第六章　　共形映射

§1 共形映射的概念

- 1. 曲线的切线
- 2. 导数的几何意义
- 3. 共形映射的概念

1. 曲线的切线

设连续曲线 $C: z = z(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$

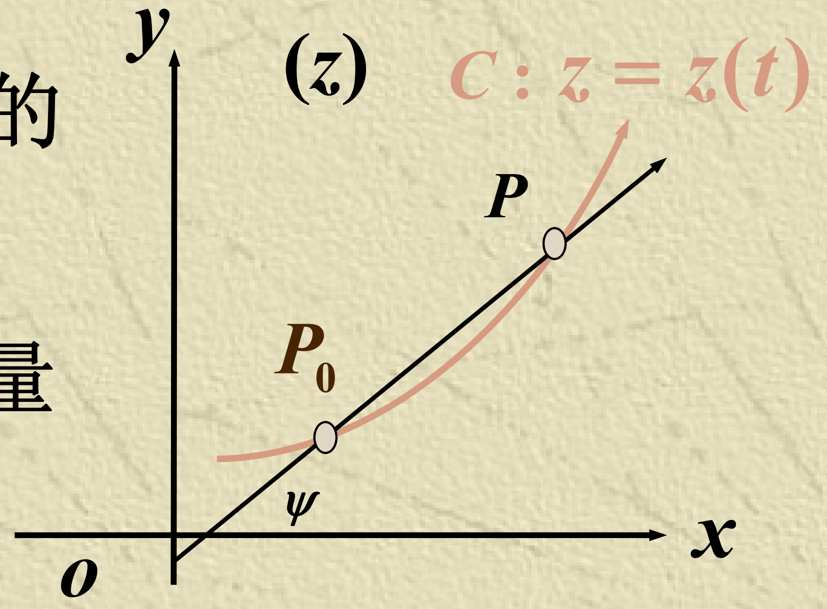
它的正向取 t增大时点 z移动的方向.

若$z'(t_0) \neq 0, t_0 \in (\alpha, \beta)$,取$P_0, P \in C, P_0, P$对应的参数分别为 $t_0, t,$

割线$p_0 p$对应于参数 t增大的方向。

则割线的方向向量 $\overrightarrow{p_0 p}$与向量

$$\frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t}$$ 方向相同.



割线方向 $\overrightarrow{p_0 p}$ 的极限位置:

$$z'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}$$

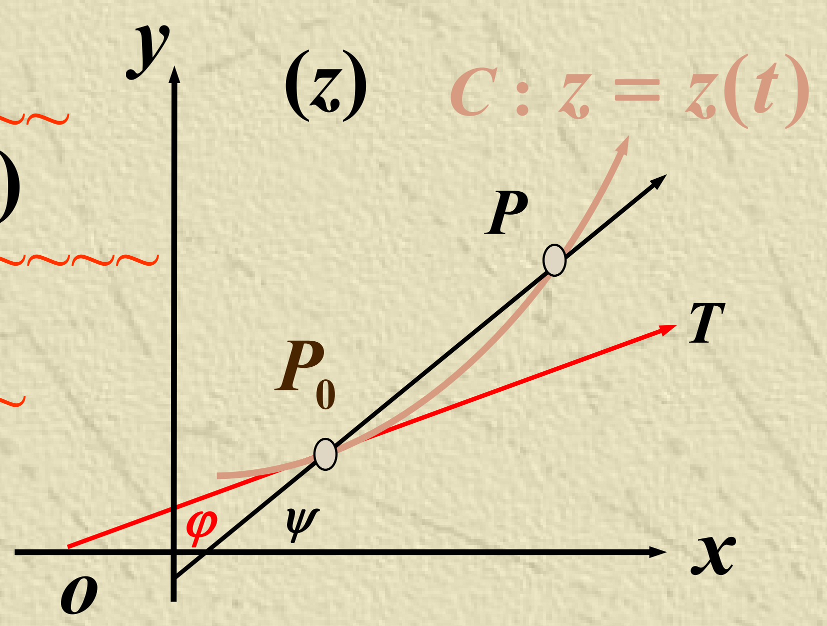
—曲线C在p_0处的切向量且方向与 C正向一致.

$\therefore$ 若$z'(t_0)\neq 0, t_0\in(\alpha,\beta)$,

则曲线C在z_0有切线, $z'(t_0)$

就是切向量, 它的倾角

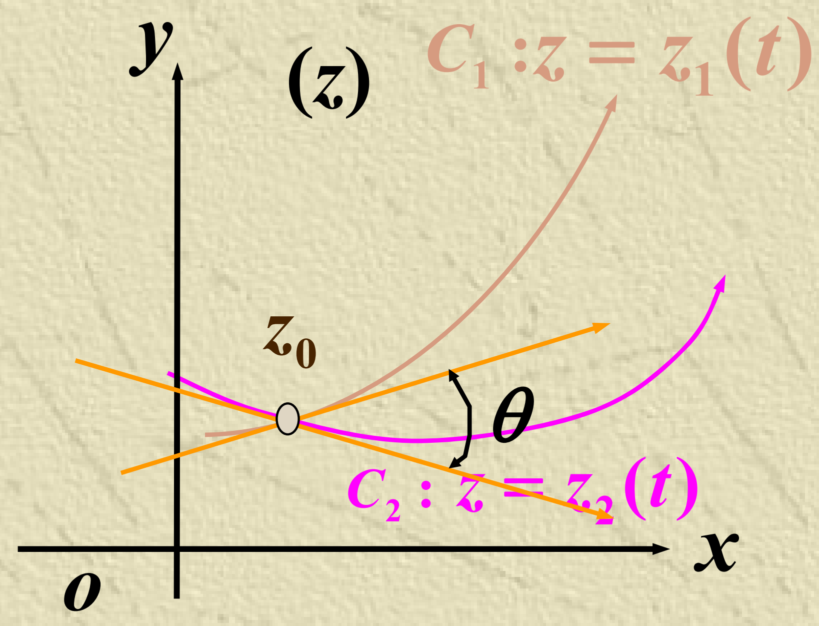
$\varphi=\arg z'(t_0)$.



定义　切线随切点的移动而连续转动的有向曲线称为有向光滑曲线.

(1) $Arg z'(t_0)$——曲线 C 在点 z_0 处切线的正向与 x 轴正方向之间的夹角.

(2) 若曲线 C_1 与曲线 C_2 相交于点 z_0，在交点处两曲线正向之间的夹角就是它们的两条切线正向之间的夹角.



2. 解析函数导数的几何意义(辐角和模)

设$w = f(z)$在区域D内解析，$z_0 \in D$，且$f'(z_0) \neq 0$，

在D内过z_0引一条有向光滑曲线 ：

$$C: z = z(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$$

取$t_0 \in (\alpha, \beta)$ $\quad z_0 = z(t_0)$ $\quad z'(t_0) \neq 0$ $\quad$ 则

z平面上$C: z = z(t)$ $\xrightarrow{\boxed{w=f(z)}}$ w平面上$\Gamma: w = f[z(t)]$

Γ — 过点$w_0 = f(z_0)$，正向取t增大方向的曲线．

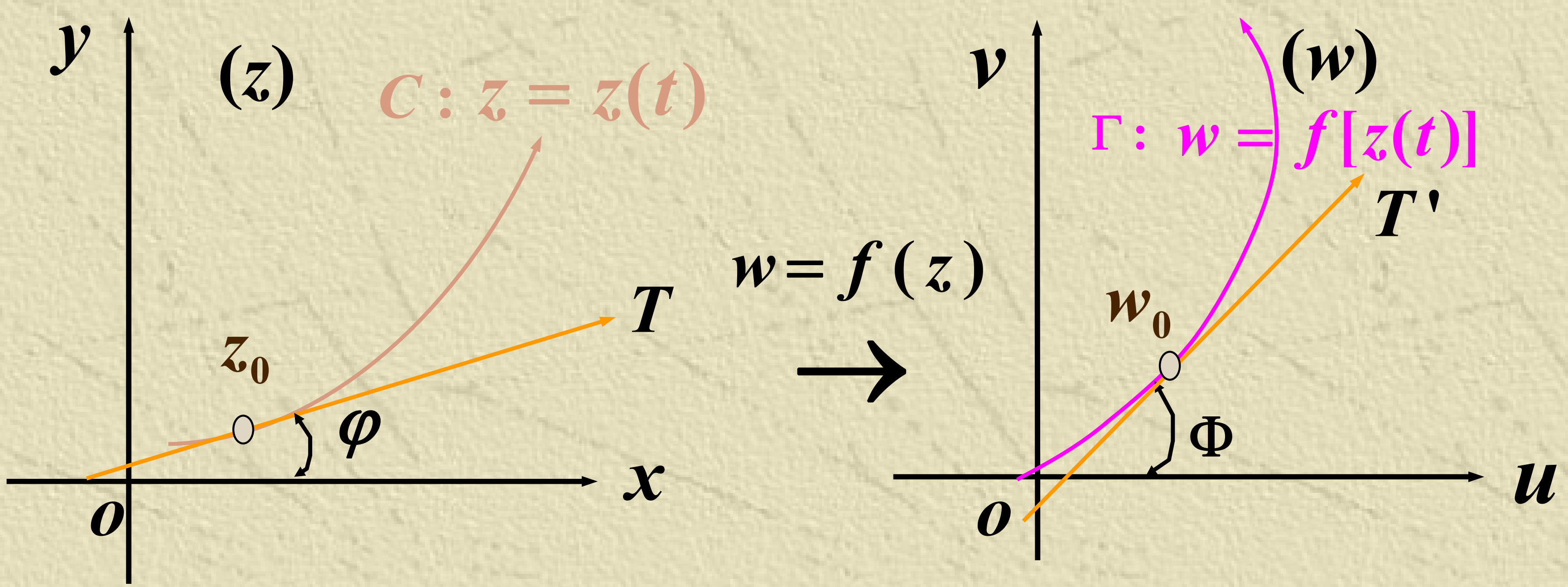
$$\because\ w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0) \neq 0$$

$$\Rightarrow\ Arg\,w'(t_0) = Arg\,f'(z_0) + Arg\,z'(t_0)$$

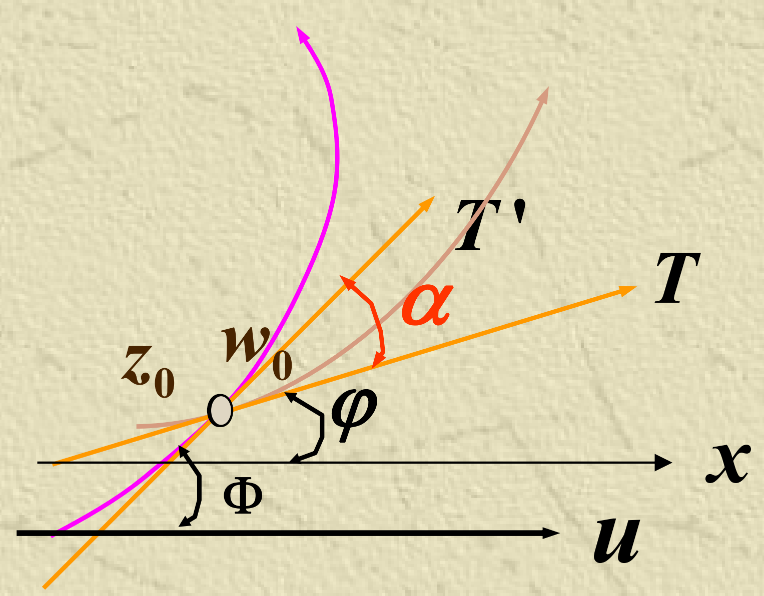
记 $\quad \Phi \qquad \alpha \qquad \varphi$

即 $\quad Arg\,f'(z_0) = Arg\,w'(t_0) - Arg\,z'(t_0)$

即 $\quad \alpha = \Phi - \varphi \qquad (1)$



若视x轴与u轴和y轴与v轴的正向相同，称曲线C的切线正向与映射后曲 线Γ正向之间的夹角为(原曲线C经映射$w = f(z)$)在点z_0的转动角，记作α.



$$\alpha = \Phi - \varphi \quad \text{即} \ Arg f'(z_0) = Arg w'(t_0) - Arg z'(t_0)$$

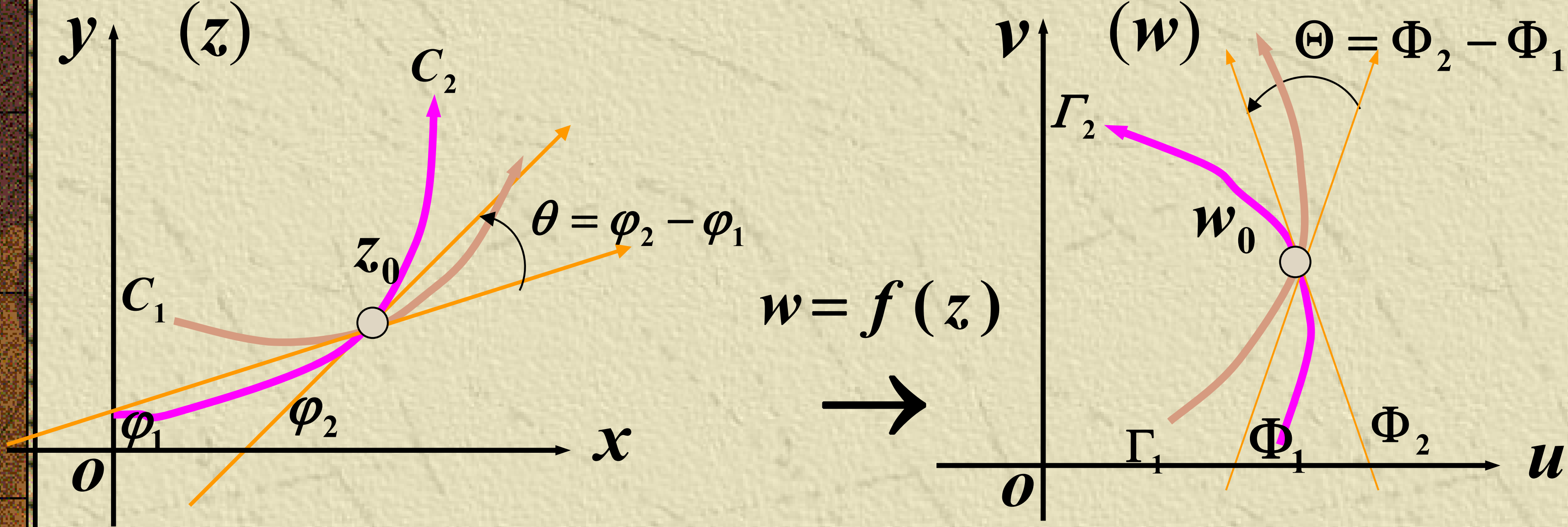
(1)导数幅角 $\operatorname{Arg} f'(z)$ 的几何意义

①$\operatorname{Arg} f'(z_0)(f'(z_0)\neq 0)$是曲线$C$经过$w=f(z)$映射后在点$z_0$的转动角.

由(1)式α仅与映射 $w=f(z)$及点z_0有关,则

② 转动角α的大小及方向与曲线C的形状与方向无关,这种性质称为映射具有转动角的不变性.

设$C_i(i=1,2)$在点z_0的夹角为 θ, $C_i(i=1,2)$在变换 $w=f(z)$下映射为相交于点 $w_0=f(z_0)$的曲线$\Gamma_i(i=1,2)$, Γ_1,Γ_2的夹角为 Θ.



由式(1)有， $\alpha=\Phi_i-\varphi_i \quad (i=1,2)$

$\Rightarrow \Phi_2-\Phi_1=\varphi_2-\varphi_1$ $\boxed{\therefore \Theta=\theta}$ ——保角性

由上述讨论我们有

过z_0的$C_1, C_2 \xrightarrow{\boxed{w=f(z)}}$ 过w_0的$\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow (\widehat{C_1, C_2}) = (\widehat{\Gamma_1, \Gamma_2})$,

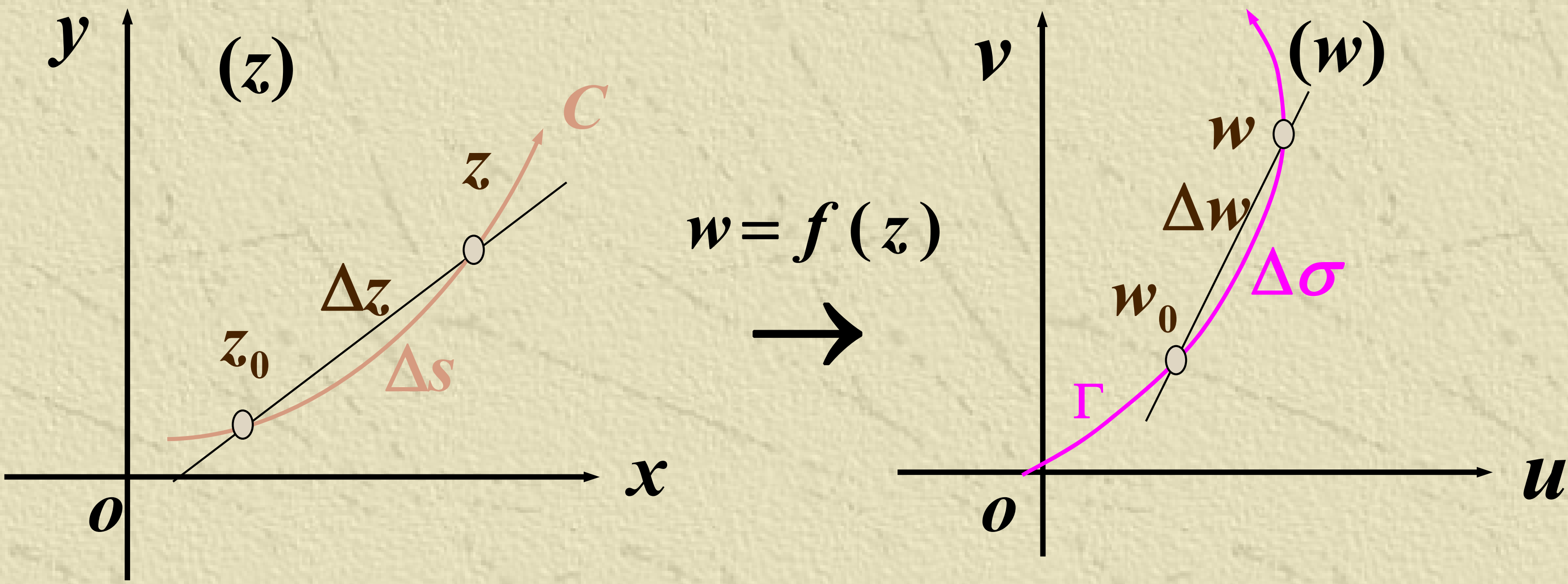
这种映射具有保持两曲 线间夹角的大小与方向不变的性质 --保角性

(2)模$|f'(z)|$的几何意义

设$\Delta z = z - z_0 = re^{i\theta}$, $\Delta w = w - w_0 = \rho e^{i\varphi}$且

用Δs表示C上的点z_0与z之间的一段弧长;

$\Delta\sigma$表示Γ上的对应点w_0与w之间的弧长.



$$\because \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta z|}{\Delta s} = 1 \qquad \lim_{\Delta \sigma \to 0} \frac{|\Delta w|}{\Delta \sigma} = 1$$

$$\therefore |f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{\Delta \sigma} \frac{\Delta \sigma}{\Delta s} \frac{\Delta s}{|\Delta z|} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta s} \qquad (3)$$

$|f'(z_0)|$——称之为曲线 C在z_0的**伸缩率**.

易见，$|f'(z_0)|$与映射 $w=f(z)$及z_0有关，而与曲线的形状方向无关，沿任何曲线作映射 f时，在同一点z_0处$A=|f'(z_0)|$均不变 ——伸缩率不变性

3. 共形映射的概念

定义 设$w=f(z)$在 z_0的邻域内有定义，且在 z_0具有保角性和伸缩率不变性，则称映射$w=f(z)$在z_0为共形的，或称 $w=f(z)$在z_0是共形映射.

若$w=f(z)$在D内每一点都是共形的，则称$w=f(z)$在区域D内是共形映射.

由定义及以上分析有 ：

定理 若$w = f(z)$在z_0点解析且 $f'(z_0) \neq 0$,

$\Rightarrow w = f(z)$是共形 (保角)映射，

且$\alpha = Argf'(z_0)$为转动角 ,$|f'(z_0)|$为伸缩率。

若上述共形映射定义中，仅保持角度绝对值不变，而旋转方向相反，此时称第二类共形映射。从而，定义中的共形映射称为第一类共形映射。

设$w = f(z) \quad z \in D$

$z_0 \in D \quad w_0 = f(z_0) \quad f'(z_0) \neq 0$

又$\because \left|\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \dfrac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \xrightarrow{z \to z_0} = |f'(z_0)|$

$\therefore \Delta w \approx |f'(z_0)||\Delta z|$（忽略高阶无穷小）

那么圆：$|z - z_0| = \delta \xrightarrow{w=f(z)} |w - w_0| = |f'(z_0)|\delta$

（忽略高阶无穷小）

这就是为什么称共形映 射的原因.

§2 分式线性映射

- 1. 分式线性映射的定义
- 2. 分式线性映射的性质

1. 分式线性映射的定义

定义 映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}\quad (ad-bc\neq 0)-(1)$

称为分式线性映射，其中 a,b,c,d 是复常数.

(1) $\because w'=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}\quad \therefore ad-bc\neq 0$ 是必要的。

否则 $w'=0\Rightarrow w\equiv c$(复常数).

(2)补充定义使分式线性函数在整个扩充平面上有定义：当 $c\neq 0$ 时，$w=\begin{cases}\infty & z=-d/c\\ a/c & z=\infty\end{cases}$

当 $c=0$ 时，在 $z=\infty$ 时，定义 $w=\infty$.

$$(3)\ w=\frac{az+b}{cz+d}\Rightarrow z=\frac{-dw+b}{cw-a}\qquad (-d)(-a)-bc\neq 0$$

则,逆映射仍为分式线性的

故又称$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$为双线性映射.

分式线性映射(1)总可以分解成下述三种特殊映射的复合:

$$(i)\ w=z+b\qquad (ii)\ w=az\ (a\neq 0)\qquad (iii)\ w=\frac{1}{z}$$

称为: 平移　整线性　反演

事实上，　　　　(A, B复常数)

当$c=0$时，$w=\dfrac{az+b}{cz+d}\Rightarrow w=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}=Az+B$

当$c\neq 0$时，$w=\dfrac{a(z+\frac{d}{c})+b-\frac{ad}{c}}{c(z+\frac{d}{c})}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c}\dfrac{1}{cz+d}$

$$=A\frac{1}{cz+d}+B\quad (A=\frac{bc-ad}{c}\quad B=\frac{a}{c})$$

$\therefore\ w=\dfrac{az+b}{cz+d}$由$\xi_1=cz+d,\xi_2=\dfrac{1}{\xi_1}$和$w=A\xi_2+B$

复合而成．

$(i)w = z + b$

设$w = u + iv \quad z = x + iy \quad b = b_1 + ib_2$

故 $\begin{cases} u = x + b_1 \\ v = y + b_2 \end{cases}$ $\therefore w = z + b$是一个平移映射.

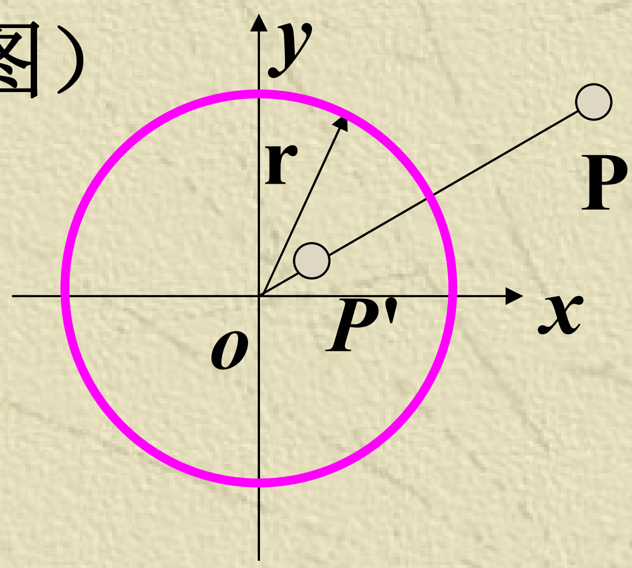
$(ii)w = az$

设$z = re^{i\theta} \quad a = \lambda e^{i\alpha}$,则$w = r\lambda e^{i(\theta+\alpha)}$

$\therefore$ 把z先转一个角度 α再将$|z|$伸长(或缩短)$|a| = \lambda$

倍后就得w,$\therefore w = az$是旋转和伸缩合成的映 射.

名词介绍：关于圆的对称点（见图）

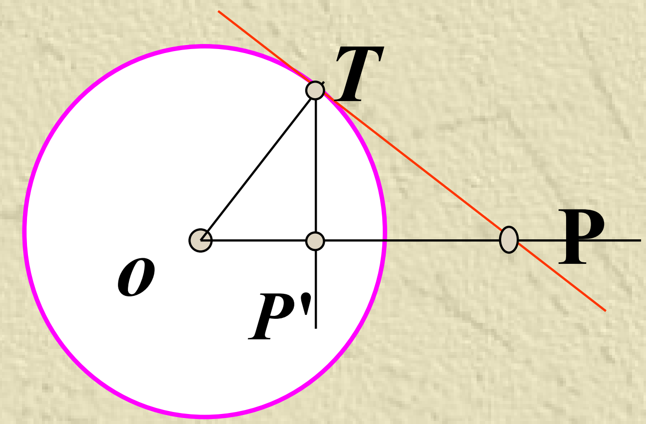


定义 若在半直线上有两点 p, p' 满足 $\overline{op} \cdot \overline{op'} = r^2$，则称 p 与 p' 关于圆周 $|z| = r$ 对称.

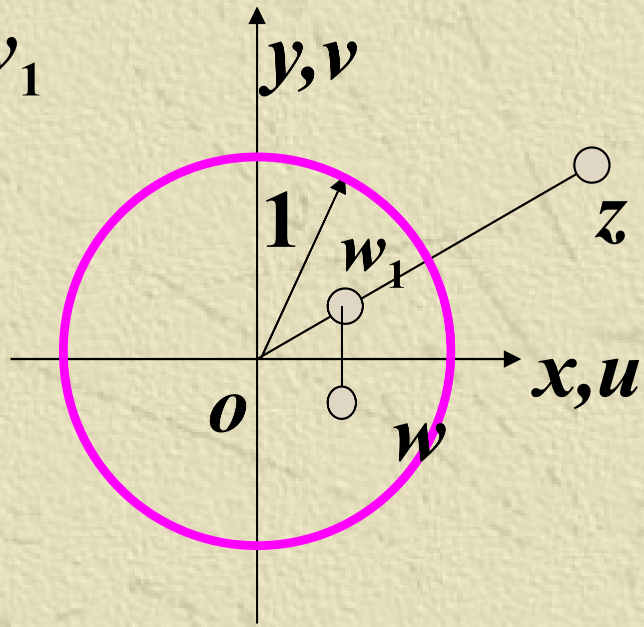
规定无穷远点的对称点为圆心 o

如何由 p 找到关于圆周 $|z| = r$ 的对称点 p' 呢？

设 p 在圆外，从 p 作圆周的切线 pT，连接 op，由 T 作 op 的垂线 Tp'，与 op 交于 p'，那么 p 与 p' 即互为对称点 .



(iii) $w=\dfrac{1}{z}$ 令 $w_1=\dfrac{1}{z}, \quad w=\overline{w_1}$



设 $z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\bar{z}=re^{-i\theta}=r(\cos\theta-i\sin\theta)$

$$w_1=\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{r}e^{i\theta}\Rightarrow w=\overline{w_1}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

$w=\dfrac{1}{z}$的几何作图

$\because |z||w_1|=r\cdot\dfrac{1}{r}=1$, z与w_1在同一射线上;

$\therefore z, w_1$关于$|z|=1$对称.

1)作出点z关于圆周$|z|=1$的对称点w_1.

2)作出点w_1关于实轴对称的点即得w(见图).

2. 分式线性映射的性质

先讨论以上三种特殊映射的性质,从而得出一般分式线性映射的性质.

(1)保角性

对于(iii)$w=\frac{1}{z}$的情况

$\because |z|<1 \Rightarrow |w|>1 \quad |z|>1 \Rightarrow |w|<1 \quad |z|=1 \Rightarrow |w|=1;$

若$\arg z=\theta, \Rightarrow \arg w=-\theta$

因此映射 $w=\frac{1}{z}$ 通常称为反演变换

$z=0 \xrightarrow{w=f(z)} w=\infty; z=\infty \xrightarrow{w=f(z)} w=0$(见第一章§2)

又 $\because w' = \dfrac{-1}{z^2} \quad (z \neq 0)$

$\therefore$ 适当规定∞处夹角的定义后,映射$w = \dfrac{1}{z}$

在扩充复平面上处处共 形的,即为一共形映射.

(详见P195)

对$(i),(ii)$的复合映射 $w = az + b(a \neq 0)$

$\because w' = (az+b)' = a \neq 0 \quad \therefore$ 是共形映射.

由于分式线性映射是由 三种特殊映射复合

而成的,有以下结论 :

定理1 分式线性映射在扩充复平面上是一一对应的,且具有保角性.

(2)保圆性

$\because w = az + b$是平移,旋转,伸缩的合成映射.

$\therefore z$平面上的圆周 $C \xrightarrow{w=az+b} w$平面上的圆周 Γ

z平面上的直线 $l \xrightarrow{w=az+b} w$平面上的直线 L

若把直线看作是半径无穷大的圆周,那么 $w = az + b$在扩充复平面上把圆周映射成圆周,即具有保圆性.

对于$(iii)\, w=\dfrac{1}{z}$,

$$z=0 \xrightarrow{w=1/z} \infty,\ z=\infty \xrightarrow{w=1/z} 0$$

令$z=x+iy \qquad w=\dfrac{1}{z}=u+iv$,

将$z=x+iy$代入$w=\dfrac{1}{z}$得

$$u=\frac{x}{x^2+y^2} \qquad v=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

或 $x=\dfrac{u}{u^2+v^2} \qquad y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}$

$$\therefore C: a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$$

$$\xrightarrow{w=\frac{1}{z}} \Gamma: d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$$

$a,d\neq 0$　　圆周 $C\rightarrow$ 圆周 Γ

$a\neq 0, d=0$　　圆周 $C\rightarrow$ 直线 Γ

$a=0, d\neq 0$　　直线 $C\rightarrow$ 圆周 Γ

$a=0, d=0$　　直线 $C\rightarrow$ 直线 Γ

把直线看成是半径为 ∞ 的圆，那么反演变换就具有保圆性．

定理2 分式线性映射将扩充z平面上圆周映射成扩充w平面上的圆周，即具有保圆性。

(3)保对称性

定理3 设点z_1, z_2是关于z平面上圆周C的一对对称点$\Rightarrow$在分式线性映射下，它们的象点w_1与w_2是关于象圆Γ的一对对称点。

在分式线性映射下，圆周或直线上没有点趋于无穷点，则它映射成半径为有限的圆周；若有一点映射成无穷远点，它映射成直线。

作业

- P245 1,7,8(1)(5)

第三节　唯一确定分式线性映射的条件

一、分式线性映射的确定

二、分式线性映射对圆域的映射

三、典型例题

一、分式线性映射的确定

分式线性映射 $w = \dfrac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc \neq 0)$

含有三个独立的常数,

只需给定三个条件就能决定一个分式线性映射.

定理 在 z 平面上任意给定三个相异的点 z_1, z_2, z_3, 在 w 平面上也任意给定三个相异的点 w_1, w_2, w_3, 那末就存在唯一的分式线性映射, 将 $z_k\ (k=1,2,3)$ 依次映射成 $w_k\ (k=1,2,3)$.

证　设 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ 将相异点

$z_k(k=1,2,3)$ 依次映射成 $w_k=\dfrac{az_k+b}{cz_k+d}$ $(k=1,2,3)$

所以 $w-w_k=\dfrac{(z-z_k)(ad-bc)}{(cz+d)(cz_k+d)},\quad (k=1,2)$

$$w_3-w_k=\frac{(z_3-z_k)(ad-bc)}{(cz_3+d)(cz_k+d)},\quad (k=1,2)$$

由此得 $\dfrac{w-w_1}{w-w_2}:\dfrac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\dfrac{z-z_1}{z-z_2}:\dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$

唯一性:

如果另一映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}\ (ad-bc\neq 0)$ 也将

$z_k\ (k=1,2,3)$ 依次映射成 $w_k=\dfrac{az_k+b}{cz_k+d}\ (k=1,2,3)$

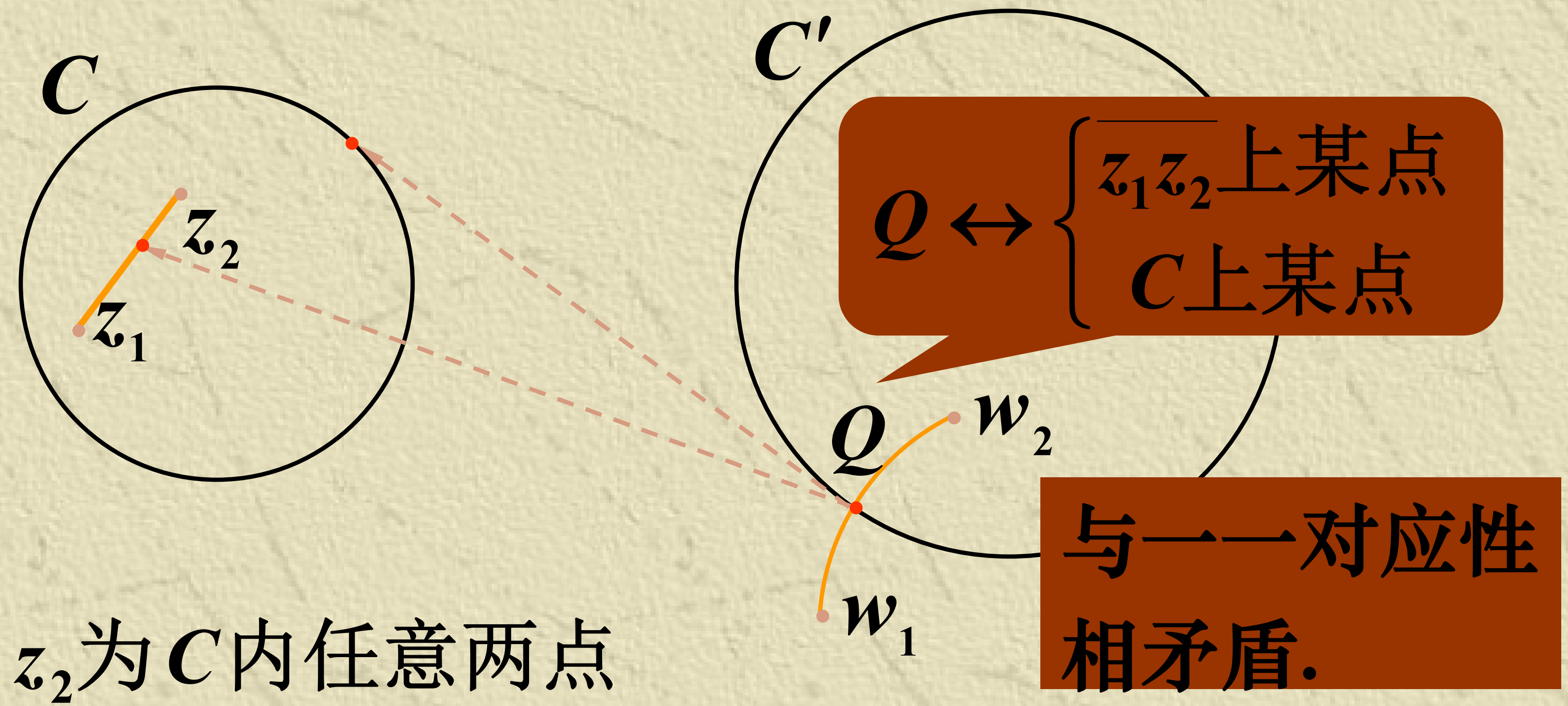
重复上述步骤, 仍得到相同形式的结果.

所以三对对应点可唯一确定一个分式线性映射.

[证毕]

二、分式线性映射对圆域的映射

1. 问题：圆域内部被映射成什么区域？



z_1, z_2为C内任意两点

假设：$\overline{z_1 z_2} \to$ 圆弧 $w_1 w_2$，且w_1在C'外部，w_2在C'内部.

结论: 在分式线性映射下, C的内部不是映射成 C' 的内部便映射成 C' 的外部.

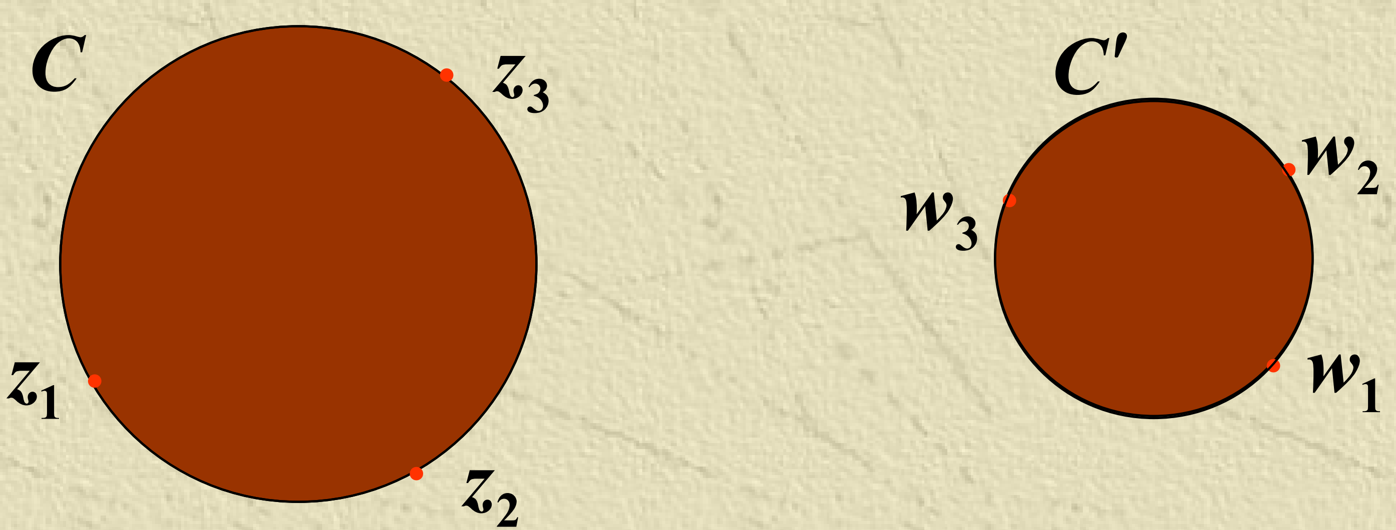
判别方法:

方法1 在分式线性映射下, 如果在圆周C内任取一点 z_0,若 z_0的象在 C' 内部, 则 C的内部就映为 C' 的内部; 若 z_0的象在 C' 外部, 则 C的内部就映为 C' 的外部.

方法2　在 C上取三点 z_1, z_2, z_3 ,若绕向:

$z_1 \to z_2 \to z_3$,与 C' 上绕向 $w_1 \to w_2 \to w_3$ 相同.

则 C的内部就映为 C' 的内部.

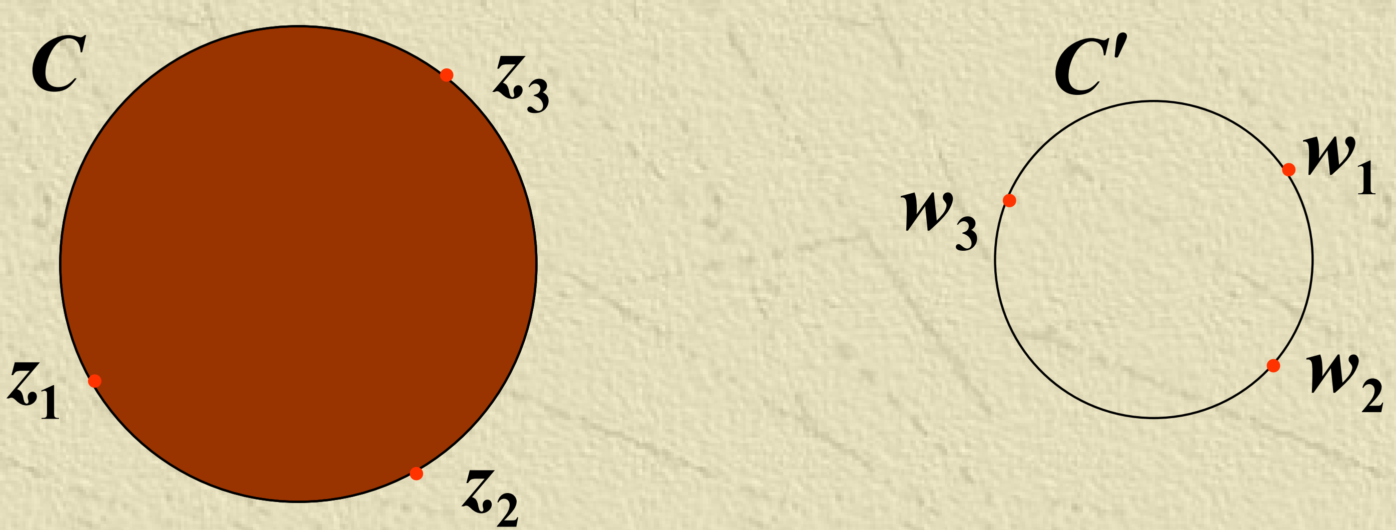


方法2 在 C 上取三点 z_1, z_2, z_3 ,若绕向:

$z_1 \to z_2 \to z_3$,与 C' 上绕向 $w_1 \to w_2 \to w_3$ 相同.

则 C 的内部就映为 C' 的内部. **若绕向相反, 则 C**

的内部就映射为 C' 的外部.

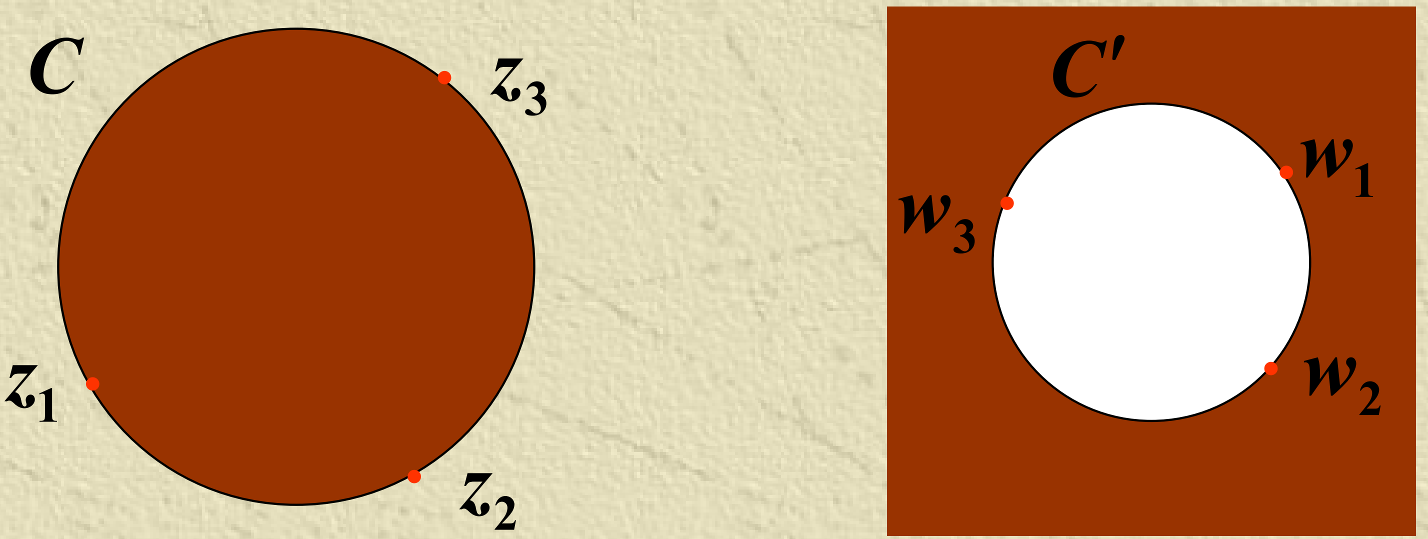


方法2　在 C 上取三点 z_1, z_2, z_3 ,若绕向：

$z_1 \to z_2 \to z_3$,与 C' 上绕向 $w_1 \to w_2 \to w_3$ 相同.

则 C 的内部就映为 C' 的内部. **若绕向相反, 则 C**

的内部就映射为 C' 的外部.



2.分式线性映射对圆弧边界区域的映射:

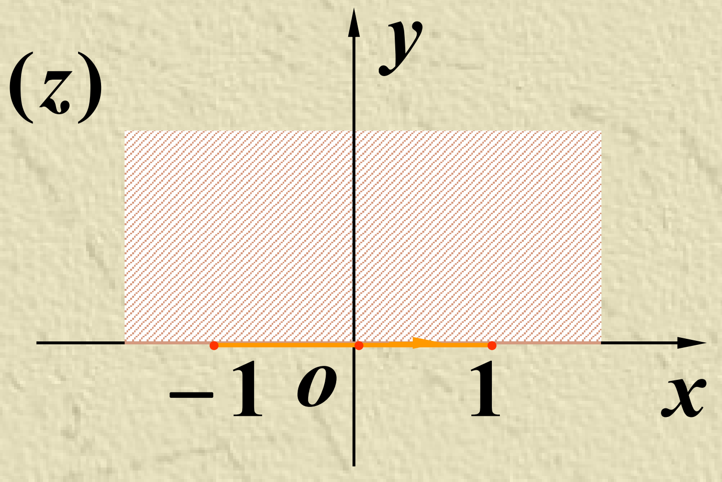
1) 当二圆周上没有点映射成无穷远点时, 这二圆周的弧所围成的区域映射成二圆弧所围成的区域.

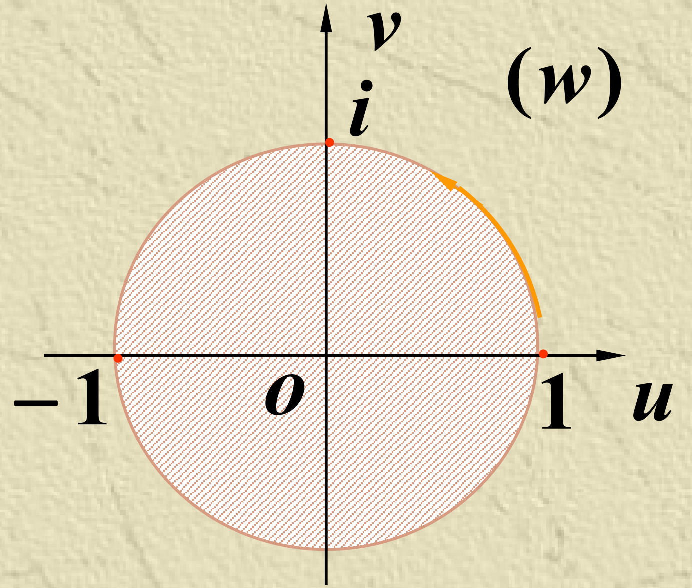
2) 当二圆周上有一点映射成无穷远点时, 这二圆周的弧所围成的区域映射成一圆弧与一直线所围成的区域.

3) 当二圆交点中的一个映射成无穷远点时, 这二圆周的弧所围成的区域映成角形区域.

三、典型例题

例1 求将上半平面 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 映射成单位圆 $|w| < 1$ 的分式线性映射.





解 在 x 轴上任取三点 $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1$ 使之依次对应于 $|w| = 1$ 上的三点 $w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1$

由于 $z_1 \to z_2 \to z_3$ 与 $w_1 \to w_2 \to w_3$ 绕向相同,

所求分式线性映射为 $\dfrac{w-1}{w-i}:\dfrac{-1-1}{-1-i}=\dfrac{z+1}{z-0}:\dfrac{1+1}{1-0}$,

化简得: $w=\dfrac{z-i}{iz-1}$.

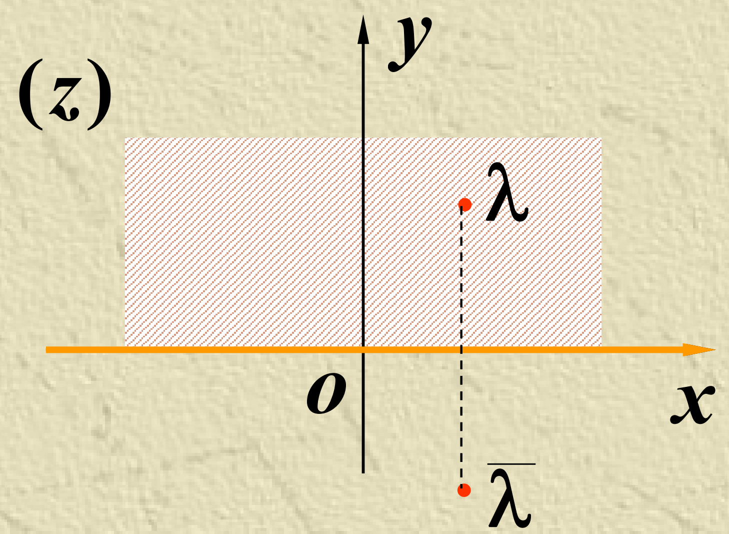
注意: 本题中如果选取其他三对不同点, 也能得出满足要求但不同于本题结果的分式线性映射.

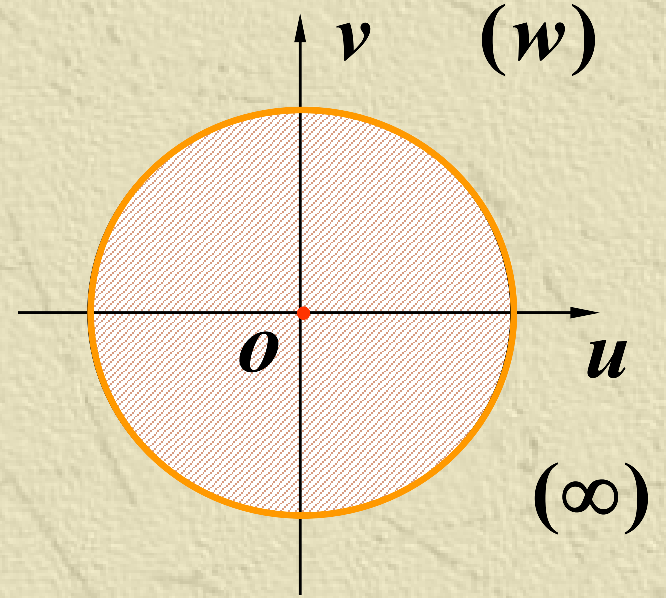
可见, 把上半平面映射成单位圆的分式线性映射不唯一, 有无穷多个.

另解：设实轴映射成单位圆周，

上半平面某点 $z=\lambda$ 映射成圆心 $w=0$

那么 $z=\bar{\lambda}$ 必映射成 $w=\infty$





则所求映射具有下列形式：$w=k\left(\dfrac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right)$ k 为常数.

由于z为实数时，$|w| = 1$, $\left|\dfrac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right| = 1$,

所以$|w| = |k|\left|\dfrac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right| = |k| = 1$, 即$k = e^{i\theta}$ (θ为任意实数).

$$\boxed{w = e^{i\theta}\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right), \quad (\mathrm{Im}(\lambda) > 0)}$$

上半平面映为单位圆的分式线性映射的一般形式

说明: 取 $\lambda = i, \theta = -\dfrac{\pi}{2}$, 得 $w = \dfrac{z-i}{iz-1}$.

若取 $\lambda = i, \theta = 0$, 得 $w = \dfrac{z-i}{z+i}$.

例2　求将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成单位圆 $|w|<1$, 且满足条件 $w(2i)=0$, $\arg w'(2i)=0$ 的分式线性映射.

解　由条件 $w(2i)=0$ 知:

$z=2i$ 映射成 $w=0$.

依上题结论得　$w=e^{i\theta}\left(\dfrac{z-2i}{z+2i}\right)$,

因为 $w'(z)=e^{i\theta}\dfrac{4i}{(z+2i)^2}$,

所以 $w'(2i)=e^{i\theta}(-\dfrac{i}{4})$.

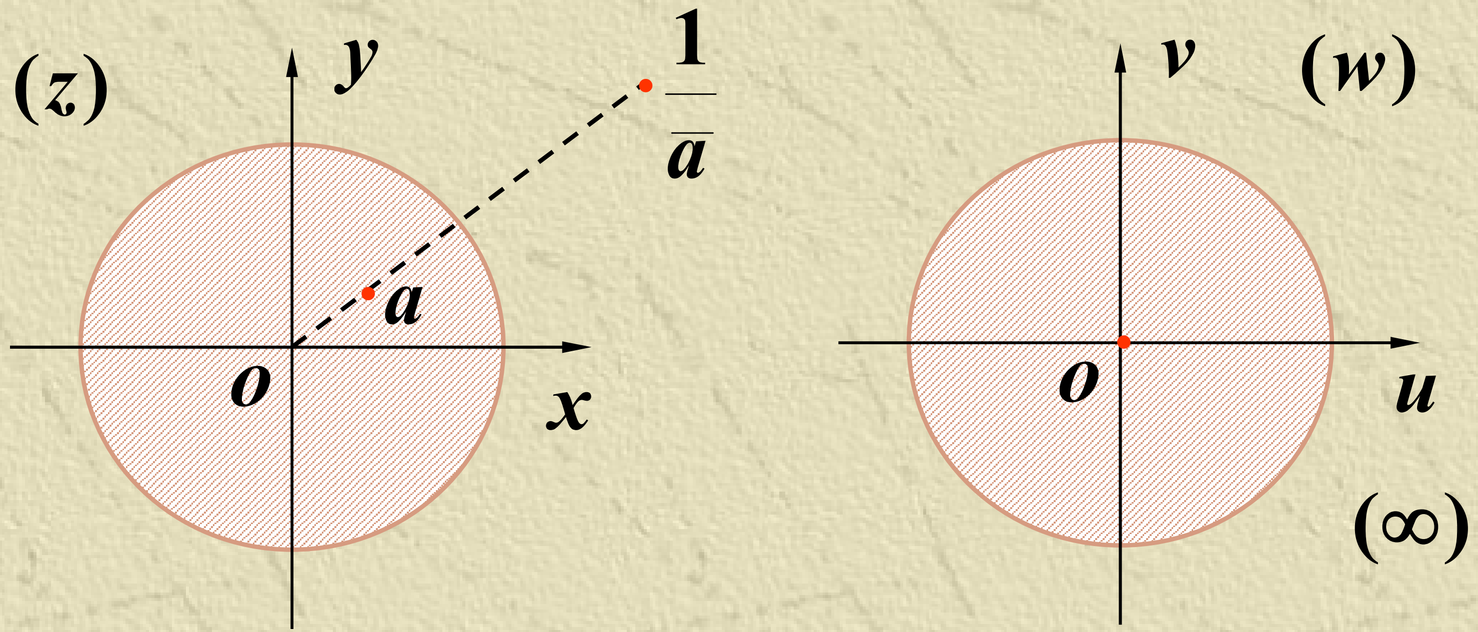
$$\arg w'(2i)=\arg e^{i\theta}+\arg(-\frac{i}{4})$$

$$=\theta+(-\frac{\pi}{2})=0,$$

所以 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

从而所求映射为 $w=i(\dfrac{z-2i}{z+2i})$.

例3 求将单位圆 $|z|<1$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射.



解 设 $z=a\rightarrow w=0$, 则 $z=\dfrac{1}{\bar{a}}\rightarrow w=\infty.$

因此可设所求分式线性映射为:

$$w = k\frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}} = k\bar{a}\frac{z-a}{\bar{a}z-1}$$

$$= k'\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad (k' = -k\bar{a})$$

因为 $|z| = 1 \leftrightarrow |w| = 1,\quad |w| = |k'|\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|,$

所以 $|w| = |k'|\left|\frac{1-a}{1-\bar{a}}\right| = 1.$

又因为 $|1-a| = |1-\overline{a}|$,

所以 $|k'| = 1$, 即 $k' = e^{i\theta}$.

故所求分式线性映射为:

$$w = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \quad (\theta\text{为任意实数})$$

将上半平面映为单位圆的常用映射

例4 求将单位圆映射为单位圆且满足条件 $w\left(\frac{1}{2}\right)=0,$

$w'\left(\frac{1}{2}\right)>0$的分式线性映射.

解 由条件 $w(\frac{1}{2})=0$ 知:

$z=\frac{1}{2}$映射成 $w=0.$

依上题结论得 $w=e^{i\theta}\frac{2z-1}{2-z}.$

由此得 $w'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{i\theta}\frac{4}{3}$,

故 $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right)=\theta.$

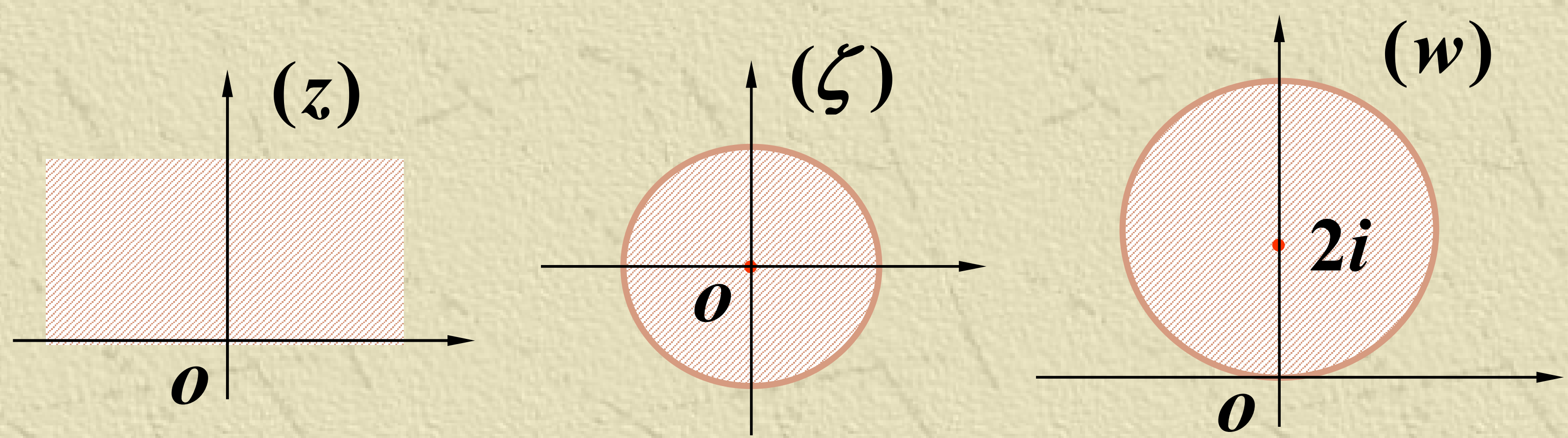
因为 $w'\left(\frac{1}{2}\right)>0$, 则 $w'\left(\frac{1}{2}\right)$为正实数，得 $\theta=0.$

所以所求映射为 $w=\dfrac{2z-1}{2-z}.$

例5 求将 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成 $|w-2i|<2$ 且满足条件

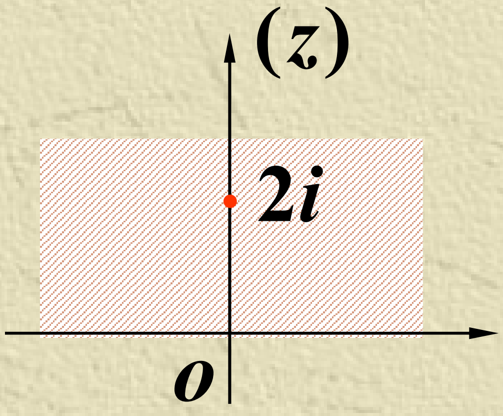
$$w(2i)=2i,\arg w'(2i)=-\frac{\pi}{2}$$ 的分式线性映射．

分析 为将 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成 $|w-2i|<2$ 可考虑：

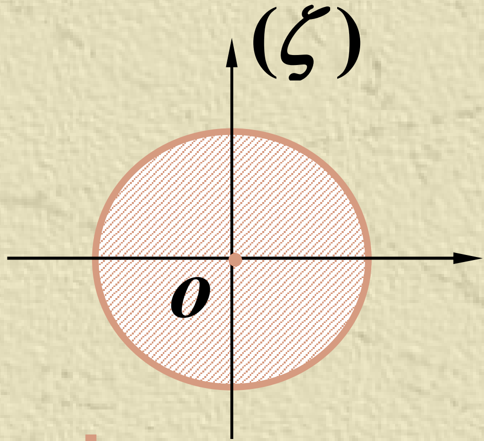


上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ → 单位圆域 $|z|<1$ → 单位圆域 $|z-2i|<2$

解　如图示



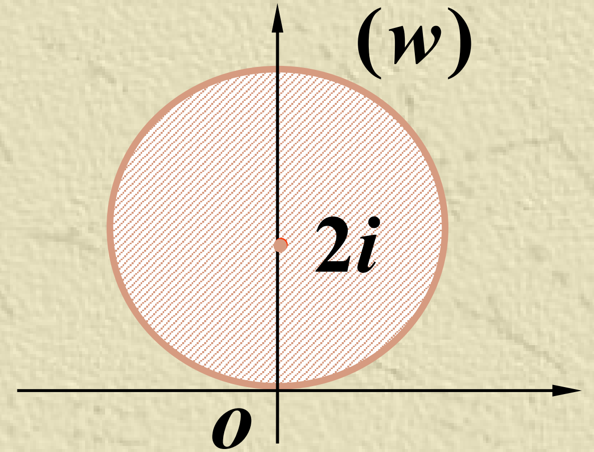
$$\zeta = \frac{z-2i}{z+2i}$$



平移

伸长

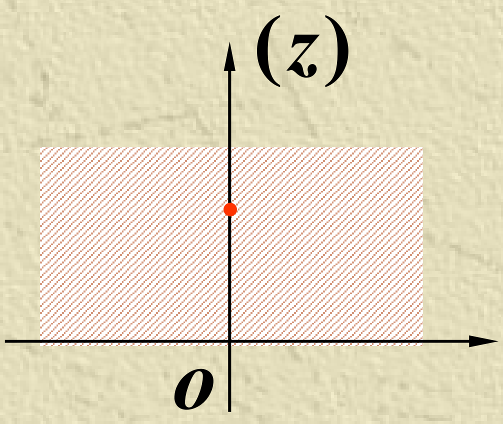
$$w = 2(i+\zeta)$$



则所求映射为:

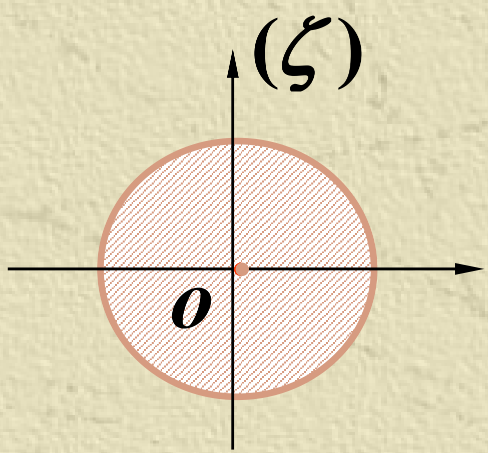
$$w = 2(1+i)\frac{z-2}{z+2i}$$

另解　如图示:

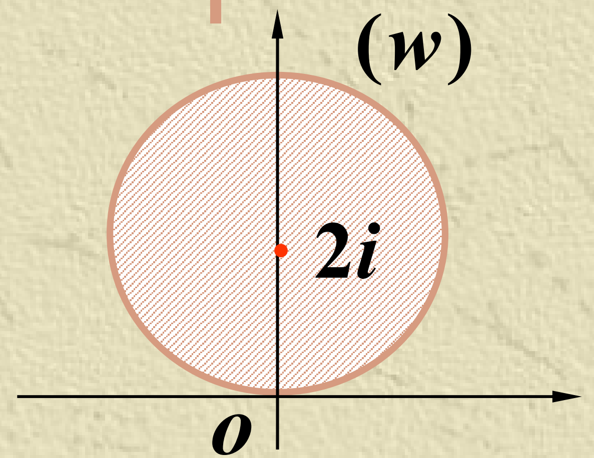


$$\zeta = e^{i\theta}\frac{z-2i}{z+2i}$$

$$\zeta(2i)=0$$



$$\zeta = \frac{w-2i}{2}$$



所以 $\dfrac{w-2i}{2} = e^{i\theta}\dfrac{z-2i}{z+2i}$

由此得 $w'(2i) = 2e^{i\theta}\dfrac{1}{4i}$.

$$\arg w'(2i) = \theta - \frac{\pi}{2},$$

由于已知 $w'(2i) = -\frac{\pi}{2},$

从而得 $\theta = 0.$

于是所求的映射为 $\frac{w-2i}{2} = \frac{z-2i}{z+2i},$

或 $w = 2(1+i)\frac{z-2}{z+2i}$.

小结与思考

分式线性映射是共形映射的一个重要内容，应熟练掌握并会应用分式线性映射的各种性质寻找一些简单而典型的区域之间的共形映射；掌握上半平面到上半平面, 上半平面到单位圆, 单位圆到单位圆的分式线性映射.

第四节　　几个初等函数形成的映射

1　幂函数与根式函数

2　指数函数与对数函数

3　由圆弧构成的两角形区域的共形映射

一、幂函数与根式函数

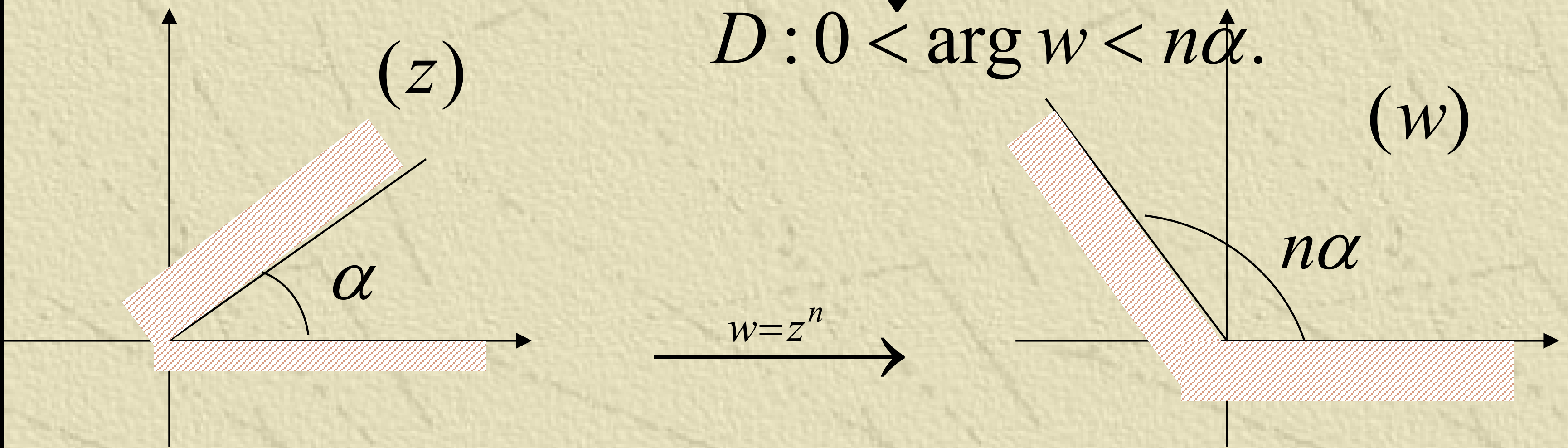
1 幂函数 $w = z^n \quad (n > 1\text{的自然数})$

$w = z^n$除$z = 0, \infty$外处处具有不为零的导数;

其单叶区域是： $d: 0 < \arg z < \alpha, 0 < \alpha \leq \dfrac{2\pi}{n}$;

$$\Big\downarrow w = z^n$$

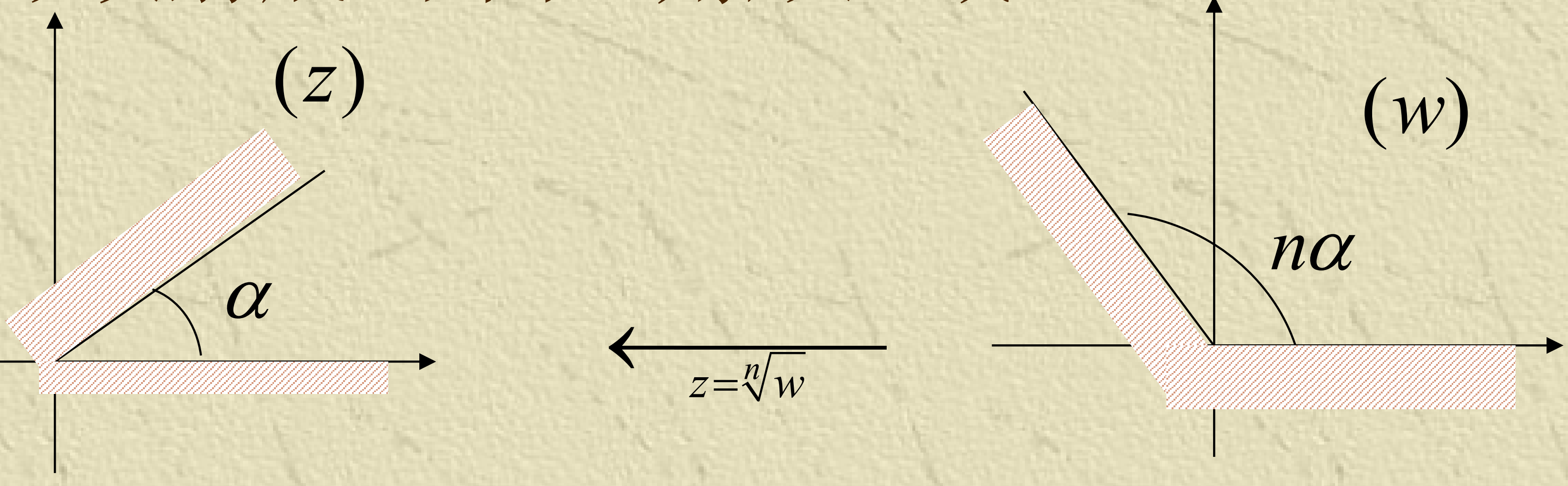
$$D: 0 < \arg w < n\alpha.$$



即$w = z^n$将角形区域d共形映射成角形区域D.

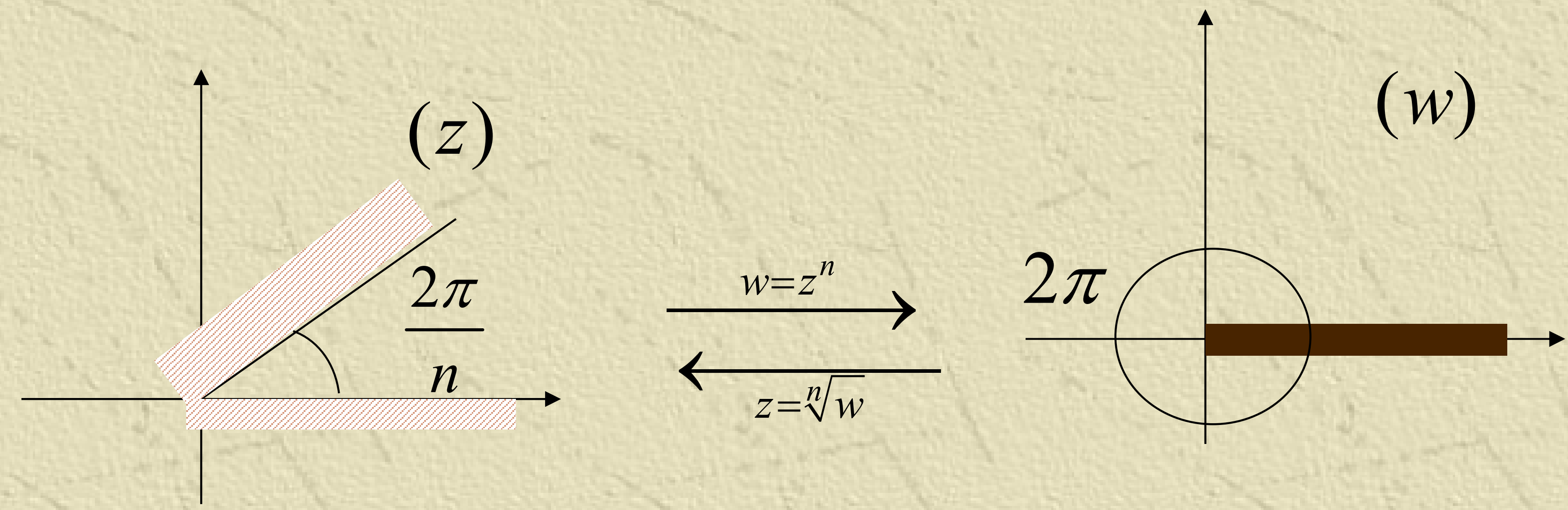
2 根式函数 $z=\sqrt[n]{w}$

$w=z^n$的逆变换$z=\sqrt[n]{w}$, 将w平面上角形区域d共形映射成z平面上角形区域D.



注 **需要对角形区域拉大或缩小时,可用幂函数或根式函数所构成的共形映射实现.**

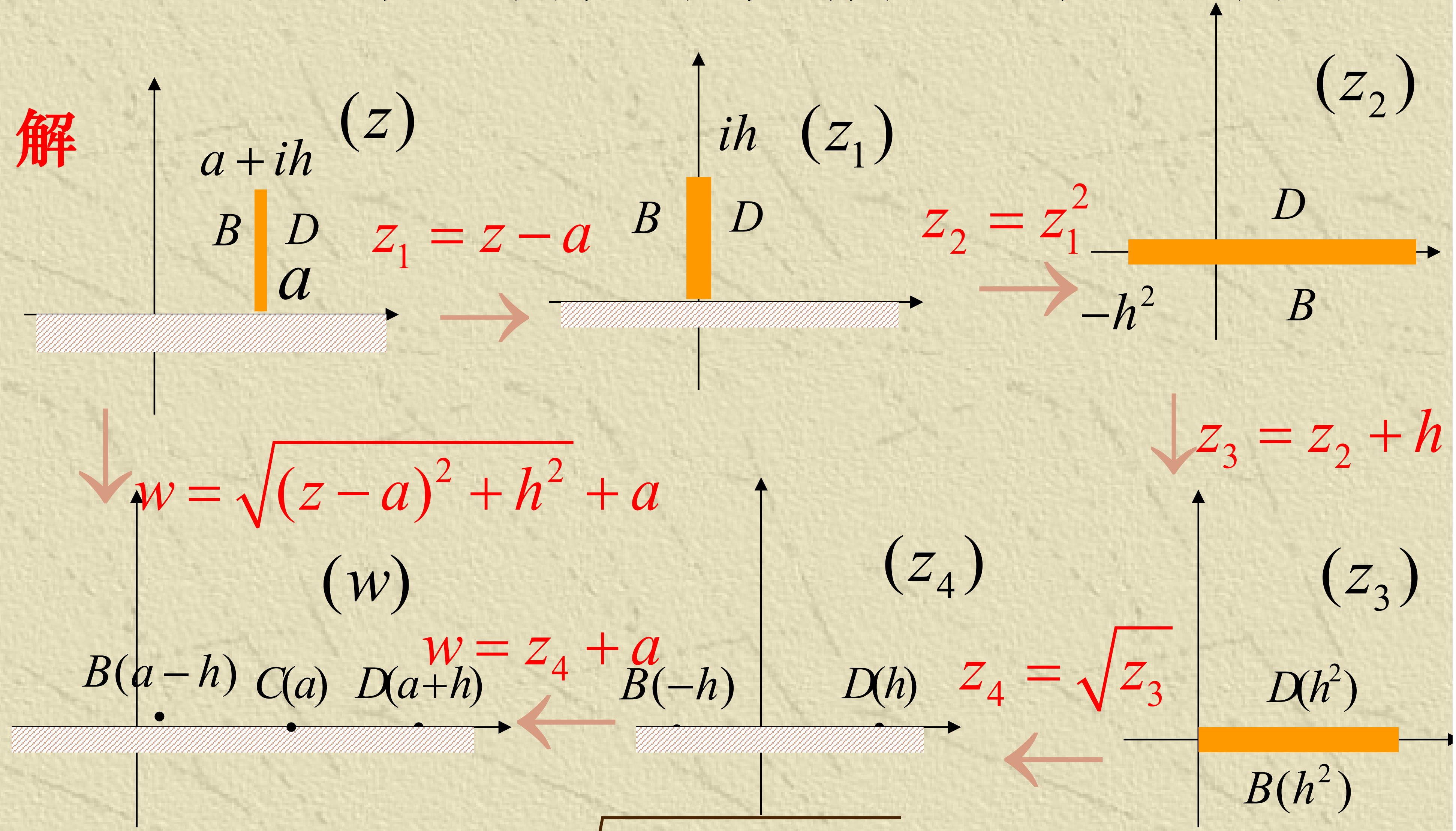
注 $w = z^n$将角形区域$d: 0 < \arg z < \dfrac{2\pi}{n}$, 共形映射成角形区域$D: 0 < \arg w < 2\pi$;



即w平面上除去原点及正实轴的区域.

例1 求一变换，把具有割痕"$\mathrm{Re}\, z = a, 0 \le \mathrm{Im}\, z \le h$"的上半平面共形映射成上半$w$平面.

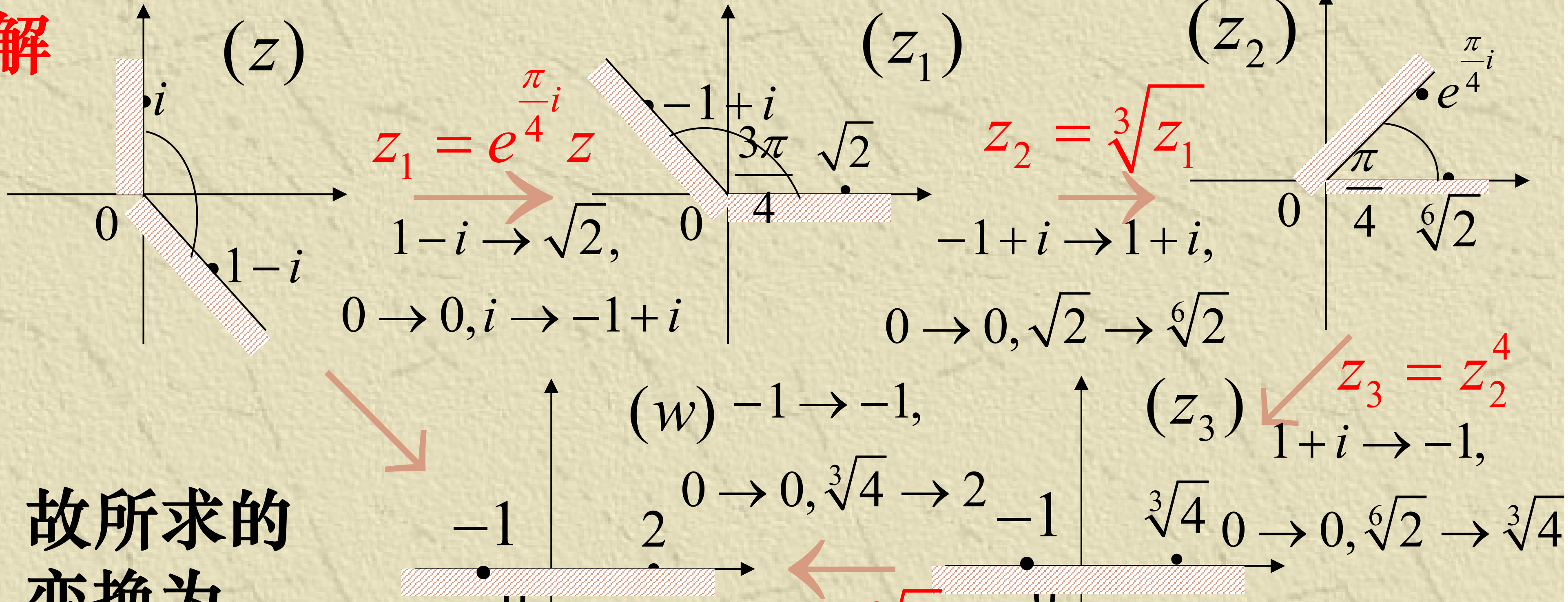
解



故所求的变换为: $w = \sqrt{(z-a)^2 + h^2} + a.$

例2 将区域 $-\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{2}$ 共形变换成上半平面，使 $z = 1-i, i, 0$ 分别变成 $w = 2, -1, 0$.

解



$z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i} z$：$1-i \to \sqrt{2},\ 0 \to 0,\ i \to -1+i$

$z_2 = \sqrt[3]{z_1}$：$-1+i \to 1+i,\ 0 \to 0,\ \sqrt{2} \to \sqrt[6]{2}$

$z_3 = z_2^4$：$1+i \to -1,\ 0 \to 0,\ \sqrt[6]{2} \to \sqrt[3]{4}$

$-1 \to -1,\ 0 \to 0,\ \sqrt[3]{4} \to 2$

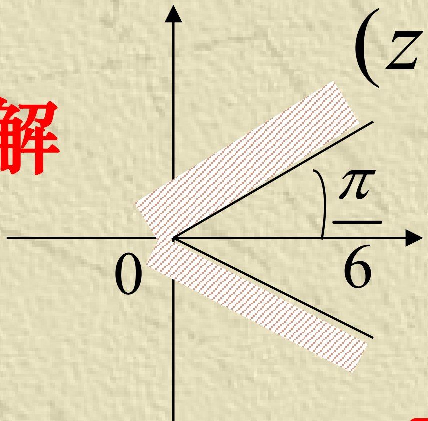
$$w = \frac{2(\sqrt[3]{4}+1)z_4}{(\sqrt[3]{4}-2)z_4 + \sqrt[3]{4}}$$

故所求的变换为

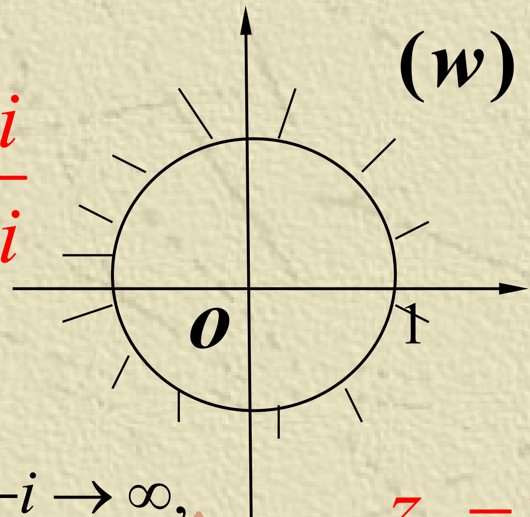
$$w = \frac{2(\sqrt[3]{4}+1)\left(e^{\frac{\pi}{4}i} z\right)^{\frac{4}{3}}}{(\sqrt[3]{4}-2)\left(e^{\frac{\pi}{4}i} z\right)^{\frac{4}{3}} + \sqrt[3]{4}}$$

例3 求一个把角形 $-\frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{\pi}{6}$ 变成单位圆 $|w|<1$ 的共形映射.

解



$$w=\frac{z^3-i}{z^3+i}$$

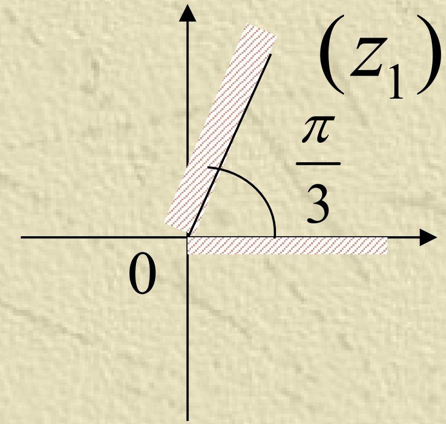


$$z_1=e^{\frac{\pi}{6}i}z$$

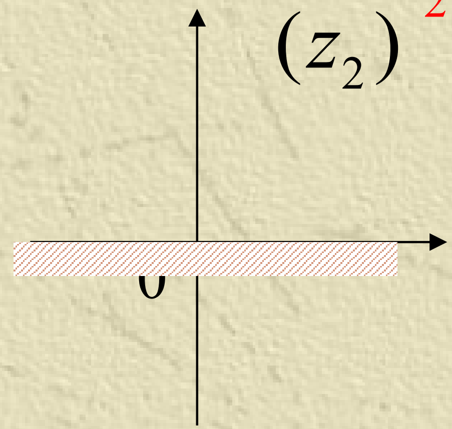
$i\to 0, -i\to\infty,$

$\beta=0$

$$w=\frac{z_2-i}{z_2+i}$$



$$z_2=z_1^3$$



故所求的变换为

$$w=\frac{z^3-1}{z^3+1}$$

(**注:**不唯一)

二、指数函数与对数函数

1 指数函数 $w = e^z$

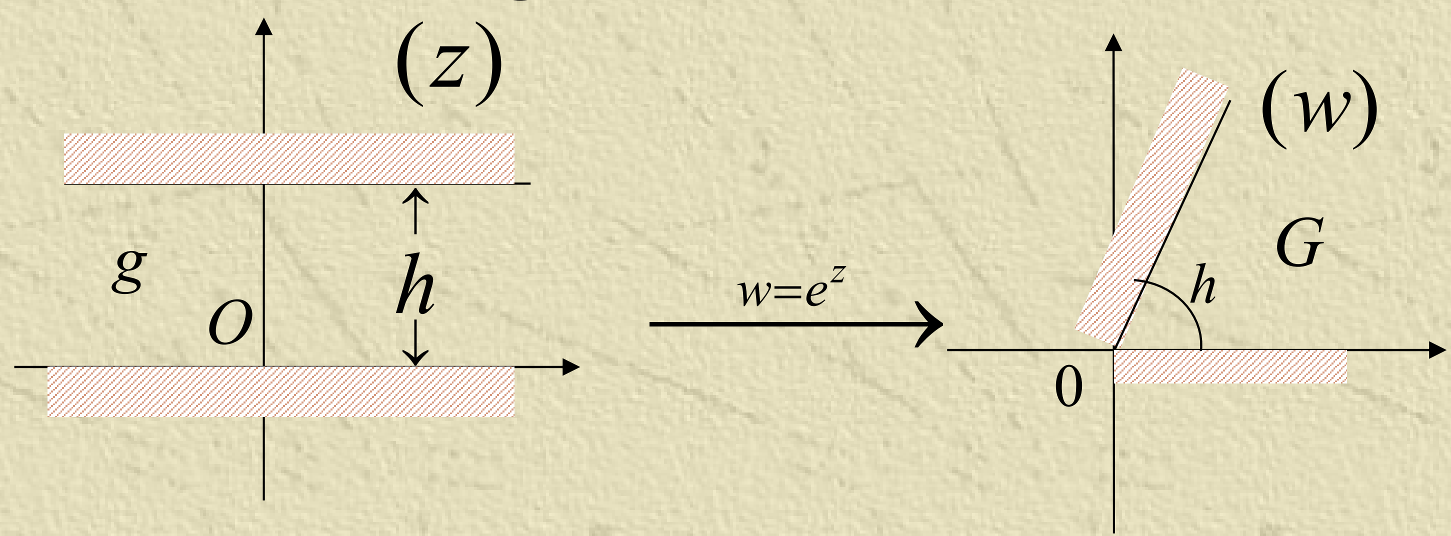
在z平面$(e^z)' \neq 0$是保角的;

其单叶区域是: 平行于实轴宽度不超过2π的带形区域;

$$g: 0 < \operatorname{Im} z < h, 0 < h \leq 2\pi; \xrightarrow[w=e^z]{} G: 0 < \arg w < h.$$

角形区域:

即$w = e^z$将g共形映成G.

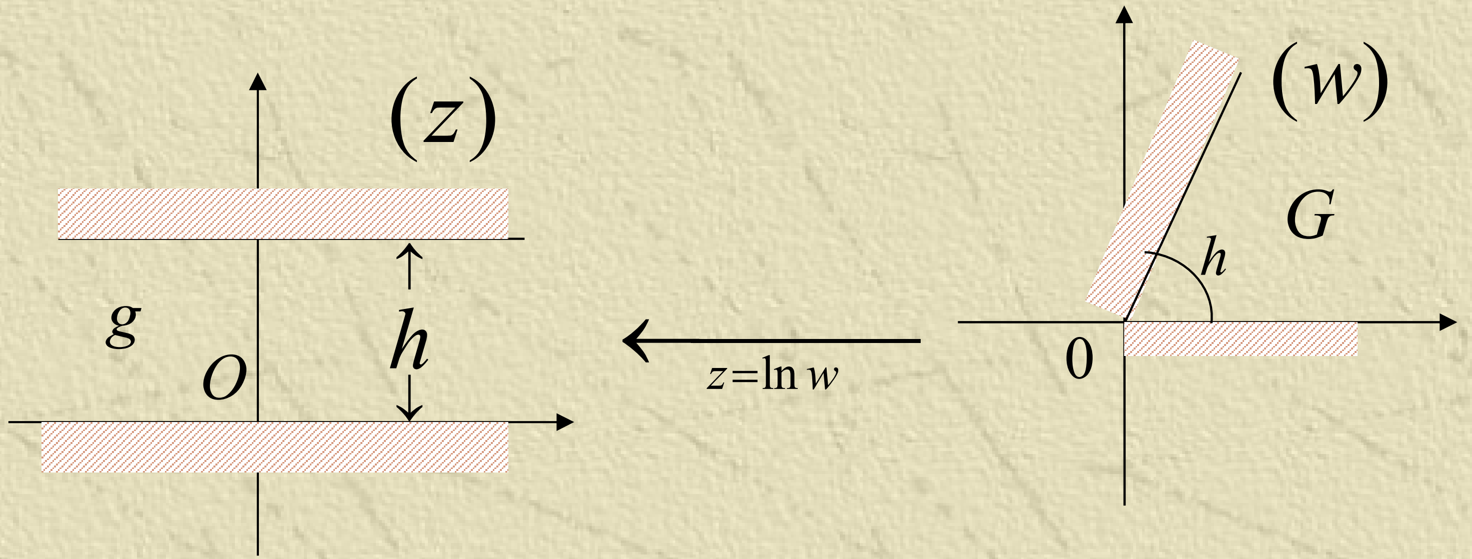


2 对数函数 $z=\ln w$

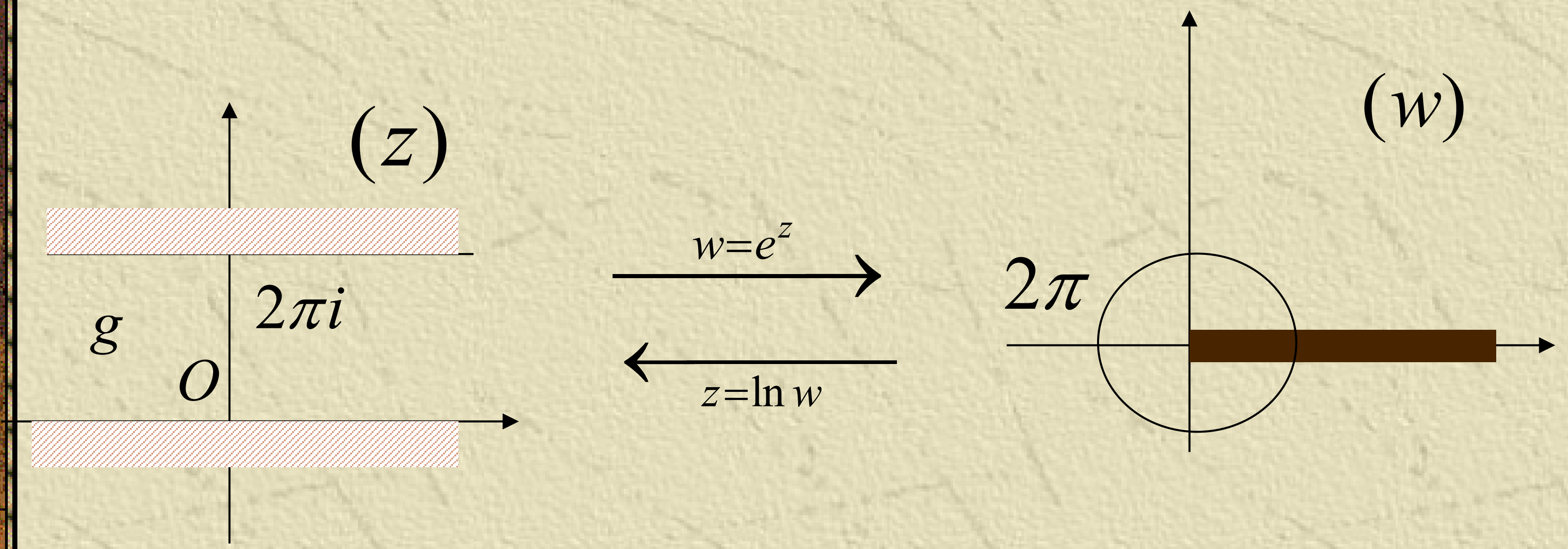
为$w=e^z$的逆变换, $z=\ln w$将w平面上角形区域

$G:0<\arg w<h$, 共形映射成z平面上带形区域

$g:0<\operatorname{Im} z<h, 0<h\le 2\pi$;



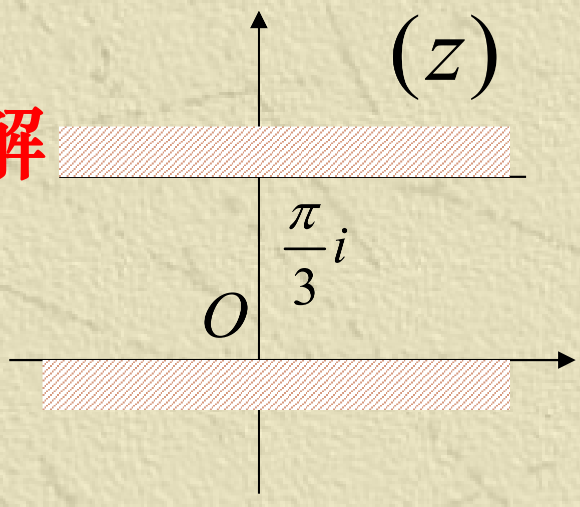
注 $w = e^z$将带形区域$g: 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$, 共形映射成角形区域$D: 0 < \arg w < 2\pi$;



即w平面上除去原点及正实轴的区域.

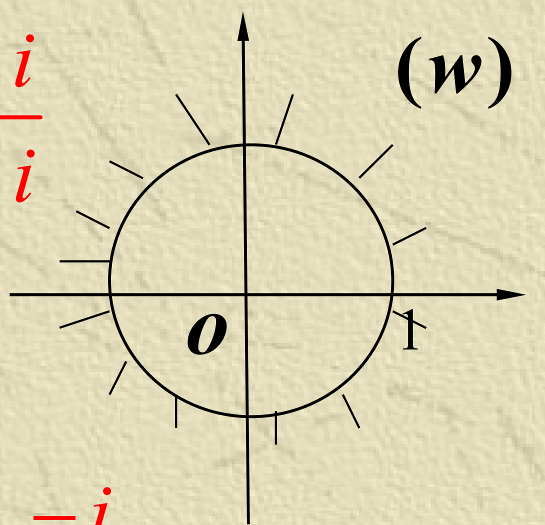
例4 求一变换将带形 $0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{3}$ 共形映射成单位圆 $|w| < 1$.

解

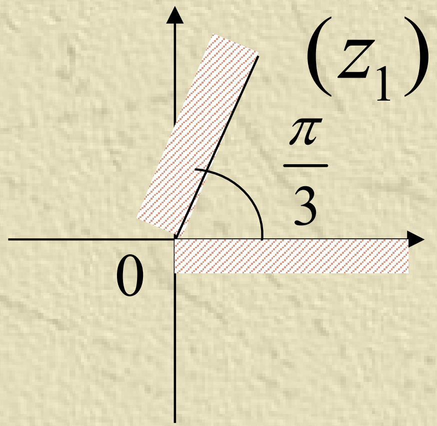


$$w = \frac{e^{3z} - i}{e^{3z} + i}$$

$\rightarrow$

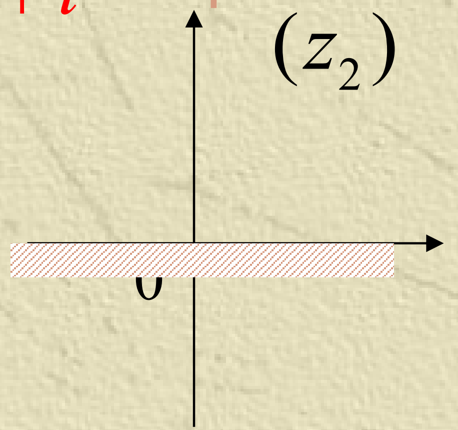


$z_1 = e^z$ $\downarrow$



$\rightarrow$

$$z_2 = z_1^3$$



$$w = \frac{z_2 - i}{z_2 + i}$$

$\uparrow$

故所求的变换为

$$w = \frac{e^{3z} - i}{e^{3z} + i}.$$

三、由圆弧构成的两角形区域的共形映射

借助于分式线性变换,以及幂函数或指数函数的复合，可将圆弧(直线)所构成的角形区域共形映射成一个标准区域.

上半平面

$$\text{两圆弧(直线)所构成的角形区域} \xrightarrow[\text{共形}]{\text{分式线性变换}} \text{标准区域}$$

保圆性 ↓

同样形状

- 区域
- 弓形区域
- 角形区域

圆弧上有点 $\to \infty$, 圆弧 $\to$ 直线.

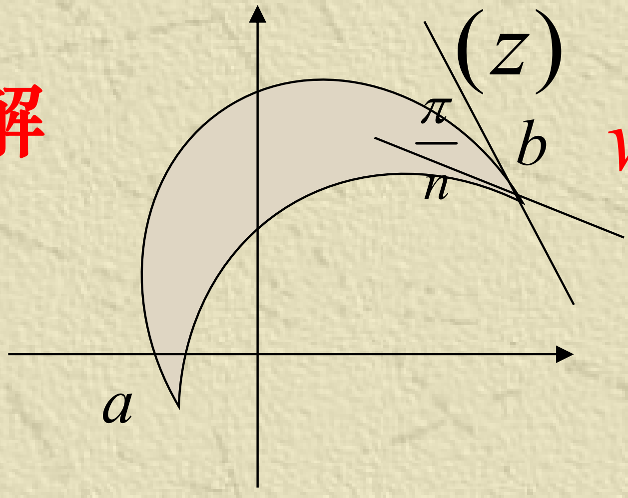
圆弧上无点 $\to \infty$, 圆弧 $\to$ 有限半径圆.

注 若两圆弧有一公共点变为 ∞ ,则此两圆弧围成的两角形区域共形变换成角形区域.

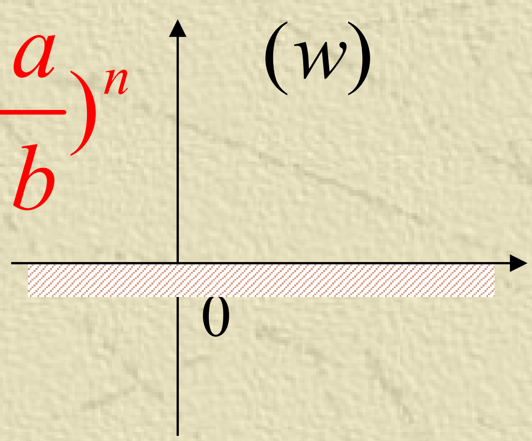
例5 考虑交角为$\dfrac{\pi}{n}$的两个圆弧所构成的区域，

将其共形映射成上半面.

解

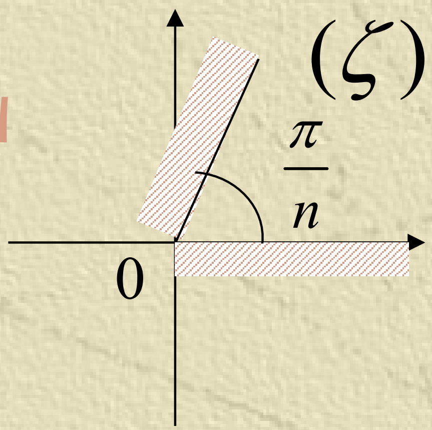


$$w=\left(k\frac{z-a}{z-b}\right)^n$$



$a\to 0$
$b\to\infty$

$$\zeta=k\frac{z-a}{z-b}$$



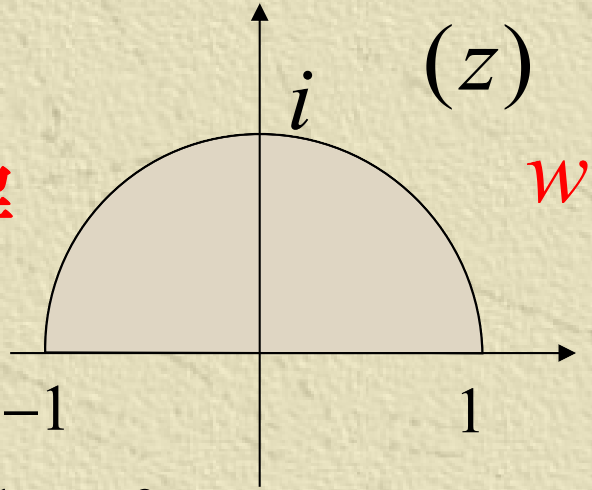
$$w=\zeta^n$$

故所求的变换为

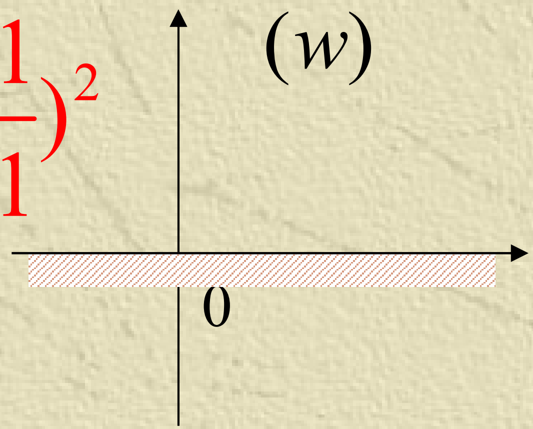
$$w=\left(k\frac{z-a}{z-b}\right)^n.$$

例6 求出一个上半单位圆到上半面的共形变换.

解



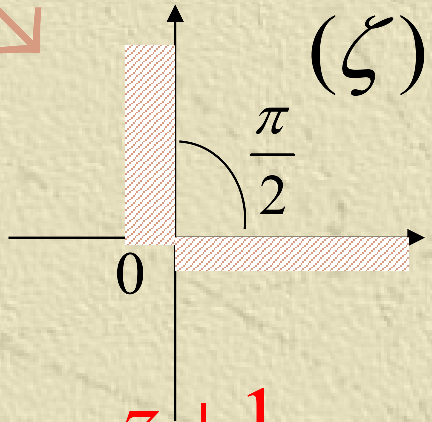
$$w=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$



$-1\to 0$

$1\to\infty$

$$\zeta=k\frac{z+1}{z-1}$$



$$w=\zeta^2$$

$[-1,1]\to$ 正实轴

则$0\to 1,$

$k=-1;$

$$\zeta=-\frac{z+1}{z-1}$$

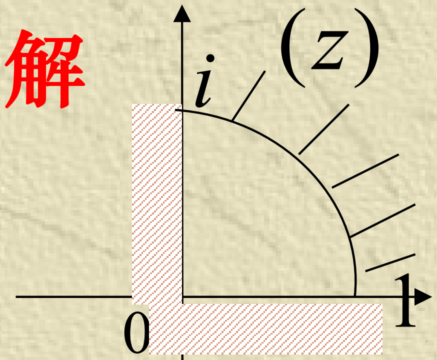
故所求的变换为

$$w=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$$

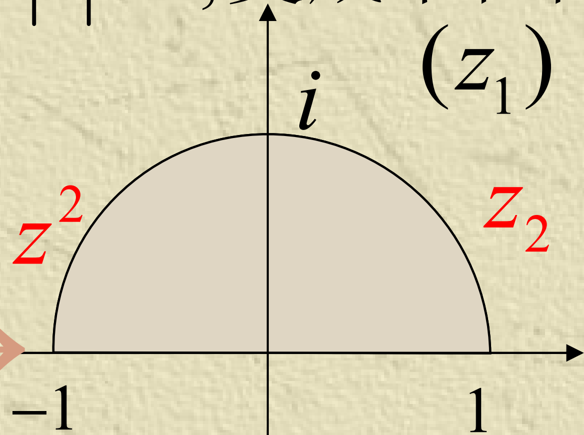
例7 求一个把第一象限内的四分之一圆：

$0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}, 0<|z|<1$;变成单位圆的共形变换.

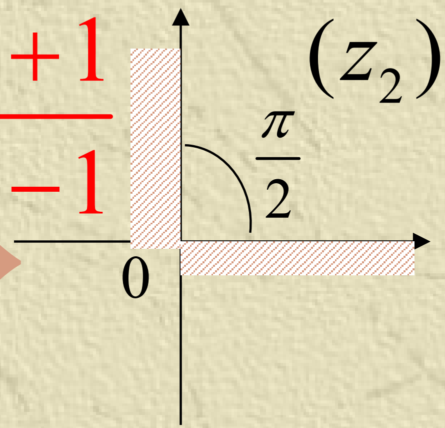
解



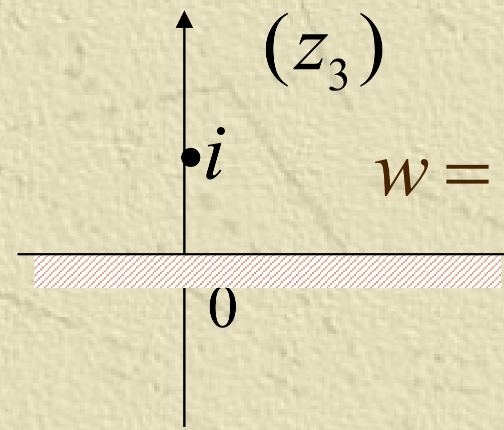
$$z_1 = z^2$$



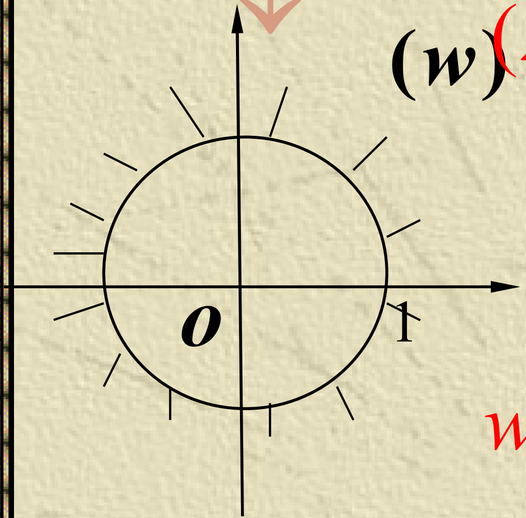
$$z_2 = -\frac{z_1+1}{z_1-1}$$



$$z_3 = z_2^2$$



$$w = \frac{z_3 - i}{z_3 + i}$$



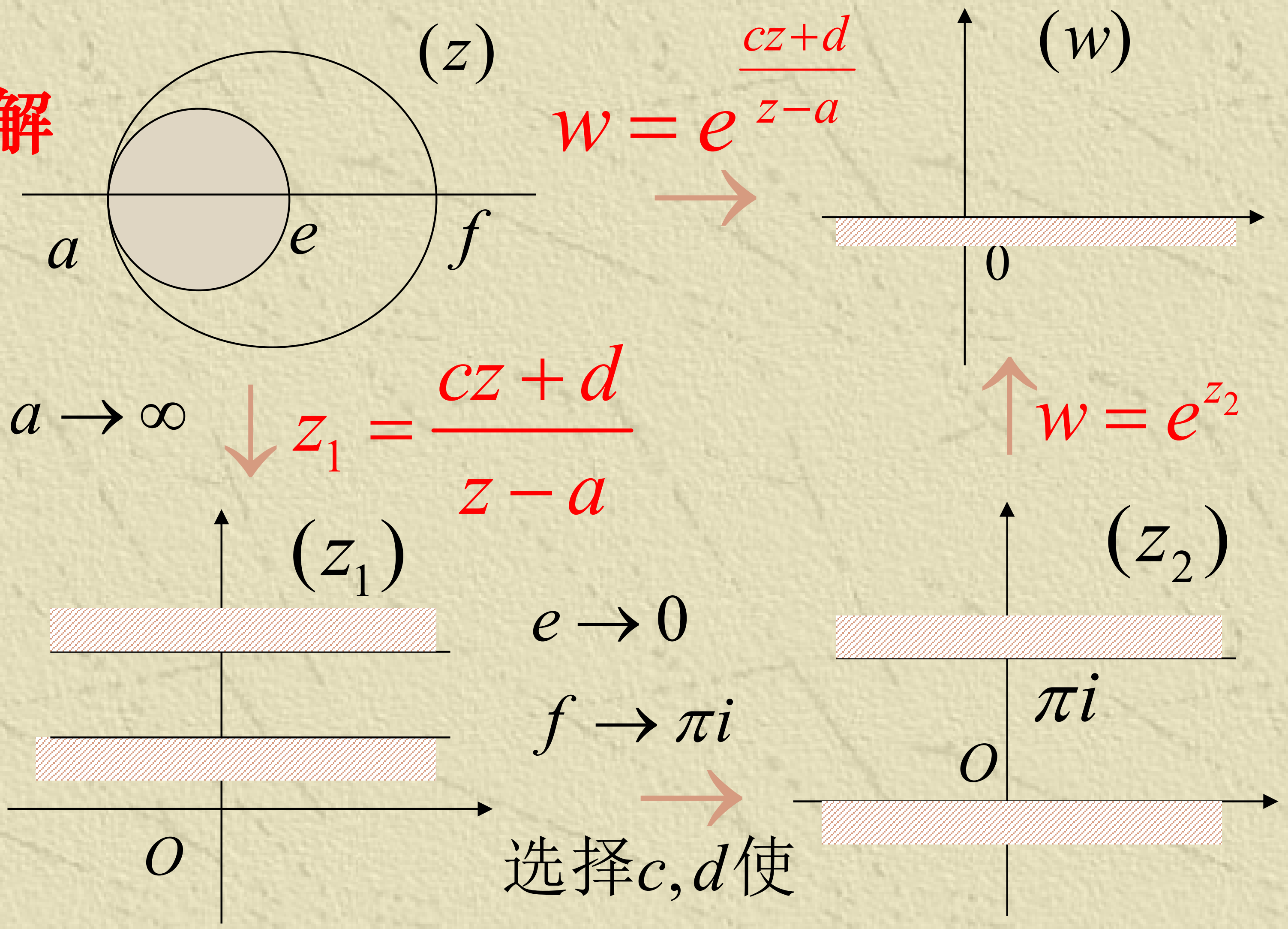
$$w = \frac{(z^2+1)^2 - i(z^2-1)^2}{(z^2+1)^2 + i(z^2-1)^2}$$

故所求的变换为

$$w = \frac{(z^2+1)^2 - i(z^2-1)^2}{(z^2+1)^2 + i(z^2-1)^2}.$$

例8 作出相切于点 a 的两个圆周所构成的月牙形区域到上半平面的共形变换.

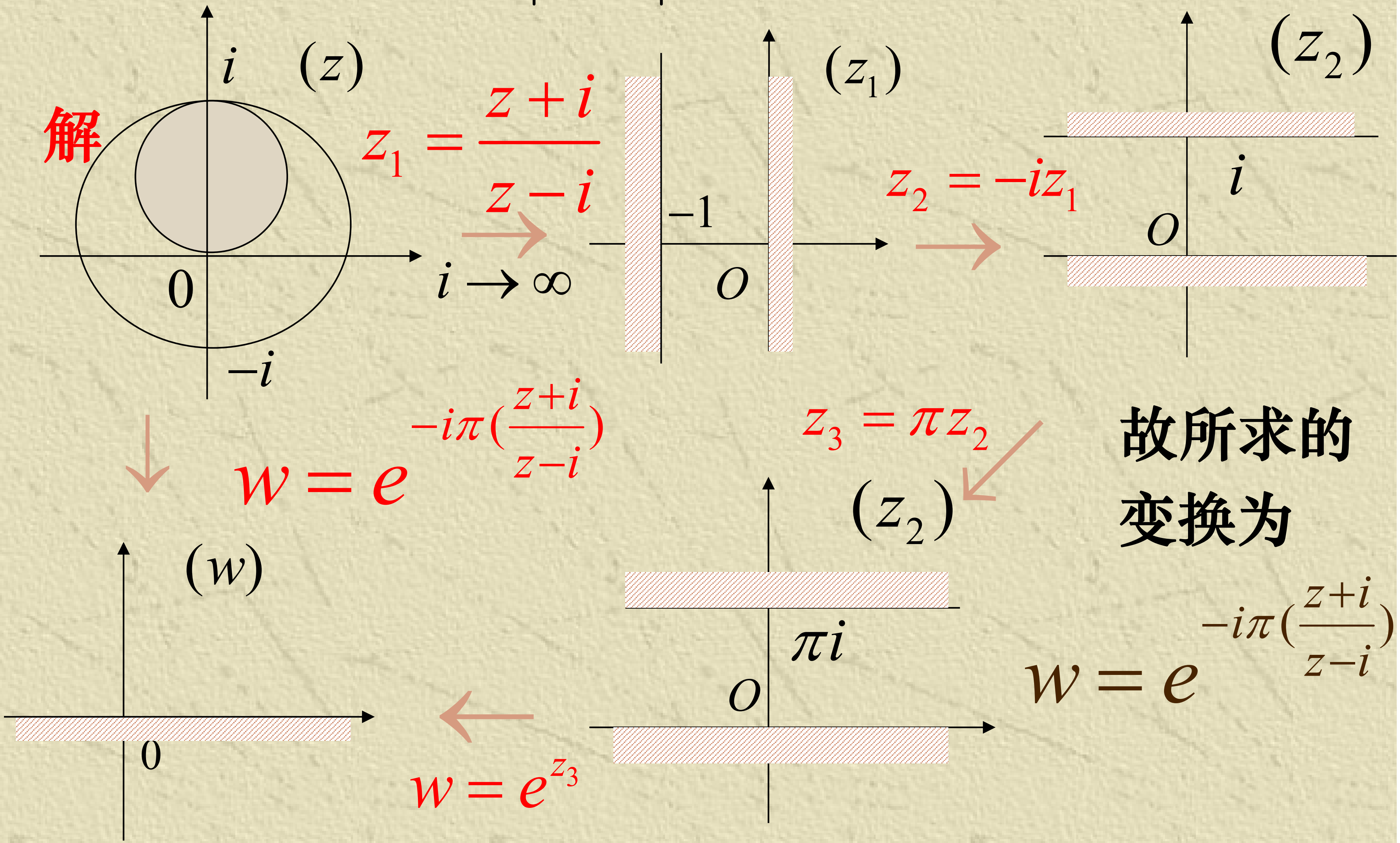
解



选择c,d使

例9 求把区域$D:|z|<1,\left|z-\dfrac{i}{2}\right|>\dfrac{1}{2}$;变成上半平面的共形变换

解

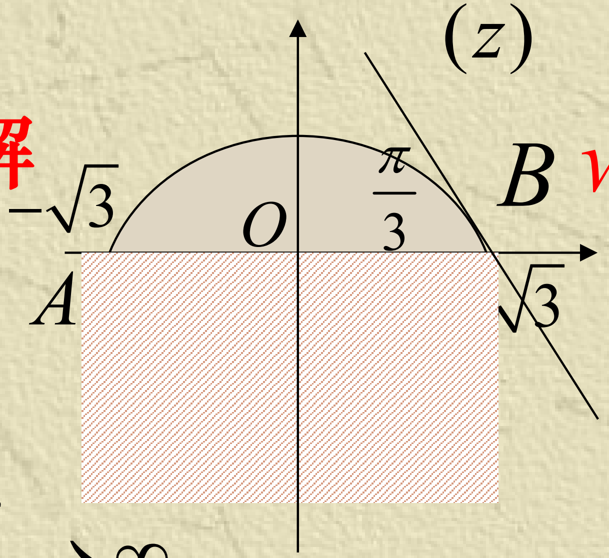


故所求的变换为

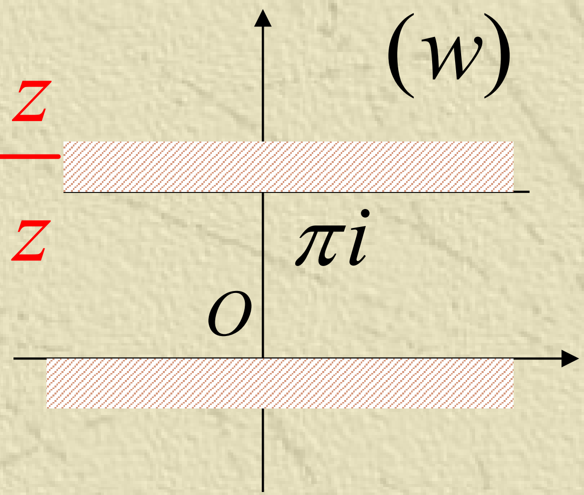
$$w=e^{-i\pi\left(\frac{z+i}{z-i}\right)}$$

例10 求把角形区域 $D:|z+i|<2, \operatorname{Im} z>0$ 变成带形区域 $\Omega: 0<\operatorname{Im} w<\pi$ 的共形变换.

解



$$w = 3\ln\frac{\sqrt{3}+z}{\sqrt{3}-z}$$

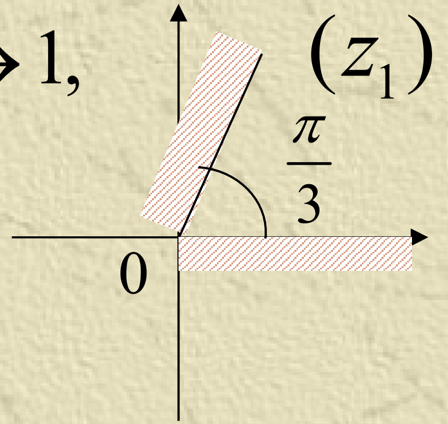


$\sqrt{3} \to \infty$,

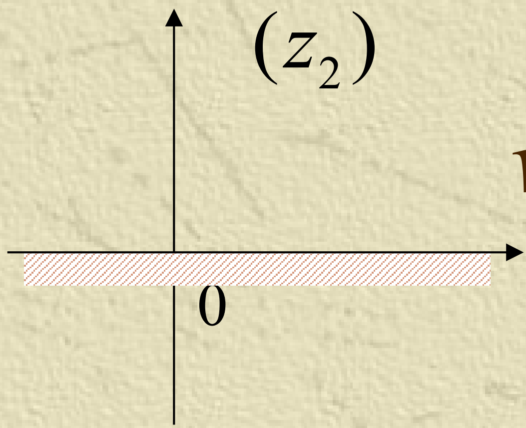
$-\sqrt{3} \to 0$,

$0 \to 1$,

$$z_1 = -\frac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}$$



$$z_2 = z_1^3$$



$$w = \ln z_2$$

故所求的变换为

$$w = 3\ln\frac{\sqrt{3}+z}{\sqrt{3}-z}.$$