$\therefore$ 展开半径 $R=|0-(-1)|=1$

故展开范围为 $|z|<1.$



又 $[\ln(1+z)]'=\dfrac{1}{1+z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\ |z|<1$

$$\therefore \ln(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1},\quad |z|<1$$

例3 不展开成$T-$级数，指出函数展开为$T-$级数的收敛半径.

(1) $f(z)=\tan z \quad (z_0=0)$

解: $\because$ 奇点为$z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $\quad \therefore R=\left|\pm\dfrac{\pi}{2}-0\right|=\dfrac{\pi}{2}$

(2) $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1} \quad (z_0=4i)$

解: $\because$ 奇点为$z=2k\pi i \quad (k=0,\pm1,\cdots)$

$$\therefore R=|2\pi i-4i|=2\pi-4$$

第三节 泰勒级数

例4 求$(1+z)^{\alpha}$的主值支$f(z)=e^{\alpha\ln(1+z)}$, $f(0)=1$在$z=0$处的T－展式.

解: 显然离$z=0$的最近奇点为$\alpha=1$

$\therefore$ 展开半径$R=|1-0|=1.$

故$f(z)$在$|z|<1$内可展成z的幂级数.

法一：待定系数法得

$$(1+z)^{\alpha}=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots \qquad (|z|<1)$$

法一：待定系数法

$$\because f'(z)=(1+z)^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{1+z},\quad \therefore(1+z)f'(z)=\alpha f(z)$$

设 $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$

$(\because f(z)$解析$,\therefore$展式存在$)$

则 $(1+z)\left(a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots\right)'$

$$=\alpha\left(a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots\right)$$

比较两边同次幂系数，且$a_0=f(0)=1$,得

$$a_1 = \alpha a_0 \Rightarrow \quad a_1 = \alpha$$

$$a_1 + 2a_2 = \alpha a_1 \Rightarrow \quad a_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}$$

$$2a_2 + 3a_3 = \alpha a_2 \Rightarrow \quad a_3 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$\vdots$$

$$(n\text{-}1)a_{n-1} + na_n = \alpha a_{n-1} \Rightarrow \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$\vdots$$

$$\therefore (1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n + \cdots \qquad (|z|<1)$$

法二: 由 $f(z)=e^{\alpha\, ln(1+z)} \overset{\Delta}{=} e^{\varphi(z)}$

求出 $f(0), f'(0), f''(0), \cdots, f^{(n)}(0), \cdots$

代入 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$ 即得.

例5 将$f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$展开为z的幂级数.

解: $f(z)$有一个奇点$z=1$, $\therefore$ 展开域为$|z|<1$

法1: 显然 $f(0)=e$, 又 $f'(z)=e^{\frac{1}{1-z}}\dfrac{1}{(1-z)^2}\Rightarrow f'(0)=e$,

即 $(1-z)^2 f'(z)=f(z)$

求导得: $(1-z)^2 f''(z)+(2z-3)f'(z)=0\Rightarrow f''(0)=3e$

再求导得: $(1-z)^2 f'''(z)+(4z-5)f''(z)+2f'(z)=0$

$$\Rightarrow f'''(0)=13e$$

......

$$\therefore e^{\frac{1}{1-z}}=e\left(1+z+\frac{3}{2!}z^2+\frac{13}{3!}z^3+\cdots\right)\quad(|z|<1)$$

法2：待定系数法

令 $f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots$

则由 $(1-z)^2 f'(z)=f(z)$

得$(1-z)^2\left(c_1+2c_2z+\cdots+nc_nz^{n-1}+\cdots\right)$

$$=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots$$

比较得：$c_0=f(0)=e,\ c_1=c_0=e,\ c_2=\frac{3}{2}c_1=\frac{3}{2}e,\cdots$

$$\therefore e^{\frac{1}{1-z}}=e\left(1+z+\frac{3}{2!}z^2+\cdots\right) \qquad |z|<1$$

法3:

$$f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}=e^{1+z+z^2+z^3+\cdots}=e\cdot e^{z}\cdot e^{z^2}\cdot e^{z^3}\cdots$$

$$=e\cdot\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)\cdot\left(1+z^2+\frac{z^4}{2!}+\cdots\right)$$

$$\cdot\left(1+z^3+\frac{z^6}{2!}+\cdots\right)\cdots=$$

(太繁，不太可能，写出前几项即可.)

例6 求$f(z)=\dfrac{z}{z+2}$在$z=1$处的泰勒展开式.

解: $f(z)$的奇点为$z=-2$

$\therefore$ 展开域$|z-1|<|1-(-2)|=3$

而 $$f(z)=\frac{z}{z+2}=1-\frac{2}{z+2}=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{3}}$$

$$=1-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}(z-1)^n$$

$$=\frac{1}{3}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2}{3^{n+1}}(z-1)^n,\qquad |z-1|<3$$

例7 将$e^z \sin z$展开为z的幂级数.

解: $\because e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots \quad , \qquad |z| < +\infty$

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \cdots, \qquad |z| < +\infty$$

$$\therefore e^z \cdot \sin z = z + z^2 + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{2}\right)z^3 + \cdots$$

$$= z + z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \cdots$$

第三节 泰勒级数

对角线法：

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 1 & \dfrac{1}{2!} & \dfrac{1}{3!} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3!} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\dfrac{1}{3!} & -\dfrac{1}{3!} & -\dfrac{1}{3!} & -\dfrac{1}{2\cdot 3!} &
\end{array}
$$

另解： $$e^z \sin z = \frac{e^z\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}{2i} = \frac{e^{(1+i)z} - e^{(1-i)z}}{2i} = \cdots$$

第三节 泰勒级数

例8：将$\dfrac{1}{(1+z)^2}$展开为z的幂级数.

解: $\because \dfrac{1}{(1+z)^2}$的奇点为$z=-1$

$\therefore$展开范围是$|z|<1$

$$\therefore \frac{1}{(1+z)^2} = -\left[\frac{1}{1+z}\right]' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right)'$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot nz^{n-1} = 1-2z+3z^2-\cdots \qquad (|z|<1)$$

第四节　洛朗级数（*Laurent*）

问题：

若$f(z)$在z_0点不解析，而在$0<|z-z_0|<R$内解析.

问：$f(z)$是否可表达成$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$的幂级数形式，

由上节讨论知： 若$f(z)$在z_0点不解析，

则在$0<|z-z_0|<R$内，$f(z) \neq \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$，

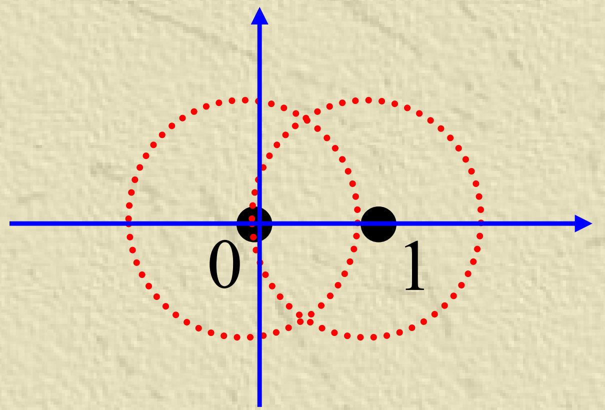
否则$f(z)$在$U(z_0)$内解析.

例1 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$

解: $f(z)$在$z=0, z=1$不解析,但在$0<|z|<1$内解析.

$$\therefore f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

$$\stackrel{\Delta}{=} z^{-1}+1+z+z^2+\cdots \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=-1}^{+\infty} z^n$$



同理: $f(z)$在$0<|z-1|<1$内解析

$$\therefore f(z)=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1-(1-z)}=\frac{1}{1-z}+1+(1-z)+\cdots+(1-z)^n+\cdots$$

$$\stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=-1}^{+\infty}(1-z)^n=\sum_{n=-1}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

研究问题:

1° 既含有正幂项，又含有负幂项级数的收敛性。

2° 在$R_1 < |z - z_0| < R_2$内解析函数的展开式。

一.双边幂函数

1. 正幂项级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \cdots \quad \text{--}(1)$$

2. 负幂项级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} = c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_{-2}(z-z_0)^{-2} + \cdots \quad \text{---}(2)$$

若令$\zeta = (z-z_0)^{-1}$,

则(2)式为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^{n} = c_{-1}\zeta + c_{-2}\zeta^{2} + \cdots$ —(3)为正幂项级数.

或记$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum\limits_{n=-1}^{-\infty} c_{n}(z-z_0)^{n}$

若(3)的收敛域为:$|\zeta| < R \quad (R \neq 0)$,

则(2)的收敛域为: $R_1 \overset{\Delta}{=} \dfrac{1}{R} < |z-z_0|$

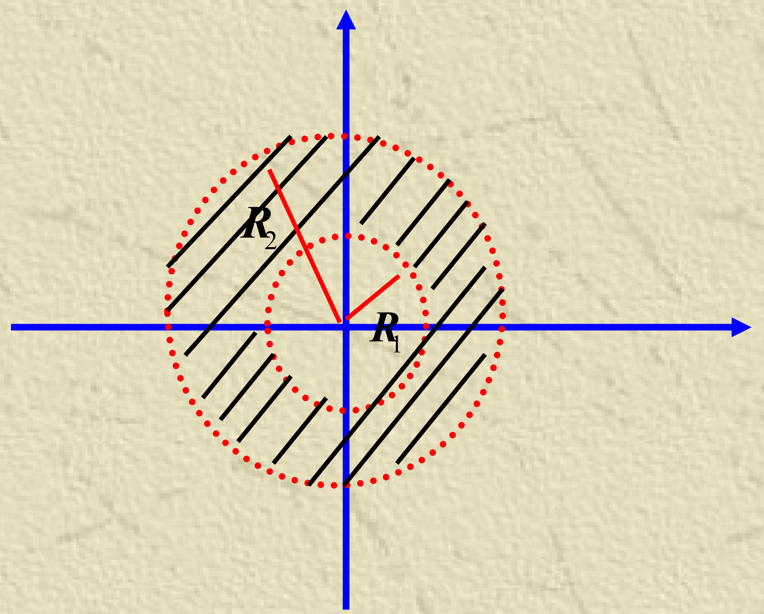
3.双边幂函数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \overset{\Delta}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

$$=\cdots c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$

$$+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n \quad --(4)$$

规定： 级数(1),(2)均收敛时,(4)式收敛，且收敛域为(1),(2)的公共部分.



设(1)式收敛域为$|z-z_0|<R_2$,

(2)式收敛域为$R_1<|z-z_0|$

则

- 当$R_2>R_1$时,(4)式收敛域为圆环域：$R_1<|z-z_0|<R_2$
- 当$R_2<R_1$时,(4)式无收敛点.
- 当$R_1=R_2$时，在圆$|z-z_0|=R_1$上可能有收敛点，也可能有发散点.

特别的，若$R_1 = 0, R_2 = +\infty$，则收敛域为：$0 < |z - z_0| < +\infty$.

注：双边幂级数在收敛圆环内的和函数是解析的，

并且可以逐项积分和逐项求导.

例 求$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n}$的收敛域，其中$a, b$为复数.

解：$\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n}$在$\left|\frac{a}{z}\right| < 1$ 即 $|z| > |a|$ 内收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{b^n}$在$\left|\frac{z}{b}\right| < 1$ 即 $|z| < |b|$ 内收敛

$\therefore$当 $|a| < |b|$时，收敛域为 $|a| < |z| < |b|$

当 $|a| > |b|$时，处处发散.

二. 圆环域内解析函数的L—展开式

问题: 若$f(z)$在$R_1<|z-z_0|<R_2$内解析，$f(z)$是否可以展开为$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$的形式?

定理（L—Th）：

设$f(z)$在圆环域H: $R_1 < |z-z_0| < R_2$内解析，则 $\forall z \in H$,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$ —洛朗级数，洛朗展开式

其中$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta \quad (n=0,\pm1,\pm2\cdots)$$

C是H内绕z_0的任意正向简单闭曲线，且展开式唯一.

问：c_n是否等于$\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$?

（不一定，看$f(z)$在z_0点解析吗?）

证明：见P_{128}

几点说明:

1° $L-$级数中，正幂项部分称为解析部分.

负幂项部分称为主要部分.

2° 在圆环域内解析函数的正，负幂级数展开式是唯一的，即只能是$L-$级数.

3° 一般的，$c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \neq \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

但若$f(z)$在z_0解析，即在$|z - z_0| < R_2$内解析，

则 $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (n = 0,1,2\cdots)$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta = 0 \qquad (n = 1,2\cdots)$$

这时，$L-$展开式为$T-$展开式.

4° $0 < |z - z_0| < +\infty$是特殊的圆环域.

三. 函数展开为L—级数的方法：直接法及间接法

例1 将$f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$展开为z的L-级数.

解： **法1：直接法.** 显然展开范围为$:0<|z|<+\infty$

$$\text{求}\ c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}d\zeta \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

当$n\le -3$时，$c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C e^\zeta\cdot\zeta^{3-n}d\zeta=0$

即$c_{-3}=c_{-4}=\cdots=0$

当$n \geq -2$时,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}} d\zeta = \frac{1}{(n+2)!}\left(e^\zeta\right)^{(n+2)}\Big|_{\zeta=0} = \frac{1}{(n+2)!}$$

$$\therefore \frac{e^z}{z^2} = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}z + \frac{1}{4!}z^2 + \cdots$$

$$\left(0 < |z| < +\infty\right)$$

法2: 间接法.

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}z + \cdots \quad \left(0 < |z| < +\infty\right)$$

例2 将$f(z)=z^3 e^{\frac{1}{z}}$展开为z的L-级数.

解: $$z^3 e^{\frac{1}{z}} \underset{0<|z|<+\infty}{\overset{L-\text{展开}}{=}} z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$

$$=z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{z}+\cdots$$

例3 求$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$在圆环域.

$(1)\ 0<|z|<1$ $(2)\ 1<|z|<2$

$(3)\ 2<|z|<+\infty$ $(4)\ 0<|z-1|<1$

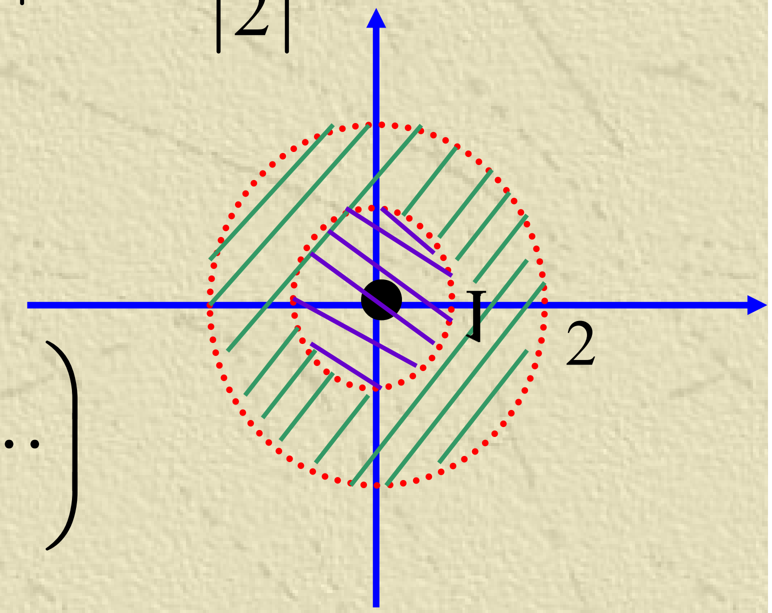
$(5)\ 1<|z-1|<+\infty$ $(6)\ 0<|z-2|<1$

$(7)\ 1<|z-2|<+\infty$

内展开为洛朗级数.

解: $f(z) \overset{\text{分解}}{=} \dfrac{1}{1-z} - \dfrac{1}{2-z}$, 奇点为 $z=1$ 及 $z=2$

(1) $\because f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析，$|z|<1$, $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$



$$\therefore f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}$$

$$= \left(1+z+z^2+\cdots\right) - \frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{8}z^2 + \cdots \quad \left(0<|z|<1\right)$$

不含负幂项，是因为 $f(z)$ 在 $z=0$ 解析.

(2) $\because f(z)$在$1<|z|<2$内解析，$\left|\dfrac{1}{z}\right|<1,\quad \left|\dfrac{z}{2}\right|<1$

(见上图)

$$\therefore f(z)=\frac{-1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}$$

$$=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\cdots\right)$$

$$=\cdots-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z^2}{2}-\frac{z}{2^3}-\cdots$$

$$\left(1<|z|<2\right)$$

(3) $\because f(z)$ 在 $2<|z|<+\infty$ 内解析，$\left|\dfrac{2}{z}\right|<1,\quad \left|\dfrac{1}{z}\right|<1$

$$\therefore f(z)=\frac{-1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}}$$

$$=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{8}{z3}+\cdots\right)-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\cdots\quad\left(2<|z|<+\infty\right)$$

注： 三个展式均是在以 $z=0$ 为心的环域内的展开式，且三个环域覆盖了除两个圆的整个复平面.

(4) $\because f(z)$ 在 $0<|z-1|<1$ 解析， $|z-1|<1$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-(z-1)}$$

$$=-\frac{1}{z-1}\left[1+(z-1)+(z-1)^2+\cdots\right]$$

$$=-\frac{1}{z-1}-1-(z-1)-(z-1)^2-\cdots$$

$$(0<|z-1|<1)$$

(5) $\because f(z)$ 在 $1<|z-1|<+\infty$ 解析， $\therefore \left|\dfrac{1}{z-1}\right|<1$

从而 $$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z-1}}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{1}{(z-1)^4}+\cdots$$

$$(0<|z-1|<+\infty)$$

(6) 在$0<|z-2|<1$内

$$f(z)=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+(z-2)}$$

$$=\frac{1}{z-2}\cdot\left[1-(z-2)+(z-2)^2-\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}-1+(z-2)-(z-2)^2+\cdots$$

$$\left(0<|z-2|<1\right)$$

(7) 在$1<|z-2|<+\infty$内, $\left|\dfrac{1}{z-2}\right|<1$

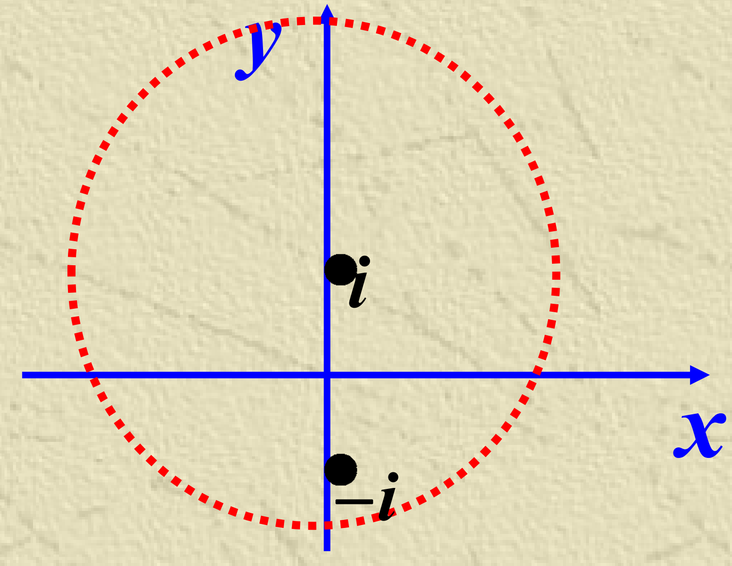
$$f(z)=\frac{1}{(z-2)^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-2}}$$

$$=\frac{1}{(z-2)^2}\left[1-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{(z-2)^3}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{(z-2)^3}+\frac{1}{(z-2)^4}-\cdots$$

$$(1<|z-2|<+\infty)$$

例4 求$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$在$z=i$的去心邻域(或环形区域)内的罗朗展开.



解: $f(z)$的奇点为$z=i, z=-i$

$\therefore f(z)$在i点的去心解析邻域为$0<|z-i|<2$

故 $$f(z)=\frac{1}{(z-i)^2}\cdot\frac{1}{(z+i)^2}=\frac{1}{(z-i)^2}\cdot\left(\frac{-1}{z+i}\right)'$$

$$=-\frac{1}{(z-i)^2}\cdot\left[\frac{1}{2i+(z-i)}\right]'$$

$$=\frac{-1}{2i\cdot(z-i)^2}\left(\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}\right)'=\frac{-1}{2i(z-i)^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^n}(z-i)^n\right]'$$

$$=\frac{-1}{2i\cdot(z-i)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2i)^n}(z-i)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n}{(2i)^{n+1}}(z-i)^{n-3}$$

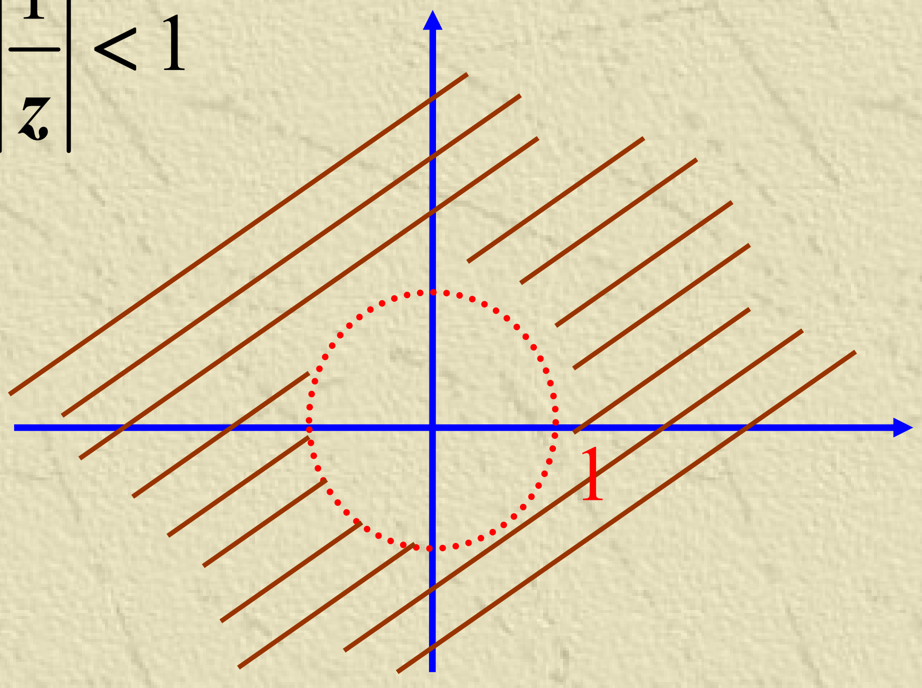
$$\overset{n-1=n'}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+1)}{(2i)^{n+2}}(z-i)^{n-2}$$

$$\left(0<|z-i|<2\right)$$

注： $f(z)$以i为心的环形邻域还有$2<|z-i|<+\infty$.

例5 将$f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$在$1<|z|<+\infty$内洛朗展开.

解: $\because 1<|z|<+\infty \qquad \therefore \left|\dfrac{1}{z}\right|<1$



$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\cdots$$

$$\therefore e^{\frac{1}{1-z}} = 1 + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{1-z}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{1-z}\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots\right)^2$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} - \cdots \qquad 1 < |z| < +\infty$$

注： 此法只可写出前有限项，而不易写出通项.

四. L—系数在计算封闭曲线积分中的应用

设$f(z)$在环形域H: $R_1 < |z-z_0| < R_2$内解析

则 $c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz,$

其中C为H内绕z_0的任何一条正向简单闭曲线，

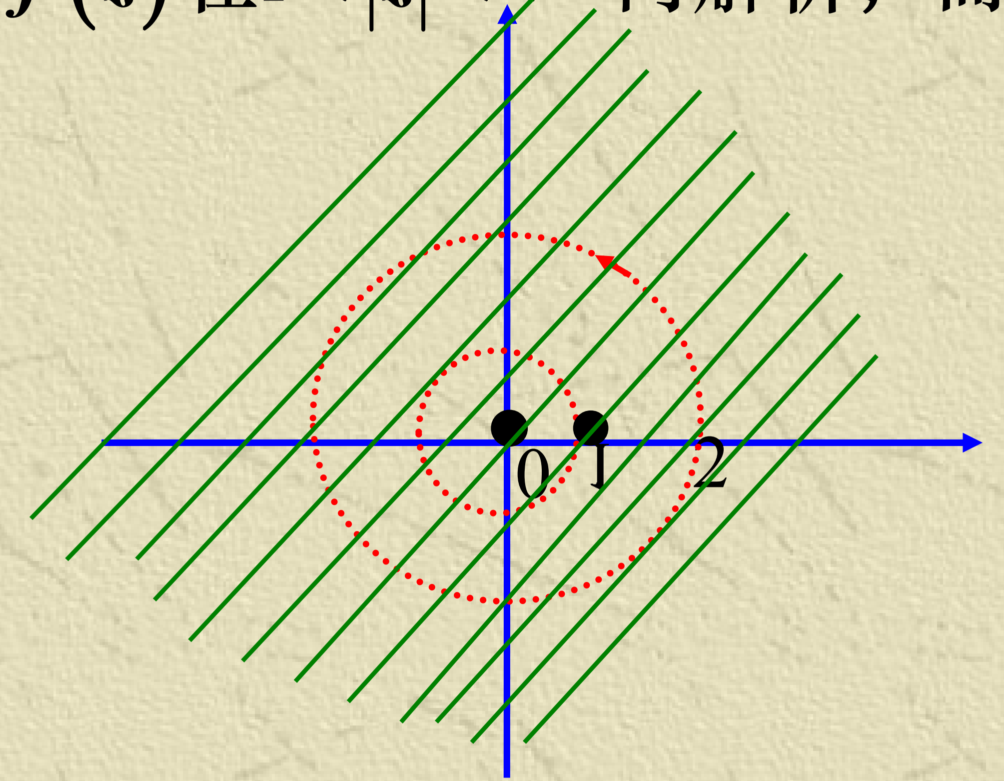
c_{-1}为$L-$系数.

$$\therefore \boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i\, c_{-1}}$$

例6 计算$\oint_{|z|=2}\dfrac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz.$

解: $f(z)=\dfrac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}$有两个奇点$z=0$及$z=1$

$\therefore f(z)$在$1<|z|<+\infty$内解析，而$|z|=2$在环域内



展开 $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{-\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}\cdot e^{\frac{1}{z}}$

$$=-\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

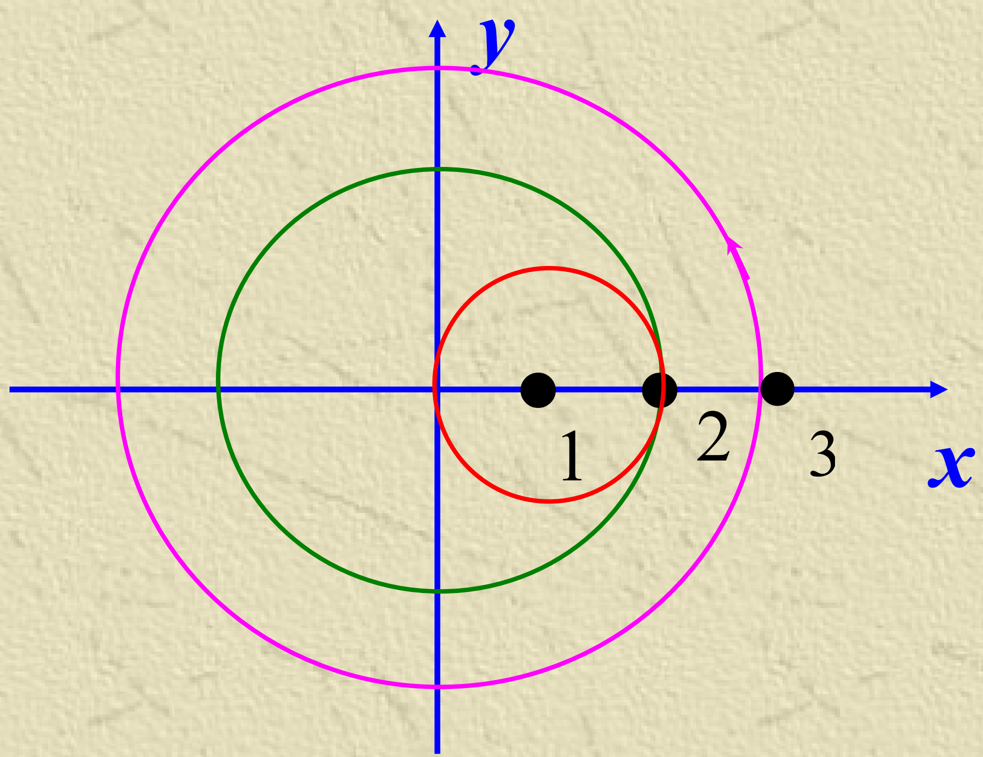
$$=-\left(1+\frac{2}{z}+\frac{5}{2z^2}+\cdots\right)$$

$\therefore\ c_{-1}=-2,$ 故 原积分 $=2\pi i\, c_{-1}=-4\pi i$

例7 计算$\oint_{|z|=3}\frac{1}{(z-1)(z-2)}dz.$

解: $f(z)$的奇点为$z=1$及$z=2$

法一: $f(z)$在$1<|z-1|<+\infty$内L—展开



$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-z}}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\left(1+\frac{1}{1-z}+\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots\right)$$

$\therefore\quad c_{-1}=0,\quad$ 故 原式 $=0.$

法二： $f(z)$在$2<|z|<+\infty$内L—展开

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

$$=\frac{2}{z}+\frac{3}{z^3}+\cdots$$

$\therefore\quad c_{-1}=0,\quad$ 故 原式 $=0.$