



西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

第8章 假设检验





CHAPTER 8

假设检验

很重要、一定考、而且是压轴大题 → (除此之外还有

参数估计

1.6 条件

§ 8.1 假设检验的基本思想与基本概念

§ 8.2 单正态总体参数的假设检验

§ 8.3 双正态总体参数的假设检验

§ 8.4 置信区间与假设检验之间的关系

§ 8.5 几类假设检验简介

不考!



CHAPTER 8

假设检验

- § 8. 1 假设检验的基本思想与基本概念
- § 8. 2 单正态总体参数的假设检验
- § 8. 3 双正态总体参数的假设检验
- § 8. 4 置信区间与假设检验之间的关系
- § 8. 5 几类假设检验简介



8.1 假设检验的基本思想与基本概念

总体、决策

问题的提出

统计推断的另一类重要问题是假设检验，实际中往往是总体分布函数完全未知或是只知其形式、但不知其中某些参数

因此，为了推断总体的未知特性，提出某些关于总体的假设，假设检验就是根据样本对所提假设作出接受还是拒绝的决策的过程：在样本的基础上得到一个对总体参数判断有较大把握的结论

判断假设是否合理

引例

某车间用一台包装机包装食盐，食盐的净重是一随机变量，服从正态分布，其均值为0.5 kg，标准差为0.015 kg。某日开工后为检验包装机是否正常，随机抽取9袋，称得净重(kg)为：0.497, 0.506, 0.518, 0.524, 0.498, 0.511, 0.520, 0.515, 0.512
问该包装机是否正常？



分析

以 μ , σ 分别表示一天袋装食盐的净重总体 X 的均值和标准差。

由于长期实践表明标准差比较稳定, 我们设 $\sigma=0.015$, 于是 $X \sim N(\mu, \sigma^2) = N(\mu, 0.015^2)$

$X \sim N(\mu, \sigma^2) = N(\mu, 0.015^2)$ 这里 μ 未知

机器正常则 $\mu = 0.5$, 不正常则 $\mu \neq 0.5$, 为此我们提出两个相互对立的假设

$$\square H_0: \mu = \mu_0 = 0.5$$

机器正常

$$\square H_1: \mu \neq \mu_0$$

机器不正常

需要给出一定的规则, 利用已知样本, 做出决策是接受原假设 H_0 (拒绝备择假设 H_1), 还是拒绝原假设 H_0 (接受备择假设 H_1)

需要估计 μ , 可以考虑借助样本均值 \bar{X}

\bar{X} 是总体均值 μ 的无偏估计量, \bar{X} 的观察值 \bar{x} 的大小在一定程度上反映了 μ 的大小



如果 H_0 为真，则样本的观测值 \bar{x} 与 μ_0 的偏差 $|\bar{x} - \mu_0|$ 一般不应过大，否则应怀疑假设 H_0 的正确性而拒绝 H_0

H_0 为真时， $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$ → 为什么是这个量 衡量 $|\bar{x} - \mu_0|$ 的大小就转换为衡量 $\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right|$ 的大小

选定一正数 k ，当观察值 \bar{x} 满足 $\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq k$ 拒绝原假设 H_0 $\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| < k$ 接受原假设 H_0

但是，由于做出这一决策的依据是一个样本，当实际上 H_0 为真时仍可能做出拒绝 H_0 的决策（这种可能性是无法消除的），犯这种错误的概率记为

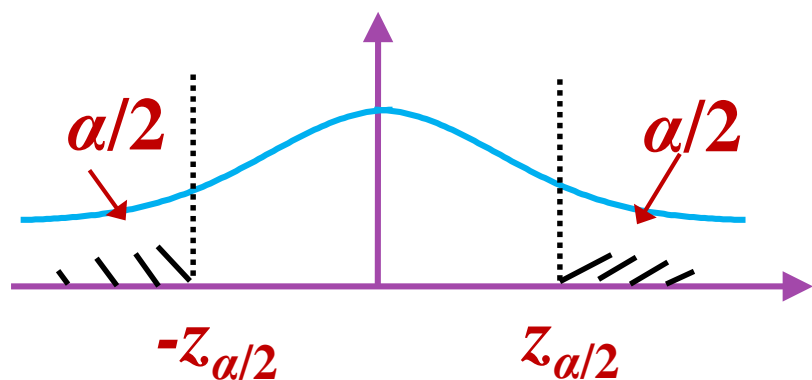
$P(\text{拒绝}H_0 / H_0\text{为真时})$ 或 $P_{\mu_0}(\text{拒绝}H_0)$ 或 $P_{\mu \in H_0}(\text{拒绝}H_0)$

希望控制这样的错误在一定范围，因此给定一个较小的数 α ($0 < \alpha < 1$)，使这类错误的概率不超过 α ，即 $P(\text{拒绝}H_0 / H_0\text{为真时}) \leq \alpha$

由于只允许犯这类错误概率最大为 α ，上式取等号 $P(\text{当}H_0\text{为真时拒绝}H_0) = P\left(\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq k\right) = \alpha$ 上式分点？



$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$



由此知 $k = z_{\alpha/2}$

□ 若样本值满足 $\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq k = z_{\alpha/2}$ 拒绝 H_0

□ 若样本值满足 $\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| < k = z_{\alpha/2}$ 接受 H_0

本例中取 $\alpha=0.05$, 则 $k=z_{0.025}=1.96$, 又有 $n=9$, $\sigma=0.015$, 样本均值 $\bar{x}=0.511$

$$\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| = 2.2 > 1.96 \quad \text{拒绝 } H_0 \quad (\text{接受 } H_1, \text{ 机器不正常})$$

若均值检查机器正常, 一般还应对方差进行检验

(该题中只是检查了均值)

符合实际推断原理

$\mu=\mu_0$ 时 $\left\{ \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq z_{\alpha/2} \right\}$ 是小概率事件

在一次试验中几乎不会发生, 现如今发生了, 则有理由怀疑 H_0 的正确性, 进而拒绝 H_0

这里 k 是假设检验的一个门槛值, 给定 α 就能得 k
 α 称为显著性水平 (区别于参数估计的置信水平)

μ_0 与 \bar{x} 的无显著性差异是在显著性水平 α 之下作出的

$$\text{统计量 } U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

称为检验统计量



假设检验的基本概念和定义

定义

在显著性水平 α 之下，检验假设 H_0 和 H_1
也常说成“在显著性水平 α 下，针对 H_1 检验 H_0 ”
 H_0 称为原假设或零假设， H_1 称为备择假设
备择假设是指与原假设相矛盾的假设

双边假设检验

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

单边假设检验

右边假设 $H_0: \mu \leq \mu_0$

$H_1: \mu > \mu_0$

左边假设 $H_0: \mu \geq \mu_0$

$H_1: \mu < \mu_0$

→ 根据 H_1 来判断是单边还是双边

$H_0: \mu = \mu_0 \quad H_1: \mu > \mu_0$

仅涉及总体分布未知参数的假设称为参数假设，而对总体分布类型或分布某些特征提出的假设称为非参数假设

假设检验就是在原假设和备择假设之间做出接受哪个拒绝哪个的判断，需根据样本制定一个规则一旦样本的观测值确定后即可作出决策，在 H_0 与 H_1 两者之间接受其一

能够对原假设 H_0 是真或不真做出回答的统计量称为假设检验统计量

使得原假设 H_0 为真的假设检验统计量取值范围称为假设检验的接受域；拒绝原假设 H_0 的假设检验统计量取值范围称为拒绝域；拒绝域的边界点称为临界点

针对假设检验



由于样本的随机性，进行判断时，可能会发生错误，发生错误也是一个随机事件

- 第I类错误（弃真）： H_0 为真但拒绝 H_0
 $P(\text{拒绝}H_0 / H_0\text{为真时}) = \alpha$
- 第II类错误（存伪）： H_0 不真但接受 H_0
 $P(\text{接受}H_0 / H_0\text{不真时}) = \beta$

给定样本容量，若减小第I类错误的概率，则第II类错误的概率往往增大；若要使两类错误概率都减小，需要增大样本容量

一般控制第I类错误的概率使其不大于 α ，通常 α 取0.1, 0.05, 0.01, 0.005

只控制第I类错误的概率，而不考虑第II类错误的概率的假设检验称为显著性检验
称 α 为显著性水平

注意与区间估计中的置信水平 $1-\alpha$ 区分

正态总体假设检验的接受域

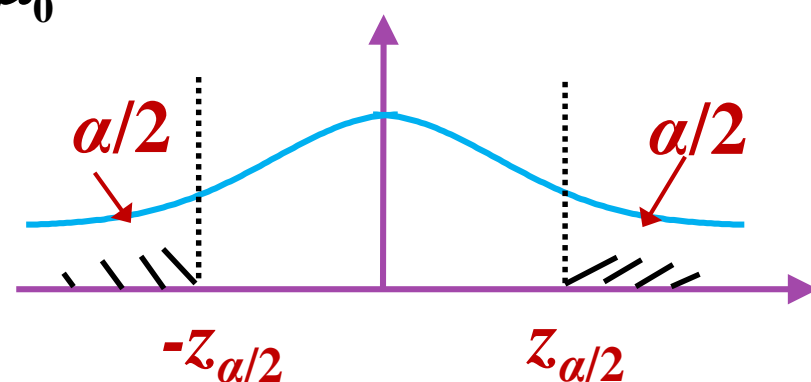
设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 未知, σ^2 已知, 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体的样本, 给定显著性水平为 α

双边假设

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

接受域为

$$|u| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| < z_{\alpha/2}$$

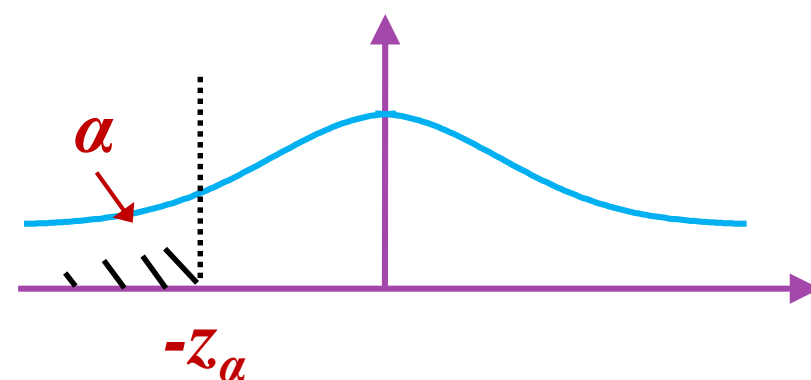


左边假设

$$H_0: \mu \geq \mu_0 \quad H_1: \mu < \mu_0$$

接受域为

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > -z_{\alpha}$$



右边假设

$$H_0: \mu \leq \mu_0 \quad H_1: \mu > \mu_0$$

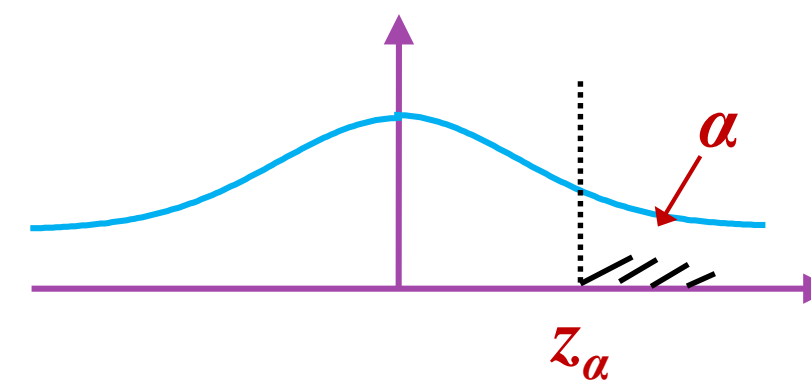
H_1 为真时, \bar{x} 观察值往往偏大

$$P(\text{拒绝 } H_0 / H_0 \text{ 为真时}) = P_{\mu \in H_0}(\bar{X} \geq k)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq \frac{k - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right) \leq P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \geq \frac{k - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right) = \alpha$$

接受域为

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < z_{\alpha}$$





求未知参数假设检验的步骤

1. 根据实际的问题，提出原假设 H_0 和备择假设 H_1
2. 确定检验统计量（根据八大分布）及其在 H_0 为真时的分布
3. 根据显著性水平 α 和样本容量 n ，按照 $P(\text{当 } H_0 \text{ 为真时拒绝 } H_0) = \alpha$ 求出临界点，确定接受域或拒绝域
4. 计算检验统计量的样本观测值
5. 根据样本观测值做出决策，是接受原假设 H_0 还是拒绝 H_0 （接受 H_1 ）

注意

- ✓ 关键在于提出合适正确的原假设 H_0 和备择假设 H_1
- ✓ 绝不可交换 H_0 和 H_1 的设置将左边假设问题转为右边假设问题

拒绝域的形式和区间正是通过“拒绝为真的 H_0 ”推导出的

- ✓ 原假设 H_0 一般是“默认”、“正常”状态时的数值关系（含等号），而备择假设 H_1 一般是“不正常”、“有变化”的情况

H_0 : 不变
 H_1 : 变化

双边假设的两个临界点：上 $\alpha/2$ 分位点、上 $(1-\alpha/2)$ 分位点；

左边假设的一个临界点：上 $(1-\alpha)$ 分位点；右边假设的一个临界点：上 α 分位点



三种假设检验的上分位点

给定显著性水平为 α

双边假设

$$H_0: \theta = \theta_0 \quad H_1: \theta \neq \theta_0$$

临界点: 上 $\alpha/2$ 分位点、上 $(1-\alpha/2)$ 分位点

右边假设

$$H_0: \theta \leq \theta_0 \quad H_1: \theta > \theta_0$$

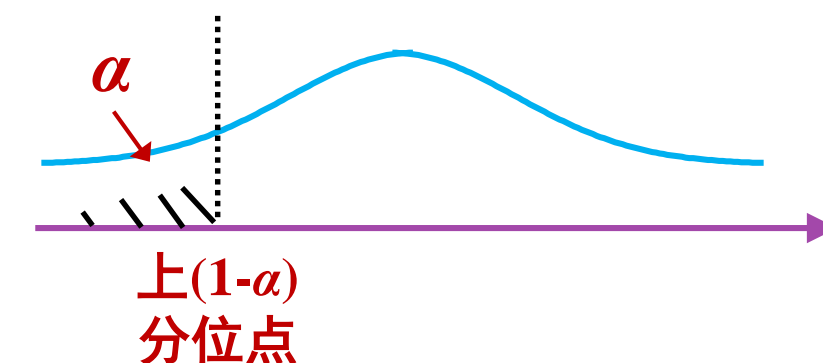
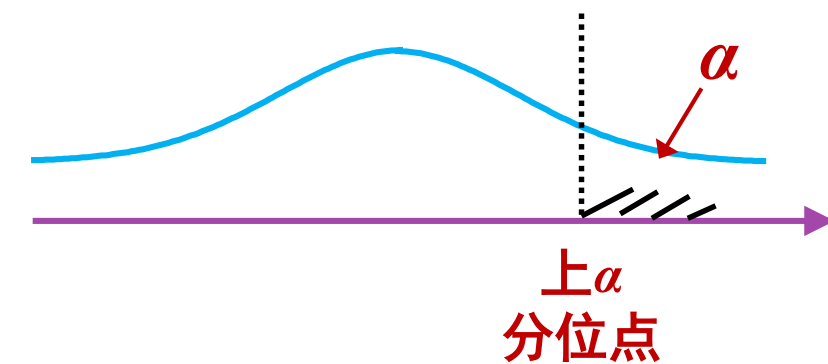
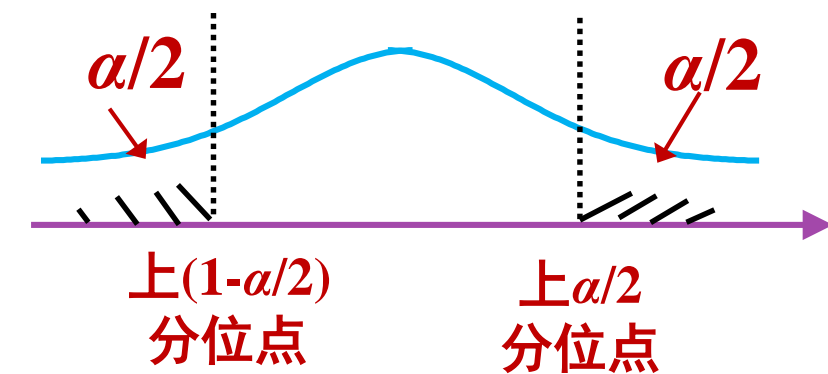
临界点: 上 α 分位点

左边假设

$$H_0: \theta \geq \theta_0 \quad H_1: \theta < \theta_0$$

临界点: 上 $(1-\alpha)$ 分位点

图中阴影部分为拒绝域(含临界点)



若结果是临界点
则还需最
再来一次检验



例

某公司购买牛奶，公司怀疑供应商在牛奶中掺水牟利，通过测得冰点温度这一指标可以检测牛奶是否掺水，天然牛奶的冰点温度服从正态分布 $N(-0.545, 0.008^2)$ ，牛奶掺水可导致冰点温度升高，今测得供应商提交的5批牛奶冰点温度，得到样本均值 $\bar{x} = -0.535$ ，试问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下是否认为供应商在牛奶中掺水。

原假设: 没掺水
 H_1 : 掺水

解

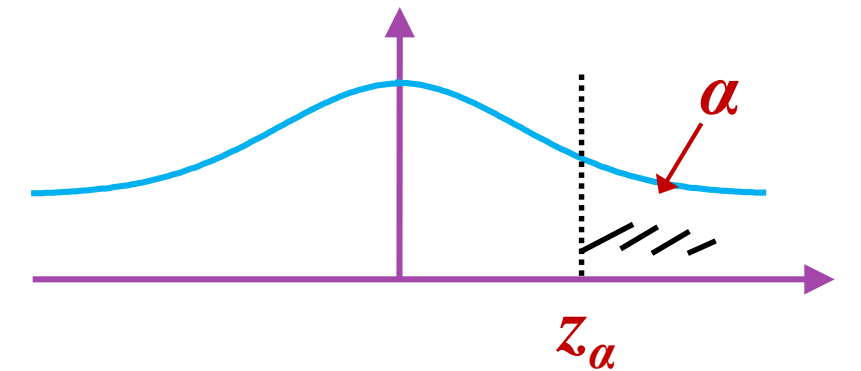
该问题需做如下检验: $H_0: \mu \leq \mu_0 = -0.545$; $H_1: \mu > \mu_0 = -0.545$

Step 1

$$\text{检验统计量是 } U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

服从的分布是 $N(0, 1)$

Step 2



这是右边假设问题，允许犯第I类错误的概率最大为 α ，临界点是上 α 分位点， $k = z_\alpha$

Step 3

$$\text{拒绝域为 } u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq k = z_\alpha$$

也就是说 U 的观测值落在该区间则拒绝原假设 H_0

在本例中 $n = 5, \bar{x} = -0.535, \mu_0 = -0.545, \sigma = 0.008, \alpha = 0.05, z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$

Step 4

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{-0.535 - (-0.545)}{0.008 / \sqrt{5}} = 2.7951 > 1.645 \quad \text{从而拒绝} H_0, \text{即认为供应商在牛奶掺水了}$$

Step 5



例

设袋中有10个球，其颜色有黑白两种， p 表示白球所占比例。有待检验的统计假设是， $H_0: p=0.5$, $H_1: p=0.2$ ，从袋中有放回的取4个球，当其中白球数小于2时，拒绝 H_0 ，否则接受。试给出：

- (i) 总体及其分布形式；(ii) 样本容量；(iii) 检验法（即拒绝域与接收域）；
(iv) 犯第I类错误、第II类错误的概率。

解

- (i) 从袋中任取一球，观察其颜色，并定义随机变量 X ，
$$X = \begin{cases} 1 & \text{取到白球} \\ 0 & \text{取到黑球} \end{cases}$$

则 X 就是这个统计问题的总体，分布律为

X	0	1
P	$1-p$	p

- (ii) 样本容量 $n=4$, (X_1, X_2, X_3, X_4)

- (iii) 拒绝域为

$$C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 2, x_i = 0 \text{ 或 } x_i = 1, i = 1, 2, 3, 4\}$$

接受域为

$$\bar{C} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 2, x_i = 0 \text{ 或 } x_i = 1, i = 1, 2, 3, 4\}$$



例

设袋中有10个球，其颜色有黑白两种， p 表示白球所占比例。有待检验的统计假设是， $H_0: p=0.5$, $H_1: p=0.2$ ，从袋中有放回的取4个球，当其中白球数小于2时，拒绝 H_0 ，否则接受。试给出：
(i) 总体及其分布形式；(ii) 样本容量；(iii) 检验法（即拒绝域与接收域）；
(iv) 犯第I类错误、第II类错误的概率。

解

(iv) 依题意有 $\sum_{i=1}^4 X_i \sim B(4, p)$

$$\begin{aligned} \text{犯第I类错误的概率为 } \alpha &= P(\text{拒绝} H_0 / H_0 \text{为真}) = P\left(\sum_{i=1}^4 X_i < 2 / p = 0.5\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^4 X_i = 0 / p = 0.5\right) + P\left(\sum_{i=1}^4 X_i = 1 / p = 0.5\right) = C_4^0 p^0 (1-p)^4 + C_4^1 p^1 (1-p)^3 = 0.3125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{犯第II类错误的概率为 } \beta &= P(\text{接受} H_0 / H_0 \text{为假}) = P\left(\sum_{i=1}^4 X_i \geq 2 / p = 0.2\right) \\ &= 1 - P\left(\sum_{i=1}^4 X_i = 0 / p = 0.2\right) - P\left(\sum_{i=1}^4 X_i = 1 / p = 0.2\right) = 1 - C_4^0 p^0 (1-p)^4 - C_4^1 p^1 (1-p)^3 = 0.1808 \end{aligned}$$



○ 本节回顾

□ 假设检验的概念和定义

显著性水平、左边/右边/双边假设、接受域、拒绝域、第I类和第II类错误

□ 求未知参数假设检验的步骤

- 提出原假设 H_0 和备择假设 H_1
- 确定检验统计量及其在 H_0 为真时的分布
- 根据显著性水平 α 和样本容量 n ，求出临界点，确定接受域或拒绝域
- 计算检验统计量的样本观测值
- 做出决策，是接受原假设 H_0 还是拒绝 H_0 （接受 H_1 ）



CHAPTER 8

假设检验

§ 8.1 假设检验的基本思想与基本概念

§ 8.2 单正态总体参数的假设检验

§ 8.3 双正态总体参数的假设检验

~~§ 8.4~~ 置信区间与假设检验之间的关系

~~§ 8.5~~ 几类假设检验简介



8.2 单正态总体参数的假设检验

单个正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 均值 μ 的假设检验

❖ σ^2 已知，关于 μ 的检验 U 检验 注意所有的拒绝域含有等号，接受域不含等号

检验统计量 及其分布	$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$	拒绝域	接受域
双边检验	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$ u = \left \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right \geq z_{\alpha/2}$	$ u = \left \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right < z_{\alpha/2}$
右边检验	$H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq z_\alpha$	$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < z_\alpha$
左边检验	$H_0 : \mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq -z_\alpha$	$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > -z_\alpha$



❖ σ^2 未知, 关于 μ 的检验 (t 检验)

不能再统计量 $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ 用样本标准差S代替 σ

检验统计量 及其分布	$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$ <small>(自由度为n-1)</small>	拒绝域	接受域
双边检验	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$ t = \left \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \right \geq t_{\alpha/2}(n-1)$	$ t = \left \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \right < t_{\alpha/2}(n-1)$
右边检验	$H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \geq t_{\alpha}(n-1)$	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} < t_{\alpha}(n-1)$
左边检验	$H_0 : \mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \leq -t_{\alpha}(n-1)$	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} > -t_{\alpha}(n-1)$



例

加工某罐头，每瓶中VC 的含量为随机变量 X ，服从正态分布，用传统工艺加工时， $X \sim N(19, 4)$ 。现改变工艺，抽查16瓶，测得VC 含量为 23, 20.5, 21, 22, 20, 19, 20, 23, 20.5, 18.8, 20, 19.5, 22, 18, 23。

问在新工艺下，VC 的含量是否比旧工艺提高？（假定VC含量的方差仍为4，取显著性水平为0.05）

H_0 : 没有变化

解

假设新工艺下 $X \sim N(\mu, 4)$ ， μ 未知

检验问题： $H_0 : \mu \leq \mu_0 = 19$; $H_1 : \mu > \mu_0 = 19$ **Step 1**

检验统计量及其分布： $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ **Step 2**

临界点： $z_\alpha = z_{0.05} = 1.65$ 拒绝域： $\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq z_\alpha = z_{0.05} = 1.65$ **Step 3**

观测值： $u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{20.8 - 19}{2 / \sqrt{16}} = 2.18 > 1.65$ **Step 4**

故拒绝 H_0 ，接受 H_1 ，
即新工艺使VC含量提高了

Step 5



例

设某次考试考生成绩服从正态分布，从中随机的抽取36名学生的成绩，算的平均成绩为66.5分，标准差为15分。问在显著性水平0.05下，是否可以认为全体考生的平均成绩为70分？

解

已知总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， σ^2 未知，对 μ 作检验

检验问题： $H_0: \mu = \mu_0 = 70$; $H_1: \mu \neq \mu_0 = 70$ Step 1

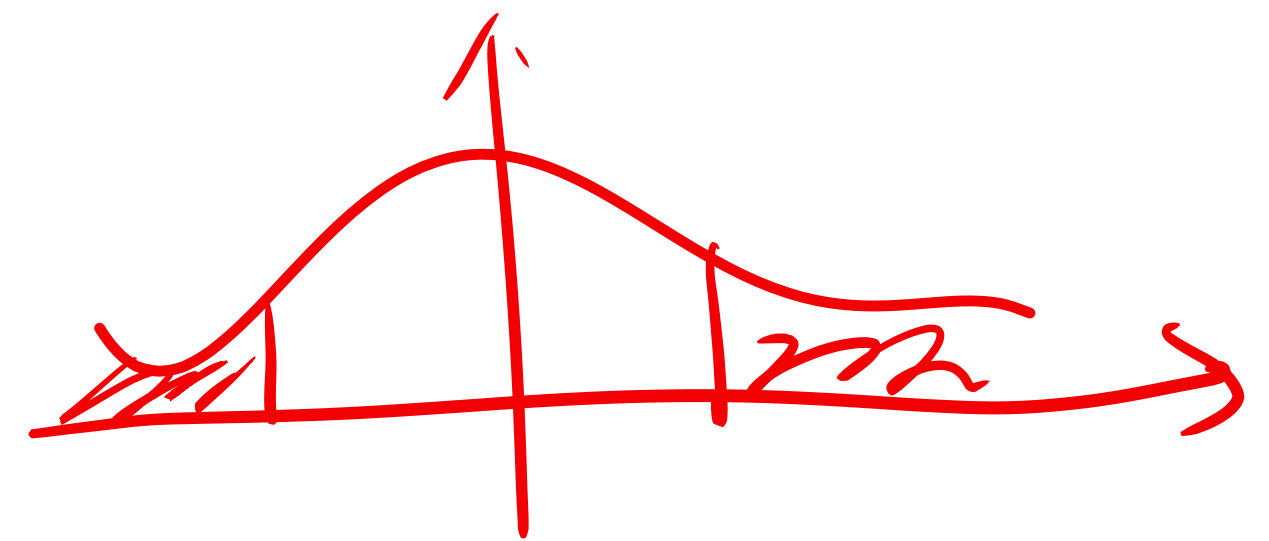
检验统计量及其分布： $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$ Step 2

临界点： $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(35) = 2.03$

拒绝域： $\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(35) = 2.03$ Step 3

观测值： $\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{66.5 - 70}{15 / \sqrt{36}} \right| = 1.4 < 2.03$ Step 4

故接受假设，即认为在显著性水平0.05下，全体考生的平均成绩为70分 Step 5





● 单个正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 方差 σ^2 的假设检验

❖ μ 已知，关于 σ^2 的检验 (χ^2 检验) **卡方检验**

检验统计量 及其分布	$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$	拒绝域	接受域
双边检验	$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n)$ $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n)$	$\chi_{1-\alpha/2}^2(n) < \chi^2 < \chi_{\alpha/2}^2(n)$
右边检验	$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n)$	$0 < \chi^2 < \chi_{\alpha}^2(n)$
左边检验	$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n)$	$\chi^2 > \chi_{1-\alpha}^2(n)$



❖ μ 未知，关于 σ^2 的检验 (χ^2 检验)

检验统计量 及其分布	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$	拒绝域	接受域
双边检验	$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$	$\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) < \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$
右边检验	$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\alpha}^2(n-1)$	$0 < \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\alpha}^2(n-1)$
左边检验	$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$	$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$



例

某洗衣粉包装机在正常工作条件下，每袋洗衣粉净重服从正态分布，标准重量为1000 克，标准差不能超过15 克。为检查机器工作是否正常，从已装好的袋装产品中，随机抽查10袋，测其净重为：1020,1030,968,994,014,998,976,928,950,1048。问包装机工作是否正常？设 $\alpha=0.05$ 。

解

已知总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， μ, σ^2 未知，对 μ, σ^2 分别作检验

很多问题需要均值和方差都检验，如例8-20

(i) 检验均值 μ

检验问题： $H_0 : \mu = \mu_0 = 1000; H_1 : \mu \neq \mu_0 = 1000$

检验统计量及其分布： $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$

临界点： $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(9) = 0.262$

拒绝域： $\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(9) = 0.262$

观测值： $\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{998 - 1000}{30.23 / \sqrt{10}} \right| = 0.209 < 0.262$

故接受假设 H_0

(ii) 检验方差 σ^2

检验问题： $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 = 15^2; H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 = 15^2$

检验统计量及其分布： $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

临界点： $\chi_{\alpha}^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(9) = 16.919$

拒绝域： $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\alpha}^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(9) = 16.919$

观测值： $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1) \times 913.78}{15^2} = 36.55 > 16.919$

故拒绝假设 H_0 ，标准差大于15

综合以上讨论，认为机器不正常



○ 本节回顾

□ 单个正态总体的假设检验

→ 就是4种情况

❖ 单个正态总体

检验均值

μ

σ^2 已知

1

检验统计量

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

σ^2 未知

4

检验统计量

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

μ 已知

2

检验统计量

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$$

检验方差

σ^2

μ 未知

3

检验统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$



CHAPTER 8

假设检验

- § 8. 1 假设检验的基本思想与基本概念
- § 8. 2 单正态总体参数的假设检验
- § 8. 3 双正态总体参数的假设检验**
- § 8. 4 置信区间与假设检验之间的关系
- § 8. 5 几类假设检验简介



8.3 双正态总体参数的假设检验

检验均值之差
检验方差之比

设 (X_1, \dots, X_{n_1}) 和 (Y_1, \dots, Y_{n_2}) 分别是来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本，
这两样本相互独立

样本均值和样本方差分别是 $\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i$

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2, S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2$$

对总体X和Y参数进行的假设检验称为双正态总体的假设检验



● 双正态总体均值差的假设检验

❖ σ_1^2 、 σ_2^2 已知，关于 $\mu_1-\mu_2$ 的检验

检验统计量 及其分布	$U = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \sim N(0,1)$	拒绝域	接受域
双边检验	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$ u = \left \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \right \geq z_{\alpha/2}$	$ u = \left \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \right < z_{\alpha/2}$
右边检验	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \delta$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta$	$u = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \geq z_{\alpha}$	$u = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} < z_{\alpha}$
左边检验	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \delta$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta$	$u = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \leq -z_{\alpha}$	$u = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} > -z_{\alpha}$



例 已知两种工艺条件下纺得细纱其强力总体服从正态分布, $X \sim N(\mu_1, 28^2)$, $Y \sim N(\mu_2, 28.5^2)$, 现在两类产品中抽样试验, 得强力数据的均值为: 甲工艺 $n_1 = 100, \bar{x} = 280$, 乙工艺: $n_2 = 100, \bar{y} = 286$, 问在显著性水平0.05下这两种工艺的平均强力有无显著性差异?

解 σ_1^2, σ_2^2 已知, μ_1, μ_2 未知

检验问题: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta = 0$; $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta = 0$

检验统计量及其分布: $U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \sim N(0, 1)$

临界点: $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$ 拒绝域: $|u| = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \right| \geq z_{\alpha/2} = 1.96$

观测值: $\left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \right| = \left| \frac{280 - 286}{\sqrt{28^2 / 100 + 28.5^2 / 100}} \right| = 1.50 < 1.96$ **两种工艺无显著性差异**



❖ 具有相同方差 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知，关于 $\mu_1 - \mu_2$ 的检验 (t 检验)

检验统计量 及其分布	$t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{S_w \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$	拒绝域	接受域
双边检验	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$ t \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$	$ t < t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$
右边检验	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \delta$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta$	$t \geq t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$	$t < t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$
左边检验	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \delta$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta$	$t \leq -t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$	$t > -t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$

其中 $S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$, $S_w = \sqrt{S_w^2}$



例 从两处煤矿各抽取若干样本，分析其含灰量 (%) 数据如下。甲矿：24.3, 20.8, 23.7, 21.3, 17.4；乙矿：18.2, 16.9, 20.2, 16.7；假定各煤矿含灰量都服从正态分布，且方差相等。问甲、乙两矿的平均含灰量有无显著性差异？ $\alpha=0.05$

解 具有相同方差， μ_1 、 μ_2 、 σ^2 未知

检验问题： $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta=0$ ； $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta=0$

检验统计量及其分布： $t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_W \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$, $n_1 = 5$, $n_2 = 4$

临界点： $t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.025}(7) = 2.365$ 拒绝域： $\left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_W \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.025}(7) = 2.365$

观测值： $\left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_W \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \right| = \left| \frac{21.5 - 18}{\sqrt{5.4} \sqrt{1/5 + 1/4}} \right| = 2.245 < 2.365$

无显著性差异



● 双正态总体方差比的假设检验

❖ $\mu_1、\mu_2$ 已知，关于 σ_1^2 / σ_2^2 的检验 (F 检验)

检验统计量 及其分布	$F = \frac{n_2 \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{n_1 \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2} \sim F(n_1, n_2)$	拒绝域	接受域
双边检验	$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F \geq F_{\alpha/2}(n_1, n_2)$ $F \leq \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_2, n_1)}$	$\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_2, n_1)} < F < F_{\alpha/2}(n_1, n_2)$
右边检验	$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F \geq F_{\alpha}(n_1, n_2)$	$0 < F < F_{\alpha}(n_1, n_2)$
左边检验	$H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F \leq \frac{1}{F_{\alpha}(n_2, n_1)}$	$F > \frac{1}{F_{\alpha}(n_2, n_1)}$



❖ $\mu_1、\mu_2$ 未知，关于 σ_1^2 / σ_2^2 的检验 (F 检验)

检验统计量 及其分布	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	拒绝域	接受域
双边检验	$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ $\frac{s_1^2}{s_2^2} \leq \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_2 - 1, n_1 - 1)}$	$\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_2 - 1, n_1 - 1)} < \frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$
右边检验	$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$0 < \frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$
左边检验	$H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$\frac{s_1^2}{s_2^2} \leq \frac{1}{F_{\alpha}(n_2 - 1, n_1 - 1)}$	$\frac{s_1^2}{s_2^2} > \frac{1}{F_{\alpha}(n_2 - 1, n_1 - 1)}$



例

某种作物有甲乙两个品种，为了比较其优劣，两个品种各种10亩，假设亩产量服从正态分布。收获后测得甲品种的亩产量的均值为30.97公斤，标准差为26.7 公斤，乙品种的亩产量的均值为21.79公斤，标准差为12.1公斤，现取检验水平为0.01，能否认为这两个品种的产量没有差异？

解 甲： $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \bar{x} = 30.97, s_1 = 26.7, n_1 = 10$ 乙： $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), \bar{y} = 21.79, s_2 = 12.1, n_2 = 10$

由题意，检验问题： $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

(i) 检验方差比

检验假设： $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

检验统计量及其分布： $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

拒绝域： $\frac{s_1^2}{s_2^2} \leq F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_2 - 1, n_1 - 1)} = \frac{1}{F_{0.005}(9, 9)} = 0.1529$ 或 $\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.005}(9, 9) = 6.54$

观测值： $\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{26.7^2}{12.1^2} = 4.869 < 6.54$

故接受假设 H_0 ，认为二者方差相等

(方差虽未知但相等)



(ii) 检验均值差

检验问题: $H_0: \mu_1 = \mu_2; \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

检验统计量及其分布: $t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_W \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$

其中 $S_W = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 1}, n_1 = 10, n_2 = 10$

拒绝域: $\left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S_W \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.025}(18) = 2.8785$

观测值: $\left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S_W \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \right| = \left| \frac{30.97 - 21.79}{\sqrt{429.65} \sqrt{1/10 + 1/10}} \right| = 0.99 < 2.8785$

故接受假设 H_0 , 可知在显著性水平0.01下, 两品种的亩产量无显著性差异



○ 本节回顾

□ 两个正态总体的假设检验

检验均值差 $\mu_1 - \mu_2$

σ_1^2, σ_2^2 已知

5

检验统计量 $U = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \sim N(0, 1)$

6

检验统计量 $t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{S_w \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$

❖ 两个相互独立正态总体

检验方差比 σ_1^2 / σ_2^2

μ_1, μ_2 已知

7

检验统计量 $F = \frac{n_2 \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{n_1 \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2} \sim F(n_1, n_2)$

8

检验统计量 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

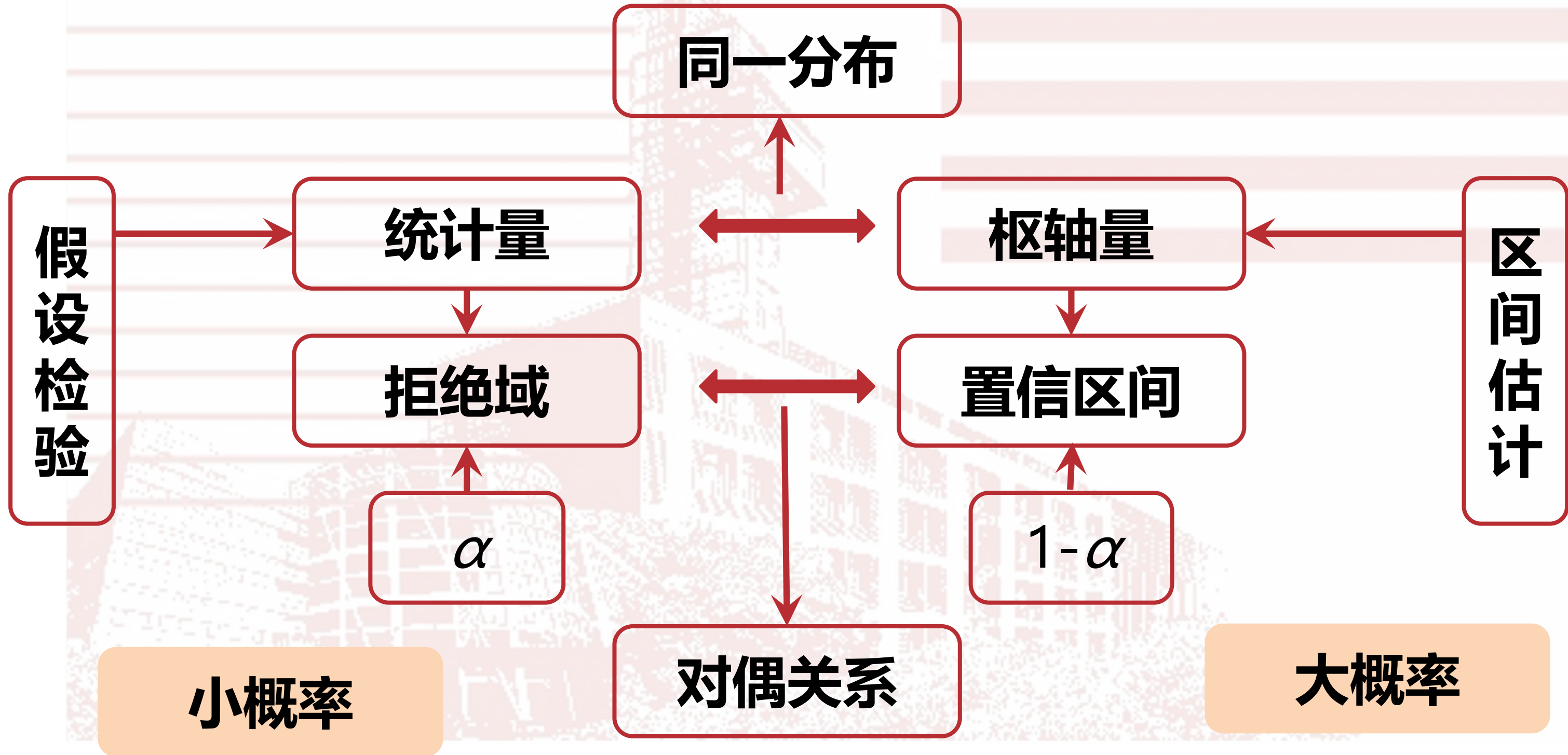


复习思考题

1. 假设检验的基本思想是什么？其中用了一条什么原理？
2. 检验的显著性水平 α 的意义是什么？
3. 比较双边、左边和右边检验的拒绝域。
4. 使用 U 检验法可以进行哪些假设检验？
5. 使用 t 检验法可以进行哪些假设检验？
6. 使用 χ^2 检验法可以进行哪些假设检验？
7. 使用 F 检验法可以进行哪些假设检验？
8. 正态总体期望与方差的区间估计和假设检验两者之间有什么相似之处？
9. 成对数据差的 t 检验适用于哪些特殊场合？
10. 分布拟合的 χ^2 检验的基本步骤是什么？



假设检验与区间估计的联系





○ 假设检验补充内容

1. 关于如何确定双边检验、单边检验

根据备择假设的方向性确定，不应考虑原假设的形式

如： $H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu > \mu_0$ 为右边检验，确定拒绝域（接受域）应按照单边检验的原则确定

$H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu < \mu_0$ 为左边检验，确定拒绝域（接受域）应按照单边检验的原则确定

2. 原假设和备择假设的关系

逻辑上互斥，不一定对立

但从事件角度分析，应该为对立事件，否则无法根据拒绝 H_0 得出接受 H_1 的结论

如： $H_0: \mu = \mu_0 = 2$; $H_1: \mu > \mu_0 = 2$ 如果拒绝 H_0 , $\mu \neq 2$, 但不代表 $\mu > 2$, μ 有可能等于0, 1....

因此此类情况应明确条件，如根据实际情况，不考虑/不关心 $\mu < 2$ 的情况



假设检验补充内容

如2018年考题：

5. (10 分) 在一次大型网络购物节中，假设网购者的消费水平服从均值为 μ (元)，方差为 σ^2 的正态分布。现有容量为 36 的网购消费水平简单样本，均值为 990，样本方差为 486，试在 $\alpha = 0.5\%$ 的显著性水平下，作如下假设检验：

$$H_0: \mu = 1000, \quad H_1: \mu < 1000$$

(注: $\sqrt{2} = 1.4142, \sqrt{3} = 1.7321, \sqrt{6} = 2.4495, t_{0.01}(36) = 2.4345,$

$t_{0.005}(36) = 2.7195, t_{0.01}(35) = 2.4377, t_{0.005}(35) = 2.7238$)

拒绝域应根据 H_1 确定，根据 H_1 ，本题应为左边检验，故拒绝域边界应根据 α 分位点确定。



○ 假设检验补充内容

如2017年考题：

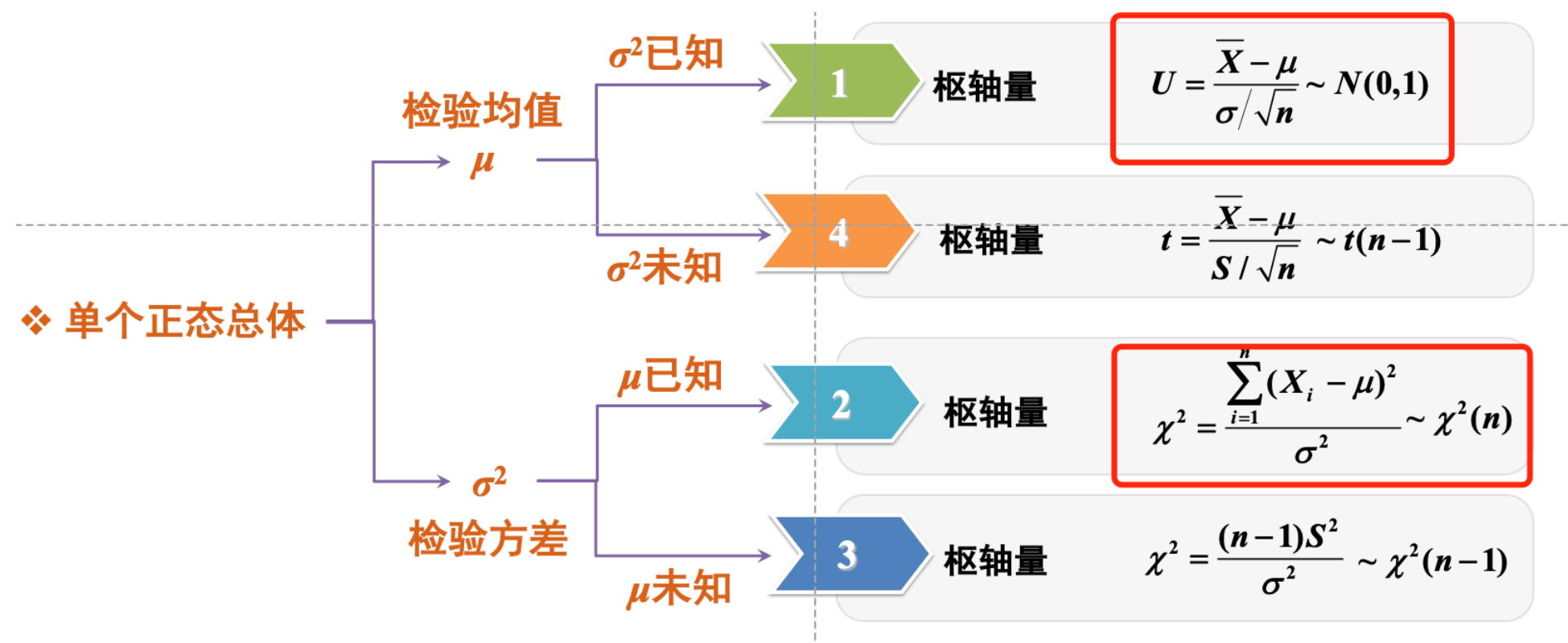
4. (10 分) 在一种数字信号传输系统中，当发射机发出数 μ 时，由于噪声的存在，接收机收到的数字是随机的，它服从均值为 μ ，方差为 1 的正态分布。当接收到 90 次数字的平均值为 4 时，问在 5% 的显著性水平下，可否认为发射机发出的数字显著大于 3.8？
($z_{0.05} = 1.645$, $z_{0.025} = 1.96$)

根据所要求检验的描述，具有明确的方向性， $H_1: \mu > 3.8$ ，因此为右边假设，原假设应为 $H_0: \mu \leq 3.8$
答案给出为 $H_0: \mu = 3.8$ ，为默认不考虑 < 3.8 的写法。

稳妥起见，在未有明确描述的条件下，建议将 H_0 和 H_1 写为对立事件，形成完备事件集。



补充内容



关于枢轴量选择，如检验方差 σ^2 ，为何选择2（第三行）而不能用1（第一行），主要是2为充分统计量，能够反映样本提供的所有我们感兴趣的信息。具体计算可参考如下链接。咱们课程不涉及，大家只需掌握上述参数所用的固定选择即可。

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/87520809>

https://www.bilibili.com/video/BV1AE411d7pX?from=search&seid=1762616512894839845&spm_id_from=333.337.0.0