静电场的环路定理 $\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0}$ 静电场是有源、无旋场。

$$\boxed{A_{ab} = W_a - W_b = q_0(u_a - u_b) = \int_a^b q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

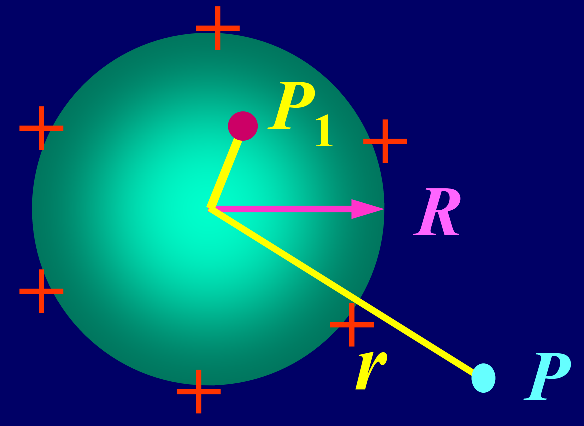
电势的计算 方法

（1） 电势叠加法 $u = \int_Q du$

（2） 场强积分法 $u_p = \int_p^{"0"} \vec{E}\cdot d\vec{l}$

例 半径为R，带电量为q 的均匀带电球面

求 带电球体的电势分布



解 根据高斯定律可得：

$$\begin{cases} r < R & E_1 = 0 \\ r \geq R & E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$$

$r \geq R$

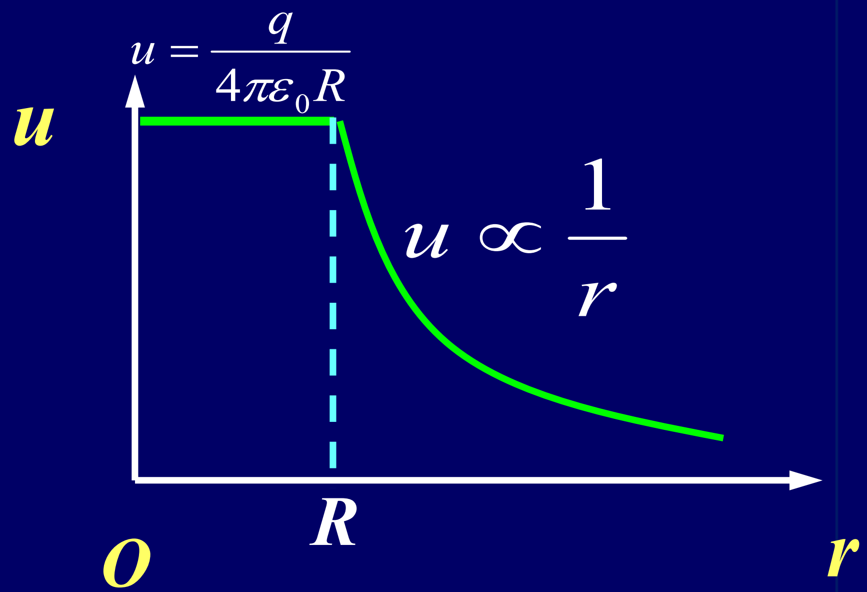
$$u_{外} = \int_p^\infty \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^\infty \frac{q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$r < R$

$$u_{内} = \int_{p_1}^\infty \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^R E_1 \mathrm{d}r + \int_R^\infty E_2 \mathrm{d}r$$

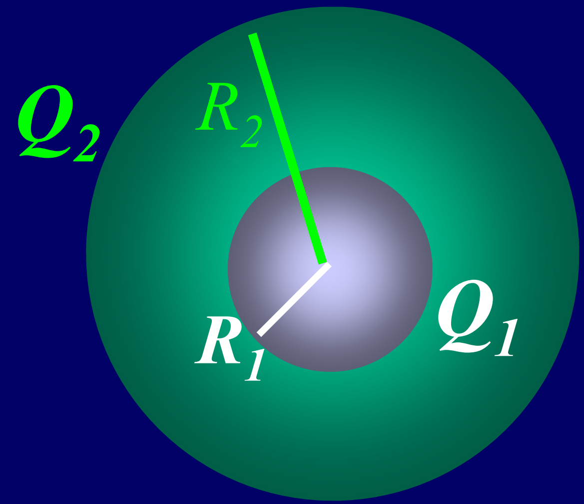
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



电势分布曲线

例 同心的均匀带电薄球壳，半径为R_1，R_2，带电Q_1，Q_2

求 电势分布



解 半径为R_1的球面Q_1产生的电场的电势分布为：

$$u_1 = \begin{cases} \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} & r < R_1 \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} & r \ge R_1 \end{cases}$$

半径为R_2的球面Q_2产生的电场的电势分布为：

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} & r < R_2 \\ \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} & r \ge R_2 \end{cases}$$

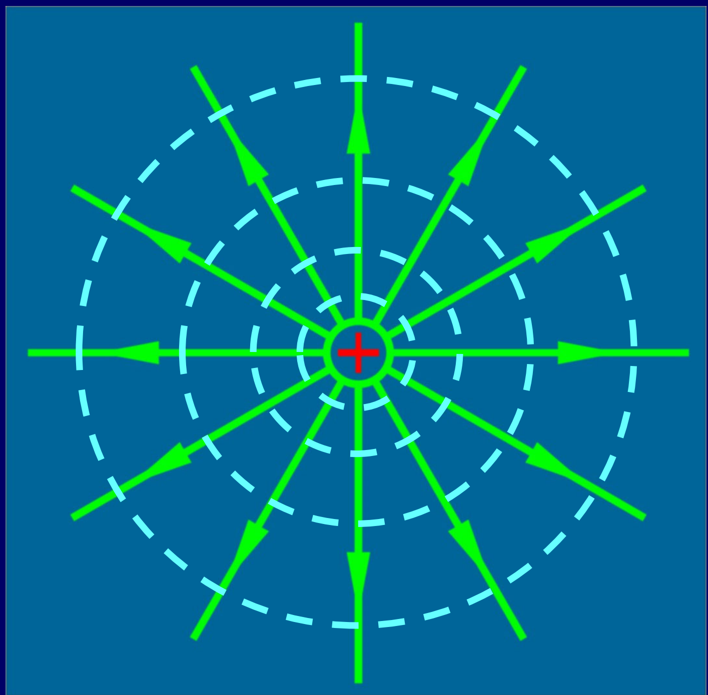
总的电势分布：$u = u_1 + u_2 = \begin{cases} \dfrac{Q_2+Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} & r > R_2 \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} & R_1 \le r \le R_2 \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} & r < R_1 \end{cases}$

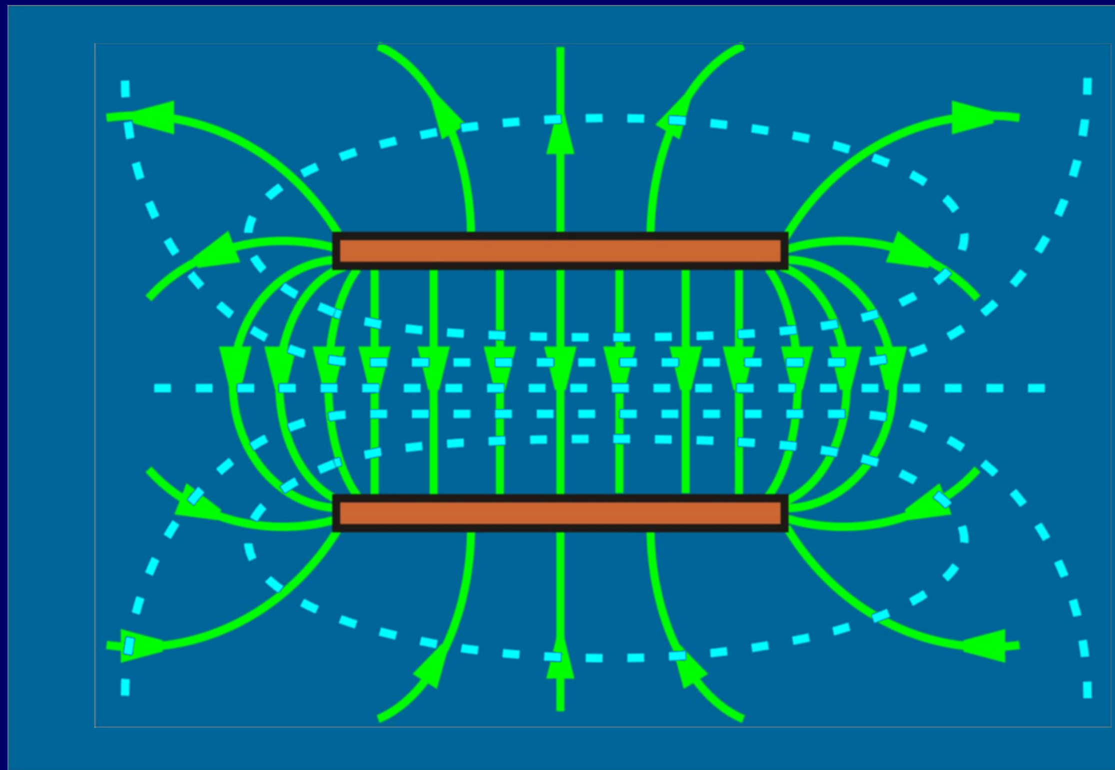
§ 10.6 等势面 电势与电场强度的微分关系

一. 等势面

1.电场中电势相等的点连成的面称为等势面。

规定:相邻两等势面间的电势差都相同





$$u=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

2. 等势面的性质：

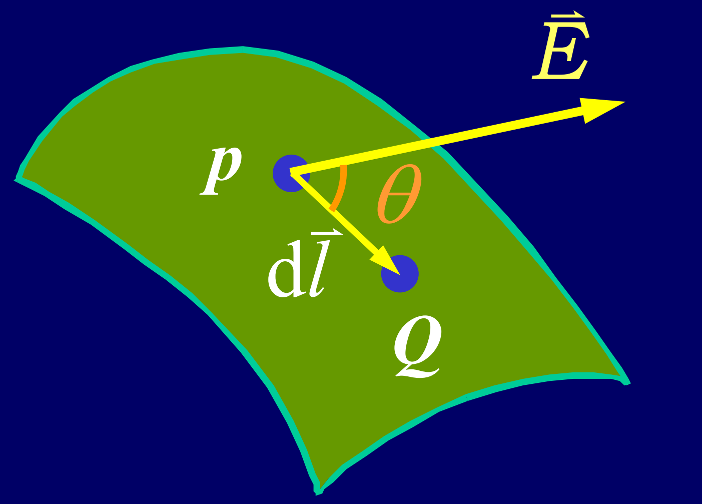
$$\mathrm{d}A = q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = q_0E\cos\theta\mathrm{d}l$$

$$= q_0(u_p - u_Q)$$

$$\because u_p = u_Q$$

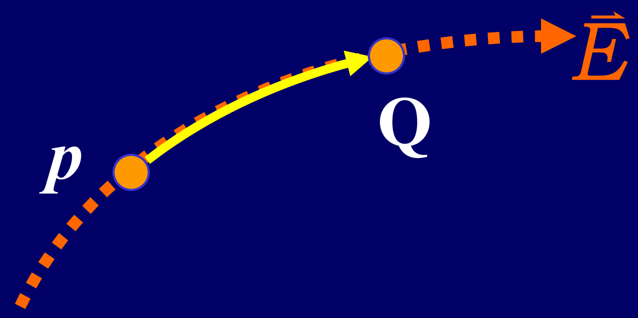
$$\therefore q_0E\cos\theta\mathrm{d}l = 0$$

$$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$



(1)等势面与电场线处处正交

(2)等势面上移动电荷电场力不做功



$$u_{PQ} = \int_P^Q \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} > 0$$

(3) 电场强度的方向总是指向电势降落的方向

$$u_p > u_Q$$

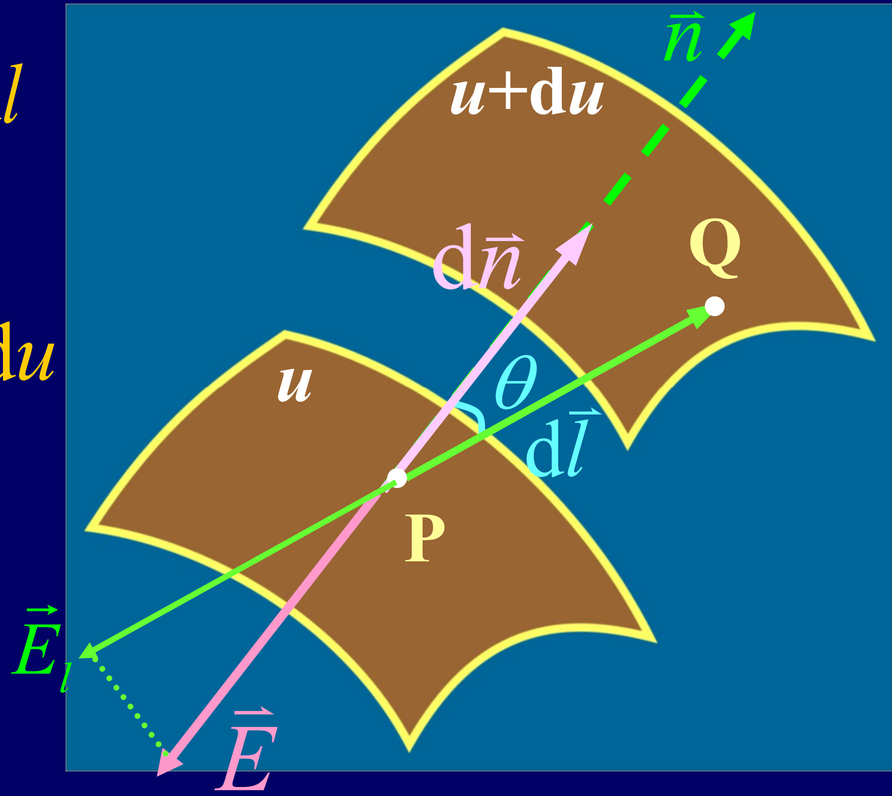
二. 电势与电场强度的微分关系

沿电势增加的方向为等势面的正法线方向 $\vec{n}$

$$\begin{cases} dA = q\vec{E}\cdot d\vec{l} = qE\cos(\pi-\theta)dl \\ \quad = -qE\,dn = -qE_l\,dl \\ dA = q[u-(u+du)] = -q\,du \end{cases}$$

$$E\,dn = du$$

$$E_l\,dl = du$$



$$\boxed{\vec{E} = -\frac{du}{dn}\vec{n}}$$

$$\boxed{\vec{E}_l = -\frac{du}{dl}\vec{l}^{\,0}}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\vec{n}}$$

电场强度的大小等于等势面法线方向上电势的变化率，负号表示电场指向电势减小的方向。

$$\boxed{\vec{E}_l = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l}\vec{l}^{\,0}}$$

电场强度在 l 方向的投影等于电势沿该方向变化率的负值。

$$\mathrm{d}l \geq \mathrm{d}n \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l} \leq \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}$$

- 电势沿等势面法线方向的变化率最大。
- 电场越大，等势面愈密集。

在直角坐标系中： $\vec{l}^{\,0} = \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right) = -\mathrm{grad}(u) = -\nabla u}$$

某点的电场强度等于该点电势梯度的负值。

例 均匀带电圆环轴线上的电势分布 $u = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}$

求 圆环轴线上场强分布

$$E_x = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E_y = E_z = 0$$

§ 10.7 静电场中的导体

一. 导体的静电平衡

1. 静电平衡

导体内部和表面上都没有电荷做宏观运动的状态，称为静电平衡状态。

2. 导体静电平衡的条件

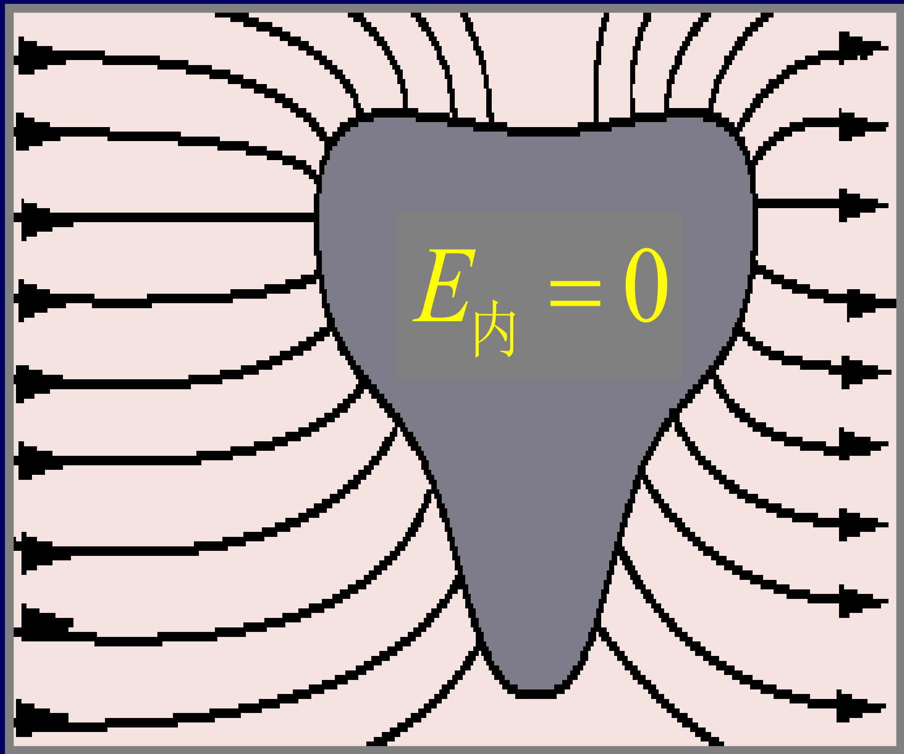
$$\boxed{E_{内} = 0}$$

3. 静电平衡导体的电势

$$U_a - U_b = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

导体静电平衡时，导体是等势体，表面是等势面。

静电感应

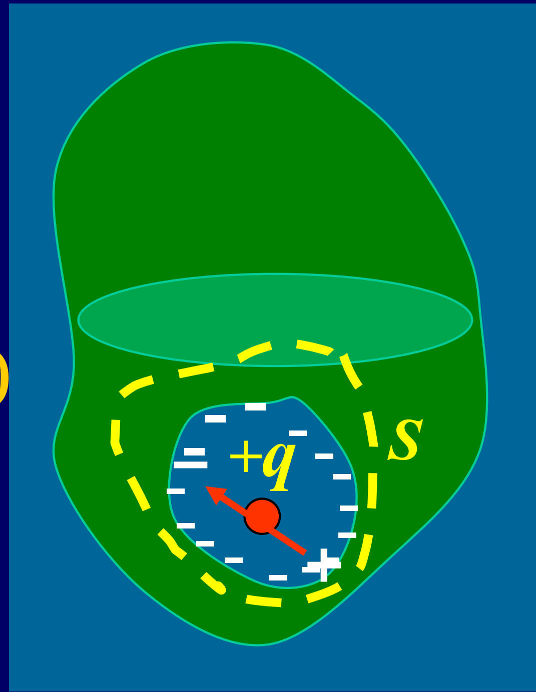


$$\boxed{\vec{E}_{表面} \perp 导体表面}$$

二. 导体上电荷的分布

1. 导体的内部处处不带电，净电荷只分布在导体表面。

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0 \xrightarrow{\text{由高斯定理}} \sum_i q_i=\int_V \rho \mathrm{d}V=0$$



导体中各处 $\rho=0$

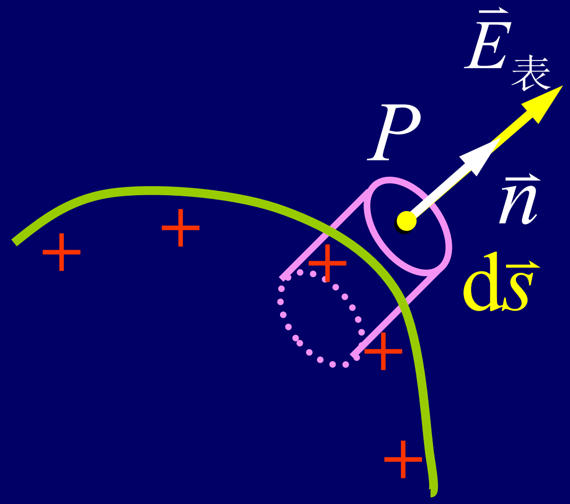
- 若导体空腔中无带电体，净电荷只分布在导体外表面，内表面不带电。

- 若导体空腔中有带电体，则导体内外表面都有电荷分布，内表面电荷与 q 等值异号。

2. 静电平衡导体表面附近的电场强度与导体表面电荷的关系

设导体表面电荷面密度为 $\sigma(x,y,z)$

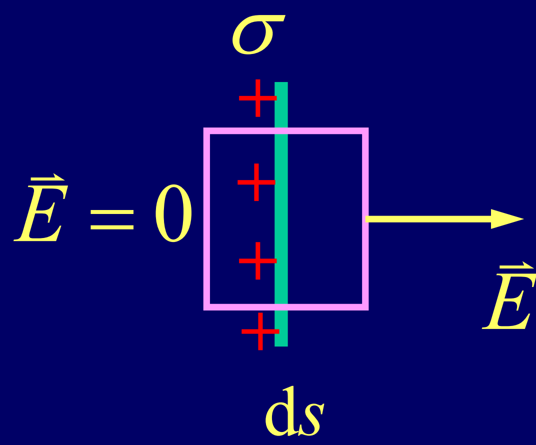
根据高斯定理:



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{dS}\vec{E}_{表}\cdot d\vec{S} + \int_{(S-dS)}\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}$$

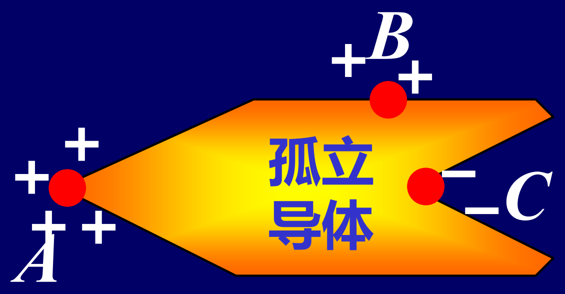
$$E_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}}$$



3. 处于静电平衡的孤立带电导体电荷分布

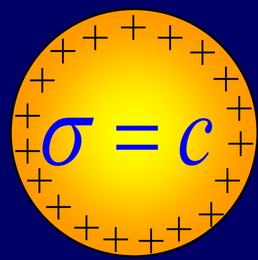
由实验可得以下定性的结论：

$$\sigma \propto \frac{1}{\rho}$$

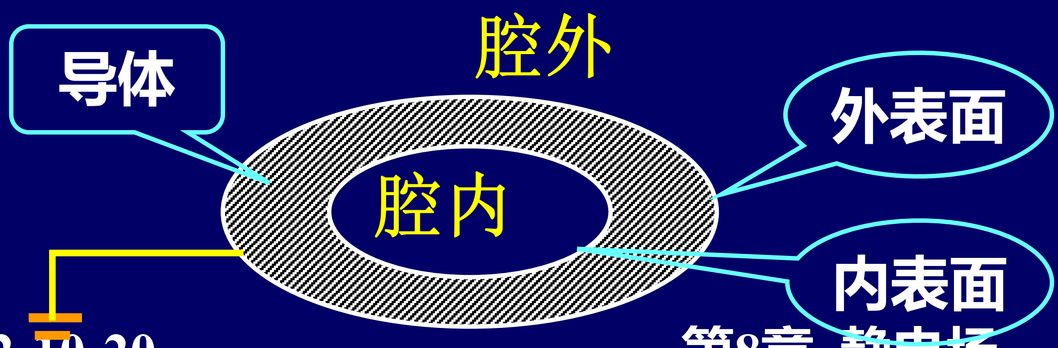


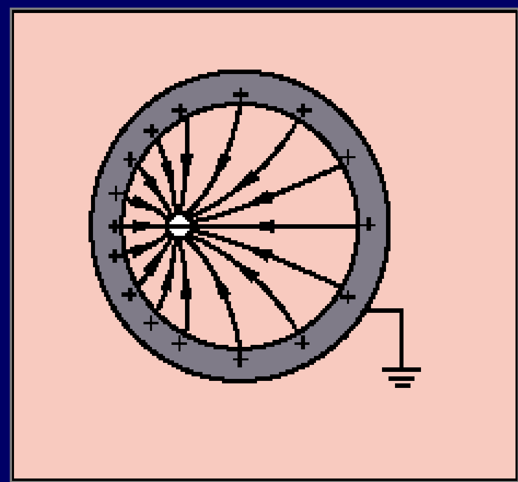
$$\sigma_A > \sigma_B > \sigma_C$$

孤立带电导体球



4. 静电屏蔽（腔内、腔外的场互不影响）

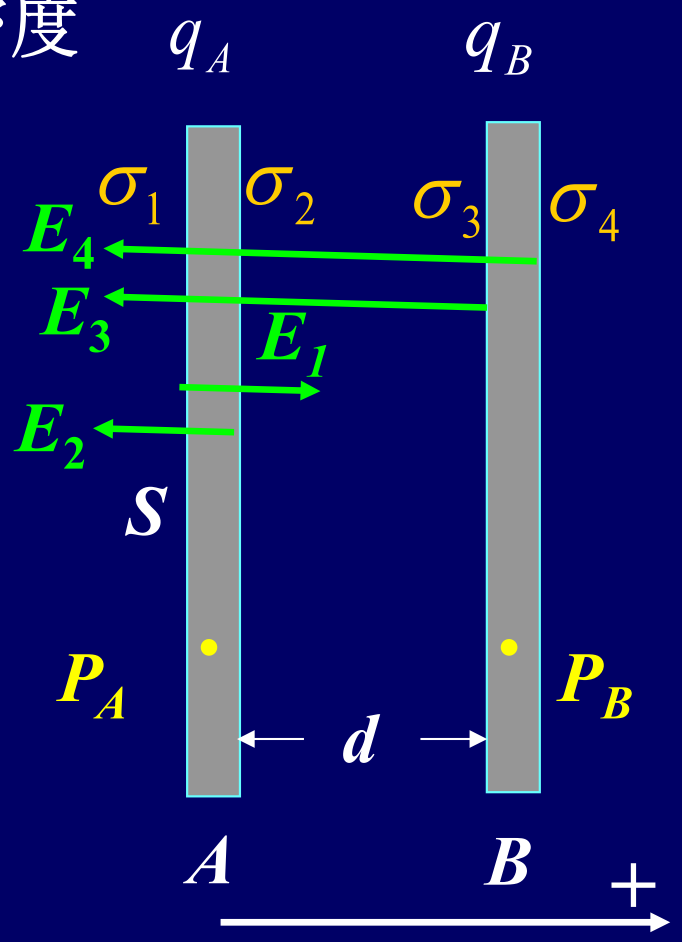




例 两平行且面积相等的的导体板，$S >> d^2$

两板的带电量分别为q_A，q_B

求 静电平衡时两板各表面的电荷面密度



解

$$\sigma_1 S + \sigma_2 S = q_A \qquad (1)$$

$$\sigma_3 S + \sigma_4 S = q_B \qquad (2)$$

$$E_{PA} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0 \quad (3)$$

$$E_{PB} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0 \quad (4)$$

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{q_A + q_B}{2S} \qquad \sigma_1 = -\sigma_3 = \frac{q_A - q_B}{2S}$$