



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY

# 第3章 多维随机变量及其分布



概率论与数理统计课程组




CHAPTER 3

多维随机  
变量及其  
分布

- § 3. 1 二维随机变量及其联合分布函数
- § 3. 2 二维离散型随机变量及其联合分布律
- § 3. 3 二维连续型随机变量及其联合概率密度
- § 3. 4 边缘分布**
- § 3. 5 条件分布
- § 3. 6 随机变量的独立性
- § 3. 7 二维随机变量函数及其分布



## 3.4 边缘分布

上节将二维随机变量视为一个整体，讨论 $F(x, y)$ ，  
但 $X$ 、 $Y$ 也是一个随机变量，他们各自的分布函数如何？

### 定义

$X$ 、 $Y$  的分布函数记为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 称为**边缘分布函数**

$$\begin{cases} F_X(x) = F(x, +\infty) \\ F_Y(y) = F(+\infty, y) \end{cases}$$

因为  $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \leq +\infty)$

令联合分布函数  $F(x, y)$  中的  $y \rightarrow +\infty$  得到  $F_X(x)$



## 二维离散型随机变量

$(X, Y)$  联合分布律为  $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$

$X, Y$  的边缘分布函数为

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \quad F_Y(y) = F(+\infty, y) = \sum_{y_j \leq y} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$$

因为  $X$  的分布律  $P(X = x_i) = P(X = x_i, Y < +\infty) = \sum_j p_{ij}$   
 记为  $= p_{i\cdot} \quad i = 1, 2, \dots$

因为  $Y$  的分布律  $P(Y = y_j) = P(X < +\infty, Y = y_j) = \sum_i p_{ij}$   
 记为  $= p_{\cdot j} \quad j = 1, 2, \dots$

由联合分布律的表格写出边缘分布律

$X \backslash Y$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_j$	$\dots$	$P(X = x_i)$
$x_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$\dots$	$p_{1j}$	$\dots$	$p_{1\cdot}$
$x_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	$\dots$	$p_{2j}$	$\dots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$x_i$	$p_{i1}$	$p_{i2}$	$\dots$	$p_{ij}$	$\dots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$P(Y = y_j)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\dots$	$p_{\cdot j}$	$\dots$	1

记号  $p_{i\cdot}$  中  $\cdot$  表示  $p_{i\cdot}$  是由  $p_{ij}$  关于  $j$  求和后得到的;  
 同样  $p_{\cdot j}$  是由  $p_{ij}$  关于  $i$  求和后得到的



**例** 对一群体的吸烟及健康状况进行调查，引入随机变量 $X$ 和 $Y$ 如下：

$$X = \begin{cases} 0, & \text{健康} \\ 1, & \text{一般} \\ 2, & \text{不健康} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 0, & \text{不吸烟} \\ 10, & \text{一天吸烟不多于15支} \\ 20, & \text{一天吸烟多于15支} \end{cases}$$

$X \backslash Y$	0	10	20
0	0.35	0.04	0.025
1	0.025	0.15	0.04
2	0.020	0.10	0.25

根据调查结果，得 $(X, Y)$ 的如下的联合分布律：

(i) 关于 $X$ 和 $Y$ 的边缘分布律；

(ii) 求 $P(X=2|Y=20)$

**解**

(i)

$X$	0	1	2
$P$	0.415	0.215	0.370

$Y$	0	10	20
$P$	0.395	0.290	0.315

(ii) 
$$P(X = 2|Y = 20) = \frac{P(X = 2, Y = 20)}{P(Y = 20)} = \frac{0.25}{0.315} = 0.794$$



例

已知 $(X, Y)$ 的联合分布律为

已知 $P(Y=1|X=1)=0.5$ , 求:

(i)  $a$ 、 $b$ 的值;

(ii)  $X$ 、 $Y$ 的边缘分布律; (iii) 求 $P(X=1|Y=1)$ 。

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	0.1	$a$	0.2
2	0.1	0.2	$b$

解

(i) 由分布律性质知  $a+b+0.6=1$  即  $a+b=0.4$

$$P(Y=1|X=1) = \frac{0.2}{0.3+a} \Rightarrow \frac{0.2}{0.3+a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a=0.1, b=0.3$$

$$(ii) \begin{array}{c|cc} X & 1 & 2 \\ \hline p_{i\cdot} & 0.4 & 0.6 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} Y & -1 & 0 & 1 \\ \hline p_{\cdot j} & 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{array}$$

$$(iii) P(X=1|Y=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$$



## 二维连续型随机变量

( $X$ 、 $Y$ ) 联合概率密度为  $f(x, y)$ ，联合分布函数为  $F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv$

$X$ 、 $Y$  的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

$$\text{因为 } F_X(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y) dy \right] dt = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

$$\text{因为 } F_Y(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^y \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dx \right] dt = \int_{-\infty}^y f_Y(t) dt$$

$f_X(x)$  和  $f_Y(y)$  是 ( $X, Y$ ) 关于  $X$  和关于  $Y$  的边缘概率密度



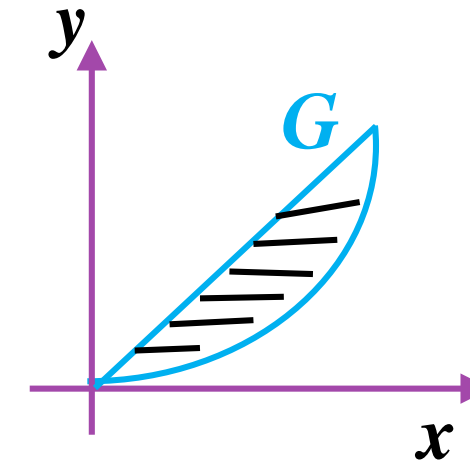
例

设 $G$ 是平面上的有界区域，其面积为 $A$ ，若二维随机变量 $(X, Y)$ 具有联合概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/A, & (x, y) \in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则称 $(X, Y)$ 在 $G$ 上服从均匀分布。现设 $(X, Y)$ 在有界区域 $x^2 \leq y \leq x$ 上服从均匀分布，其联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & x^2 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{求边缘概率密度 } f_X(x) \text{ 和 } f_Y(y)$$



解

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{x^2}^x 6 dy = 6(x - x^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx = 6(\sqrt{y} - y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

二维均匀分布 $(X, Y) \sim U(G)$ :  
 $(X, Y) \sim$ 在 $G$ 的任一子区域取值的概率  
等价于平面区域 $G$ 的几何概率





**例** 若二维随机变量 $(X, Y)$ 具有联合概率密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} \quad (-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty)$$

其中 $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 、 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 都是常数，且 $\sigma_1 > 0$ 、 $\sigma_2 > 0$ 、 $-1 < \rho < 1$ 。称 $(X, Y)$ 服从参数为 $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 、 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\rho$ 的**二维正态分布**，记为  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ ，求二维正态分布的边缘概率密度。

**解**

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right]^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \left\{ y - \left[ \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x-\mu_1) \right] \right\}^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \quad -\infty < x < +\infty \end{aligned}$$

同理  $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \quad -\infty < y < +\infty$

即二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，且都不依赖于参数 $\rho$ ；**反推不成立**

**如果只知道关于 $X$ 和关于 $Y$ 的边缘概率分布，一般不能推导出 $X$ 和 $Y$ 的联合概率分布**



## ○ 本节回顾

### □ 边缘分布函数

$X$ 、 $Y$  的分布函数记为  $F_X(x)$  和  $F_Y(y)$  称为**边缘分布函数**

$$\begin{cases} F_X(x) = F(x, +\infty) \\ F_Y(y) = F(+\infty, y) \end{cases}$$

### □ 二维离散型随机变量的边缘分布律

$(X, Y)$  联合分布律为  $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$

$$P(X = x_i) = P(X = x_i, Y < +\infty) = \sum_j p_{ij} \overset{\text{记为}}{=} p_{i\cdot} \quad i = 1, 2, \dots$$

$$P(Y = y_j) = P(X < +\infty, Y = y_j) = \sum_i p_{ij} \overset{\text{记为}}{=} p_{\cdot j} \quad j = 1, 2, \dots$$

### □ 二维连续型随机变量的边缘概率密度

$(X, Y)$  联合概率密度为  $f(x, y)$ , 联合分布函数为  $F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv$

$X$ 、 $Y$  的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$



CHAPTER 3

多维随机  
变量及其  
分布

- § 3. 1 二维随机变量及其联合分布函数
- § 3. 2 二维离散型随机变量及其联合分布律
- § 3. 3 二维连续型随机变量及其联合概率密度
- § 3. 4 边缘分布
- § 3. 5 条件分布**
- § 3. 6 随机变量的独立性
- § 3. 7 二维随机变量函数及其分布





## 3.5 条件分布

之前定义了条件概率，两事件 $A$ 、 $B$ ，若 $P(A)>0$ ，则可考虑在 $A$ 发生前提下 $B$ 发生的概率：

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

对二维随机变量，也可类似分析

### ● 二维离散型随机变量的条件分布

$(X, Y)$ 联合分布律为  $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$

边缘分布律为  $P(X = x_i) = p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}$

$$P(Y = y_j) = p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}$$





### 定义

若  $P(Y = y_j) = p_{\bullet j} > 0$

考虑条件概率  $P(X = x_i | Y = y_j), i, j = 1, 2, \dots$

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, i = 1, 2, \dots$$

称为  $Y=y_j$  条件下，随机变量  $X$  的**条件分布律**

同理，若  $P(X = x_i) = p_{i\bullet} > 0$

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}, j = 1, 2, \dots$$

称为  $X=x_i$  条件下，随机变量  $Y$  的**条件分布律**



例

盒子里装有3只黑球，4只红球，3只白球，在其中任取2球，以 $X$ 表示取到黑球的数目， $Y$ 表示取到红球的只数。

求：(i)  $X$ 、 $Y$  的联合分布律；(ii)  $X=1$ 时 $Y$  的条件分布律；

(iii)  $Y=0$ 时 $X$  的条件分布律。

解

(i)  $X$ 、 $Y$  的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/15	4/15	2/15
1	3/15	4/15	0
2	1/15	0	0

(iii)

$X$	0	1	2
$P(X=k   Y=0)$	1/5	3/5	1/5

(ii) 由于  $P(X=1)=7/15$

故在 $X=1$ 时 $Y$  的条件分布

$$P(Y = 0 | X = 1) = 3/7$$

$$P(Y = 1 | X = 1) = 4/7$$

$$P(Y = 2 | X = 1) = 0$$

$Y$	0	1	2
$P(Y=k   X=1)$	4/7	3/7	0



例

一射手进行射击，击中目标的概率为  $p$  ( $0 < p < 1$ )，射击直至击中目标两次为止，设以  $X$  表示首次击中目标所进行的射击次数，以  $Y$  表示总共进行的射击次数，试求  $X$  和  $Y$  的联合分布律和条件分布律。

要点：第  $m$  次击中第一次，第  $n$  次击中第二次，其他  $n-2$  次均未击中

解

$(X, Y)$  的联合分布律为  $P(X = m, Y = n) = p^2 q^{n-2}$ ,  $q = 1 - p$ ,  $n = 2, 3, \dots$ ,  $m = 1, 2, \dots, n-1$

$X$  的边缘分布律为  $P(X = m) = \sum_{n=m+1}^{\infty} P(X = m, Y = n) = \sum_{n=m+1}^{\infty} p^2 q^{n-2} = pq^{m-1}$ ,  $m = 1, 2, \dots$

$Y$  的边缘分布律为  $P(Y = n) = \sum_{m=1}^{n-1} P(X = m, Y = n) = \sum_{m=1}^{n-1} p^2 q^{n-2} = (n-1)p^2 q^{n-2}$ ,  $n = 2, 3, \dots$

于是，对于每一  $(n = 2, 3, \dots)$ ,  $P(Y = n) > 0$  在  $Y=n$  条件下， $X$  的条件分布律为

$$P(X = m | Y = n) = \frac{P(X = m, Y = n)}{P(Y = n)} = \frac{p^2 q^{n-2}}{(n-1)p^2 q^{n-2}} = \frac{1}{n-1}, \quad m = 1, 2, \dots, n-1$$

对于每一  $m(m = 1, 2, \dots)$ ,  $P(X = m) > 0$  在  $X=m$  条件下， $Y$  的条件分布律为

$$P(Y = n | X = m) = \frac{P(X = m, Y = n)}{P(X = m)} = \frac{p^2 q^{n-2}}{pq^{m-1}} = pq^{n-m-1}, \quad n = m+1, m+2, \dots$$



## 二维连续型随机变量的条件分布

对任意 $x$ 和 $y$ ，均有  $P(X = x) = 0$ 、 $P(Y = y) = 0$  无法定义“条件分布函数”？ 不能用下式

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x | Y = y) = \frac{P(X \leq x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

虽然 $P(Y=y)=0$ ，但可设 $\varepsilon>0$ ，对于任意 $x$ ，考虑条件概率  $P(X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon)$

设  $P(y < Y \leq y + \varepsilon) > 0$  则 
$$P(X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon) = \frac{P(X \leq x, y < Y \leq y + \varepsilon)}{P(y < Y \leq y + \varepsilon)} = \int_{-\infty}^x \left[ \int_y^{y+\varepsilon} f(t, v) dv \right] dt \bigg/ \int_y^{y+\varepsilon} f_Y(v) dv$$

当  $\varepsilon > 0$  时，上式为 
$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon) = \int_{-\infty}^x \left[ \int_y^{y+\varepsilon} f(t, v) dv \right] dt \bigg/ \int_y^{y+\varepsilon} f_Y(v) dv$$

$$\approx \frac{\varepsilon \int_{-\infty}^x f(t, y) dt}{\varepsilon f_Y(y)} = \int_{-\infty}^x \frac{f(t, y)}{f_Y(y)} dt$$

对比一维随机变量的概率密度  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$  可见  $\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$  是二维随机变量的条件概率密度





由定义  $f_{X|Y}(x|y) = \frac{\partial}{\partial x} F_{X|Y}(x|y) \Rightarrow f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$

事实上 
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F_{X|Y}(x|y) &= \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{P(X \leq x, y < Y \leq y + \varepsilon)}{P(y < Y \leq y + \varepsilon)} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{F(x, y + \varepsilon) - F(x, y)}{F_Y(y + \varepsilon) - F_Y(y)} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\frac{F(x, y + \varepsilon) - F(x, y)}{\varepsilon}}{\frac{F_Y(y + \varepsilon) - F_Y(y)}{\varepsilon}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}}{\frac{dF_Y(y)}{dy}} \\ &= \frac{\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}}{f_Y(y)} = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \end{aligned}$$



### 定义

若 $(X, Y)$  联合概率密度为 $f(x, y)$ ,  $(X, Y)$ 关于 $Y$ 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$ ,  
若对于固定 $y$ ,  $f_Y(y) > 0$ , 则称

$\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$  为 $Y=y$  条件下随机变量 $X$  的**条件概率密度**

记为  $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$

函数  $\int_{-\infty}^x f_{X|Y}(t|y) dt = \int_{-\infty}^x \frac{f(t, y)}{f_Y(y)} dt$

为 $Y=y$  条件下随机变量 $X$  的**条件分布函数**, 记为  $F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x | Y = y)$



**例** 设二维随机变量 $(X, Y)$ 在区域 $\{(x, y): |y| < x < 1\}$ 内均匀分布,  
求条件概率密度  $f_{X|Y}(x|y)$  和  $P(X > \frac{2}{3} | Y = \frac{1}{2})$

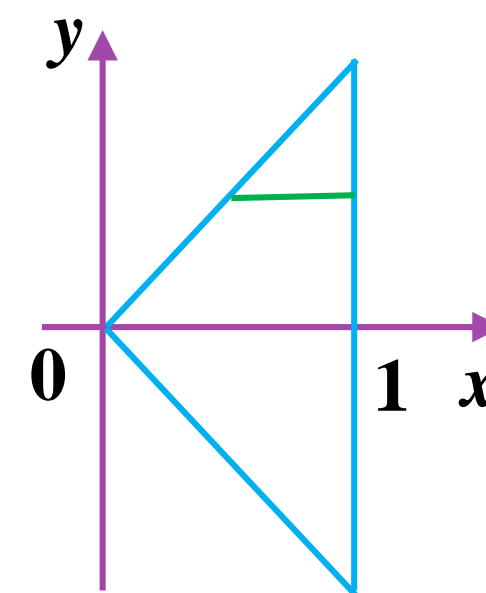
**解** 据题意,  $(X, Y)$  的联合概率密度为  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$Y$  的边缘概率密度为  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \begin{cases} \int_{|y|}^1 dx = 1 - |y|, & -1 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

于是给定  $y(-1 < y < 1)$ ,  $X$  的条件概率密度为  $f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{1 - |y|}, & |y| < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$P(X > \frac{2}{3} | Y = \frac{1}{2}) = \int_{2/3}^{+\infty} f_{X|Y}(x | \frac{1}{2}) dx = \int_{2/3}^1 2 dx = \frac{2}{3}$$

二维均匀分布的条件分布仍为均匀分布





例

设数 $X$ 在区间 $(0, 1)$ 上随机取值, 当观察到 $X=x$  ( $0 < x < 1$ )时, 数 $Y$ 在区间 $(x, 1)$ 上随机取值, 求 $Y$ 的概率密度 $f_Y(y)$

解

设数为求 $Y$ 的概率密度, 就要先求 $(X, Y)$ 的联合概率密度;  
而根据 $X$ 的边缘概率密度和 $Y$ 在 $X$ 给定下的条件概率密度, 即可求得求 $(X, Y)$ 的联合概率密度

$X$ 的边缘概率密度是  $f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

对于任意 $x$  ( $0 < x < 1$ )时, 在 $X=x$ 条件下,  $Y$ 条件概率密度为  $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

$(X, Y)$ 的联合概率密度为  $f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x < y < 1, 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

所以 $Y$ 的边缘概率密度为  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-y) & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$





## 联合分布、边缘分布和条件分布小结

### 二维随机变量的分布函数

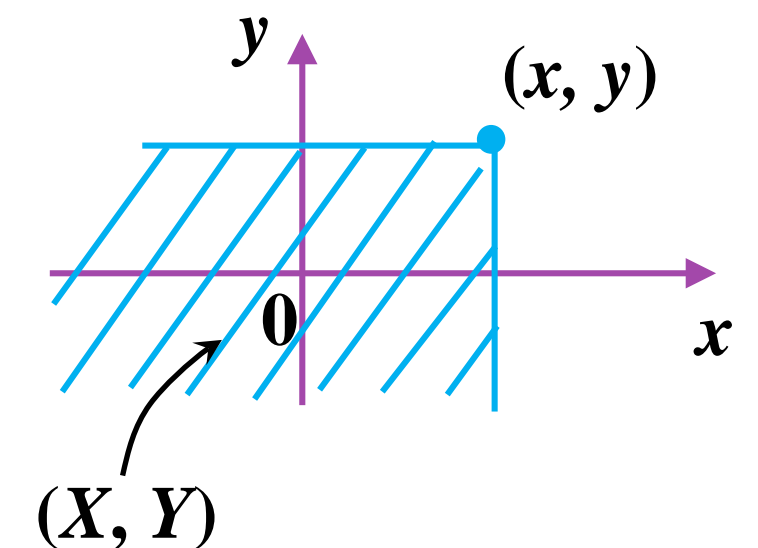
**联合分布函数**  $F(x, y) = P\{(X \leq x) \cap (Y \leq y)\} \stackrel{\text{记成}}{=} P(X \leq x, Y \leq y) \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$

$$F(-\infty, -\infty) = 0, F(+\infty, +\infty) = 1$$

对任意固定  $y$ ,  $F(-\infty, y) = 0$ ; 对任意固定  $x$ ,  $F(x, -\infty) = 0$

$F(x, y)$  关于  $x, y$  是不减函数、右连续

若  $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ , 则  $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \geq 0$



**边缘分布函数**  $F_X(x) = F(x, +\infty) = P(X \leq x) \quad F_Y(y) = F(+\infty, y) = P(Y \leq y)$

**条件分布函数**  $F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x | Y = y)$  为  $Y=y$  条件下随机变量  $X$  的**条件分布函数**

$F_{Y|X}(y|x) = P(Y \leq y | X = x)$  为  $X=x$  条件下随机变量  $Y$  的**条件分布函数**

## 二维离散型随机变量

**联合分布律**  $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$

**联合分布函数**  $F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$

**边缘分布律**

$$P(X = x_i) = P(X = x_i, Y \leq +\infty) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \stackrel{\text{记为}}{=} p_{i\cdot} \quad i = 1, 2, \dots$$

$$P(Y = y_j) = P(X \leq +\infty, Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \stackrel{\text{记为}}{=} p_{\cdot j} \quad j = 1, 2, \dots$$

**边缘分布函数**  $F_X(x) = F(x, +\infty) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$   $F_Y(y) = F(+\infty, y) = \sum_{y_j \leq y} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$

**条件分布律**

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, i = 1, 2, \dots \quad \text{为 } Y=y_j \text{ 条件下, 随机变量 } X \text{ 的条件分布律}$$

$X \backslash Y$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_j$	$\dots$	$P(X = x_i)$
$x_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$\dots$	$p_{1j}$	$\dots$	$p_{1\cdot}$
$x_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	$\dots$	$p_{2j}$	$\dots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$x_i$	$p_{i1}$	$p_{i2}$	$\dots$	$p_{ij}$	$\dots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$P(Y = y_j)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\dots$	$p_{\cdot j}$	$\dots$	1



## 二维连续型随机变量

**联合概率密度与联合分布函数**  $F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv$

**边缘概率密度**  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$        $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

**边缘分布函数**  $F_X(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y) dy \right] dt = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^y \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dx \right] dt = \int_{-\infty}^y f_Y(t) dt$$

**条件概率密度**  $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$  为  $Y=y$  条件下随机变量  $X$  的条件概率密度

**条件分布函数**  $F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(t/y) dt$  为  $Y=y$  条件下随机变量  $X$  的条件分布函数



$$\text{条件分布} = \frac{\text{联合分布}}{\text{边缘分布}} \quad \text{联合分布} = \text{边缘分布} \times \text{条件分布}$$

## 二维离散型随机变量

**条件分布律**  $P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, i = 1, 2, \dots$  为  $Y=y_j$  条件下, 随机变量  $X$  的**条件分布律**

**联合分布律**  $P(X = x_i, Y = y_j) = P(Y = y_j)P(X = x_i | Y = y_j) = p_{\cdot j} p_{i|j}, i, j = 1, 2, \dots$

## 二维连续型随机变量

**条件概率密度**  $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$  为  $Y=y$  条件下随机变量  $X$  的条件概率密度

**联合概率密度**  $f(x, y) = f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)$





## ○ 本节回顾

### □ 二维离散型随机变量的条件分布律

若  $P(Y = y_j) = p_{\bullet j} > 0$

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

称为  $Y=y_j$  条件下, 随机变量  $X$  的**条件分布律**

### □ 二维连续型随机变量的条件概率密度

若  $(X, Y)$  联合概率密度为  $f(x, y)$ ,  $(X, Y)$  关于  $Y$  的边缘概率密度为  $f_Y(y)$ ,  
若对于固定  $y$ ,  $f_Y(y) > 0$ , 则称

$\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$  为  $Y=y$  条件下随机变量  $X$  的**条件概率密度** 记为  $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$