CHAPTER 3

多维随机变量及其分布

§3.1 二维随机变量及其联合分布函数
§3.2 二维离散型随机变量及其联合分布律
§3.3 二维连续型随机变量及其联合概率密度
§3.4 边缘分布
§3.5 条件分布
§3.6 随机变量的独立性
§3.7 二维随机变量函数及其分布

3.7 二维随机变量函数及其分布

定义

设 (X, Y)是二维随机变量，$z=g(x, y)$是已知的连续函数，则称 $Z=g(X, Y)$为二维随机变量 (X, Y)的函数

显然，二维随机变量的函数是一维随机变量

二维离散型随机变量函数的分布

设二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律为

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots$$

则 $Z=g(X, Y)$的可能取值为 $z_l\ (l=1,2,\cdots)$ 其中 $z_l=g(x_i,y_j),\ \ i,j=1,2,\cdots$

Z 的分布律为 $P(Z=z_l)=\sum\limits_{g(x_i,y_j)=z_l} p_{ij},\ \ l=1,2,\cdots$

$$P(Z=z_l)=\sum_{g(x_i,y_j)=z_l} p_{ij},\quad l=1,2,\cdots$$

当 $Z=X+Y$时，

$$P(Z=z_l)=\sum_{x_i+y_j=z_l} p_{ij}=\sum_{x_i+y_j=z_l} P(X=x_i,Y=y_j)\;=\sum_i P(X=x_i,Y=z_l-x_i)$$

或 $$P(Z=z_l)=\sum_{x_i+y_j=z_l} p_{ij}=\sum_{x_i+y_j=z_l} P(X=x_i,Y=y_j)\;=\sum_j P(X=z_l-y_j,Y=y_j)$$

若X与Y相互独立

$$P(Z=z_l)=\sum_i P(X=x_i,Y=z_l-x_i)=\sum_i P(X=x_i)P(Y=z_l-x_i)$$

或 $$P(Z=z_l)=\sum_j P(X=z_l-y_j,Y=y_j)=\sum_j P(X=z_l-y_j)P(Y=y_j)$$

例 设二维离散型随机变量(X, Y) 的联合分布律如表，求$Z=XY$，$Z=X+Y$的分布律。

Y \ X	0	1	$P(Y=j)$
1	1/6	2/6	1/2
2	1/6	2/6	1/2
$P(X=i)$	1/3	2/3	

解 $Z=XY$时，Z的可能取值为0, 1, 2

$$P(Z=0)=P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2)=1/3$$

$$P(Z=1)=P(X=1,Y=1)=2/6$$

$$P(Z=2)=P(X=1,Y=2)=2/6$$

$Z=XY$时，Z的分布律

Z	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

$Z=X+Y$时，Z的可能取值为1, 2，3

$$P(Z=1)=P(X=0,Y=1)=1/6$$

$$=P(X=0)\times P(Y=1)=1/6$$

$$P(Z=2)=P(X=1,Y=1)+P(X=0,Y=2)=1/2$$

$$=P(X=1)\times P(Y=1)+P(X=0)\times P(Y=2)=1/2$$

$$P(Z=3)=P(X=1,Y=2)=1/3$$

$$=P(X=1)\times P(Y=2)=1/3$$

Z	1	2	3
P	1/6	1/2	1/3

二维连续型随机变量函数的分布　　Z=X+Y 的分布

设$(X、Y)$为二维连续型随机变量，联合概率密度为$f(x,y)$， 求$Z=X+Y$概率密度$f_Z(z)$

可先求Z的分布函数$F_Z(z)$

需要改为积分上限为z

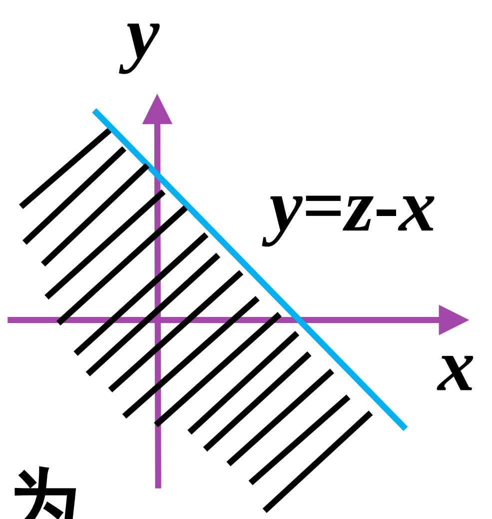
$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx\right]dy$$

固定z、y，令x=u-y，dx=du

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)du\right]dy=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)dy\right]du=\int_{-\infty}^{z} f_Z(u)du$$

故$Z=X+Y$的概率密度为　$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$

由X、Y的对称性，又可记为　$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$



又若 X、Y 相互独立，$(X、Y)$关于X、Y的边缘概率密度分别为$f_X(x)$、$f_Y(y)$，又可记为

$$f_X * f_Y=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

——f_X和f_Y的卷积公式

例 设X和Y是相互独立的标准正态分布随机变量，求$Z=X+Y$的概率密度。

解 由卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$

$$\overset{令t=x-\frac{z}{2}}{=\!=}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}$$

即 $Z\sim N(0, 2)$

若 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 且二者独立

则 $aX+bY+c\sim N(a\mu_1+b\mu_2+c,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$

若 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ 且独立

则 $X_1+X_2+\cdots+X_n\sim N(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n,\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2)$

n个独立正态随机变量的线性组合（系数不全为0）仍然服从正态分布

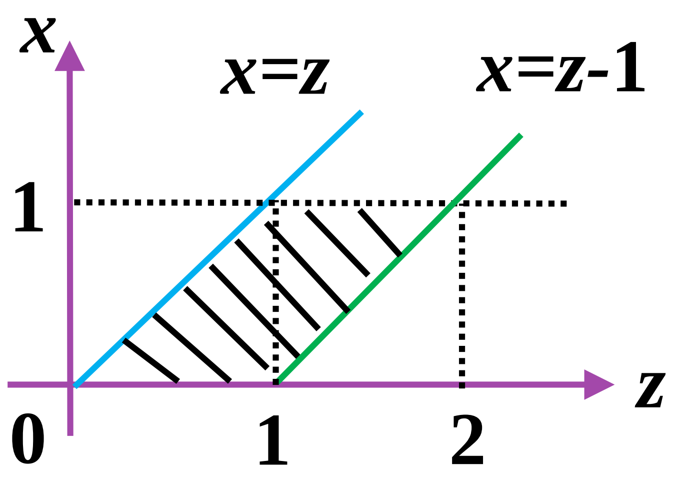
例 设X 和Y 相互独立，它们各自均服从(0, 1)上的均匀分布，求$Z=X+Y$ 的概率密度。

解 X 和Y的概率密度分别为 $f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

由卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$

易知仅当

$\begin{cases}0<x<1\\ 0<z-x<1\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<x<1\\ z-1<x<z\end{cases}$ 时上述积分的被积函数不等于0



参考图得 $f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z dx=z & 0<z<1\\ \int_{z-1}^1 dx=2-z & 1\le z<2\\ 0 & 其他\end{cases}$

$Z=\dfrac{Y}{X}$ 和 $Z=XY$ 的分布

设$(X、Y)$ 为连续型随机变量，联合概率密度为 $f(x, y)$，则 $Z=\dfrac{Y}{X}$和$Z=XY$ 仍为连续型随机变量，概率密度如下：

$$Z=\frac{Y}{X}:\ f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x,xz)dx$$

$$Z=XY:\ f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}\,f(x,\frac{z}{x})dx$$

又若 $X、Y$ **相互独立**，$(X、Y)$ 关于$X、Y$的边缘概率密度为$f_X(x)$、$f_Y(y)$，表达式继续化为

$$Z=\frac{Y}{X}:\ f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f_X(x)f_Y(xz)dx$$

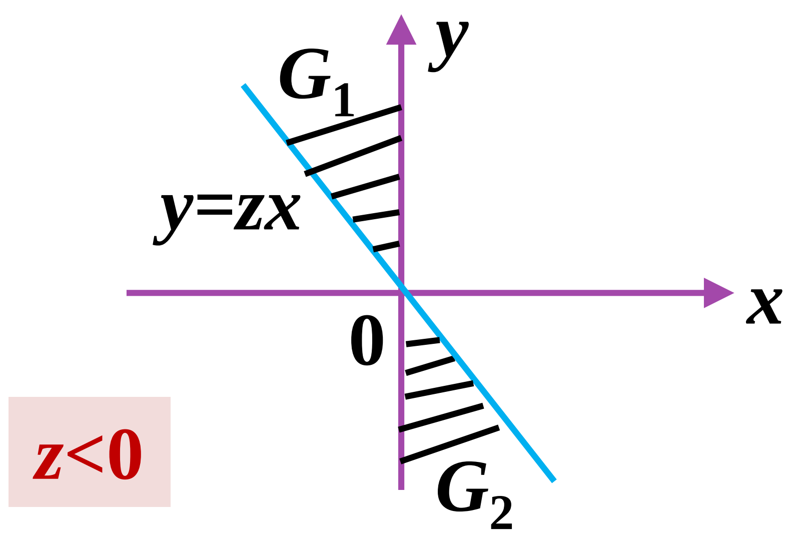
$$Z=XY:\ f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}\,f_X(x)f_Y(\frac{z}{x})dx$$

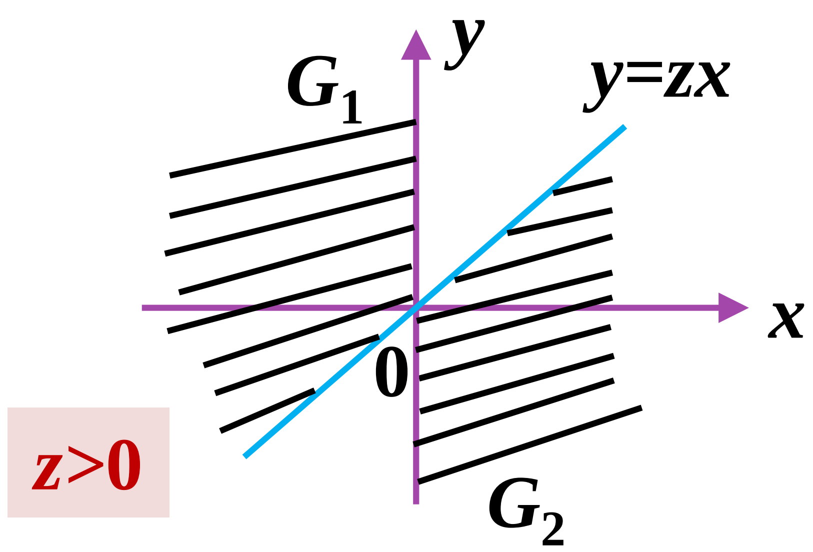
证明（以 $Z=\dfrac{Y}{X}$ 为例）

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=\iint\limits_{G_1\cup G_2} f(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{\frac{y}{x}\le z,\ x<0} f(x,y)dydx+\iint\limits_{\frac{y}{x}\le z,\ x>0} f(x,y)dydx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{zx}^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx+\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{zx} f(x,y)dy\right]dx$$





$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{zx}^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx+\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{zx} f(x,y)dy\right]dx$$

令y=xu

$$=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{z}^{+\infty} xf(x,xu)du\right]dx+\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)du\right]dx$$

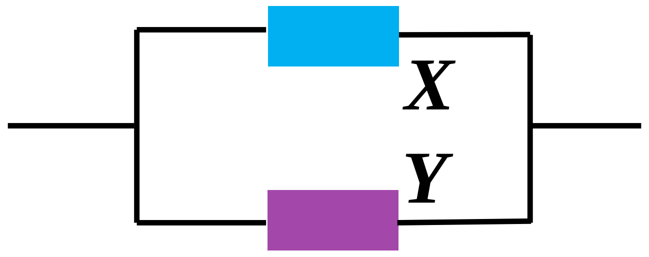
$$=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{\infty}^{z}(-x)f(x,xu)du\right]dx+\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)du\right]dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z}|x|\,f(x,xu)du\right]dx$$

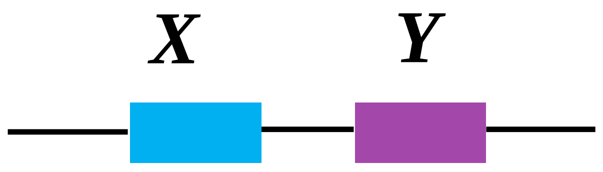
$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x,xu)dx\right]du$$

由概率密度$F_Z(z)$与$f_z(z)$关系 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x,xz)dx$

极值分布：$M=\max\{X, Y\}$ 和 $N=\min\{X, Y\}$ (X与Y相互独立)



$M=\max\{X, Y\}$



$N=\min\{X, Y\}$

若X、Y相互独立，已知各自边缘分布函数为$F_X(x)$、$F_Y(y)$，求$M=\max\{X, Y\}$和$N=\min\{X, Y\}$的分布函数$F_{\max}(z)$和$F_{\min}(z)$

$M=\max\{X, Y\}$ 不大于z等价于X和Y都不大于z

$$F_{\max}(z)=P(M\le z)=P(X\le z, Y\le z)$$
$$=P(X\le z)P(Y\le z)$$

相互独立

即 $F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z)$

$N=\min\{X, Y\}$不大于z等价于X和Y至少一个不大于z

$$F_{\min}(z)=P(N\le z)=1-P(N>z)=1-P(X>z, Y>z)$$
$$=1-P(X>z)P(Y>z)$$

相互独立

即 $F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

推广到n个相互独立的随机变量

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是n个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i)\quad i=1,2,\cdots n,$

$M=\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$的分布函数

$$F_{\max}(x)=F_{X_1}(x)F_{X_2}(x)\cdots F_{X_n}(x)$$

$N=\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$的分布函数

$$F_{\min}(x)=1-\left[1-F_{X_1}(x)\right]\left[1-F_{X_2}(x)\right]\cdots\left[1-F_{X_n}(x)\right]$$

特别地，当$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立且具有相同分布函数$F(x)$时，

$$F_{\max}(x)=\left[F(x)\right]^n \qquad F_{\min}(x)=1-\left[1-F(x)\right]^n$$

此时概率密度分别为 $f_{\max}(x)=F'_{\max}(x)=n\left[F(x)\right]^{n-1}f(x)$ $\qquad f_{\min}(x)=F'_{\min}(x)=n\left[1-F(x)\right]^{n-1}f(x)$

例 设X与Y的联合分布律如下图，令$U=X+Y$, $V=\max\{X, Y\}$， 求(U, V)的联合分布律。

X \ Y	1	2
1	0.2	0.1
2	0.3	0.4

解 当$X=1, Y=1$时

$$P(U=2, V=1)=P(X=1, Y=1)=0.2$$

当$X=1, Y=2$时

$$P(U=3, V=2)=P(X=1, Y=2)=0.1$$

当$X=2, Y=1$时

$$P(U=3, V=2)=P(X=2, Y=1)=0.3$$

$$P(U=3, V=2)=0.1+0.3=0.4$$

当$X=2, Y=2$时

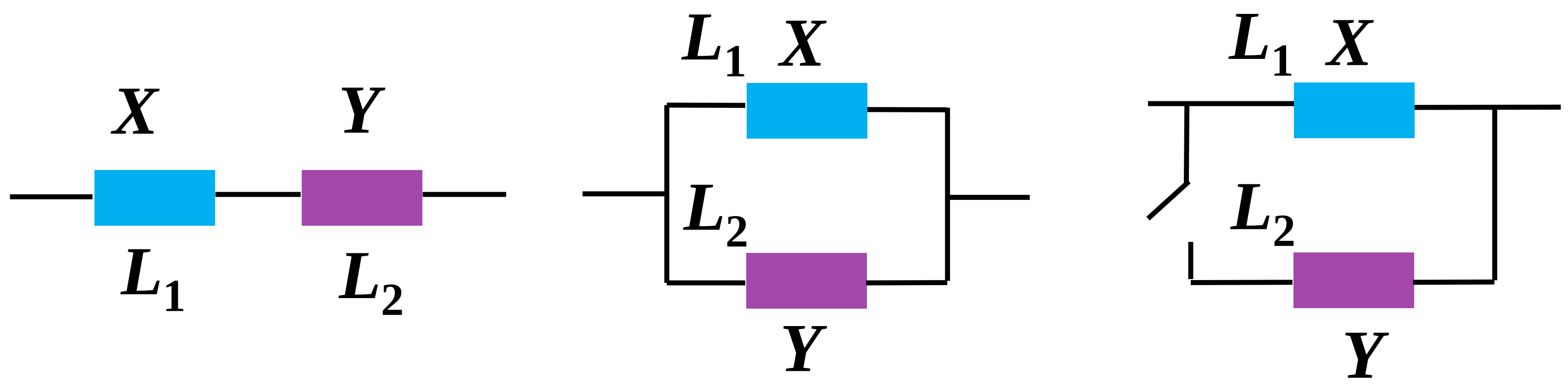
$$P(U=4, V=2)=P(X=2, Y=2)=0.4$$

U \ V	1	2
2	0.2	0
3	0	0.4
4	0	0.4

例 设系统L由两个相互独立的子系统L_1、L_2联结而成，联结的方式分别为：(i)串联；(ii)并联；(iii)备用（当系统L_1损坏时系统L_2开始工作）。设L_1、L_2的寿命分别为X、Y，概率密度如下，且 $\alpha>0,\beta>0,\alpha\neq\beta$

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta x} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

分别就以上三种联结方式写出L的寿命Z的概率密度。



(i) (ii) (iii)

解 (i) 串联的情况

由于当L_1、L_2中有一个损坏时，系统L就停止工作，所以L的寿命为$Z=\min\{X, Y\}$

Z 的分布函数为：

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta x} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

$$F_{\min}(z)=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

Z 的概率密度为：

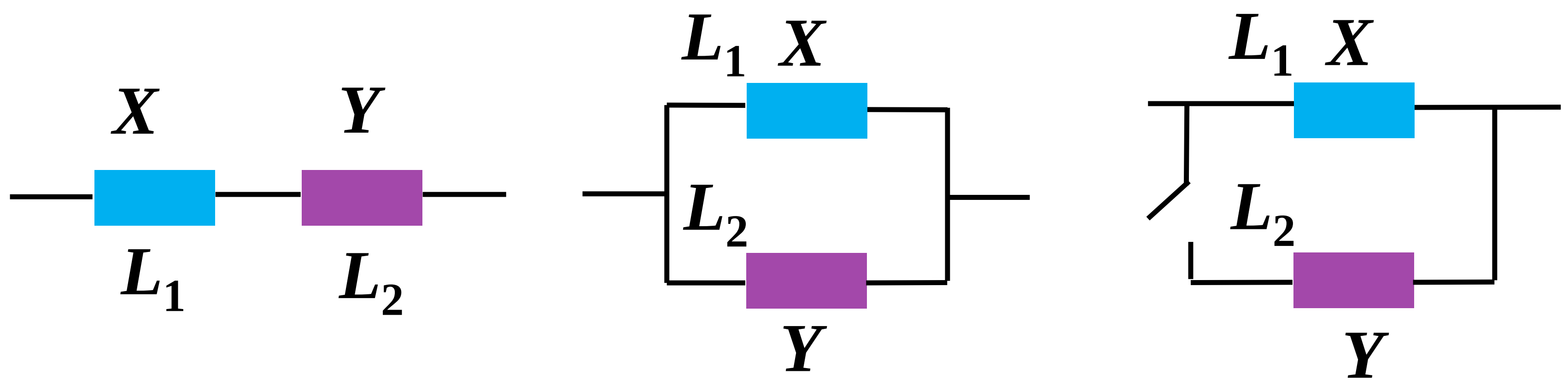
$$f_{\min}(z)=F'_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

即Z仍服从指数分布

例 设系统L由两个相互独立的子系统L_1、L_2联结而成，联结的方式分别为：(i)串联；(ii)并联；(iii)备用（当系统L_1损坏时系统L_2开始工作）。设L_1、L_2的寿命分别为X、Y，概率密度如下，且 $\alpha>0,\beta>0,\alpha\neq\beta$

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta x} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

分别就以上三种联结方式写出L的寿命Z的概率密度。



(i) (ii) (iii)

解 (ii) 并联的情况

由于当且仅当L_1、L_2都损坏时，系统L才停止工作，所以L的寿命为Z=max{X, Y}，

Z的分布函数为：

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta x} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

$$F_{\max}(z)=\begin{cases}(1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

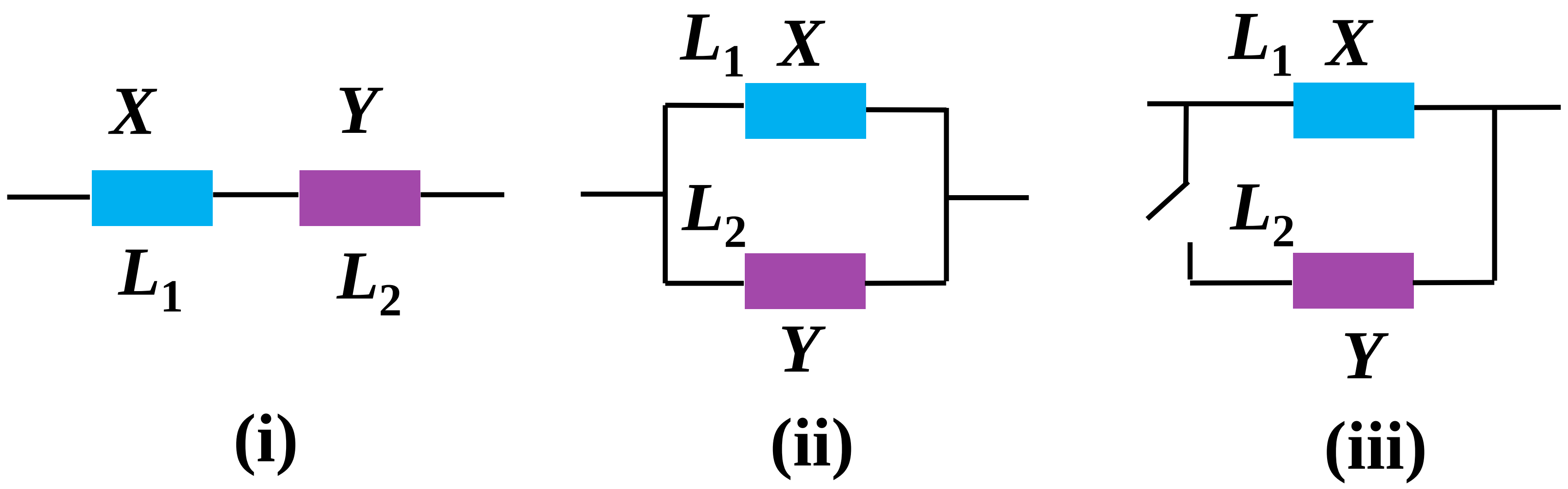
Z的概率密度为：

$$f_{\max}(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

例 设系统L由两个相互独立的子系统L_1、L_2联结而成，联结的方式分别为：(i)串联；(ii)并联；(iii)备用（当系统L_1损坏时系统L_2开始工作）。设L_1、L_2的寿命分别为X、Y，概率密度如下，且 $\alpha>0,\beta>0,\alpha\neq\beta$

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta x} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

分别就以上三种联结方式写出L的寿命Z的概率密度。



解 (iii) 备用的情况

由于当L_1损坏后，系统L_2才开始工作，所以整个系统L的寿命为L_1、L_2寿命之和，即$Z=X+Y$

当$z\le 0$ 时， $f_Z(z)=0$

当$z>0$ 时，

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)}\beta e^{-\beta y}dy$$

$$=\alpha\beta e^{-\alpha z}\int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y}dy=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}\right)$$

即 $$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}\right) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

本节回顾

- $Z=X+Y$

$Z=X+Y$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$ $\qquad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$

又若 X、Y 相互独立，$(X$、$Y)$ 关于 X、Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$、$f_Y(y)$，又可记为

$$f_X * f_Y=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

——f_X 和 f_Y 的卷积公式

- $M=\max\{X, Y\}$ 和 $N=\min\{X, Y\}$

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z) \qquad F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

推广到 n 个相互独立的随机变量

$M=\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 的分布函数 $F_{\max}(x)=F_{X_1}(x)F_{X_2}(x)\cdots F_{X_n}(x)$

$N=\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 的分布函数 $F_{\min}(x)=1-[1-F_{X_1}(x)][1-F_{X_2}(x)]\cdots[1-F_{X_n}(x)]$

复习思考题

1. 设(X, Y)为二维随机变量，则$P(x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2)=F(x_2, y_2)-F(x_1, y_1)$，对吗？

2. 设(X, Y)为二维连续型随机变量，则$P(X+Y=1)=0$，对吗？

3. (X, Y)为二维连续型随机变量，$f(x,y)$为(X, Y)的联合概率密度，$f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 分别是关于X和关于Y的边缘概率密度，若存在一点(x_0, y_0)使$f(x_0, y_0)\neq f_X(x_0)\, f_Y(y_0)$，则有$X$和$Y$不独立，对吗？