西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

第1章 概率论的基本概念

概率论与数理统计课程组

CHAPTER 1

概率论的基本概念

1.4 古典概率

古典概型（等可能概型）

若试验 E 满足

- 样本空间Ω包含有限个元素 （有限性）
- 出现每一样本点的概率相等 （等可能性）

试验中每个基本事件发生的可能性相同

事件A包含k个基本事件
样本空间Ω包含n个基本事件

$$P(A)=\sum_{i=1}^{k}P(\{\omega_i\})=\frac{k}{n}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{\Omega\text{包含的基本事件数}}$$

分析问题首先应确定要计算的基本事件（样本点）

古典概率的计算

样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$ $P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\ldots=P(\{\omega_n\})$ 基本事件两两不相容

$$1=P(\Omega)=P(\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\ldots\cup\{\omega_n\})=P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\})+\ldots+P(\{\omega_n\})=nP(\{\omega_i\})\quad i=1,2,3,\ldots,n$$

故每个基本事件的概率 $P(\{\omega_i\})=\dfrac{1}{n}\quad i=1,2,3,\ldots,n$

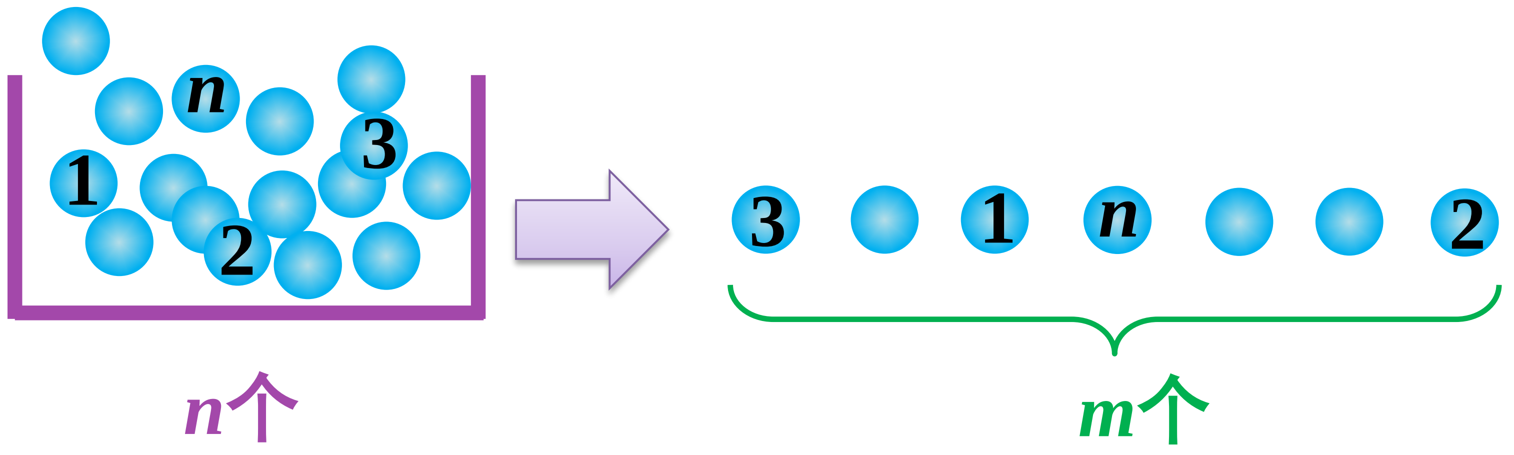
排列 (*Arrangement*)

从n个对象中选出m个记次序依次排布的不同排列数

$$A_n^m = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-m+1)}_{m个} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$A_n^n = n!$$

$$0! = 1$$

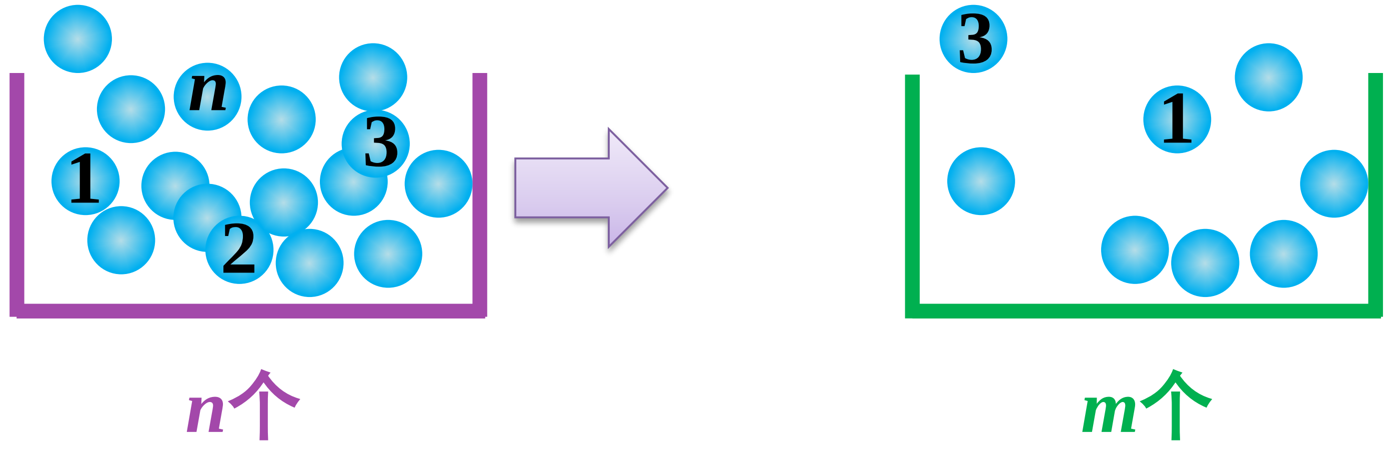


上述为不重复排列的情况，对重复排列有：n^m

组合 (Combination)

从n个对象中不记次序选出m个的不同组合数

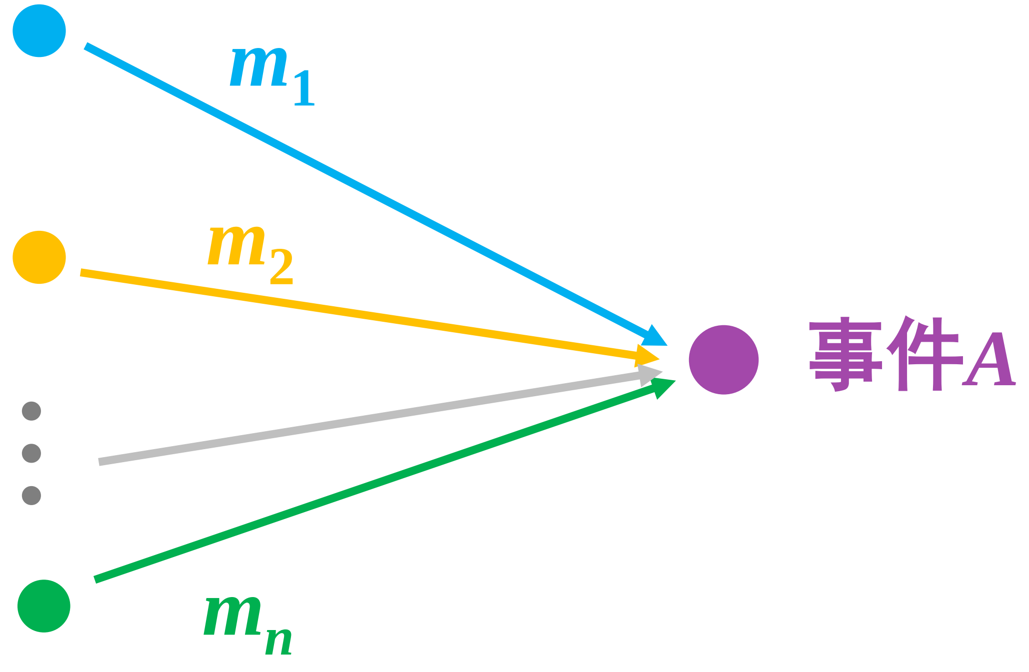
$$\binom{n}{m} = C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (n \ge m)$$



加法原理

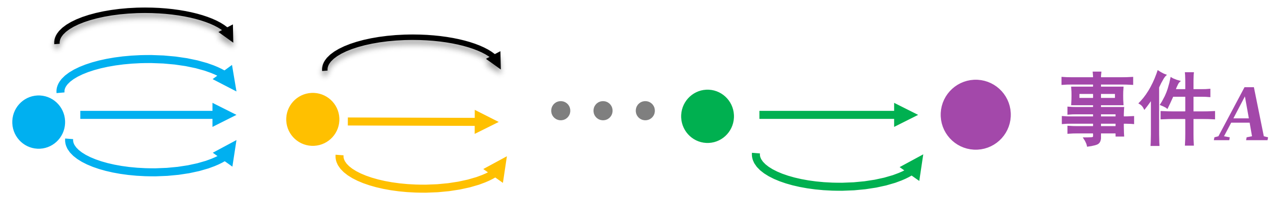
若完成一件事可有n类办法，其中，在第一类办法中有m_1种不同的方法，在第二类办法中有m_2种不同的方法，……，在第n类办法中有m_n种不同的方法

完成这件事的方法共有 $N= m_1 + m_2 + m_2+...+ m_n$



乘法原理

若完成一件事需分解成n个步骤，其中，做第一步有m_1种不同的方法，做第二步有m_2种不同的方法，……，做第n步有m_n种不同的方法



完成这件事的方法共有 $N=m_1 \times m_2 \times m_3 \times \ldots \times m_n$

例 一袋中有8个球，其中3个为红球，5个为黄球，设摸到每一球的可能性相等。

(i) 从袋中随机摸一球，记A={ 摸到红球 }，求 $P(A)$

(ii) 从袋中不放回摸两球，记 B={恰是一红一黄}，求 $P(B)$

解 (i) $\Omega=\{1, 2, \cdots, 8\}$

$A=\{1, 2, 3\}$

$$P(A)=\frac{3}{8}$$

(ii) $P(B)=C_3^1C_5^1/C_8^2=\dfrac{15}{28}\approx 53.6\%$

例 （抽签问题）袋中有 a 个红球，b 个白球，记 $a+b=n$。设每次摸到各球的概率相等，每次从袋中摸一球，不放回地摸 n 次。 设 A_k={ 第 k 次摸到红球 }，$k=1, 2, \ldots, n$，求 $P(A_k)$

解

解1 可设想将 n 个球进行编号：① ②……Ⓝ

① ~ⓐ号球为红球，n 人编号为1, 2, …, n

$$\underset{1}{\_},\underset{2}{\_},\cdots\underset{k}{\overset{\otimes}{\_}},\cdots,\underset{n}{\_}$$

可以是①号球，亦可以是②号球…是ⓐ号球

视 ① ②…… Ⓝ 的任一排列为一个样本点

每点出现的概率相等

$$P(A_k)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

与 k 无关

解2 视哪几次摸到红球为一样本点 $\underset{1}{\_},\underset{2}{\_},\cdots\underset{k}{\overset{\otimes}{\_}},\cdots,\underset{n}{\_}$

总样本点数为 C_n^a，每点出现的概率相等，

而其中有 C_{n-1}^{a-1} 个样本点使 A_k 发生

$$P(A_k)=C_{n-1}^{a-1}/C_n^a=\frac{a}{a+b}$$

解3 将第 k 次摸到的球号作为一样本点

$\Omega=\{$ ①, ②,……, Ⓝ $\}$ $A_k=\{$ ①, ②,……, ⓐ$\}$

$$P(A_k)=\frac{a}{n}=\frac{a}{a+b}$$

原来这不是古典概型

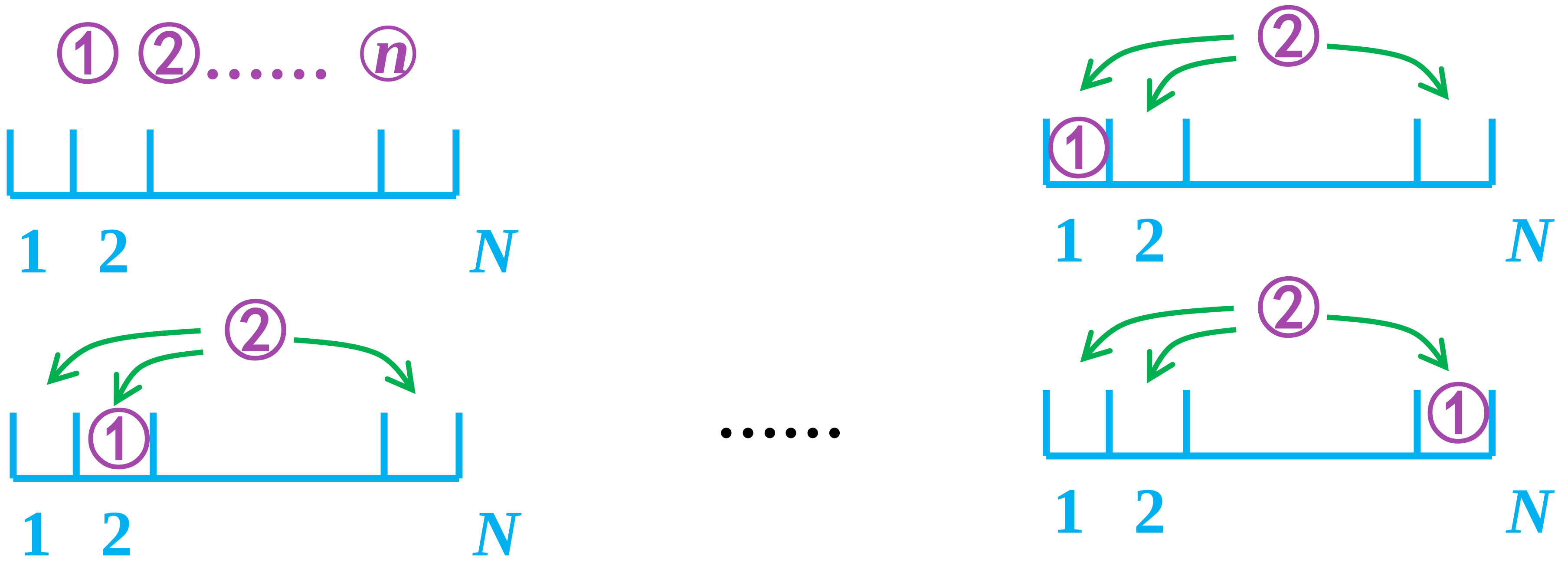
错解 记第 k 次摸到的球的颜色为一样本点 错误！

Ω={红色, 白色}，A_k={红色} $P(A_k)=1/2$

例 将 n 个不同的球，投入N 个不同的盒中 ($n \le N$)，设每一球落入各盒的概率相同，且各盒可放的球数不限，

记 A＝{ 恰有 n 个盒子各有一球 }，求 $P(A)$

解



即当 $n=2$ 时，共有N^2 个样本点

一般地，n 个球放入N 个盒子中，总样本点数为N^n，使A 发生的样本点数 $C_N^n \cdot n!$

$$P(A)=\frac{C_N^n \cdot n!}{N^n}$$

例 一单位有 5 个员工，一星期七天中，老板让每位员工独立地挑一天休息，求没有两人在同一天休息的概率。

解 与上题类似，将 5 个员工看成 5 个不同的球，7天看成 7 个不同的盒子，

记事件 A={没有两人在同一天休息 }，

$$P(A)=\frac{C_7^5\cdot 5!}{7^5}\approx 15\%$$

思考 一个64人的班上，至少有两人在同一天过生日的概率为多少？ “生日悖论”

若在上例中取 $n=64$，$N=365$，

有时求逆事件的概率反而更容易

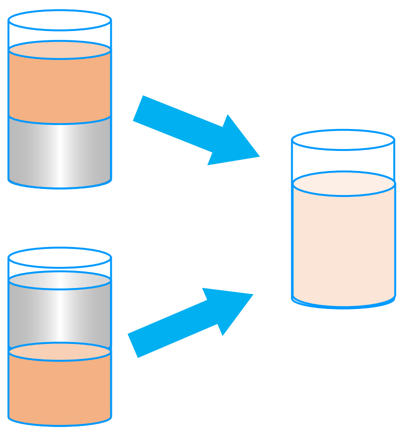
$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}=0.997$$

例 一位常饮奶茶的女士称：她能从一杯冲好的奶茶中辨别出该奶茶是先放牛奶还是先放茶冲制而成。做了10 次测试，结果是她都正确地辨别出来了。

问该女士的说法是否可信？

解 每次试验的两个可能结果为： 奶＋茶 或 茶＋奶

且它们是等可能的，因此是一个古典概型问题。



10 次试验共有 2^{10} 个等可能的结果

假设该女士的说法不可信，即纯粹是靠运气猜对的

若记 $A=\{$10次试验中都能正确分辨出先后顺序$\}$

则 A 只包含了2^{10} 个样本点中一个样本点，故 $P(A)=\dfrac{1}{2^{10}}=0.0009766$

实际推断原理

概率很小的事件在一次试验中几乎是不发生的

例 某接待站在某一周曾接待 12 次来访，已知所有这 12 次接待都是在周二和周四进行的，问是否可以推断接待时间是有规定的?

解 假设接待站的接待时间没有规定，而各来访者在一周任一天去接待站是等可能的，那么12次接待来访者都是在周二、周四的概率为

$$2^{12}/7^{12}=0.000\,000\,3$$

现在，概率很小的事件在一次试验中竟然发生了，因此有理由怀疑假设的正确性

小结

分析思路
- 加法原理（一个事件完成有多种方法）
- 乘法原理（一个事件完成有多个步骤）

实际推断原理： 概率很小的事件在一次试验中几乎不发生

不能理解成“小概率事件从不发生”

“说曹操曹操到”：“幸存者偏差”

但是，该原理还有另一层含义：小概率事件在大量重复试验中必然发生

常在河边走哪有不湿鞋　　常走山路必遇虎

夜路走多了总会撞见鬼　　多次小事故累积

例 从5双不同的鞋子中任取4只，问这4只鞋子中至少有2只配成一双的概率是多少？

解 设 A={所取鞋子至少有2只配成一双} $\bar{A}$ ={所取鞋子均不成双}

解1 可设想4只鞋子是依次取出的
每种排列是一个样本点
均不成双的取法数目是，先10取1，
然后只能8取1，6取1，4取1

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{10\times 8\times 6\times 4}{A_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

解2 可设想4只鞋子取出后是一种组合
每种组合是一个样本点

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{2^4C_5^4}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

解3 设4只鞋子有k只来自左脚，4-k只来自右脚
左右脚4只构成的组合是一个样本点
有 $\sum C_5^k C_{5-k}^{4-k}$，k=0,1,2,3,4 个样本点使 $\bar{A}$发生

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\sum_{k=0}^{4}\frac{C_5^kC_{5-k}^{4-k}}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

解4 设A_i表示4只鞋子恰能配成 i 双，i=1, 2
则$A=A_1\cup A_2$，且$A_1A_2=\varnothing$

$$P(A_1)=\frac{C_5^1\left(C_8^2-C_4^1\right)}{C_{10}^4}\qquad P(A_2)=\frac{C_5^2}{C_{10}^4}$$

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{13}{21}$$

例 从数字1-9中任取1个，取后放回，先后取5次，问恰好出现不同的两对数字的概率是多少？

解 设 A={恰好出现不同的两对数字}

解1 5个数字的每种序列是一个样本点， 样本空间包含的样本点个数为 9^5 种

恰好出现两对的取法是：某序列5个位置中有一个是单独不成对的数字，选法为 $9C_5^1$ 种

剩下4个位置中是两对不同的数字，选法为$C_4^2C_2^2\times C_8^2$ 种

$$P(A)=\frac{9C_5^1C_4^2C_2^2\times C_8^2}{9^5}=0.128$$

解2 上述解法的分析顺序可以变化下，不影响计算结果

某序列5个位置中分别放置两对不同的数字，选法为 $C_5^2C_3^2\times C_9^2$ 种

剩下1个位置中是一个是单独不成对的数字，选法为 $7C_1^1$ 种

$$P(A)=\frac{C_5^2C_3^2\times C_9^2\times 7C_1^1}{9^5}=0.128$$

例 一个社团有5名大一学生、2名大二学生、3名大三学生、2名大四学生，求：
任选5名学生，求四个年级学生均包含在内的概率。

解 设 A={四个年级学生均包含在内}

选取的5个学生组合是一个样本点，样本空间包含的样本点个数为 C_{12}^{5} 种

四个年级学生均包含在内的选取方法是： 在四个年级中的第i个年级中包含2名，

在剩下的三个年级各包含1名，选法为 $C_5^2C_2^1C_3^1C_2^1+C_5^1C_2^2C_3^1C_2^1+C_5^1C_2^1C_3^2C_2^1+C_5^1C_2^1C_3^1C_2^2$ 种

$$P(A)=\frac{C_5^2C_2^1C_3^1C_2^1+C_5^1C_2^2C_3^1C_2^1+C_5^1C_2^1C_3^2C_2^1+C_5^1C_2^1C_3^1C_2^2}{C_{12}^{5}}=\frac{10}{33}$$

错解 保持样本点形式不变，四个年级学生均包含在内的选取方法是：

先在每个年级各选1名，然后剩下8名再选1名，$P(A)=\dfrac{C_5^1C_2^1C_3^1C_2^1\times C_8^1}{C_{12}^{5}}=\dfrac{20}{33}$

错误：
- 某年级如大一，同学A在第一轮（各选1名）入选，同学B在第二轮（8选1）入选
- 某年级如大一，同学B在第一轮（各选1名）入选，同学A在第二轮（8选1）入选

两选法实为同一种组合

本节回顾

古典概率

若试验 E 满足
- 样本空间Ω包含有限个元素 （有限性）
- 出现每一样本点的概率相等 （等可能性）

古典概率的计算

事件A包含k个基本事件
样本空间Ω包含n个基本事件

$$P(A)=\sum_{i=1}^{k}P(\{\omega_i\})=\frac{k}{n}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{\Omega\text{包含的基本事件数}}$$

实际推断原理

概率很小的事件在一次试验中几乎不发生