CHAPTER 1

概率论的基本概念

1.3 概率及其性质

如何数值表征一个事件在一次试验中发生的可能性大小？

分析某些事件一次试验发生的可能性（概率），往往需要进行多次重复试验，统计该事件发生的次数（频数）及其占总次数的比值（频率）

频率

反映事件发生的频繁程度

在相同的条件下，进行了n 次试验，其中事件A发生的次数n_A称为事件A发生的**频数**

比值n_A/n称为事件A发生的**频率**，记为$f_n(A)$

基本性质

(i) $0 \le f_n(A) \le 1$ 非负性

(ii) $f_n(\Omega) = 1$，$f_n(\varnothing) = 0$ 规范性

(iii) 若$A_1, A_2, \ldots, A_k$两两互不相容，则 $f_n(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$

$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \ldots + f_n(A_k)$ n-试验，k事件

例 考虑“抛硬币”试验，重复不同的次数，分别记录数据

n_H表示事件H发生的**频数**，$f_n(H)$表示H发生的**频率**

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

重要规律

重复试验的次数n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现**稳定性**，趋于某个常数 p （统计规律性）

概率

由频率的稳定性和频率的性质，得概率定义

重复试验的次数$n \to \infty$时，频率 $f_n(A)$ 接近$P(A)$

第5章将证明（大数定律）

概率

反映事件A一次试验中发生的可能性大小

定义1：事件A 发生频率的稳定值p称为它的概率$P(A)$， 即$P(A)=p$

定义2：随机试验E，样本空间Ω，对于E的每一事件A赋予一个实数，记为$P(A)$，如果集合函数满足以下条件， $P(A)$称为事件A的概率

1° **非负性**：对于每一个事件A，有 $P(A) \geq 0$

2° **规范性**：对于必然事件Ω，有$P(\Omega) = 1$

3° **可列可加性**：设$A_1, A_2, \ldots$ 是两两不相容的事件，即对于 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j\ (i, j = 1, 2, \ldots,)$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

三性质为概率公理，柯尔莫哥洛夫公理 (Kolmogorov axioms)

性质

(i) $P(\varnothing)=0$

证 令 $A_n=\varnothing\ (n=1,2,\ldots)$ 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$ $A_iA_j=\varnothing, i\neq j\ (i,j=1,2,\ldots,)$

由可列可加性 $P(\varnothing)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing)$

由非负性 $P(\varnothing)\geq 0$ 故 $P(\varnothing)=0$

(ii) 有限可加性

互不相容和事件的概率为每个事件的概率之和

若 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 两两互不相容，则 $P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

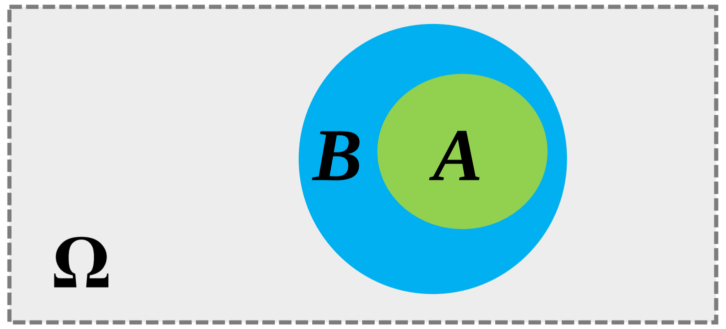
证 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\ldots=\varnothing$ 即 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j\ (i,j=1,2,\ldots)$

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+0=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

(iii) 事件A, B,若 $A \subset B$

有包含关系的差事件的概率

则 $P(B-A) = P(B) - P(A)$ $\qquad$ $P(B) \geq P(A)$



证

由 $A \subset B$

知 $B = A \cup (B-A)$ 且 $A(B-A) = \emptyset$

由有限可加性 $P(B) = P(A) + P(B-A)$

由非负性 $P(B-A) \geq 0$ $\qquad$ $P(B) \geq P(A)$

一般情况下， $P(B-A) = ?$ $\qquad$ $= P(B) - P(AB)$

(iv) 对任一事件A, $P(A) \leq 1$

证

因 $A \subset \Omega$ 由性质(iii) $P(A) \leq P(\Omega) = 1$

(v) 逆事件的概率

对立（互逆）事件的概率之和为1

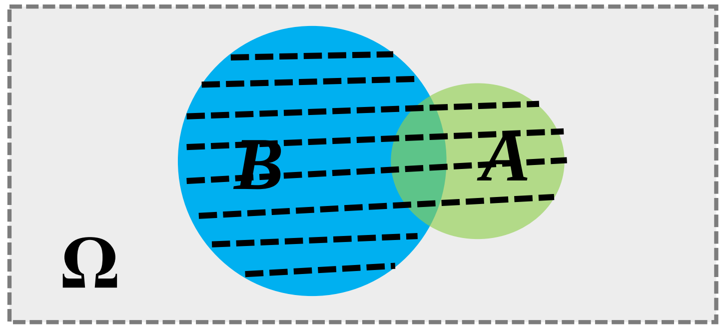
对任一事件A, 有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

证

因 $A \cup \bar{A} = \Omega$ 且 $A\bar{A} = \emptyset$ $\qquad$ 由有限可加性 $1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$

(vi) 加法公式

对任意事件A, B, 有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$



文氏图重叠部分概率需被减去 1 次

证 因 $A \cup B = A \cup (B - AB)$ 且 $A(B - AB) = \varnothing$ $AB \subset B$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

推广至多个事件

设A_1, A_2, A_3 是任意三个事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

对任意事件$A_1, A_2, \dots, A_n$，采用归纳法得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2 \cdots A_n)$$

(vii) 极限性

设 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ 是一列上升的事件，则 $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$

设 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ 是一列下降的事件，则 $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$

证明见课本

注意

已知 $P(A) = 0$ 不能推出 $A = \varnothing$

已知 $P(B) = 1$ 不能推出 $B = \Omega$

反例见第2章

已知 $P(A) = P(B)$ 不能推出 $A = B$

不能由概率的相等情况推断事件的相等

例 设A, B是随机事件，$P(A)=0.7$, $P(A-B)=0.3$, 求$P(\overline{AB})$

解：由于$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

因此$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.4$

$P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.6$

$P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.6$

例 设A, B,C是随机事件，$P(A)=P(B)=P(C)=1/4$, $P(AB)=0$, $P(AC)=P(BC)=1/16$,求A, B,C都不发生的概率。$P(\overline{AB})$

解：事件“A, B, C 都不发生”可以表示为$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$, 故所求概率为

$$P(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)$$

$$=1-P(A)-P(B)-P(C)+P(AB)+P(AC)+P(BC)-P(ABC)$$

$$=1-1/4-1/4-1/4+1/16+1/16$$

$$=3/8$$

例

于北辰表示，一般来说台军天弓导弹的拦截率是七成，所以只要大陆发射导弹，台湾就可以发射三枚天弓导弹，因为这样拦截率就达到了210%。于北辰说道：“只要我们用心拦截，用一个三角函数的方式，三发就一定能够拦截的住。因为如果这样都拦截不住的话，我想‘中科院’就可以关门了。”

本节回顾

频率

在相同的条件下，进行了n 次试验，其中事件A发生的次数n_A称为事件A发生的频数

比值n_A/n称为事件A发生的频率，记为$f_n(A)$

概率

定义2：随机试验E，样本空间Ω，对于E的每一事件A赋予一个实数，记为$P(A)$，如果集合函数满足以下条件，$P(A)$称为事件A的概率

1° 非负性：对于每一个事件A，有

2° 规范性：对于必然事件Ω，有

3° 可列可加性：设$A_1, A_2, \ldots$是两两不相容的事件，即对于$A_iA_j=\varnothing, i\neq j\ (i,j=1,2,\ldots,)$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$