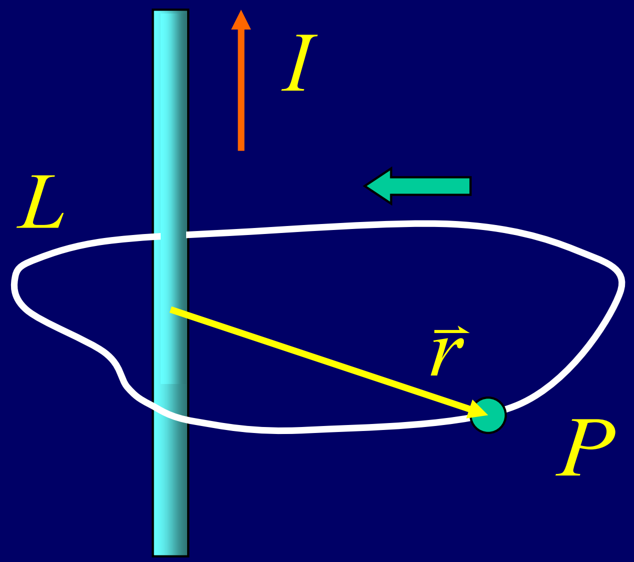
§ 11.4 磁场的安培环路定理

静电场: $\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$ **静电场是保守场**

磁　场: $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=?$



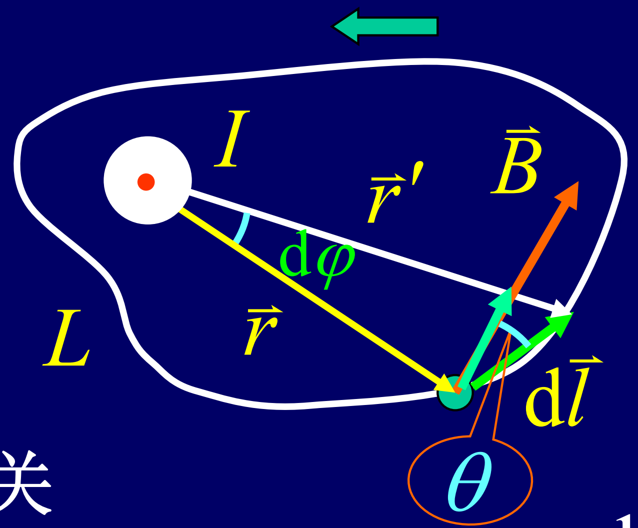
一. 磁场的安培环路定理

- 以无限长载流直导线为例

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint_L B\cos\theta \mathrm{d}l$$

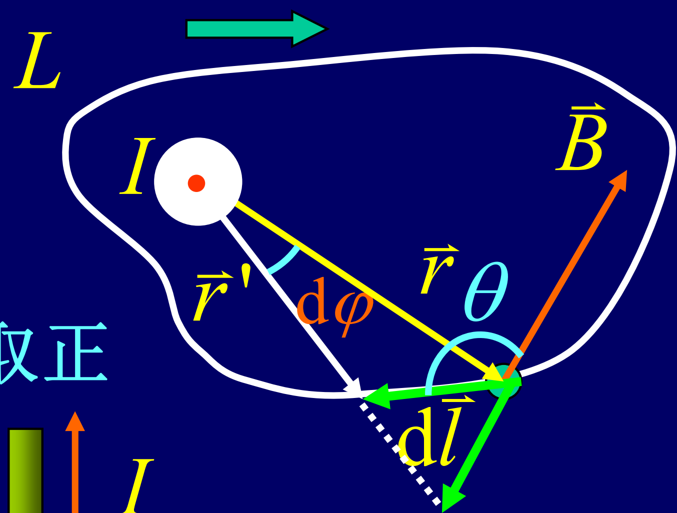
$$=\oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r\mathrm{d}\varphi \quad =\mu_0 I$$



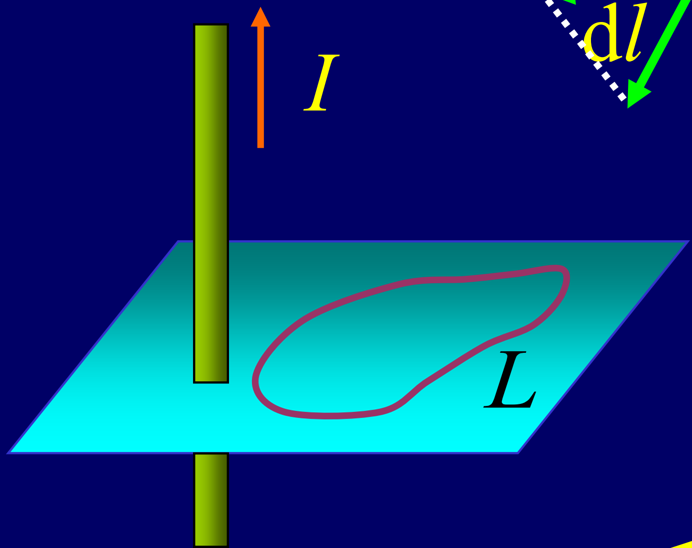
磁场的环流与环路中所包围的电流有关

- 若环路方向反向，情况如何？

$$\oint_L B\cdot \mathrm{d}l\cos\theta = \oint_L \frac{-\mu_0 I}{2\pi r}r\mathrm{d}\varphi = -\mu_0 I$$



若电流方向与积分路径成右手螺旋，***I*** 取正

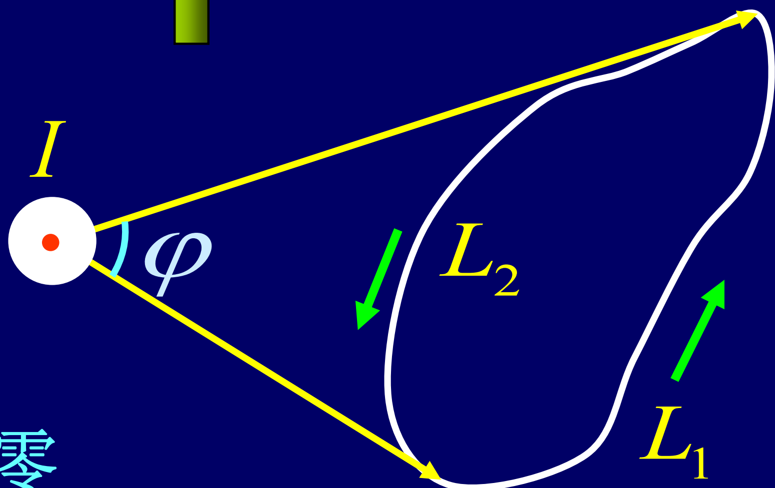


- 若环路中不包围电流的情况？

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{L_1}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{L_2}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\int_{L_1} I\mathrm{d}\varphi + \int_{L_2} I\mathrm{d}\varphi\right)$$

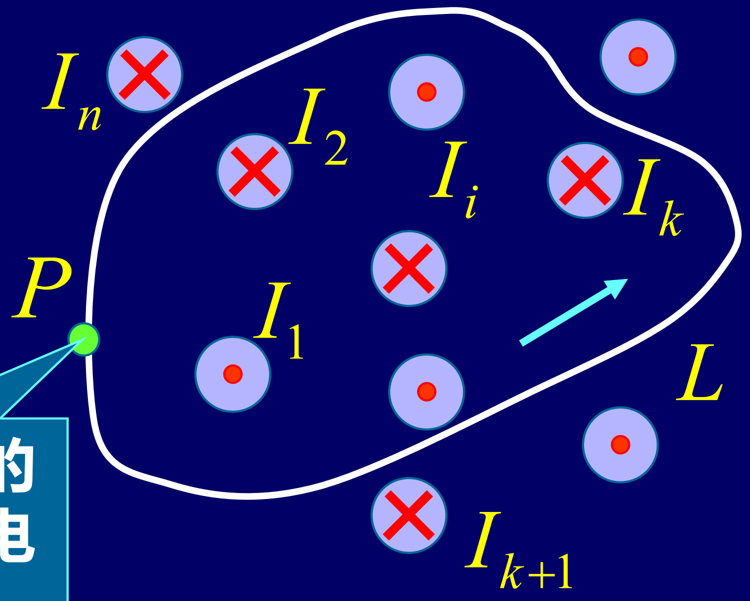
$$= 0$$



环路不包围电流，则磁场环流为零

- 推广到一般情况

$$\begin{cases} I_1 \sim I_k & \text{—— 在环路 } L \text{ 中} \\ I_{k+1} \sim I_n & \text{—— 在环路 } L \text{ 外} \end{cases}$$



则磁场环流为

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \sum \vec{B}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \sum \oint_L \vec{B}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{k} I_i + 0 = \mu_0 \sum_{i=1}^{k} I_i (L\text{内})$$

$$\boxed{\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{i\text{内}}}$$ —— 安培环路定律

恒定电流的磁场中，磁感应强度沿一闭合路径 L 的线积分等于路径 L 包围的电流强度的代数和的 μ_0 倍

讨论

(1) 积分回路方向与电流方向满足右螺旋关系时 $I_i > 0$ 反之 $I_i < 0$

(2) 磁场是有旋场 —— 电流是磁场涡旋的轴心

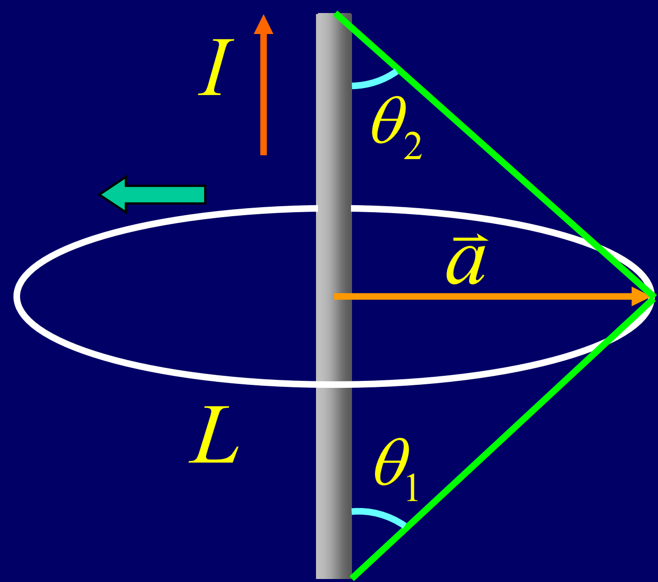
(3) 安培环路定理只适用于闭合的载流导线，对于任意设想的一段载流导线不成立

例如 图中载流直导线，设 $\theta_1 = \theta_2 = \pi/4$

则 L 的环流为：

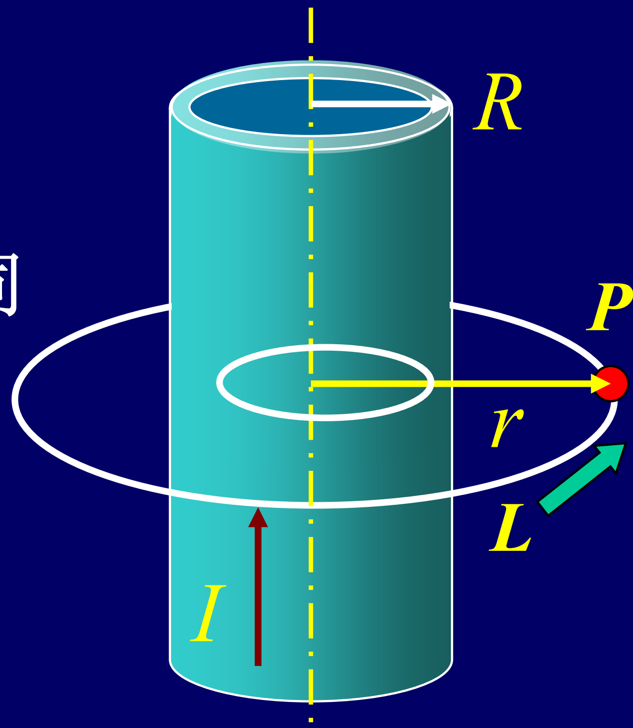
$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos(\pi - \theta_2))\mathrm{d}l$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} 2\frac{\sqrt{2}}{2} 2\pi a = \frac{\mu_0 \sqrt{2} I}{2} \neq \mu_0 I$$



二. 安培环路定理的应用

例 求无限长圆柱面电流的磁场分布。



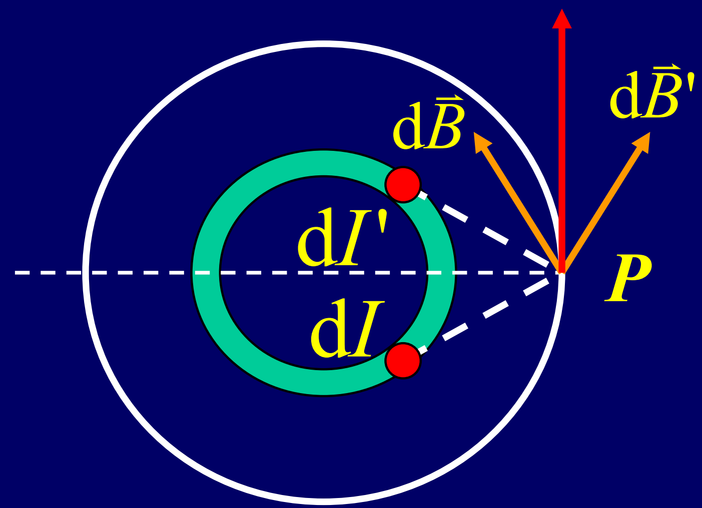
解 系统有轴对称性，圆周上各点的 $\boldsymbol{B}$ 相同

$r > R$ 时过圆柱面外 $\boldsymbol{P}$ 点做一圆周

$$\oint_L B\cos\theta \mathrm{d}l = B\oint_L \mathrm{d}l = B2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$r < R$ 时在圆柱面内做一圆周



$$\oint_L B\cos\theta \mathrm{d}l = B\oint_L \mathrm{d}l = B2\pi r = 0$$

$$B = 0$$

推广

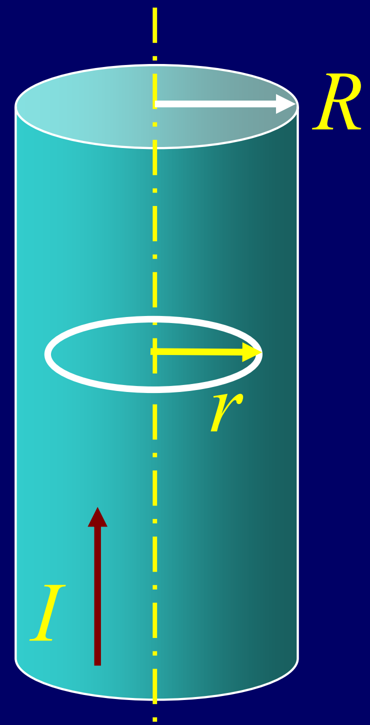
无限长圆柱体载流直导线的磁场分布

$r > R$ 区域： $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$r < R$ 区域： $B 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2$

$$j = \frac{I}{\pi R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$



例　求螺绕环电流的磁场分布

解　• 在螺绕环内部做一个环路，可得

$$\oint_L B\cos\theta \mathrm{d}l = B\oint_L \mathrm{d}l = B\cdot 2\pi r = \mu_0 NI$$

$$B = \mu_0 NI / 2\pi r$$

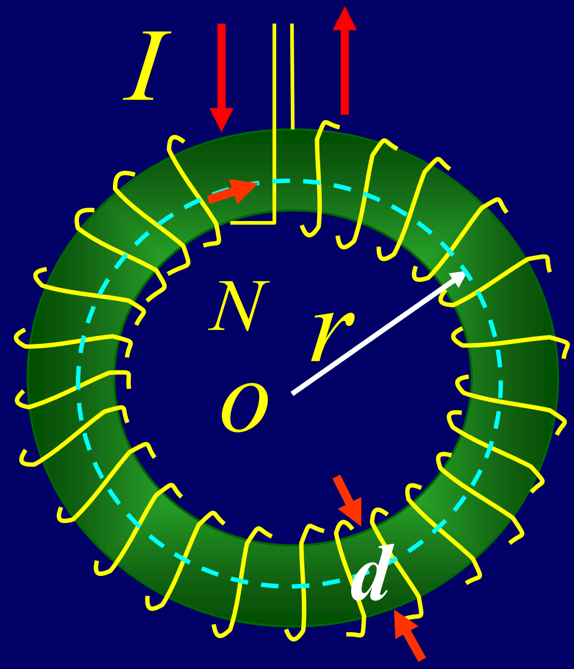
若螺绕环的截面很小，　$\bar{r} >> d$

$$r \approx \bar{r} \qquad B_{内} = \mu_0 \frac{N}{2\pi\bar{r}} I = \mu_0 nI$$

螺绕环内各点磁场近似相等

• 若在外部再做一个环路，可得

$$\sum I_i = 0 \Longrightarrow B_{外} = 0$$



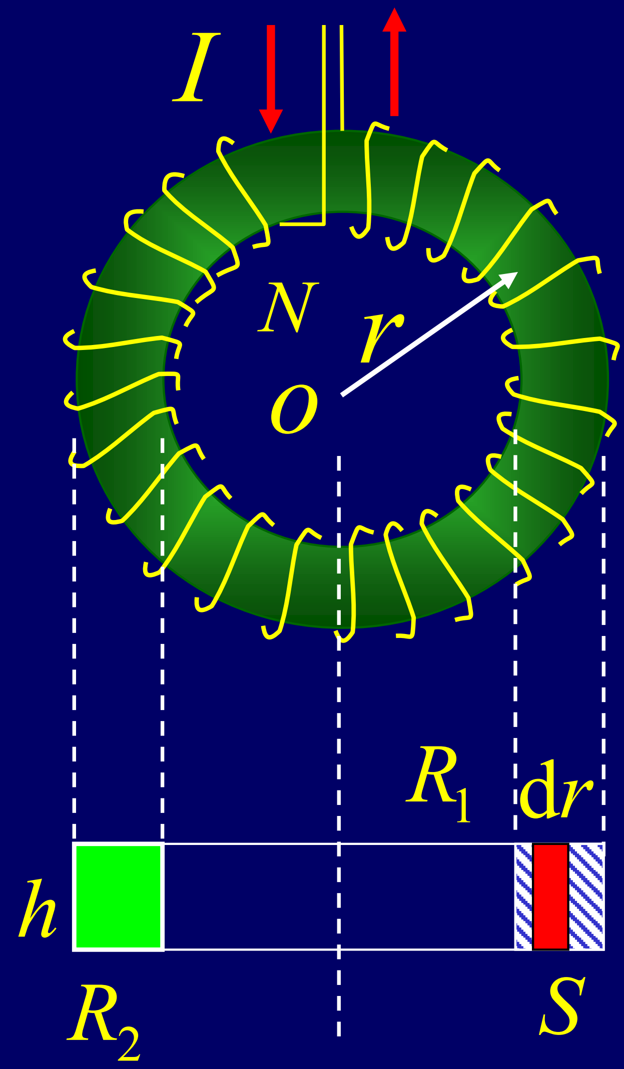
求：矩形截面的螺绕环内的磁通量

螺绕环内的磁通量为

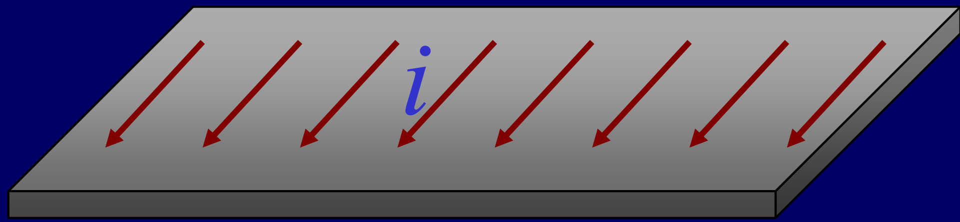
$$\Phi_m = \int_{R_1}^{R_2} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{R_1}^{R_2} B \cdot \mathrm{d}S$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} h\mathrm{d}r$$

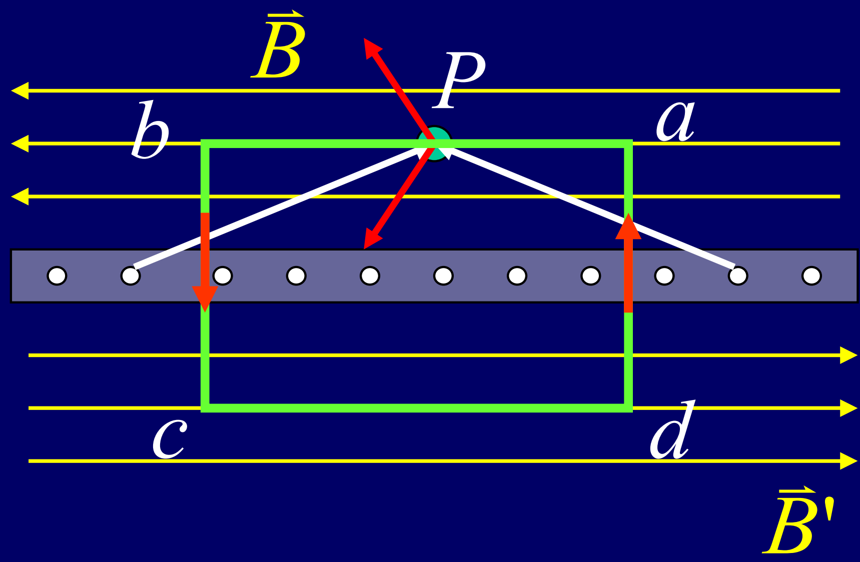
$$= \frac{\mu_0 hNI}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



例　求无限大平面电流的磁场，单位宽度载流i



解　面对称



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{ab}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{bc}\vec{B}\cdot d\vec{l}$$

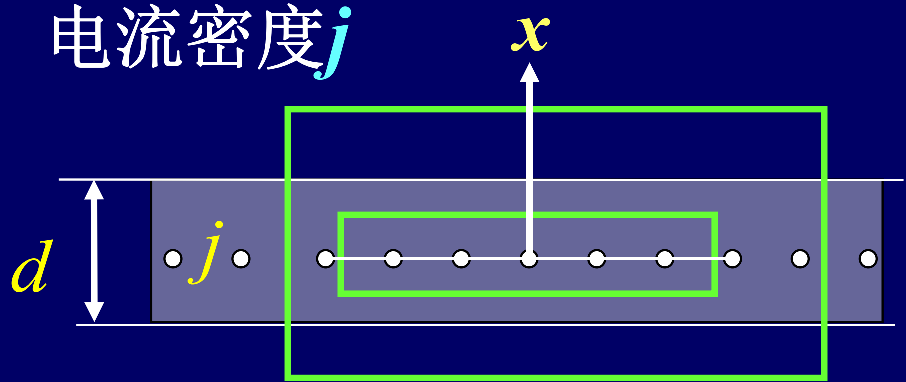
$$+\int_{cd}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{da}\vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$= B\int_a^b dl + B\int_c^d dl$$

$$= 2Bab = \mu_0 abi$$

$$B = \mu_0 i/2$$

推广：有厚度的无限大平面电流，电流密度j



- 在外部　$B = \mu_0 jd/2$
- 在内部　$B = \frac{1}{2}\mu_0 \cdot j2x = \mu_0 jx$

§ 11.5 磁场对电流的作用

载流导体产生磁场 ⟺ 磁场对电流有作用

一. 安培定理

安培力 $\boxed{\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}}$

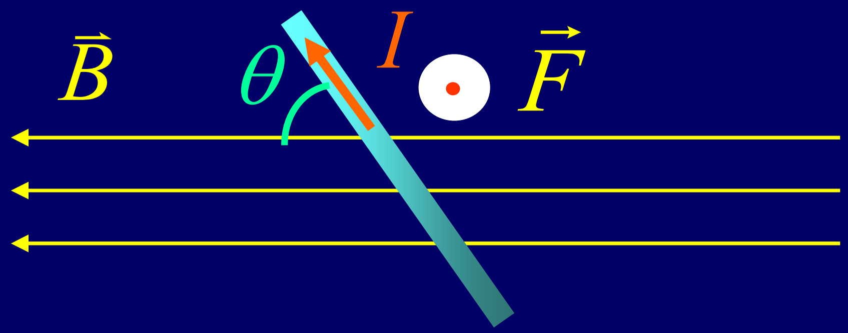
大小：$\mathrm{d}F = I\mathrm{d}lB\sin\theta$

方向：由右手螺旋法则确定

任意形状载流导线在外磁场中受到的安培力

$$\boxed{\vec{F} = \int \mathrm{d}\vec{F} = \int I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}}$$

均匀磁场中放置载流直线



$$F = \int \mathrm{d}F = \int I\mathrm{d}lB\sin\theta$$
$$= IBL\sin\theta$$

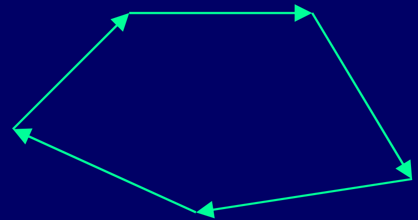
$$\boxed{\vec{F}=\int \mathrm{d}\vec{F}=\int I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}}$$

讨论

(1) 安培定理是矢量表述式 $\mathrm{d}\vec{F}\Rightarrow \mathrm{d}F_x,\mathrm{d}F_y,\mathrm{d}F_z$

(2) 若磁场为匀强场 ➡ $\vec{F}=\left(\int I\mathrm{d}\vec{l}\right)\times\vec{B}$

在匀强磁场中的闭合电流受力 ➡ $\vec{F}=I\left(\oint \mathrm{d}\vec{l}\right)\times\vec{B}=0$



例 在均匀磁场中放置一任意形状的导线，电流强度为I

求 此段载流导线受的磁力。

解 在电流上任取电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$

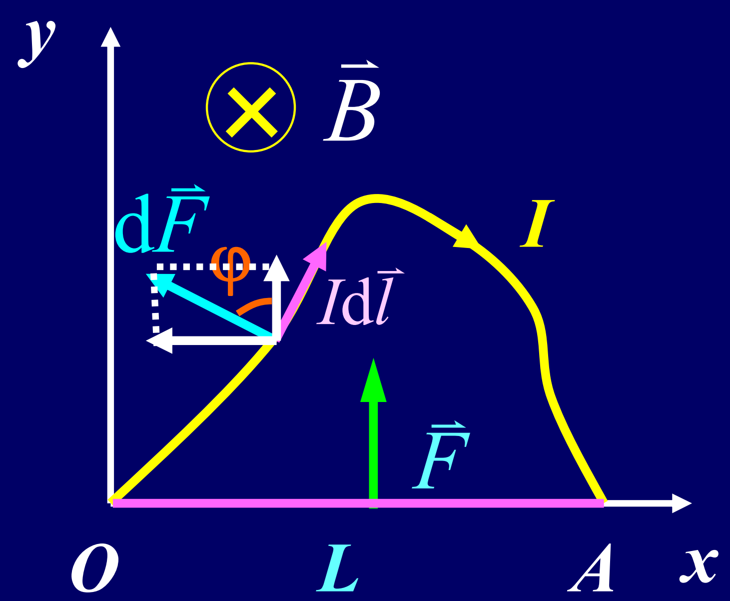
$$\left|\mathrm{d}\vec{F}\right| = \left|I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}\right| = IB\mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}F_x = IB\mathrm{d}l\sin\varphi = IB\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}F_y = IB\mathrm{d}l\cos\varphi = IB\mathrm{d}x$$

$$F_x = \int_0^0 IB\mathrm{d}y = 0$$

$$F_y = \int_0^L IB\mathrm{d}x = IBL$$



相当于载流直导线 $\overline{OA}$ 在匀强磁场中受的力，方向沿 y 向。

例 求两平行无限长直导线之间的相互作用力?

解 电流 2 处于电流 1 的磁场中

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

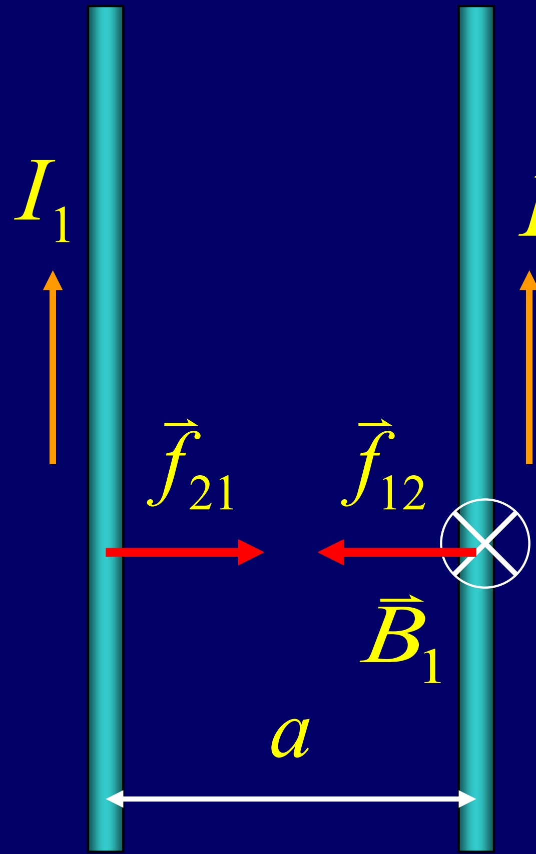
电流 2 中单位长度上受的安培力

$$f_{12} = I_2 B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

同时，电流 1 处于电流 2 的磁场中，

电流 1 中单位长度上受的安培力

$$f_{21} = I_1 B_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

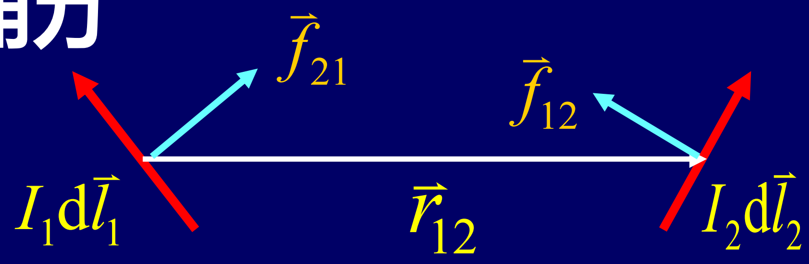


讨论

(1) 定义: 真空中通有同值电流的两无限长平行直导线，若相距 1 米，单位长度受力 $2\times10^{-7}\,\mathrm{N}$ 则电流为1 安培。

(2) 电流之间的磁力符合牛顿第三定律: $\vec{f}_{21}=-\vec{f}_{12}$

(3) 分析两电流元之间的相互作用力



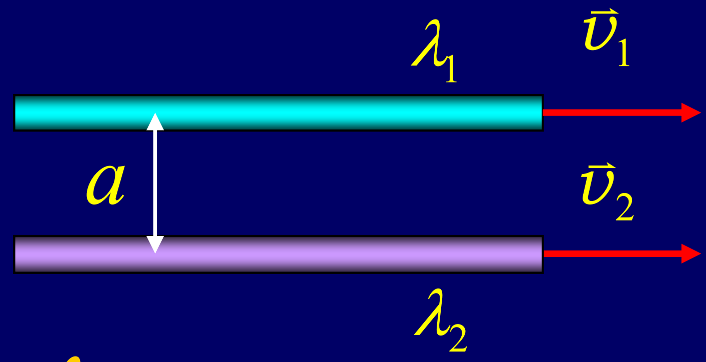
$$\mathrm{d}\vec{B}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{r}_{12}}{r_{12}^{\,3}}$$

$$\mathrm{d}\vec{f}_{12}=I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times\mathrm{d}\vec{B}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{r}_{12}}{r_{12}^{\,3}}$$

同理 $$\mathrm{d}\vec{f}_{21}=I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\mathrm{d}\vec{B}_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times\vec{r}_{21}}{r_{21}^{\,3}}$$

两电流元之间的相互作用力，一般不遵守牛顿第三定律

(4) 分析两根带电长直线沿长度方向运动时，带电线之间的作用力。



两带电线上的电流为

$$I_1 = \lambda_1 v_1 \qquad I_2 = \lambda_2 v_2$$

$$f = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \Rightarrow f_m = \frac{\mu_0 \lambda_1 v_1 \lambda_2 v_2}{2\pi a}$$

两带电线单位长度上的电荷之间的库仑力

$$f_e = E_1 \lambda_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi \varepsilon_0 a}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$\frac{f_m}{f_e} = \frac{\mu_0 \lambda_1 v_1 \lambda_2 v_2}{2\pi a} \frac{2\pi \varepsilon_0 a}{\lambda_1 \lambda_2} = \varepsilon_0 \mu_0 v_1 v_2 = \frac{v_1 v_2}{c^2}$$

在一般情况下，磁场力远小于电场力