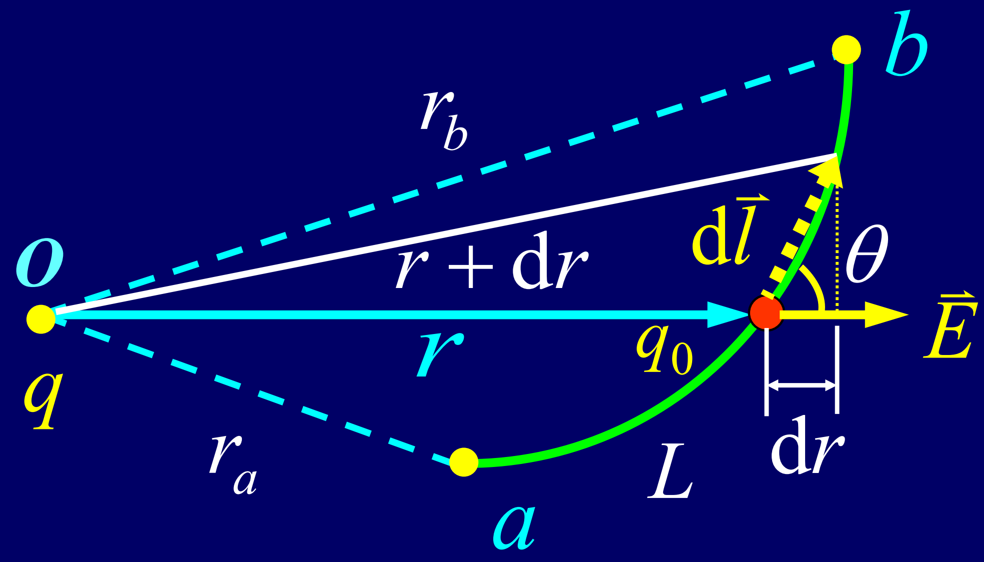
§10.4 静电场的环路定理　电势能

一. 静电力作功的特点

• 单个点电荷产生的电场中



$$A=\int_{a(L)}^{b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{a(L)}^{b}q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{a(L)}^{b}q_0E\,\mathrm{d}l\cos\theta=\int_{a(L)}^{b}q_0E\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$ **(与路径无关)**

- 任意带电体系产生的电场中

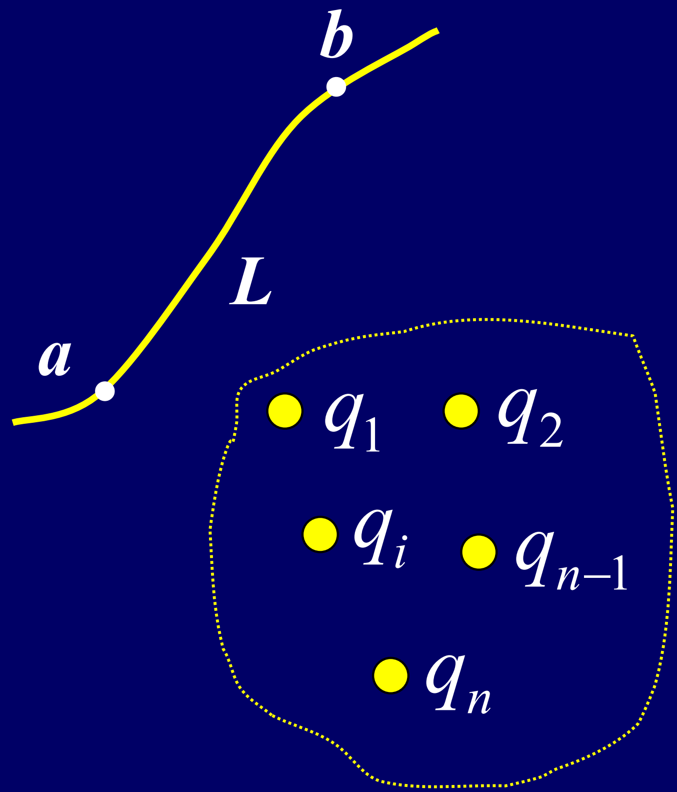
电荷系q_1、q_2、…的电场中，移动q_0，有

$$A_{ab}=\int_{a(L)}^{b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{a(L)}^{b}q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{a(L)}^{b}q_0\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i\right)\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{a(L)}^{b}q_0\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\sum_{i}\frac{q_iq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{ai}}-\frac{1}{r_{bi}}\right)$$



结论

电场力作功只与始末位置有关，与路径无关，所以静电力是保守力，静电场是保守力场。

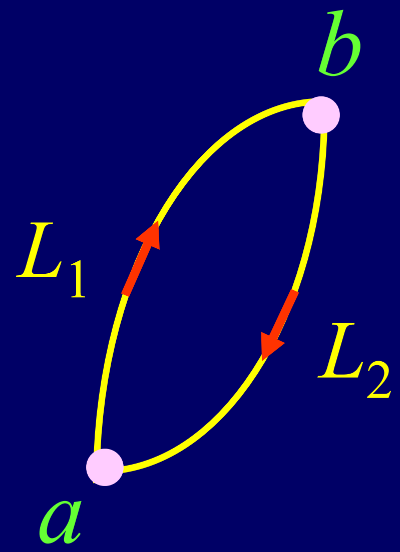
二. 静电场的环路定理

$$A_{aba}=\oint \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{a(L_1)}^{b} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_{b(L_2)}^{a} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{a(L_1)}^{b} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}-\int_{a(L_2)}^{b} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=0$$



$$\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0}$$

环路定理：电场强度沿任意闭合路径的线积分恒为零

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S \underline{(\nabla\times\vec{E})}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$\vec{E}$的旋度

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{E} = 0}$$

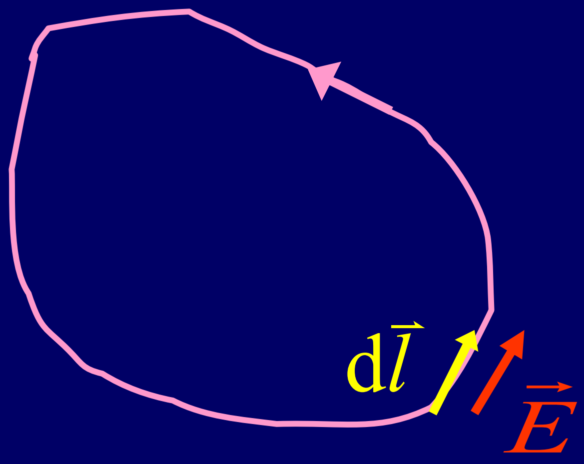
静电场是无旋场

讨论

(1) 环路定理要求电场线不能闭合。

反证法： $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \oint_L E\cos\theta dl > 0$

与静电场的环路定理矛盾



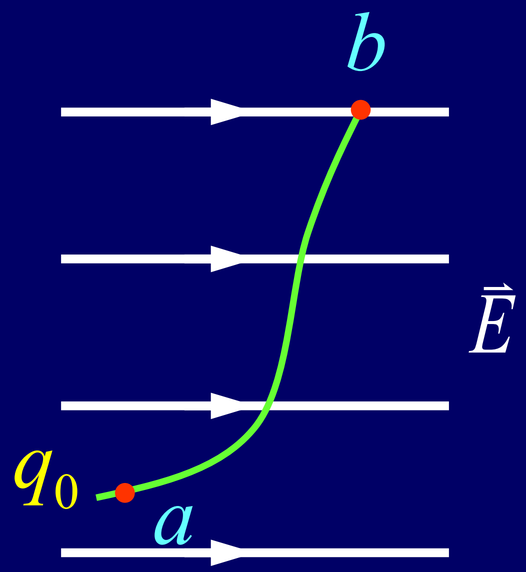
(2) 静电场是有源、无旋场，可引进电势能。

(3)只适用于静电场 。

三. 电势能

重力场 ⟶ 保守力场 ⟶ 引入势能

静电场 ⟶ 保守场 ⟶ 引入静电势能



1.电势能的差

定义：q_0 在电场中 a、b 两点电势能之差等于把 q_0 自 a 点移至 b 点过程中电场力所作的功。

$$\boxed{A_{ab} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = W_a - W_b}$$

$$A_{ab} = -\Delta W \begin{cases} A_{ab} > 0, W_a > W_b & \text{电场力做正功，电势能减小} \\ A_{ab} < 0, W_a < W_b & \text{电场力做负功，电势能增大} \end{cases}$$

$$A_{ab}=\int_a^b q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=W_a-W_b$$

2.电势能

取势能零点 令：$W_\mathrm{b}=0$

q_0 在电场中某点 a 的电势能：

$$W_a=A_{a"0"}=\int_a^{"0"} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电荷q_0自该点→"势能零点"过程中电场力作的功。

说明

(1) 电势能由 q_0 和电场的性质共同决定，是一个系统量。

(2) 电荷在某点电势能的值与零点选取有关,是一个相对量。

(3) 选势能零点原则：

- **当(源)电荷分布在有限范围内时，势能零点一般选在无穷远处。**
- **实际应用中取大地、仪器外壳等为势能零点。**

$$W_a = \int_a^{"0"} q_0 \vec{E}\cdot d\vec{l} \propto q_0$$

§10.5 电势　电势差

一. 电势

1. 电势定义:

单位正电荷自该点→"势能零点"过程中电场力作的功。

$$\boxed{u_a = \frac{W_a}{q_0}} \Leftrightarrow \boxed{u_a = \frac{A_{a"0"}}{q_0} = \int_a^{"0"} \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

说明

（1）电势与试验电荷q_0无关，仅取决于电场的性质。

（2）电势是位置坐标的单值函数，是标量。

（3）电势是相对量，与参考点的选取有关。

单位正电荷自$a \to b$过程中电场力作的功。

2.电势差

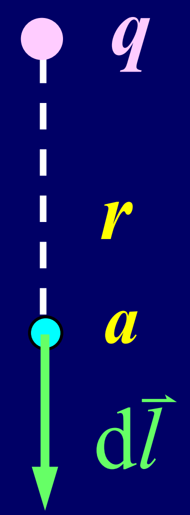
$$u_{ab} \equiv u_a - u_b = \frac{W_a}{q_0} - \frac{W_b}{q_0} = \frac{A_{ab}}{q_0} = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\boxed{A_{ab} = W_a - W_b = q_0\left(u_a - u_b\right) = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

3.点电荷的电势

$$u_a = \int_a^\infty \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^\infty E \cos\theta \mathrm{d}l$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{r}^{\,0}$$



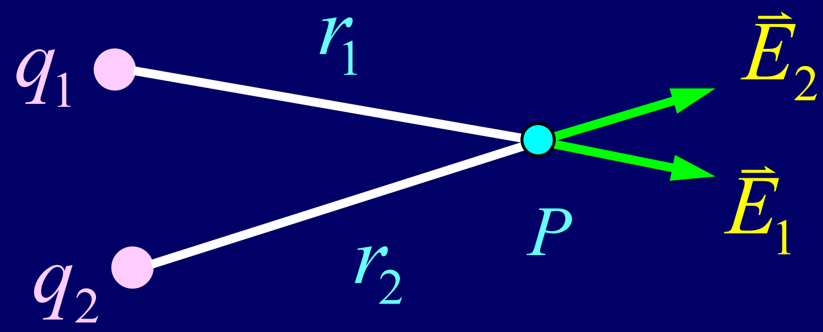
沿电场线方向为积分路径

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}r\, \vec{r}^{\,0}$$

$$u_a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{u_a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

二. 电势叠加原理



$$u_p = \int_p^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_p^{\infty} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_p^{\infty} \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_p^{\infty} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

在点电荷系产生的电场中，某点的电势是各个点电荷单独存在时，在该点产生的电势的代数和。这称为电势叠加原理。

对n个点电荷

$$\boxed{u=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}$$

对连续分布的带电体

$$\boxed{u=\int_Q\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

三. 电势的计算

方法

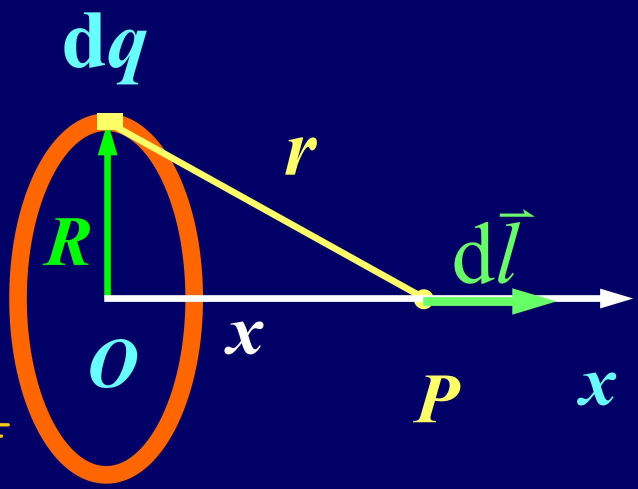
（1） 电势叠加法 $u=\int_Q \mathrm{d}u$

（2） 场强积分法 $u_p=\int_p^{"0"}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

例 均匀带电圆环半径为R，带电量为q。

求 圆环轴线上一点的电势

解1 建立如图坐标系，选取电荷元 dq



$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$u_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}\int \mathrm{d}q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

解2

$$u_P = \int_P^\infty \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_P^\infty E\cos\theta\mathrm{d}l$$

沿x轴积分 $d\vec{l} = dx\,\vec{i}$

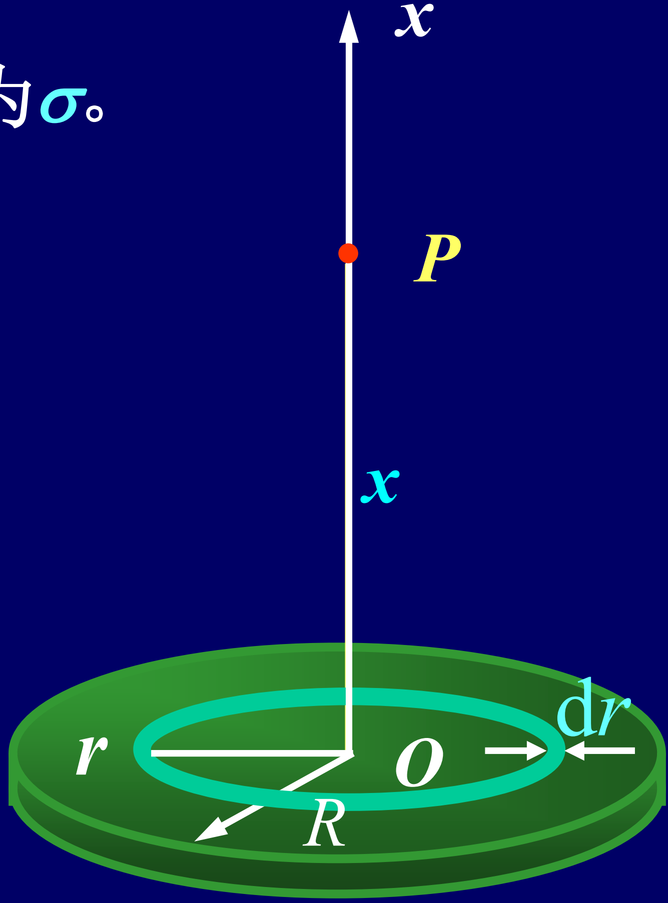
$$= \int_x^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}dx$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2+x^2)^{3/2}}\vec{i}$$

例 均匀带电圆盘半径为R，电荷面密度为σ。

求 圆盘轴线上一点的电势

解 $$\mathrm{d}q = 2\pi r\mathrm{d}r\sigma$$



$$du = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$u = \int du = \int_0^R \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{rdr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{x^2+r^2}\Big|_0^R$$

$$x = 0 \quad u_0 = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$$

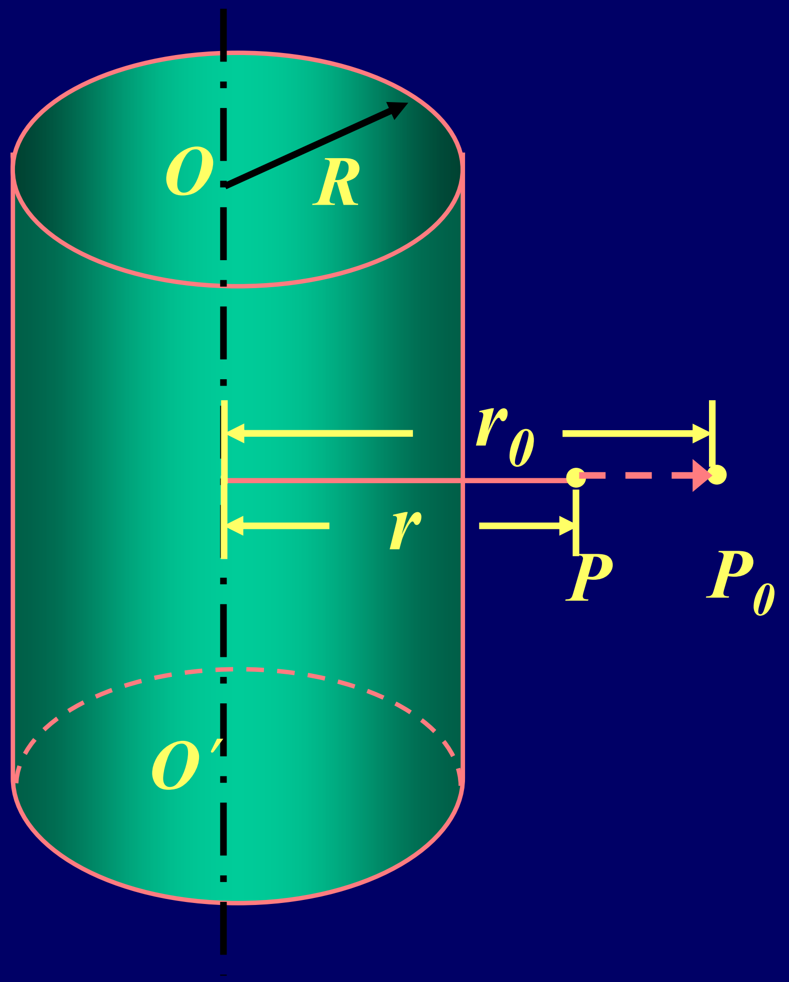
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{x^2+R^2} - |x|)$$

$$x >> R \quad u \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

例 "无限长"均匀带电圆柱面,半径为R ,沿轴向单位长度带电为$+\lambda$

求 电势分布

解 电场分布具有轴对称性



$r < R \qquad E_1 = 0$

$r > R \qquad E_2 = \dfrac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}$

$$u_{外} = \int_p^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r \Big|_r^\infty \to \infty$$

无意义

无限大带电体，势能零点一般选在有限远处一点。

取P_0 ($r=r_0$)点为势能零点

无限大带电体，势能零点一般选在有限远处一点。

取P_0 ($r=r_0$)点为势能零点

$r > R$

$$u_{外} = \int_p^{P_0} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^{r_0} E_2 \mathrm{d}r = \int_r^{r_0} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \mathrm{d}r$$

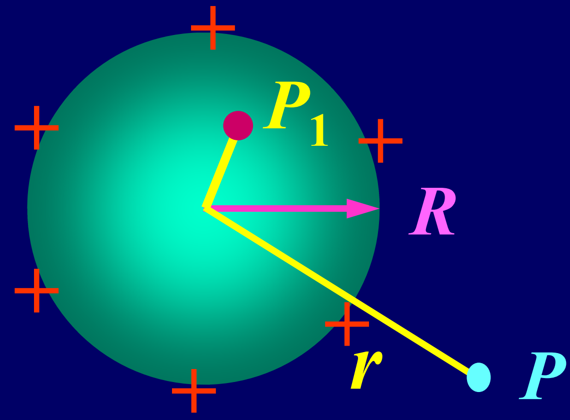
$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r \Big|_r^{r_0} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_0$$

$r < R$

$$u_{内} = \int_p^{P_0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^{R} E_1 \mathrm{d}r + \int_R^{r_0} E_2 \mathrm{d}r$$

$$= \int_R^{r_0} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \mathrm{d}r = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln R + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_0$$

例 半径为R，带电量为q 的均匀带电球面



求 带电球体的电势分布

解 根据高斯定律可得：

$$\begin{cases} r < R & E_1 = 0 \\ r \geq R & E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$$

$r \geq R$

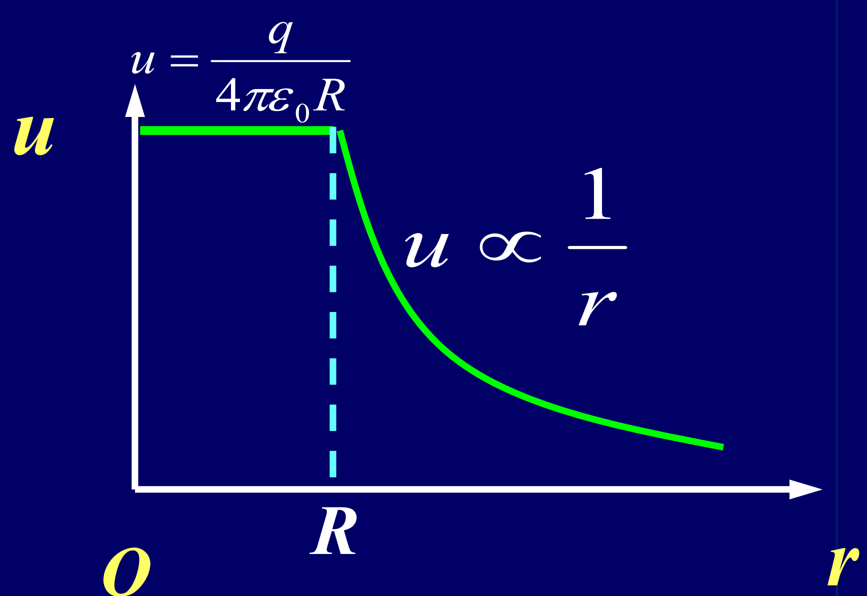
$$u_{外} = \int_p^{\infty} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^{\infty} \frac{q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$r < R$

$$u_{内} = \int_{p_1}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^R E_1 \mathrm{d}r + \int_R^{\infty} E_2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



电势分布曲线