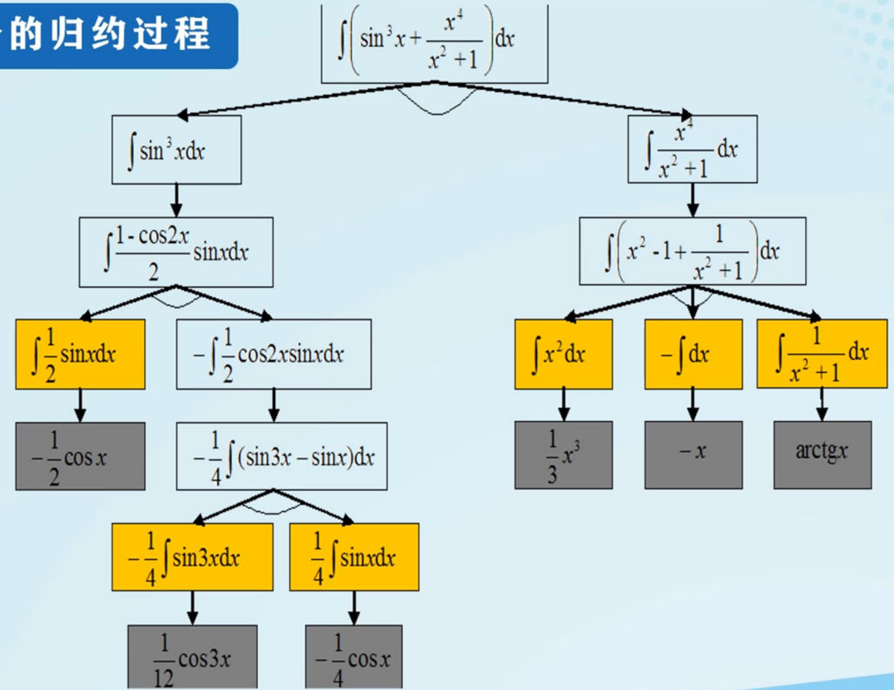
3.1 问题归约法及与或图

不定积分的归约过程


$\int\left(\sin^3 x+\frac{x^4}{x^2+1}\right)dx$
$\int \sin^3 x dx$
$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$
$\int \frac{1-\cos 2x}{2}\sin x dx$
$\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$
$\int \frac{1}{2}\sin x dx$
$-\int \frac{1}{2}\cos 2x \sin x dx$
$\int x^2 dx$
$-\int dx$
$\int \frac{1}{x^2+1}dx$
$-\frac{1}{2}\cos x$
$-\frac{1}{4}\int(\sin 3x-\sin x)dx$
$\frac{1}{3}x^3$
$-x$
$\mathrm{arctg} x$
$-\frac{1}{4}\int \sin 3x dx$
$\frac{1}{4}\int \sin x dx$
$\frac{1}{12}\cos 3x$
$-\frac{1}{4}\cos x$

- 对于一个复杂问题，直接求解往往比较困难。此时可通过下述方法进行简化：
  - **分解**

    把一个复杂问题分解为若干个较为简单的子问题，每个子问题又可继续分解。重复此过程，直到不需要再分解或者不能再分解为止。
  - **等价变换**

    利用同构或同态的等价变换，把原问题变换为若干个较为容易求解的新问题。

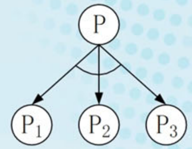


图3.1：分解

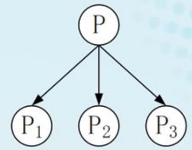


图3.2：等价变换

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

问题归约法

➢ 问题归约是另一种问题描述与求解方法。所谓归约，即降阶。

- **基本思想：**从已知问题的描述出发，通过一系列变换把此问题最终变为一个子问题集合；这些子问题的解可以直接得到，从而解决了初始问题。
- **问题规约的实质：**从目标(要解决的问题)出发逆向推理，建立子问题以及子问题的子问题，直至最后把初始问题归约为一个平凡的本原问题集合。
- （本原问题就是不可或不需再通过变换化简的“原子”问题，原问题的解可以直接得到。）

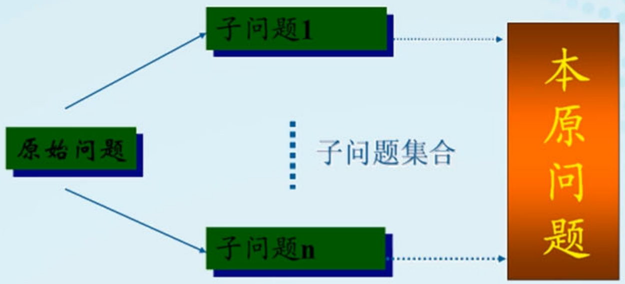
问题归约法

- **问题归约法的组成：**

(1)一个初始问题描述；

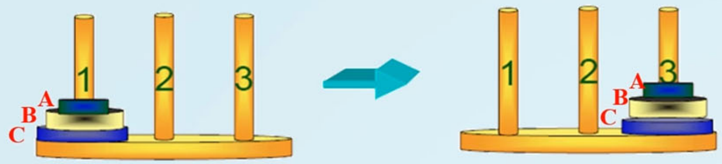
(2)一套把问题变换为子问题的操作符；

(3)一套本原问题。



实例：三阶梵塔难题

- 有3个柱子(1,2,3)和3个不同尺寸的圆盘(A,B,C)。在每个圆盘的中心有个孔，所以圆盘可以堆叠在柱子上。
- 最初，全部3个圆盘都堆在柱子1上：最大的圆盘C在底部，最小的圆盘A在顶部。
- 要求把所有圆盘都移到柱子3上
  - 每次只许移动一个，而且只能先搬动柱子顶部的圆盘
  - 还不许把尺寸较大的圆盘堆放在尺寸较小的圆盘上



C盘柱号　　A盘柱号

(X, Y, Z)

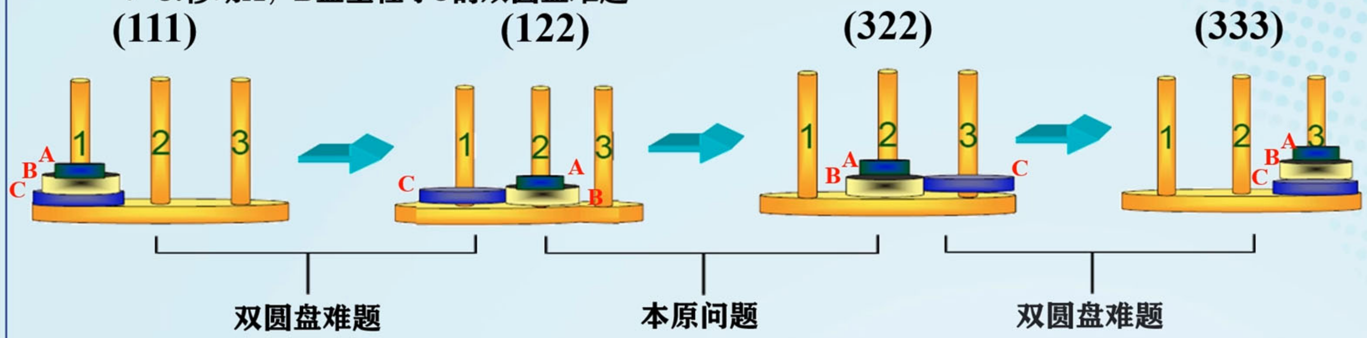
B盘柱号

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

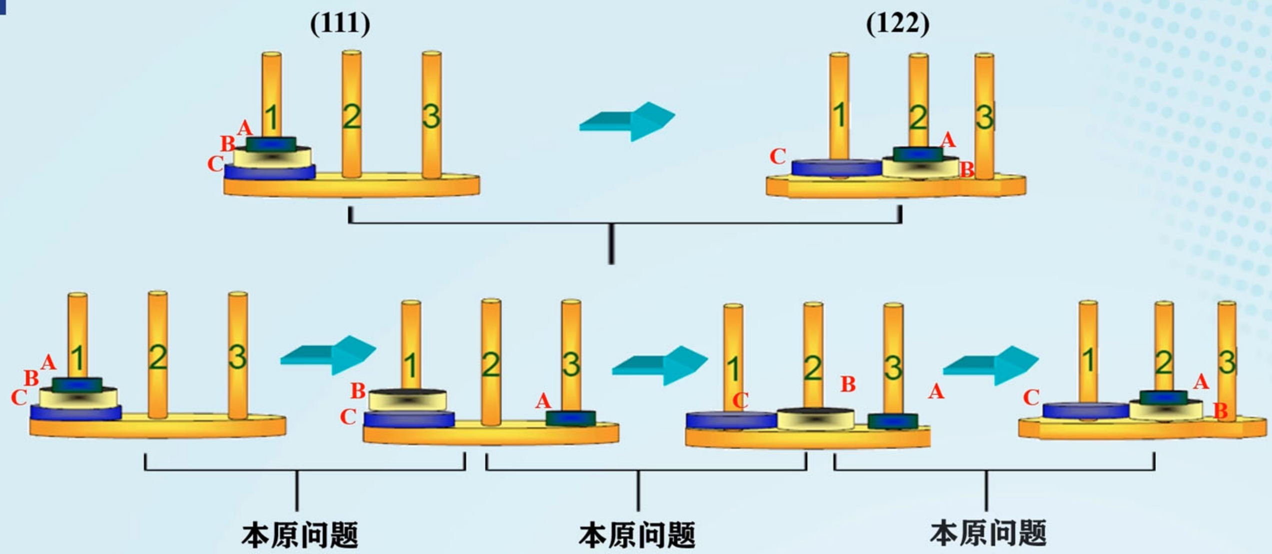
实例：三阶梵塔难题

➢ 原始梵塔问题可归约为较简单的3个子问题集合:

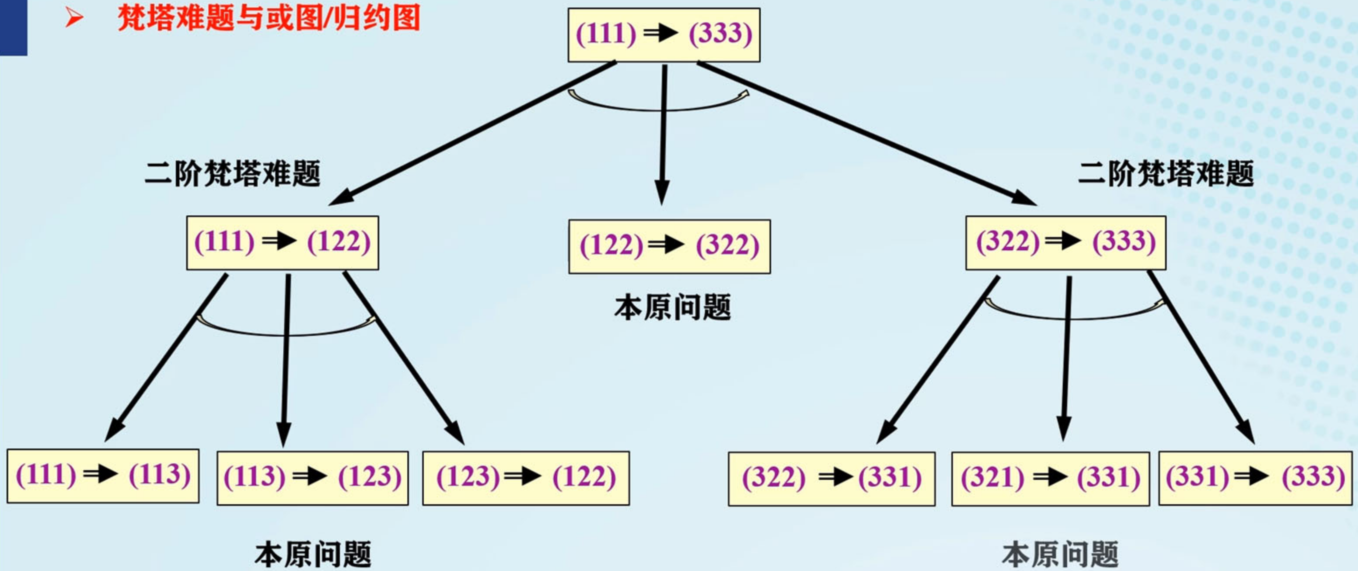
- 1.移动A，B盘至柱子2的双圆盘难题
- 2.移动圆盘C至柱子3的单圆盘问题
- 3.移动A，B盘至柱子3的双圆盘难题



➢ 二阶梵塔难题（一）



- 梵塔难题与或图/归约图


(111) ➔ (333)
二阶梵塔难题
(111) ➔ (122)
(122) ➔ (322)
本原问题
二阶梵塔难题
(322) ➔ (333)
(111) ➔ (113)
(113) ➔ (123)
(123) ➔ (122)
本原问题
(322) ➔ (331)
(321) ➔ (331)
(331) ➔ (333)
本原问题

问题归约法基本思路

问题归约法的基本思路是：应用一系列算符将原始问题的描述变换或分解成为子问题的描述

问题的描述可以采用各种数据结构，如表、树、矢量、数组等

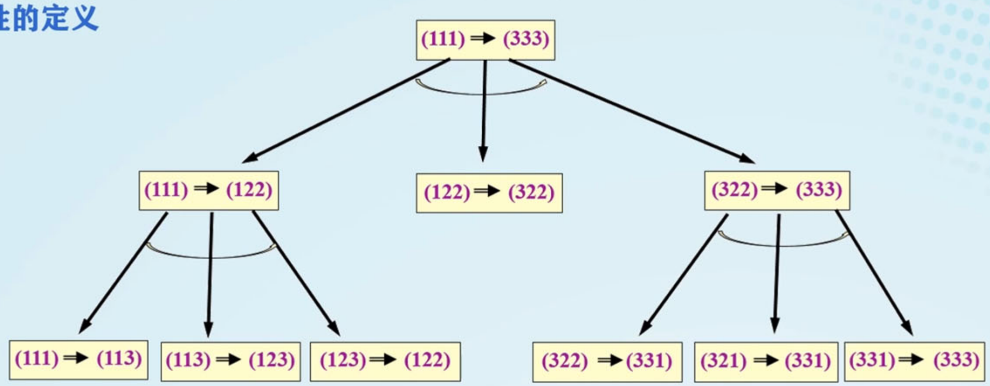
对于梵塔问题，问题及子问题描述：(111)→(333)

问题归约法可以用一个三元组（S, O, P）来表示，其中：

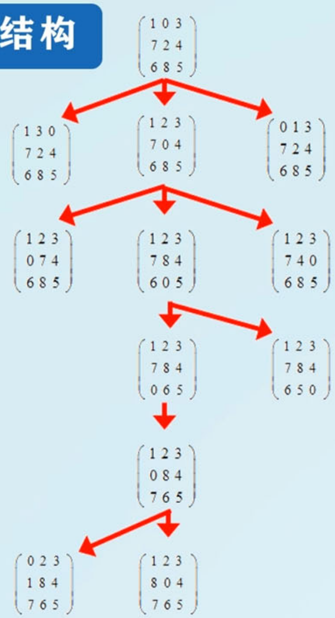
- S：原始问题，即要解决的问题
- P：本原问题集，其中的每一个问题是不用证明的或自然成立的，例如公理、已知事实等
- O：操作算子集，用于将问题化为子问题

与或图表示

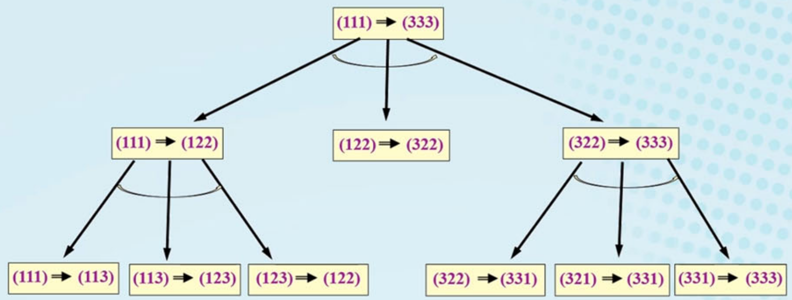
- 对归约问题,可采用图的结构来表示把问题归约为子问题的替换集合。
- 表示问题规约的图称为与或图（归约图）
  - 与或图的结构
  - 节点可解性的定义



与或图结构



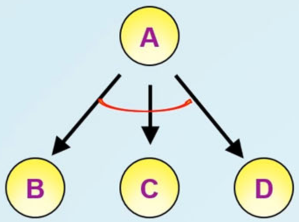
八数码难题的部分状态空间图



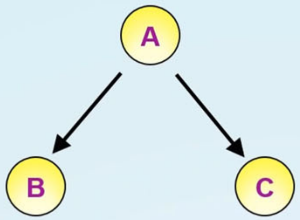
三阶梵塔的与或图

与或图结构

- 一般地，我们用一个类似图的结构来表示把问题归约为后继问题的替换集合，这种结构图叫做**问题归约图**，或叫**与或图**。
- 例如，设想问题A需要由求解问题B、C和D来决定，那么可以用一个与图来表示（左图）；
- 同样，一个问题A或者由求解问题B、或者由求解问题C来决定，则可以用一个或图来表示（右图）；



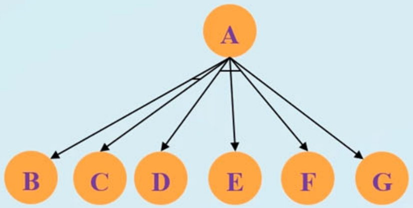
与图



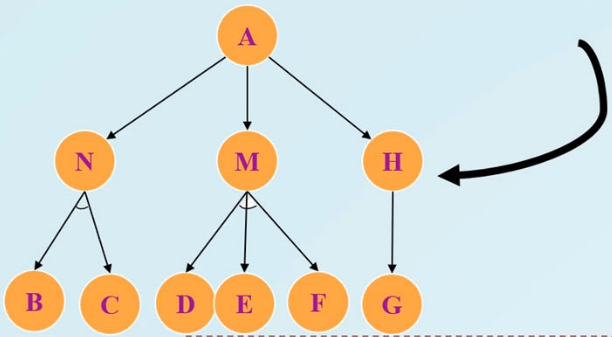
或图

XIDIAN UNIVERSITY

- 与或图



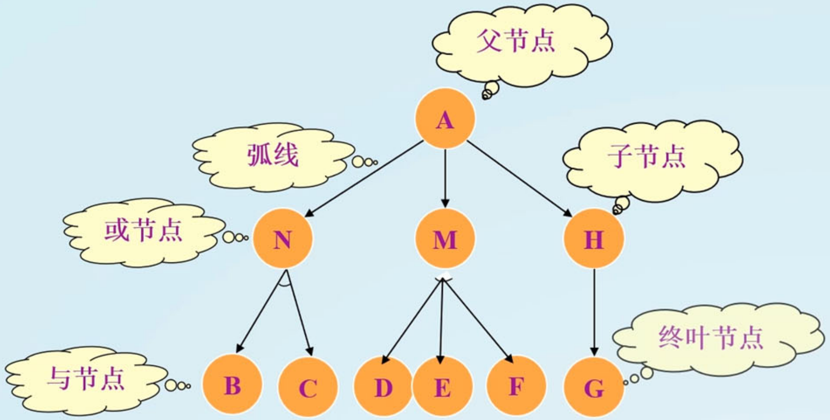
考虑某规约问题A：
- 即可由求解问题B和和C来解决
- 也可由求解问题D、E和F来解决
- 或者由单独求解G来解决



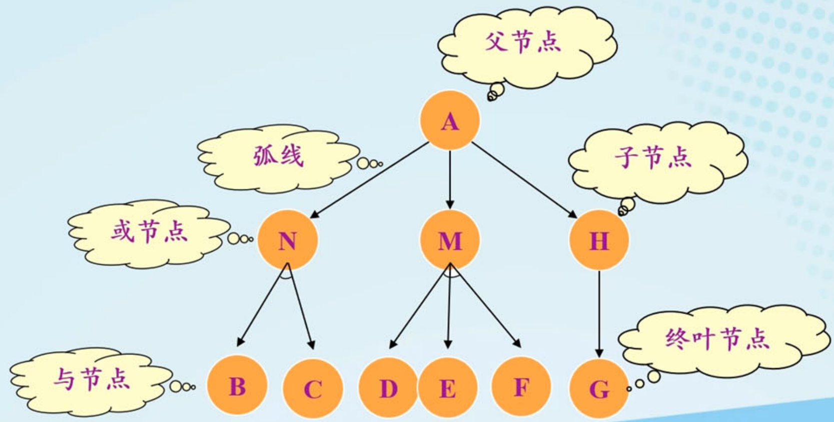
引入中间节点N和M，可使状态图更规范，更容易被计算机存储与处理

其中标记为N和M的附加节点分别作为集合{B, C}和{D, E, F}的唯一父节点，具有辅助问题描述的作用。

与或图的一些术语



- 如果某条弧线从节点a指向节点b，那么节点a叫做节点b的**父节点**；节点b叫做节点a的**后继节点**或**子节点**；
- 弧线，是父辈节点指向子节点的圆弧连线，表示操作符；
- **或节点**，只要解决某个问题就可解决其父辈问题的节点集合；
- **与节点**，只有解决所有子问题，才能解决其父辈问题的节点集合；



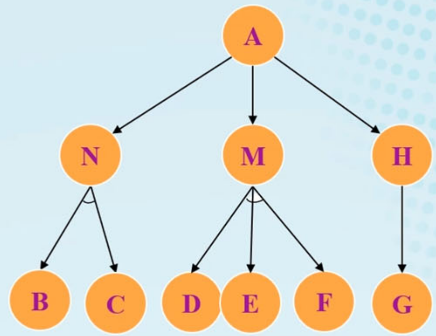
与或图特例

- 所有节点都是或节点，这时就是一般的图，即状态空间图
  - 状态空间搜索问题与与或图问题的区别在于**其不存在任何与节点**。
  - 由于与或图出现与节点，其结构与状态空间图的结构大为不同。因此，与或图需要有其特有的搜索技术，而且是否存在与节点也就成为区别两种问题求解方法的主要依据。
- 除了起始节点外，所有节点只有一个父节点，此时称为与或树

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

与或图结构

- 与或图的结构
  - **初始节点**对应于原始问题描述；
  - 对应于**本原问题**的节点叫做**终叶节点/叶节点**；
  - **中间问题对应非终叶节点**；

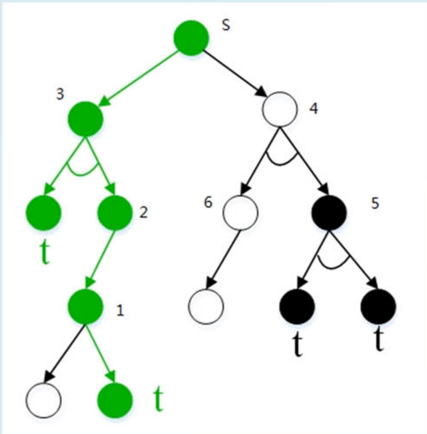


在与或图中，问题有解的条件是：起始节点是可解的

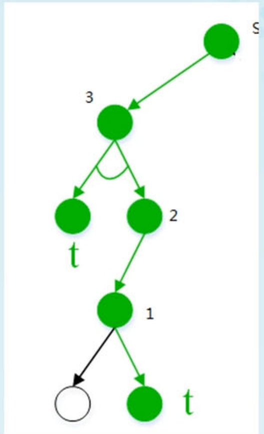
可解节点与不可解节点

- **可解节点（递归定义）：**
  - 终叶节点是可解节点（因为它们直接和本原问题相关连）；
  - 如果某个非终叶节点含有或后继结点时，那么只有当其后继节点至少有一个是可解的时，此非终叶节点才是可解的；
  - 如果某个非终叶节点含有与后继节点，那么只有当其后继节点全部为可解时，此非终叶节点才是可解的。
- **不可解节点:**
  - 没有后继节点的非终叶节点为不可解节点；
  - 全部后继节点为不可解的非终叶节点且含有或后继结点，此非终叶节点才是不可解的；
  - 后继节点至少有一个为不可解的非终叶节点且含有与后继节点，此非终叶节点才是不可解的。

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY



与或树



解树

图中可解节点用实圆圈表示，不可解节点用圆圈表示

可解节点与不可解节点

- 节点是否可解通过由下而上进行的可解标志过程来确定。
  - 可解/不可解标志：根据可解节点与不可解节点的递归定义，通过递归的方式作用于某个与或图上，以标出所有的可解节点及不可解节点。
- 一个解树被定义为那些可解节点所构成的子图，这些节点能够证明问题的初始节点是可解的。
- 解树是绿色子图

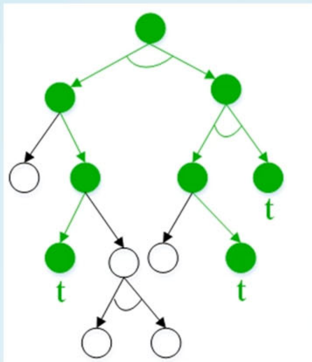


图3.3

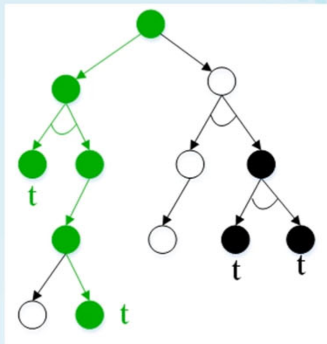


图3.4

问题归约与状态空间

方法	初始问题	算符	目标	结果
状态空间	状态	算符	目标状态	解路径
问题归约	节点	弧线	节点	解树