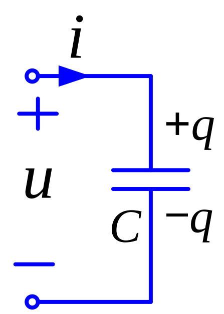
第三章 动态电路

3.1 动态元件

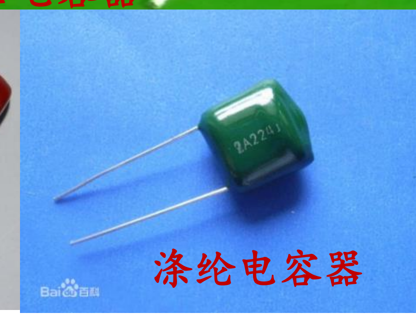
3.1.1 电容

电容和电感元件是组成实际电路的常用器件 。这类元件的VCR是微分或积分关系，故称其为动态元件。含有动态元件的电路称为动态电路，描述动态电路的方程是微分方程。

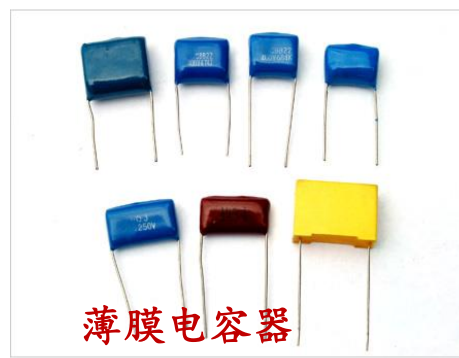
电容(capacitor)是一种储存电能的元件, 它是实际电容器的理想化模型。电容器由绝缘体或电解质材料隔离的两个导体组成。电容的行为是基于电场的现象，如果电压随时间变化，则电场也随时间变化。时变的电场在该空间产生位移电流, 而位移电流等于电容两端的传导电流。

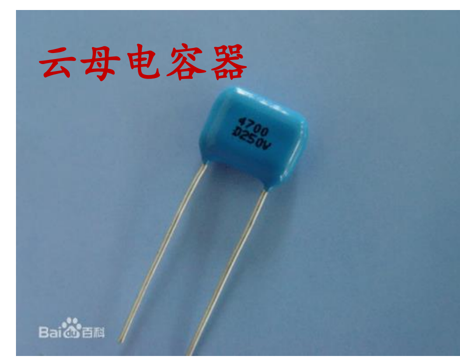


实际的电容器



直插铝电解电容器





高压密封纸介电容器

真空电容器

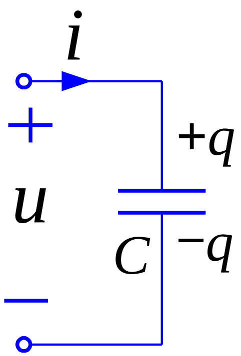
薄膜介质可变电容器

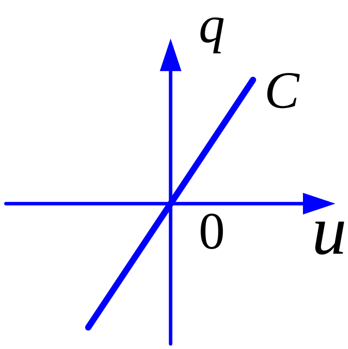
陶瓷微调电容器

一. 电容的定义

一个二端元件，若在任一时刻t，其电荷$q(t)$与电压$u(t)$之间的关系能用q~u平面上的曲线表征，即具有代数关系 $f(u，q)=0$, 则称该元件为电容元件，简称电容。

电容：时变和时不变
　　　线性的和非线性电容。





线性时不变电容的库伏特性是q~u平面上一条过原点的直线，且斜率C不随时间变化

$$q(t) = Cu(t)$$

电荷单位：库仑
电容单位：法拉

二. 电容的VAR

当电容两端的电压变化时，聚集在电容上的电荷也相应发生变化，表明连接电容的导线上电荷移动，即电流流过；若电容上电压不变化，电荷也不变化，即电流为零。

◆ 微分关系

若电容上电压与电流参考方向关联，考虑到 $i(t)=dq(t)/dt$, $q(t)=Cu(t)$, 有

$$\boxed{i(t)=C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}}$$

问题1:当电容两端施加直流电压时，其上电流有什么特点?

◆ 积分关系

$$\boxed{u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi}$$

问题2:当电容两端施加快变化的电压时，其上电流有什么特点?

问题3:电阻与电容VAR关系有什么不同?

◆ **积分关系**

设$t=t_0$为初始观察时刻，上式可改写为

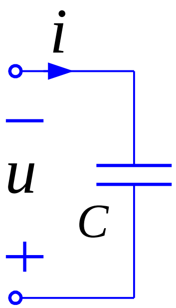
$$\boxed{u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad ,t\geq t_0}$$

式中 $$u(t_0)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

称电容电压在t_0时刻的初始值(initial value), 或初始状态(initial state)，它包含了在t_0以前电流的“全部历史”信息。一般取$t_0=0$。

◆ **若电容电压、电流的参考方向非关联**

$$\boxed{i(t)=-C\frac{\mathrm{d}u(\mathrm{t})}{\mathrm{d}t}}$$



$$\boxed{u(t)=-\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi=u(t_0)-\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad ,t\geq t_0}$$

说明

(1)电容的伏安关系是微积分关系，因此电容元件是动态元件。而电阻元件的伏安关系是代数关系，电阻是一个即时(瞬时)元件。

(2)由电容VAR的微分形式可知:

①任意时刻，通过电容的电流与该时刻电压的变化率成正比。当电容电流 i为有限值时，其du/dt也为有限值，则电压u必定是连续函数，此时电容电压不会跃变。

②当电容电压为直流电压时，则电流 $i = 0$，此时电容相当于开路，故电容有隔直流的作用。

(3)由电容VAR的积分形式可知:在任意时刻t，电容电压u是此时刻以前的电流作用的结果，它“记载”了以前电流的“全部历史”。即电容电压具有“记忆”电流的作用，故电容是一个记忆元件，而电阻是无记忆元件。

三. 电容的功率与储能

- **功率**

当电压和电流为关联方向时，电容吸收的瞬时功率为

$$p(t)=u(t)i(t)=Cu(t)\frac{du(t)}{dt}$$

电容是储能元件，它不消耗能量。

- 当 $p(t)>0$时，电容吸收能量，处于充电状态；
- 当 $p(t)<0$时，电容释放能量，处于放电状态。

释放的能量不会超过吸收的能量。电容不能产生能量，因此为无源元件。

$$p(t)=u(t)i(t)=Cu(t)\frac{du(t)}{dt}$$

◆ **储能**

对功率从-∞到 t 进行积分，即得t 时刻电容上的储能：

$$w_C(t)=\int_{-\infty}^{t}p(\xi)d\xi=\int_{u(-\infty)}^{u(t)}Cu(\xi)du(\xi)$$

$$=\frac{1}{2}Cu^2(t)-\frac{1}{2}Cu^2(-\infty)$$

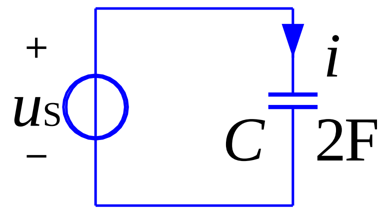
$u(-\infty)$ 表示未充电时的电压值，应有$u(-\infty)=0$。电容在时刻 t 的储能为：

$$\boxed{w_C(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)}$$

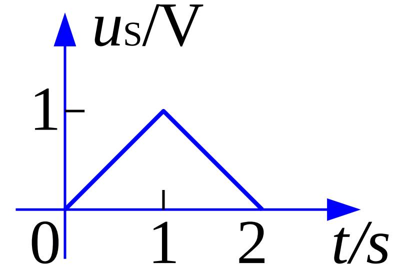
电容在某一时刻 t 的储能仅取决于此时刻的电压，而与电流无关，且储能 ≥0。

四 电容VAR求解

例1 如图电路，电源电压$u_S(t)$如图；试求电容上电流$i(t)$、瞬时功率$p(t)$及在t时刻的储能$w_C(t)$。

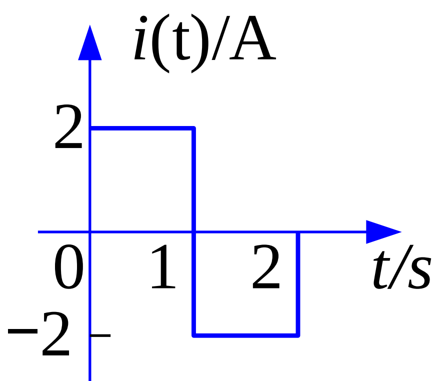


(a)

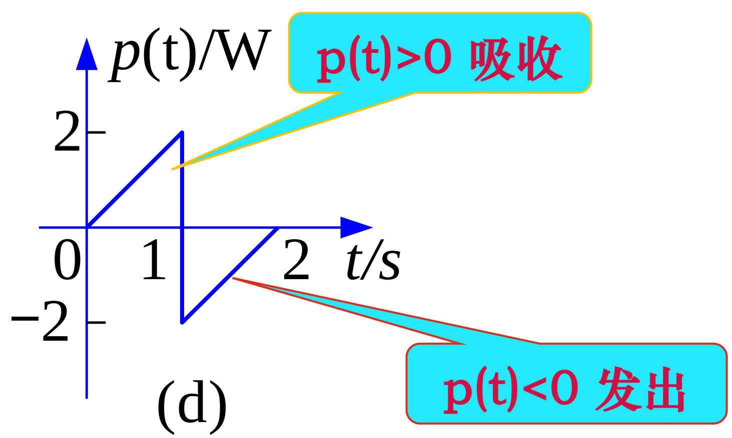


(b)

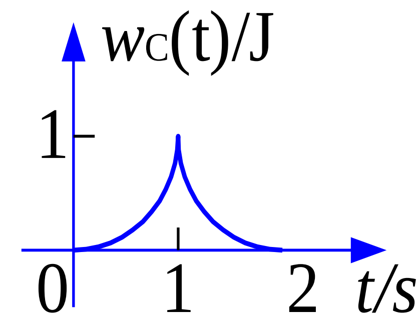
解： 根据电容VAR得



(c)

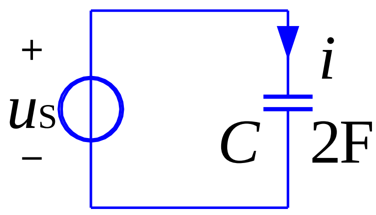


(d)

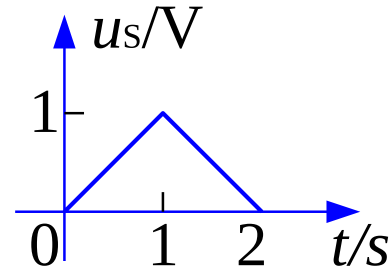


(e)

解:



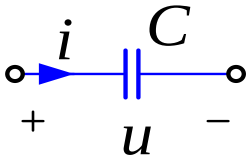
(a)



(b)

$$u_S(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & 0<t<1s\\ -(t-2), & 1<t<2s\\ 0, & t>2s\end{cases}\qquad i(t)=2\frac{du_S}{dt}=\begin{cases}0, & t<0\\ 2, & 0<t<1s\\ -2, & 1<t<2s\\ 0, & t>2s\end{cases}$$

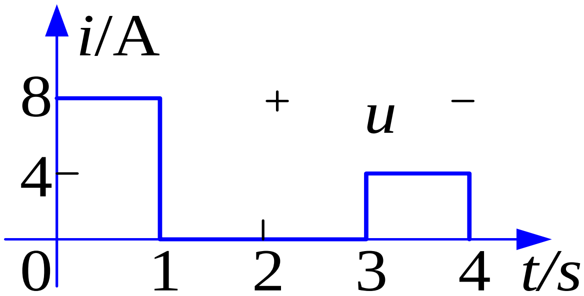
$$p(t)=u_S(t)i(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 2t, & 0<t<1s\\ 2(t-2), & 1<t<2s\\ 0, & t>2s\end{cases}\qquad w_C(t)=\frac{1}{2}Cu_C^2(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t^2, & 0<t<1s\\ (t-2)^2, & 1<t<2s\\ 0, & t>2s\end{cases}$$



例2 某电容C=2F，电流i波形如图所示。

①若$u(0)=0$，求电容电压$u(t),t\geq 0$

②计算$t=2$s时电容的储能$w(2)$。



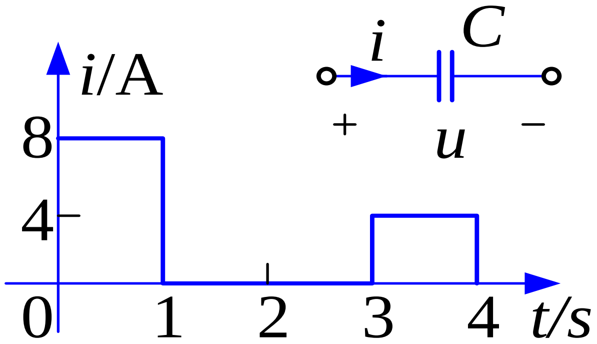
解：根据电容VAR得

$$u(t)=u(0)+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\begin{cases} 0 & ,t\leq 0 \\ \frac{1}{2}\int_0^t 8\,\mathrm{d}\tau=4t & ,0<t\leq 1s \\ \frac{1}{2}\int_0^1 8\,\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2}\int_1^t 0\,\mathrm{d}\tau=u(1)+0=4 & ,1<t\leq 3s \\ u(3)+\frac{1}{2}\int_3^t 4\,\mathrm{d}\tau=4+2(t-3)=2(t-1) & ,3<t\leq 4s \\ u(4)+\frac{1}{2}\int_4^t 0\,\mathrm{d}\tau=u(4)=6 & t>4 \end{cases}$$

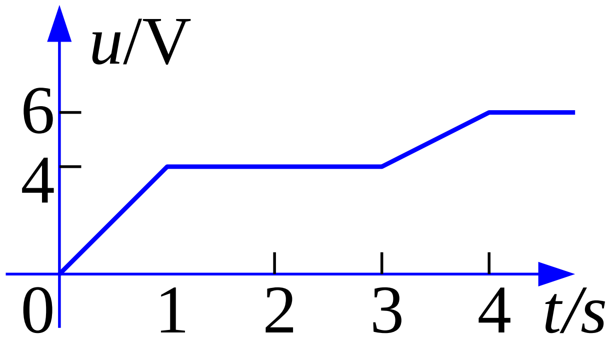
例2 某电容C=2F，电流i波形如图所示。

①若$u(0)=0$，求电容电压$u(t),t\geq 0$

②计算t=2s时电容的储能$w(2)$。



解： ②计算t=2s时电容的储能$w(2)$。



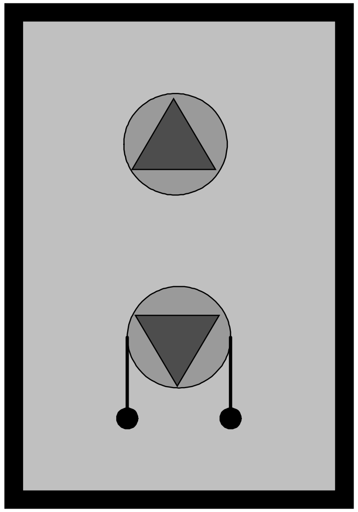
$$w(2)=\frac{1}{2}Cu^2(2)=16J$$

- **电容是储能元件，它从外部电路吸收的能量，以电场能量的形式储存于自身的电场中。**
- **电容C在某一时刻的储能只与该时刻t的电容电压有关。**

五. 实际电路举例

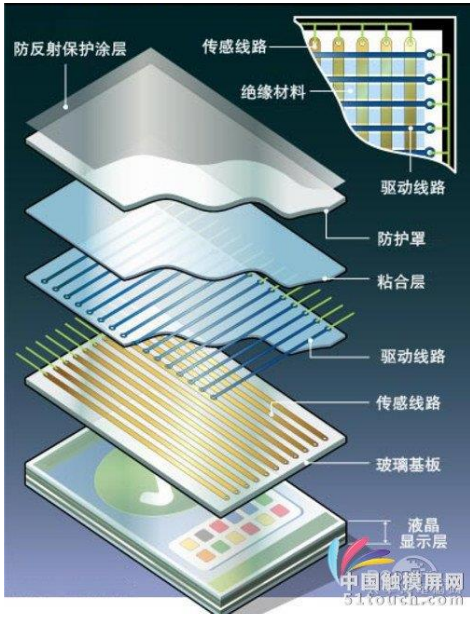
（1）电容触摸传感开关

一种组合开关的传感器技术是破坏电场时产生响应,开关以电容为基础,它的端子特性由电场确定,触摸电容性开关时,使电容的容量发生变化,从而引起电场变化,形成开关。这种开关用在触摸控制开和关的台灯上，用在没有活动部分的电梯按纽。



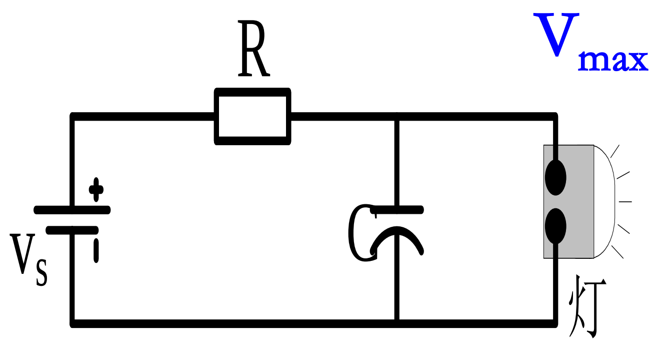
（2）电容触摸屏

电容式触摸屏技术是利用人体的电流感应进行工作的。当手指触摸在金属层上时，用户和触摸屏表面形成以一个耦合电容，对于高频电流来说，电容是直接导体，于是手指从接触点吸走一个很小的电流。这个电流分别从触摸屏的四角上的电极中流出，并且流经这四个电极的电流与手指到四角的距离成正比，控制器通过对这四个电流比例的精确计算，得出触摸点的位置。

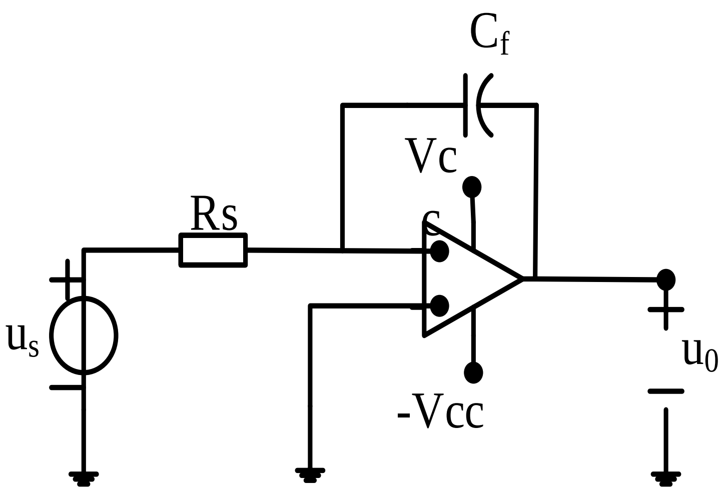


（3）闪光灯电路：（RC电路）

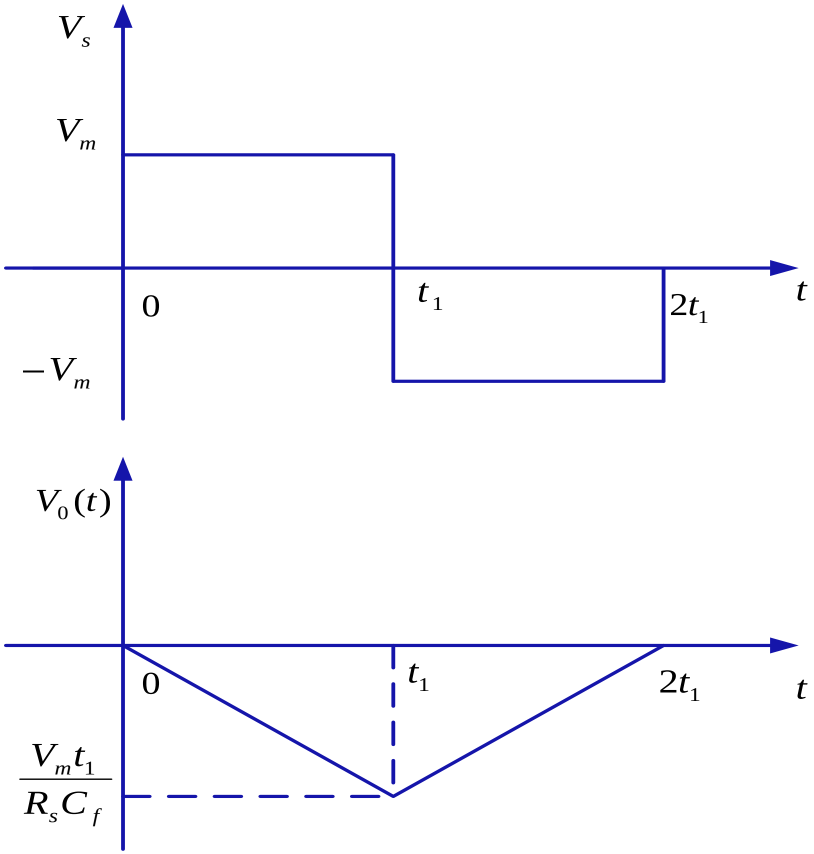
电路中的灯只有在灯两端电压达到V_{max}值时开始导通，在灯电路导通期间，将其模拟成一个电阻，灯一直导通,直到其电压降到V_{min}时为止。灯不导通时，相当于开路。其工作原理是：当灯表现为开路时，电压源通过电阻给电容C充电，充止Vs伏，当灯电压一旦达到V_{max}，灯开始导通，电容通过电阻放电，当电容电压降止V_{min}，灯将开路，电容又将开始充电。



(4)积分电路(Integrating circuit)



输入电压是矩形脉冲，
则输出电压是三角波。



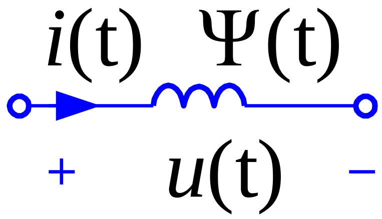
积分电路输入输出波形

3.1.2 电感

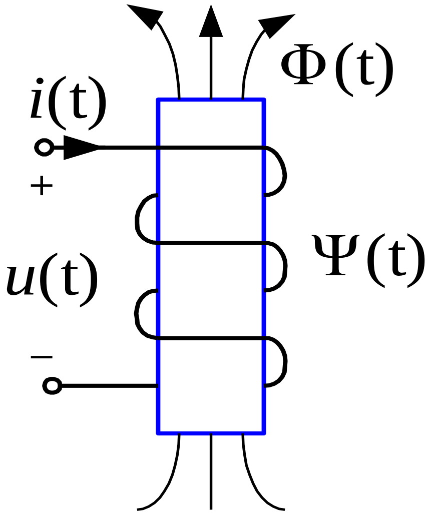
电感(inductor)是一种储存磁能的元件。它是实际电感线圈的理想化模型，电路符号如图(a)所示。

将导线绕在骨架上就构成一个实际电感线圈(也称电感器)，当电流*i*(*t*)通过线圈时，将产生磁通*Φ*(t)，其中储存有磁场能量。

与线圈交链的总磁通称为磁链*Ψ*(t)。若线圈密绕，且有*N*匝，则磁链 $\Psi(t)=N\,\Phi(t)$。



(a)



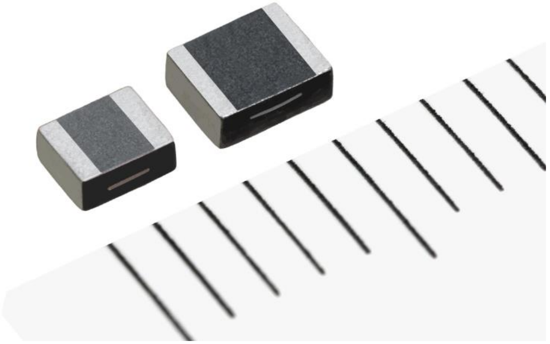
(b)

实际电感器

空心电感

磁棒线圈电感

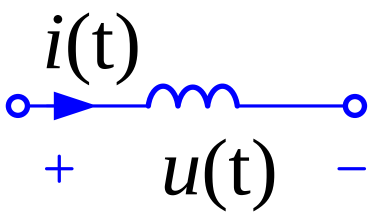
铁硅铝磁环电感



薄膜电感

一、 电感定义

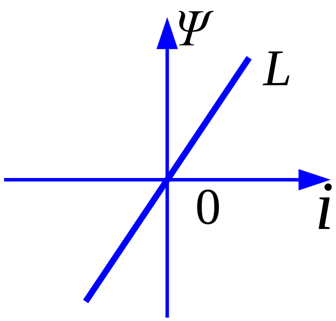
> 一个二端元件，若在任一时刻t，其磁链$\Psi(t)$与电流$i(t)$之间的关系能用$\Psi \sim i$平面上的曲线表征，即具有代数关系 $f(\Psi, i) = 0$
> 则称该元件为**电感元件**，简称**电感**。



电感：时变和时不变的，线性的和非线性的。

线性时不变电感的外特性(韦安特性)是$\Psi \sim i$平面上一条过原点的直线，且其斜率L不随时间变化，如图(a)所示。其表达式可写为：

$$\boxed{\Psi(t) = L\,i(t)}$$



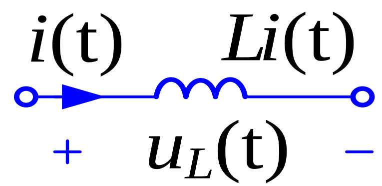
(a)

磁链单位：韦伯
电感单位：亨利 H

二. 电感的VAR(或VCR)

电感中，当电流变化时，磁链也发生变化，从而产生感应电压。在电流与电压参考方向关联时，若电压参考方向与磁通的方向符合右手法则，根据法拉第电磁感应定律，感应电压$u_L(t)$与磁链的变化率成正比，即：

◆ 微分关系



对线性电感，由于$\Psi(t) = Li(t)$，故有

$$u_L(t) = \frac{\mathrm{d}\Psi(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \boxed{u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}}$$

◆ 积分关系

$$\boxed{i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi}$$

问题1:当电感流过直流电流时，其上电压有什么特点?

问题2:当电感上流过快速变化的电流时，其上电压有什么特点?

设$t=t_0$为初始观察时刻，上式可改写为

$$\boxed{i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi\qquad ,t\geq t_0}$$

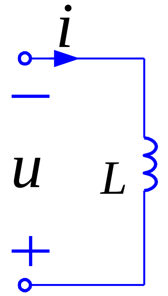
$$i(t_0)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

称为电感电流在t_0时刻的初始值,或初始状态，它包含了在t_0以前电压的“全部历史”信息。一般取t_0 =0 。

◆ 若电感电压、电流的参考方向非关联，电感VAR表达式可改为

$$\boxed{u(t)=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

$$\boxed{i(t)=-\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi=i(t_0)-\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi\qquad ,t\geq t_0}$$



三. 电感的功率与储能

◆ 功率

当电感电压和电流为关联方向时，电感吸收的瞬时功率为：

$$p(t) = u(t)i(t) = L\frac{di(t)}{dt}i(t)$$

电感是储能元件，它不消耗能量。

- 当 $p(t)>0$时，电感在吸收能量，处于充磁状态；
- 当 $p(t)<0$时，电感在释放能量，处于放磁状态。

释放的能量不会超过吸收的能量。电感不能产生能量，因此为无源元件。

◆ 储能

对功率从-∞到 t 进行积分，即得t 时刻电感上的储能为：

$$w_L(t)=\int_{-\infty}^{t}p(\xi)d\xi=\int_{i(-\infty)}^{i(t)}Li(\xi)di(\xi)$$

$$=\frac{1}{2}Li^2(t)-\frac{1}{2}Li^2(-\infty)$$

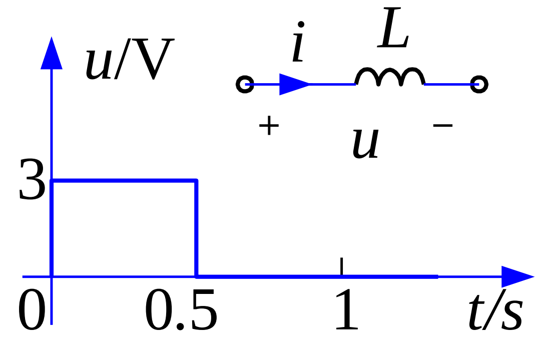
式中$i(-\infty)$ 表示电感未充磁时刻的电流值，应有$i(-\infty)=0$。于是，电感在时刻 t 的储能可简化为：

$$\boxed{w_L(t)=\frac{1}{2}Li^2(t)}$$

- 可见:电感在某一时刻 t 的储能仅取决于此时刻的电流，而与电压无关，且储能 ≥0。
- 电感是一个储能元件，它从外部电路吸收的能量，以磁场能量的形式储存于自身的磁场中。

四 举例

如图已知电感电压$u(t)$，L=0.5H，$i(0)$=0；试求电感上电流$i(t)$ 及在t=1s时的储能$w_L(1)$。



(a)

解：当0<t≤0.5s时，

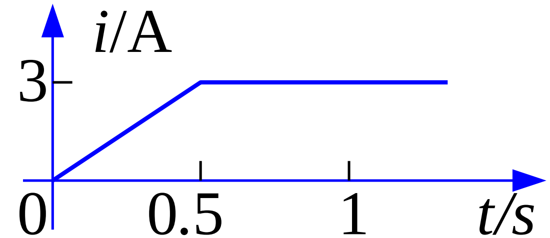
$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0}u(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{L}\int_{0}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=i(0)+2\int_{0}^{t}3\,\mathrm{d}\tau=6t$$

当t>0.5s时，

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0.5}u(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{L}\int_{0.5}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=i(0.5)+2\int_{0.5}^{t}0\,\mathrm{d}\tau=3$$



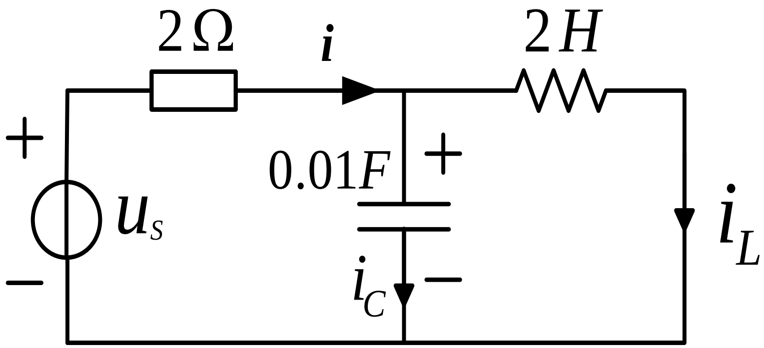
(b)

$$\boxed{w_L(1)=\frac{1}{2}Li^2(1)=0.5\times0.5\times9=2.25(\mathrm{J})}$$

例2 如图所示电路，已知电感电流

$$i_L(t)=5(1-e^{-10t})A, t\geq 0;$$

求t>0电容上电流i_C和电压源电压u_S



解：电感电压

$$u_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}=100e^{-10t}$$

$$u_L(t)=u_C(t)$$

电容电流

$$i_C(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=-10e^{-10t}A$$

KCL方程

$$i=i_C+i_L=5-15e^{-10t}A$$

电源电压

$$u_s=2i+u_L(t)=10+70e^{-10t}V \quad t\geq 0$$

五. 主要结论

（1）电感元件是动态元件。

（2）电感的电压与该时刻电流的变化率成正比

（3）电流i是连续函数，电感电流不会跃变

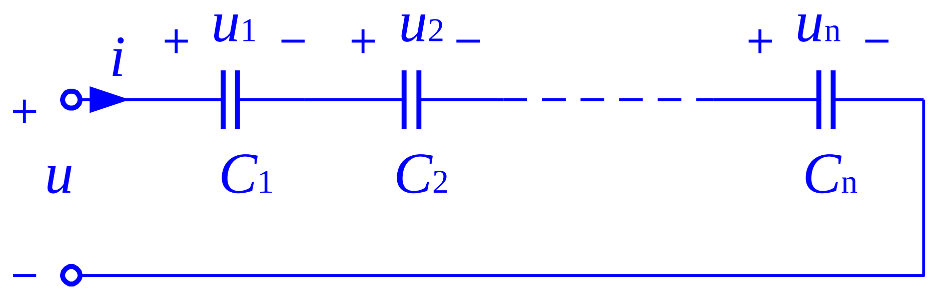
（4）电感对直流相当于短路。

（5）电感电流i是此时刻以前的电压作用的结果，它“记载” 了以前电压的“全部历史”。即电感也是一个记忆元件。

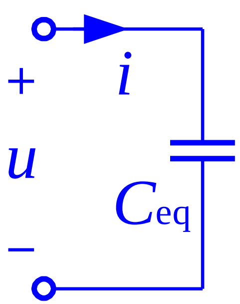
（6）电感是一个储能元件，它从外部电路吸收的能量，以磁场能量的形式储存于自身的磁场中。电感L在某一时刻的储能只与该时刻t电感电流有关。

3.1.3 电容、电感的串、并联

一. 电容串联



(a)



(b)

电容串联电流相同，根据电容VAR积分形式

$$u_k = \frac{1}{C_k}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$$= \frac{1}{C_1}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{C_2}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau + \cdots + \frac{1}{C_n}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

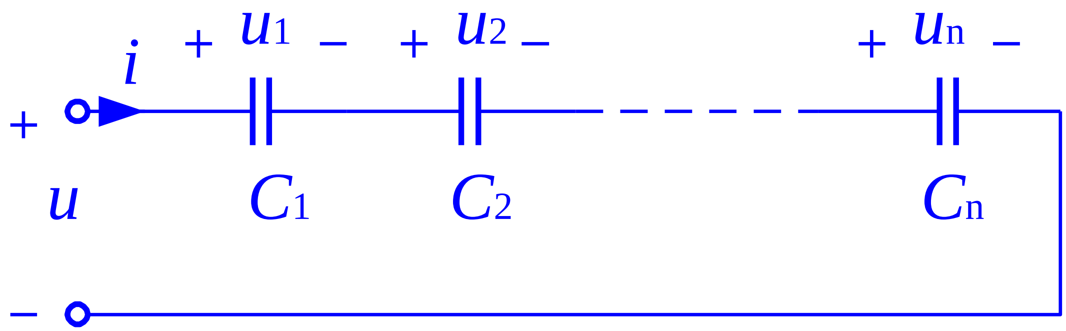
$$= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right)\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$u = \frac{1}{C_{\mathrm{eq}}}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

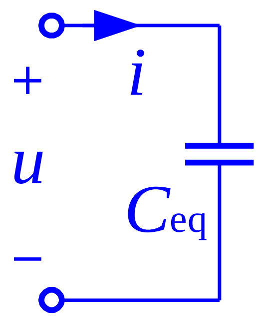
$$\boxed{\therefore \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$$

分压公式

$$\boxed{u_k = \frac{C_{eq}}{C_k} u}$$



(a)



(b)

$$u = \frac{1}{C_{eq}} \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

两个电容串联时

$$\boxed{C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}$$

$$\boxed{u_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} u, \quad u_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u}$$

二. 电容并联

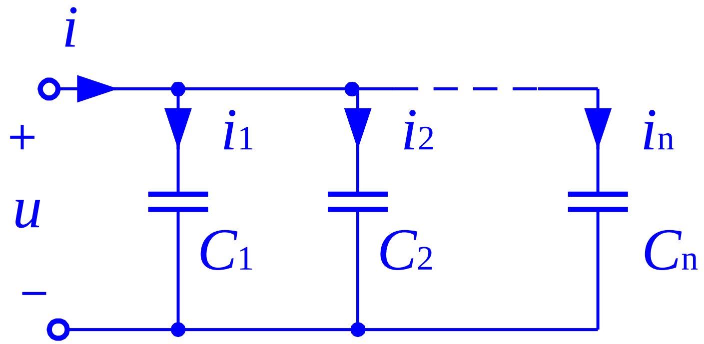
电容并联电压*u*相同，根据电容VAR微分形式

$$i_k = C_k \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

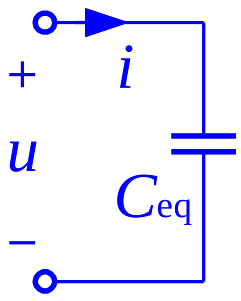
由KCL有 $i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$

$$= C_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + C_2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \cdots + C_n \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$= (C_1 + C_2 + \cdots + C_n) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$



(a)



(b)

$$i = C_{eq} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\therefore\ C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n}$$

分流公式

$$\boxed{i_k = \frac{C_k}{C_{eq}} i}$$

三. 电感串联

电感串联电流相同，根据电感VAR微分形式

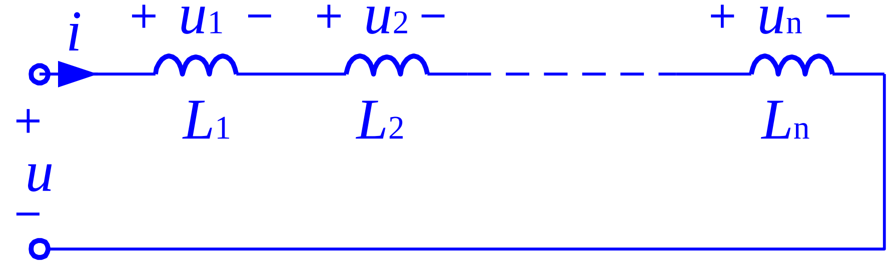
$$u_k = L_k \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

由KVL

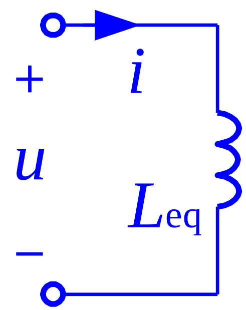
$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$$= L_1 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \cdots + L_n \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$= (L_1 + L_2 + \cdots + L_n) \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



(a)



(b)

$$u = L_{eq} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\therefore\ L_{eq} = L_1 + L_2 + \ldots + L_n}$$

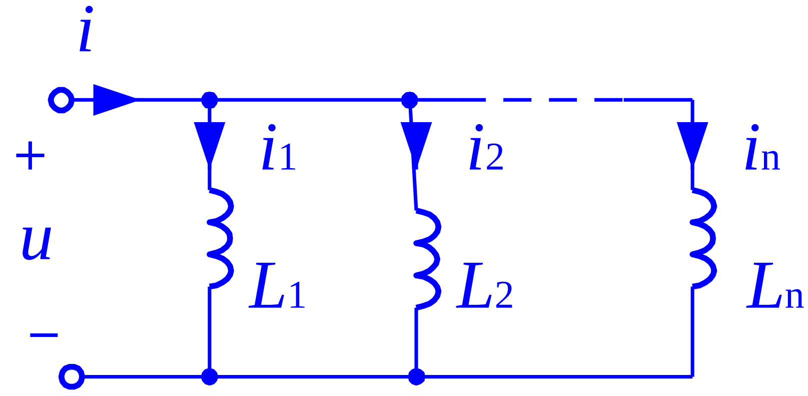
分压公式

$$\boxed{u_k = \frac{L_k}{L_{eq}} u}$$

四. 电感并联

电感并联电压u相同，根据电容VAR积分形式

$$i_k = \frac{1}{L_k}\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

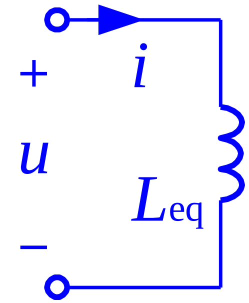


(a)

由KCL有 $i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$

$$= \frac{1}{L_1}\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{L_2}\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \cdots + \frac{1}{L_n}\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}\right)\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$



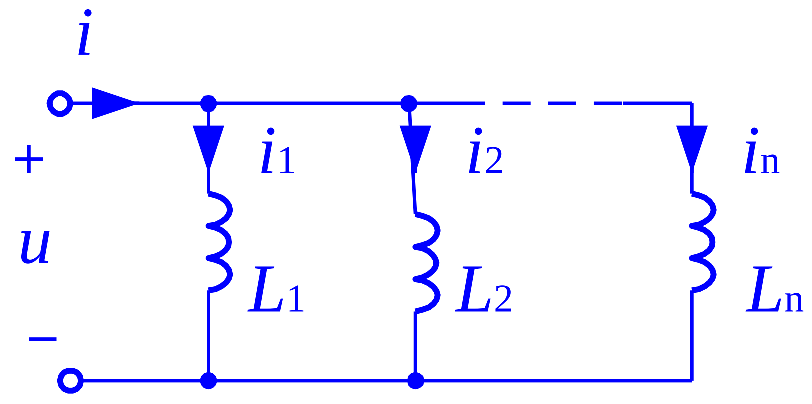
(b)

$$i = \frac{1}{L_{eq}}\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\boxed{\therefore \quad \frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}}$$

分流公式

$$\boxed{i_k = \frac{L_{eq}}{L_k} i}$$



(a)

两个电感并联时，有

$$\boxed{L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}} \quad \boxed{i_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i, \quad i_2 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i}$$

五. 电容电感串并联总结

(1) 电感的串并联与电阻串并联形式相同，而电容的串并联与电导形式相同。

(2) 电感与电容也可以利用△-Y等效，但注意：**对电容用1/C代入。**