西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

第7章 参数估计


概率论与数理统计课程组

CHAPTER 7

参数估计

7.2 区间估计

点估计是由样本求出未知参数θ的一个估计值，区间估计则是由样本给出参数θ的一个估计范围，并指出该区间包含θ 的可靠程度。

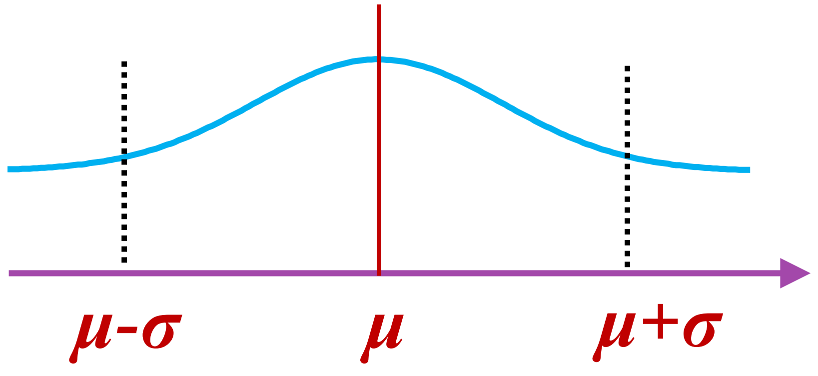
可靠性与精度是相互矛盾的

引例

一果园收获了30万个苹果，抽取其中36个苹果作为样本，测得样本均值为112g（标准差为40g），问：30万个苹果的均值 μ 落在100~124 g的概率是多少？

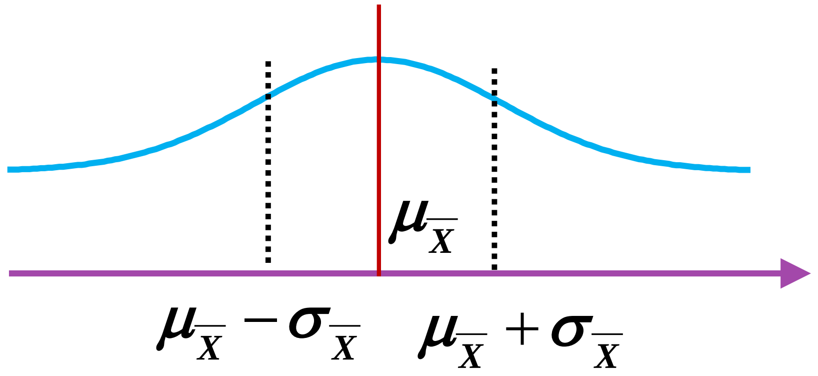
30万个苹果可视为总体，其均值μ和方差σ^2未知；
样本容量36，样本均值的一观察值为112，样本标准差的一观察值为40（注意样本标准差是 S 不是σ）

总体分布 $\sim N(\mu,\sigma^2)$



$\mu_{\overline{X}}=\mu \qquad \sigma_{\overline{X}}=\sigma/\sqrt{n}$

样本分布 $\sim N(\mu_{\overline{X}},\sigma_{\overline{X}}{}^2)$



$\mu_{\overline{X}}=112 \qquad \sigma_{\overline{X}}=40 \qquad n=36$

题意是求总体均值 μ 落在样本均值 $\overline{X}$ 左右12g范围内的概率

实际也可转为求样本均值 $\overline{X}$ 落在总体均值 μ 左右12g范围内的概率

可以用样本均值的抽样分布

$$P\left(\left|\overline{X}-\mu\right|<12\right)=P\left(\left|\overline{X}-\mu_{\overline{X}}\right|<12\right)$$

虽然 $\sigma_{\overline{X}}=\sigma/\sqrt{n}=\sigma/6$ 但是σ仍是未知， 所以只能用最好的估计值来替代σ，也即是样本标准差S

S的一个测量值 $s=40$，因此 $\sigma_{\overline{X}}=\sigma/\sqrt{n}=\sigma/6=40/6$

$$\frac{\overline{X}-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\sim N(0,1) \qquad P\left(\left|\overline{X}-\mu_{\overline{X}}\right|<12\right)=P\left(\left|\overline{X}-\mu_{\overline{X}}\right|<\frac{9}{5}\sigma_{\overline{X}}\right)=\Phi(1.8)-\Phi(-1.8)=2\Phi(1.8)-1=0.9282$$

本引例说明，可以由小样本的较少信息尽可能获得更多信息

有92.82%的概率测量样本均值落在实际均值左右12g范围

也就是说: 有92.82%的概率实际均值落在样本均值左右12g范围

→正确的概率

有92.82%的可能性（置信水平）总体均值落在样本均值左右12g的范围（置信区间）

设$(X_1, X_2, \dots, X_n)$是总体X的一个样本，区间估计的方法是给出两个统计量，即

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) \quad 与 \quad \overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

使得区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 以一定的可靠程度盖住θ

置信区间 置信水平

定义 1- α为置信水平

设总体X的分布函数$F(x;\theta)$含有一个未知参数θ，$\theta \in \Theta$，Θ是θ可能的取值范围，对于给定值α $(0<\alpha<1)$，若由来自总体X的样本$X_1, X_2, \dots, X_n$确定的两个统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

和 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 而 $\underline{\theta}<\overline{\theta}$ 且对任意$\theta \in \Theta$有

$$P\left\{\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\right\}=1-\alpha$$

称随机区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$是参数$\theta$的置信水平为1- α的(双侧)置信区间

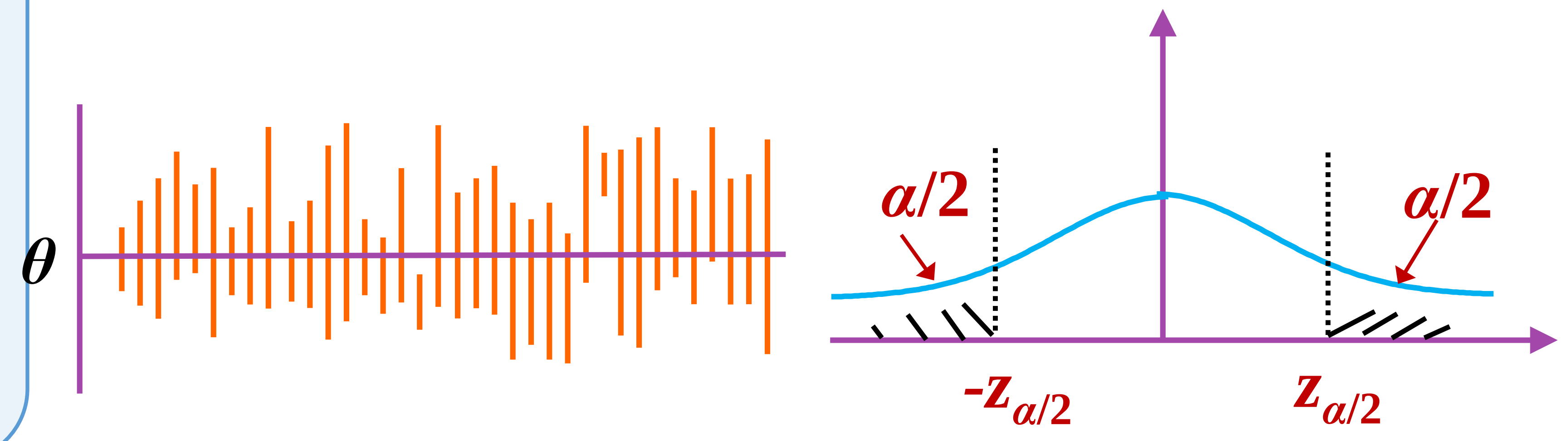
$\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$分别为参数θ在该置信水平的双侧置信区间的置信下限和置信上限

置信区间的含义

若反复抽样多次，每个样本值确定一个区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$

每个这样的区间或包含θ的真值，或不包含θ的真值

例如：当$\alpha=0.05$，即置信水平为95%时，区间不包含θ值的概率为0.05，20次区间中只有大约1个不包含θ值（用频率值理解）；当$\alpha=0.01$，即置信水平为99%时，100次区间中将约有99个包含θ值



求未知参数θ置信区间的步骤

1 • 构造一个待估参数θ及样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$的函数，称为枢轴量W（注意不能称其为统计量，因为必须含未知参数θ），W服从的分布（一般是四大分布的一种）不依赖于θ及其他任意未知参数（根据八大分布所述规则），即

$$W = W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$$

2 • 对于给定的置信水平$1-\alpha$，选定两个常数a、b（上分位点），使得

$$P\{a < W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b\} = 1 - \alpha$$

3 • 通过上述定W范围在(a, b)的不等式解出等价的不等式，$\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$

即 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都是统计量

从而解得θ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$

正态总体区间估计的枢轴量选择（八大分布）

枢轴量是样本和待估参数的函数

❖ 单个正态总体

- 检验均值 μ
  - σ^2已知 → 1 枢轴量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$
  - σ^2未知 → 4 枢轴量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$
- 检验方差 σ^2
  - μ已知 → 2 枢轴量 $\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$
  - μ未知 → 3 枢轴量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

❖ 两个相互独立正态总体

检验均值差 μ_1-μ_2

σ_1^2、σ_2^2 已知

5 枢轴量 $$U=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)$$

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知

6 枢轴量 $$t=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

检验方差比 σ_1^2/σ_2^2

μ_1、μ_2 已知

7 枢轴量 $$F=\frac{n_2\sigma_2^2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sigma_1^2\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\sim F(n_1,n_2)$$

μ_1、μ_2 未知

8 枢轴量 $$F=\frac{\sigma_2^2S_1^2}{\sigma_1^2S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

单个正态总体$N(\mu, \sigma^2)$参数的置信区间

设已给定置信水平为$1-\alpha$，并设$X_1, X_2, \dots, X_n$是来自总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本

$\overline{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差

❖ μ未知，σ^2已知　求μ置信水平为$1-\alpha$的置信区间

后面讲 (因$\overline{X}$是μ的无偏估计)，且有 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$　$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 所服从的分布$N(0, 1)$不依赖任何参数

按照其上α分位点定义，有 $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < \boxed{z_{\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$　即 $P\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2} < \mu < \overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$

置信区间为 $\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$　或记为 $\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$

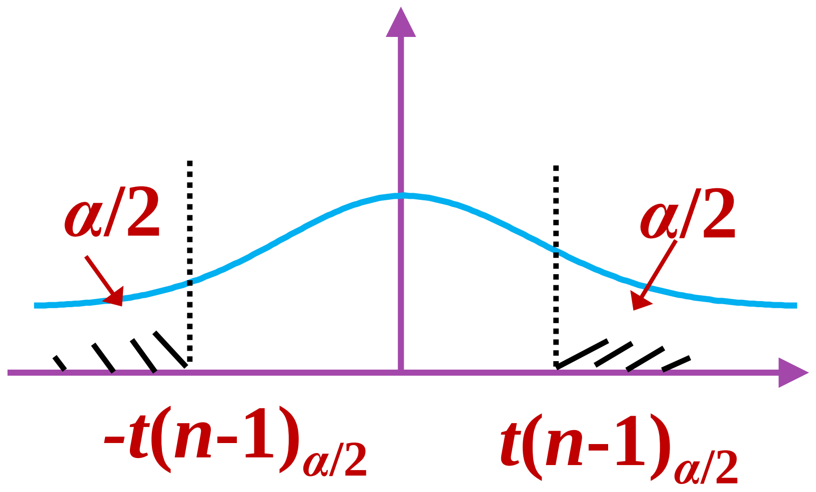
注意：置信水平为的$1-\alpha$双侧置信区间并不唯一　若 $\alpha = 0.05$　$P\left(-z_{0.04} < \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{0.01}\right) = 0.95$

❖ μ未知，σ^2未知　　求μ置信水平为1- α的置信区间

$X_1, X_2, \dots, X_n$是来自总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差

σ^2未知，不可使用区间 $\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$

σ不可出现在结果的统计量中，只能使用S



由第6章定理，$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = P\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

置信区间为 $\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$　或记为 $\left(\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

例 设某种植物的高度X (cm) 服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，随机选取36棵，其平均高度为15 cm，就以下两种情形，求μ的95%双侧置信区间：(i) $\sigma^2=16$，(ii) σ^2未知，$S^2=16$。

解 (i) $n=36 \quad \bar{x}=15 \quad \sigma=4$ 　置信水平为$1-\alpha$

预先整理已知条件

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Step 1 根据四大分布、八大分布，构造一个样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 以及含有待估参数的函数，称为枢轴量

分布

$$P\left(-z_{\alpha/2}<\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

Step 2 使得枢轴量的取值在两个分位点之间，分位点由置信水平确定

$$P\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+z_{\alpha/2}\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95 \qquad P\left(\bar{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

得 $\bar{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=15-\frac{1.96\times 4}{\sqrt{36}}=13.693$ 　$\bar{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=15+\frac{1.96\times 4}{\sqrt{36}}=16.307$

μ的95%双侧置信区间 $(13.693, 16.307)$

Step 3 查上分位表，代已知数据，整理求解不等式

例 设某种植物的高度X (cm) 服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，随机选取36棵，其平均高度为15 cm，就以下两种情形，求μ的95%双侧置信区间：(i) $\sigma^2=16$，(ii) σ^2未知，$S^2=16$。

解 (ii) $n=36$　$\bar{x}=15$　$s^2=16$　置信水平为$1-\alpha$　预先整理已知条件

$$t=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$ Step 1

$$P\left(-t_{\alpha/2}(n-1)<\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha/2}(n-1)\right)=1-\alpha$$ Step 2

$$P\left(\bar{X}-t_{0.025}\times\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+t_{0.025}\times\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=1-0.05$$

查表得 $t_{0.025}(35)=2.0301$　又 $15-\frac{2.0301\times 4}{6}=13.647$　$15+\frac{2.0301\times 4}{6}=16.353$

μ的95%双侧置信区间 $(13.647, 16.353)$ Step 3

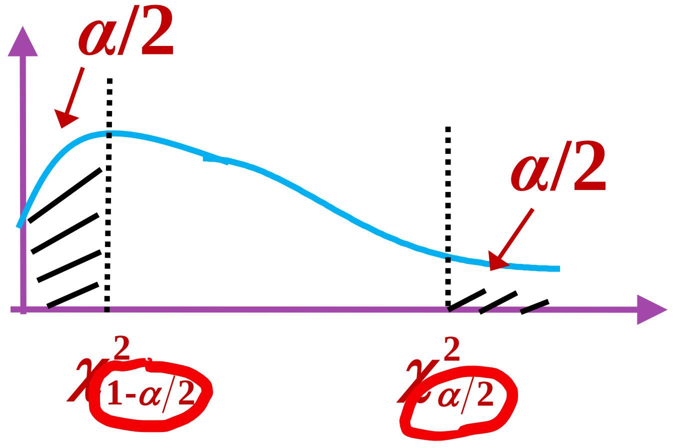
(i)、(ii)两情况 μ双侧置信区间
- σ^2已知　$(13.693, 16.307)$ 区间短，精度高
- σ^2未知，S^2已知 $(13.647, 16.353)$ 区间长，精度低

但σ^2未知的情形更为实用，用 t 分布求置信区间只依赖于样本数据及统计量 $\bar{X}$，S^2，n

❖ μ已知， σ^2未知　求σ^2置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本， μ已知，$\overline{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差

由第6章定理，



$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

由 $$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n) < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n)\right) = 1-\alpha$$

取 $$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right) = 1-\alpha$$

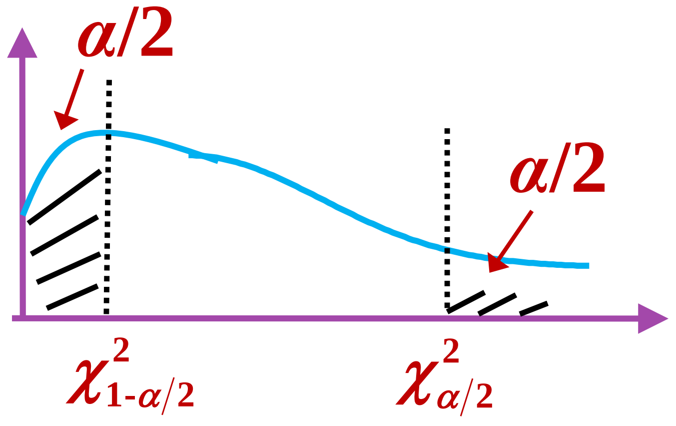
置信区间为 $$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$$

❖ μ未知， σ^2未知　求σ^2置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$X_1, X_2, \dots, X_n$是来自总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本， μ未知， $\overline{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差

由第6章定理，

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$



由 $$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

即 $$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = 1-\alpha$$

置信区间为 $$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

例 一个园艺科学家正在培养一个新品种的苹果，这种苹果除了口感好和颜色鲜艳以外，另一个重要特征是单个重量差异不大。为了评估新苹果，随机挑选了25个测重量(单位：g)，其样本方差为 $s^2=4.25$，试求σ^2 的置信度为95%和的99%的置信区间。

解 $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$ Step 1

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\le\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right)=1-\alpha$$ Step 2 $$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=1-\alpha$$

置信水平为95% $P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(24)}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-0.025}(24)}\right)=1-0.05$ 查表得 $\chi^2_{0.025}(24)=39.4,\ \chi^2_{0.975}(24)=12.4$

又 $\frac{(25-1)\times4.25}{39.4}=2.59,\ \frac{(25-1)\times4.25}{12.4}=8.23$ 95%双侧置信区间 $(2.59,8.23)$ Step 3

置信水平为99% $\chi^2_{0.005}(24)=45.6,\ \chi^2_{0.995}(24)=9.89,\ \frac{(25-1)\times4.25}{45.6}=2.24,\ \frac{(25-1)\times4.25}{9.89}=10.31$

99%双侧置信区间 $(2.24,10.31)$

两个正态总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$、$N(\mu_2, \sigma_2^2)$参数的置信区间

设 $(X_1,\cdots,X_{n_1})$ 和 $(Y_1,\cdots,Y_{n_2})$ 分别是来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本，且两样本相互独立

设 $\overline{X}=\dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i$，$\overline{Y}=\dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i$ 分别是样本均值，

$S_1^2=\dfrac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\dfrac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$ 分别是样本方差

❖ σ_1^2已知， σ_2^2已知 求$\mu_1-\mu_2$置信水平为$1-\alpha$的置信区间

由 $\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$ 转为标准正态分布 $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$

置信区间为 $\left((\overline{X}-\overline{Y})\pm\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}z_{\alpha/2}\right)$

❖ $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$， σ^2未知 求$\mu_1-\mu_2$置信水平为1- α的置信区间

设$(X_1,\cdots,X_{n_1})$和$(Y_1,\cdots,Y_{n_2})$ 分别是来自正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本，且两样本相互独立

设$\overline{X}=\dfrac{1}{n_1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}X_i$，$\overline{Y}=\dfrac{1}{n_2}\sum\limits_{i=1}^{n_2}Y_i$ 分别是样本均值，

$S_1^2=\dfrac{1}{n_1-1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\dfrac{1}{n_2-1}\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$ 分别是样本方差

由第6章定理，$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$ 其中 $S_W^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$，$S_W=\sqrt{S_W^2}$

置信区间为 $\left((\overline{X}-\overline{Y})\pm S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right)$

若$\mu_1-\mu_2$置信区间包含0，实际中可认为这两个均值没有显著性区别

❖ μ_1、μ_2已知 求 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 置信水平为1- α的置信区间

设 $(X_1,\cdots,X_{n_1})$ 和 $(Y_1,\cdots,Y_{n_2})$ 分别是来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本，且两样本相互独立

由第6章定理，$\dfrac{n_2\sigma_2^2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sigma_1^2\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2} \sim F(n_1,n_2)$

$$P\left(\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_2,n_1)}=F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2)<\frac{n_2\sigma_2^2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sigma_1^2\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}<F_{\alpha/2}(n_1,n_2)\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1,n_2)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}F_{\alpha/2}(n_2,n_1)\right)=1-\alpha$$

置信区间为 $$\left(\frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1,n_2)},\ \frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}F_{\alpha/2}(n_2,n_1)\right)$$

❖ μ_1、μ_2未知　　求 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 置信水平为1- α的置信区间

设 $(X_1,\cdots,X_{n_1})$和$(Y_1,\cdots,Y_{n_2})$ 分别是来自正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本，且两样本相互独立

$S_1^2=\dfrac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\dfrac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$ 分别是样本方差

由第6章定理，$\dfrac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

$$P\left(\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)}=F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<\frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2}<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right)=1-\alpha$$

置信区间为 $\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \dfrac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right)$

该置信区间含1说明方差无显著性差别

例 设两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取8个，从乙机床生产的滚珠中抽取9个，测得这些滚珠得直径 (mm) 如下。

甲	15.0	14.8	15.2	15.4	14.9	15.1	15.2	14.8	
乙	15.2	15.0	14.8	15.1	14.6	14.8	15.1	14.5	15.0

设两机床生产的滚珠直径分别为X, Y，且

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，求：

(i) $\sigma_1^2=0.18$，$\sigma_2^2=0.24$，求$\mu_1-\mu_2$的置信水平为0.90的置信区间；

(ii) 若$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$未知，求$\mu_1-\mu_2$的置信水平为0.90的置信区间；

(iii) 若μ_1、μ_2未知，求 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为0.90的置信区间。

解 $n_1=8,\ \bar{x}=15.05,\ S_1^2=0.0457;$

$n_2=9,\ \bar{y}=14.9,\ S_2^2=0.0575$

(i) $\sigma_1^2=0.18$，$\sigma_2^2=0.24$，$\mu_1-\mu_2$的置信水平为0.90的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}z_{\alpha/2}\right)$$

查表得到 $z_{0.05}=1.645$ 所求区间为$(-0.018, 0.318)$

(ii) 若$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$未知，$\mu_1-\mu_2$的置信水平为0.90的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{1/n_1+1/n_2}\right)$$

$t_{0.05}(15)=1.7531,\ s_W=0.228,\ \sqrt{1/n_1+1/n_2}=0.486$

所求区间为 $(-0.044, 0.344)$

该置信区间含0说明均值无显著性差别

(iii) 若μ_1、μ_2未知，σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为0.90的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right)$$

由 $F_{0.05}(7,8)=3.50,\ F_{0.95}(7,8)=\dfrac{1}{F_{0.05}(8,7)}=\dfrac{1}{3.73}=0.268$

所求区间为 $(0.227, 2.965)$

该置信区间含1说明方差无显著性差别

小结

- ✓ 置信水平越高，区间越长，但区间精确度差（苛刻的命中要求→宽范的区间结果）
- ✓ 置信区间越短，精确度高，但置信水平低（更明确的区间结果→命中率的下降）

本节回顾

- 置信区间、置信水平
- 区间估计流程

1

• 构造一个待估参数θ及样本$X_1, X_2, \dots, X_n$的函数，称为枢轴量W，W服从的分布不依赖于θ及其他任意未知参数，即 $W = W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$

2

• 对于给定的置信水平1- α， 选定两个常数a、b（上分位点），使得

$$P\{a < W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b\} = 1 - \alpha$$

3

• 通过上述定W范围在(a, b)的不等式解出等价的不等式，$\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$

即 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都是统计量

从而解得θ的置信水平为1- α的置信区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$

CHAPTER 7

参数估计

7.3 单侧置信区间

有些问题中，我们仅关注某参数的上限（如雾霾浓度），或只关心某参数的下限（如器件寿命）

单侧置信区间

单侧置信区间的求取流程与双侧置信区间的方法类似

单侧置信下限

对于给定值α (0< α <1)，若由样本$X_1, X_2, \dots, X_n$确定的统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

对任意$\theta\in\Theta$满足 $P\{\theta>\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha$

称区间($\underline{\theta}$, $+\infty$)是θ 置信水平为1- α的单侧置信区间，$\underline{\theta}$称为θ 置信水平为1- α的单侧置信区间的置信下限

单侧置信上限

对于给定值α (0< α <1)，若由样本$X_1, X_2, \dots, X_n$确定的统计量 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

对任意$\theta\in\Theta$满足 $P\{\theta<\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha$

称区间($-\infty$, $\overline{\theta}$)是θ 置信水平为1- α的单侧置信区间，$\overline{\theta}$ 称为θ 置信水平为1- α的单侧置信区间的置信上限

单个正态总体均值、方差的双侧置信区间与单侧置信区间　　置信水平1-α

待估参数	μ	μ
其他参数	σ^2已知	σ^2未知
枢轴量	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$
双侧置信区间	$\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$	$\left(\overline{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
单侧置信区间	$\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha},+\infty\right)$ $\left(-\infty,\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}\right)$	$\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1),+\infty\right)$ $\left(-\infty,\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)\right)$

待估参数	σ^2	σ^2
其他参数	μ已知	μ未知
枢轴量	$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$
双侧置信区间	$\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$
单侧置信区间	$\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha}(n)},+\infty\right)$ $\left(0,\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)}\right)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)},+\infty\right)$ $\left(0,\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)$

两个相互独立正态总体均值、方差的双侧置信区间与单侧置信区间　置信水平1-α

待估参数	$\mu_1-\mu_2$	$\mu_1-\mu_2$
其他参数	σ_1^2 、σ_2^2 已知	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知
枢轴量	$U=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$t=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$
双侧置信区间	$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}z_{\alpha/2}\right)$	$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right)$
单侧置信区间	$\left((\bar{X}-\bar{Y})-\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}z_{\alpha},+\infty\right)$ $\left(-\infty,(\bar{X}-\bar{Y})+\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}z_{\alpha}\right)$	$\left((\bar{X}-\bar{Y})-S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}t_{\alpha}(n_1+n_2-2),+\infty\right)$ $\left(-\infty,(\bar{X}-\bar{Y})+S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}t_{\alpha}(n_1+n_2-2)\right)$

待估参数	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$
其他参数	μ_1、μ_2已知
枢轴量	$F=\dfrac{n_2\sigma_2^2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sigma_1^2\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\sim F(n_1,n_2)$
双侧置信区间	$\left(\dfrac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1,n_2)},\ \dfrac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}F_{\alpha/2}(n_2,n_1)\right)$
单侧置信区间	$\left(\dfrac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\dfrac{1}{F_{\alpha}(n_1,n_2)},+\infty\right)$ $\left(0,\ \dfrac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}F_{\alpha}(n_2,n_1)\right)$

待估参数	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$
其他参数	μ_1、μ_2未知
枢轴量	$F=\dfrac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$
双侧置信区间	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \dfrac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right)$
单侧置信区间	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)},\ +\infty\right)$ $\left(0,\ \dfrac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha}(n_2-1,n_1-1)\right)$

例 设某批轮胎的寿命(单位:公里)服从正态分布N(μ，4000^2)，现从中随机抽取n=100只，测得平均寿命为32000公里，试求参数的置信水平为0.95的单侧置信下限与对应的单侧置信区间 ($z_{0.05}$=1.645)。

解 由于 $\sigma^2 = 4000^2$，因此参数μ的置信水平为1-α的单侧置信下限为

$$\mu = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$$

$$n = 100,\quad \bar{x} = 3200,\quad \sigma = 4000,\quad 1-\alpha = 0.95,\quad \alpha = 0.05,\quad z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$$

故

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha = 32000 - \frac{4000}{\sqrt{100}} \times 1.645 = 31342$$

从而参数的置信水平为0.95的单侧置信下限为 $\underline{\mu} = 31342$

单侧置信区间为 (31342，$+\infty$)

例 从一批灯泡中随机抽取5只做寿命测试，计算得平均寿命为1160小时，标准差为99.75小时。设灯泡寿命服从正态分布，求灯泡寿命平均值 μ 置信水平为0.95的单侧置信下限与对应的单侧置信区间 ($t_{0.05}(4)$=2.1318) 。

解 由于 σ^2 未知，因此参数μ的置信水平为1-α的单侧置信下限为

$$\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)$$

$$n = 5, \quad \bar{x} = 1160, \quad s = 99.75, \quad 1-\alpha = 0.95, \quad \alpha = 0.05, \quad t_\alpha(n-1) = t_{0.05}(4) = 2.1318$$

故 $$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) = 1160 - \frac{99.75}{\sqrt{5}} \times 2.1318 = 1065$$

从而参数的置信水平为0.95的单侧置信下限为 $\underline{\mu} = 1065$

单侧置信区间为 $(1065, +\infty)$

本节回顾

单侧置信区间

单侧置信下限

对于给定值α (0< α <1)，若由样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$确定的统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

对任意$\theta \in \Theta$满足 $P\{\theta>\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\}=1-\alpha$

称区间$(\underline{\theta}, +\infty)$是$\theta$ 置信水平为1- α的单侧置信区间，$\underline{\theta}$称为θ 置信水平为1- α的单侧置信区间的置信下限

单侧置信上限

对于给定值α (0< α <1)，若由样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$确定的统计量 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

对任意$\theta \in \Theta$满足 $P\{\theta<\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\}=1-\alpha$

称区间$(-\infty, \overline{\theta})$是$\theta$ 置信水平为1- α的单侧置信区间，$\overline{\theta}$ 称为θ 置信水平为1- α的单侧置信区间的置信上限