电容

—||— 伏安关系 $\begin{cases} \text{微分} & i(t)=\dfrac{dq(t)}{dt}=C\dfrac{du(t)}{dt} \text{（关联方向）} \\ \text{积分} & u(t)=\underbrace{U_C(0)}_{\text{(初始电压)}}+\dfrac{1}{C}\int_0^t i(\xi)d\xi \end{cases}$

正弦量的三要素和相位差

1. 三要素

正弦量：按正弦规律变化的电压、电流 (cos)

瞬时值表达式：

电流正弦量：$i(t)=I_m\cos(wt+\varphi_i)$

电压正弦量：$u(t)=U_m\cos(wt+\varphi_u)$

三要素：① 振幅 $U_m(I_m)$ 正弦量最大值

② $wt+\varphi$ (相位)，正弦量的瞬时相位角 （rad 或 °C） [φ 初相位 $(-\pi,+\pi)$

③ w 角频率（相位变化的速度）

Tip：① 瞬时值：$i(t)$ $u(t)$ (函数)

振幅值：I_m U_m (峰值)

② 周期和频率：$f=\frac{1}{T}=\frac{w}{2\pi}$

③ 相位差 $\theta=\varphi_u-\varphi_i$ $\theta>0$，超前 θ 角 $\theta=0$ 同相

$\theta=\pm\pi$ 反相 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ 正交

Example：$i_1(t)=-14.1\sin(wt-120^\circ)=-14.1\cos(wt-30^\circ)$ 从 sin 到 cos 之间的转化

$i_2(t)=7.05\cos(wt-60^\circ)$

2. 有效值

比较一定时间内的做功.（消耗的能量）

$W=\int_0^T i^2(t)Rdt$

有效值 $i=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$ （方均根）

计算：有/留 $I=0.707I_m$ 　　 $\boxed{i(t) \quad I_m \quad I}$

3. 相量（针对同频率正弦量的一种计算方法）

为什么引入：微分方程阶数多的情况下，求特解很困难

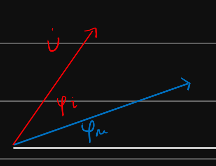
三要素 → 两要素

正弦量	复数
幅度	模
相位	相角

复指数函数 $A(t)=\sqrt{2}Ie^{j(wt+\phi)}$ $\xleftrightarrow{\text{Re}[A(t)]}$ 正弦量 $i=\sqrt{2}I\cos(wt+\varphi)$ 　求实部

$A(t)=\sqrt{2}\underbrace{Ie^{j\phi}}_{\dot{I}}e^{jwt}=\sqrt{2}Ie^{j(wt+\phi)}$（也包括三要素 I,φ,w）

复常数 $I\angle\phi_i$（只有两要素 I,φ）



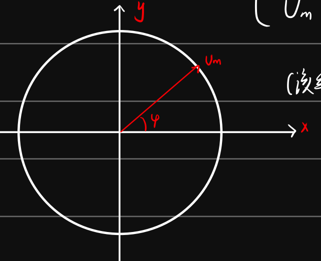
（相量图）

$\dot{I}=I\angle\phi_i$ → 相量（复数） 　 $\dot{U}=U\angle\phi_u$（有效值向量）

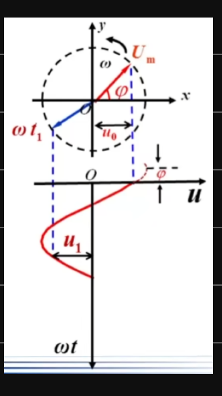
$\begin{cases}\dot{I}_m=I_m\angle\phi_i \\ \dot{U}_m=U_m\angle\phi_i\end{cases}$ 振幅相量 　 $\dot{I}_m=\sqrt{2}\dot{I}$ 　 $\dot{U}_m=\sqrt{2}\dot{U}$

几何意义

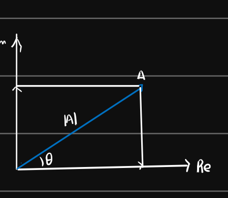
复指数函数 $U_me^{j(wt+\varphi)}=\dot{U}_m e^{jwt}$ 　 $\dot{U}_m$：复振幅 　 e^{jwt}：旋转相量



（该线段以速度 w 逆时针方向前进）



相量图



在复平面上用一个矢量表示相量

4. 向量的运算 　 同频率的正弦量相加变成了对应的相量相加减的运算

相加 　 $U_1(t)=\sqrt{2}U_1\cos(wt+\varphi_1)=\text{Re}(\sqrt{2}\dot{U}_1e^{jwt})$

$U_2(t)=\sqrt{2}U_2\cos(wt+\varphi_2)=\text{Re}(\sqrt{2}\dot{U}_2e^{jwt})$

$U(t)=U_1(t)+U_2(t)=\text{Re}(\sqrt{2}\dot{U}_1e^{jwt})+\text{Re}(\sqrt{2}\dot{U}_2e^{jwt})$（为什么这里是实部呢？）

$\text{Re}[\sqrt{2}\dot{U}e^{jwt}]=\text{Re}(\sqrt{2}(\dot{U}_1+\dot{U}_2)e^{jwt})$

$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2$（两个信号相加之后的相量为两个信号相量的加和）

例：$U_1(t)=6\sqrt{2}\cos(314t+30^\circ)V \rightarrow \dot{U}_1=6\angle30^\circ V$

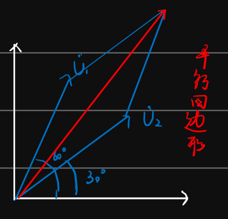
$U_2(t)=4\sqrt{2}\cos(314t+60^\circ)V \rightarrow \dot{U}_2=4\angle60^\circ V$

$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2=$（使用欧拉公式）$6\cos30^\circ+j\cdot6\cdot\sin30^\circ+4\cos60^\circ+j4\cdot\sin60^\circ$

$=5.19+3j+2+3.46j$

$=7.19+6.46j=9.64\angle41.9^\circ V$（这怎么来的呢？）

用向量图表示相加减



微积分运算

$i=\sqrt{2}I\cos(wt+\varphi_i) \leftrightarrow \dot{I}=I\angle\varphi_i$

微分 　 $\frac{di}{dt}=\sqrt{2}wI\cos(wt+\varphi_i+\frac{\pi}{2})$

$\rightarrow wIe^{j(\varphi_i+\frac{\pi}{2})}=\underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}}_{j}w\underbrace{Ie^{j\varphi_i}}_{\dot{I}}=jw\dot{I}$ 　 欧拉

积分 　 $\int idt=\int\sqrt{2}I\cos(wt+\varphi_i)dt$

$=\sqrt{2}\frac{I}{w}\sin(wt+\varphi_i)$

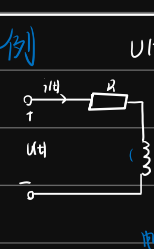
$=\frac{\sqrt{2}I}{w}\cos(wt+\varphi_i-\frac{\pi}{2})$

$\int idt \rightarrow \frac{I}{w}e^{j(\varphi_i-\frac{\pi}{2})} \rightarrow \frac{-j\dot{I}}{w} \rightarrow \frac{\dot{I}}{jw}$

时域微分 $\boxed{\frac{di(t)}{dt} \longleftrightarrow jw\dot{I}}$

时域积分 $\boxed{\int i(t)dt \longleftrightarrow \frac{\dot{I}}{jw}}$

例 　 $U(t)=U_m\cos(wt+\varphi_u)$ 求 $i(t)$



原式 $U(t)=Ri(t)+L\frac{di(t)}{d(t)}$

相量式 $\dot{U}=R\dot{I}+jwL\dot{I}$

$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{R+jwL}=\frac{U\angle\varphi_u}{\sqrt{R^2+w^2L^2}\angle\arctan\frac{wL}{R}}$

瞬时 → 相量 → 复数 → 瞬时

5. 无源电路VCR相量形式

1. 电阻元件

(1) $\boxed{\dot{U}_R=RI\angle\varphi_i=R\dot{I}}$（欧姆定律）

有效值、相位关系，都满足

(2) 功率 $P_R(t)=U_R(t)i(t)=\sqrt{2}U_R\cos(wt+\varphi_i)\sqrt{2}I\cos(wt+\varphi_i)$（瞬时）

$=2U_RI\cos^2(wt+\varphi_i)$

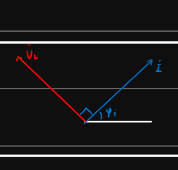
$=U_RI[1+\cos2(wt+\varphi_i)]$（始终 >0，电阻吸收功率）

平均功率：$P=U_RI$

2. 电感元件

(1) $U_L(t)=L\frac{di(t)}{dt}=\sqrt{2}wLI\cos(wt+\varphi_i+\frac{\pi}{2})$（默认 $i(t)=\sqrt{2}I\cos(wt+\varphi_i)$）

$\boxed{\dot{U}_L=wLI\angle\varphi_i+\frac{\pi}{2}=jwL\dot{I}}$

有效值	$U_L=wLI$	
相位关系	$\varphi_u=\varphi_i+90^\circ$	 （电压超前电流 90°）

(2) 感抗和感纳

$\dot{U}_L=jwL\dot{I}$ 　 $X_L=wL(\Omega)$ 称为感抗

$B_L=\frac{1}{X_L}=\frac{1}{wL}$ 称为感纳 (S)

感抗 ①限制电流的能力 　 $U_L=X_LI=wLI$ 　 $w=0$（直流），$X_L=0$，短路

②感抗和频率成正比 　 $w\rightarrow\infty$，$X_L\rightarrow\infty$，开路

电感VAR相量形式 　 $\dot{U}_L=jwL\dot{I}=jX_L\dot{I}$

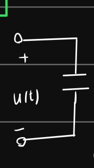
$\dot{I}=\frac{1}{jwL}\dot{U}_L=-j\frac{1}{wL}\dot{U}_L=-jB_L\dot{U}$

(3) 功率 　 $P_L=U_Li$ 　 （$P>0$，储能状态）

$=-\sqrt{2}U_L\sqrt{2}I\sin(wt+\varphi_i)\cos(wt+\varphi_i)$（$P<0$，放能状态）

$=-U_LI\sin2(wt+\varphi_i)$

3. 电容元件



① 时域模型 → $i_C(t)=C\frac{du(t)}{dt}=-\sqrt{2}wCU\sin(wt+\varphi_u)$

$=\sqrt{2}wCU\cos(wt+\varphi_u+\frac{\pi}{2})$

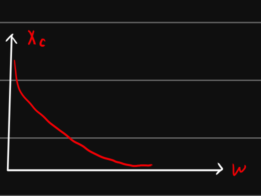
② 相量形式 → $\boxed{\dot{I}_C=wCU\angle\varphi_u+\frac{\pi}{2}=jwC\dot{U}}$

有效值：$I_C=wCU$	
相位关系 $\varphi_i=\varphi_u+90^\circ$	（i_C 超前 u 90°）

③ 容抗与容纳

$X_C=\frac{1}{wC}$，容抗 　 $\left(\begin{matrix}X_L=wL \\ B_L=\frac{1}{wL}\end{matrix}\right)$ 　 $\dot{U}=-j\frac{1}{wC}\dot{I}_C=-jX_C\dot{I}_C$

$B_C=wC$，容纳 　 $\dot{I}_C=jB_C\dot{U}=jwC\dot{U}$



$w\rightarrow0$，$X_C\rightarrow\infty$ 直流开路（隔直）

$w\rightarrow\infty$，$X_C\rightarrow0$ 高频短路（旁路作用）

④ 功率

$P_C=U\dot{i}_C=-2UI_C\cos(wt+\varphi_u)\sin(wt+\varphi_u)$

$=-UI_C\sin2(wt+\varphi_u)$