§ 14.5 狭义相对论的速度变换定理

由洛仑兹坐标变换

定义 $\upsilon_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{d}x - u\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t - \frac{u}{c^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\upsilon'_x = \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'$$

$$\upsilon'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x - u\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - \frac{u}{c^2}\mathrm{d}x} = \frac{\upsilon_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_x}$$

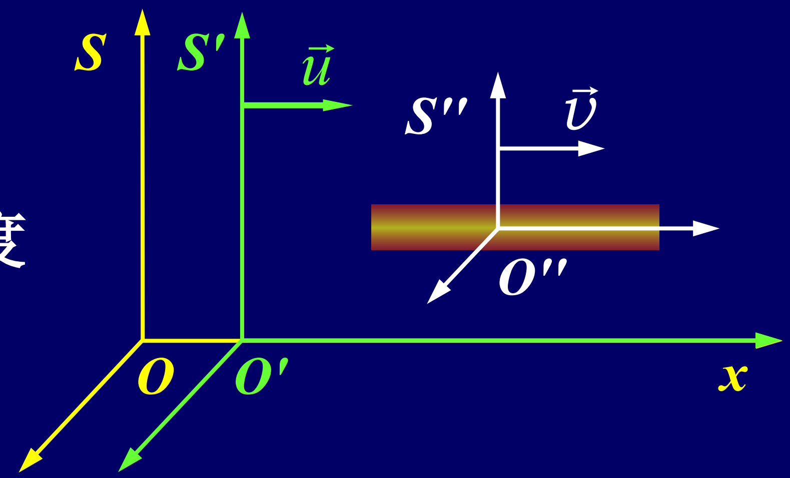
$$\upsilon'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y\sqrt{1-\beta^2}}{\mathrm{d}t - \frac{u}{c^2}\mathrm{d}x} = \frac{\upsilon_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_x}$$

整理得

$$\boxed{v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \qquad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \qquad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}}$$

例 一宇宙飞船以速度 u 远离地球沿 x 轴方向飞行，发现飞船前方有一棒形不明飞行物，平行于 x 轴。飞船上测得此物长为l'，速度大小为 v'，方向沿 x 轴正向。

求 地面上的观测者测得此物长度。



解

在S'' 系中测得不明飞行物的长度为原长 l_0

$$l_0 = \frac{l'}{\sqrt{1 - v'^2 / c^2}}$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2} = l' \frac{\sqrt{(1 - v^2 / c^2)}}{\sqrt{(1 - v'^2 / c^2)}}$$

由速度逆变换式有 $v = \dfrac{v' + u}{1 + v'u/c^2}$

$$l = \frac{l'\sqrt{1 - u^2 / c^2}}{1 + v'u/c^2}$$

例 飞船 A，B 相对于地面分别以 $0.6c$ 和 $0.8c$ 的速度相向而行。

求 (1) 飞船 A 上测得地球的速度；

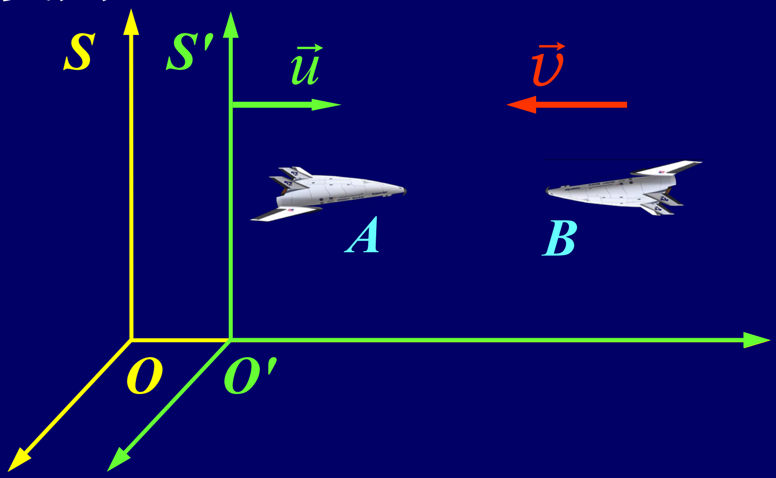
(2) 飞船 A 上测得飞船 B 的速度；

解 (1) 飞船 A 上测得地球的速度为: $-0.6c$

(2) S' (飞船 A)系相对与 S 系的速度为 $u=0.6c$.

飞船 B 在 S 系中的速度 $\upsilon=-0.8c$,

S' 系(飞船 A)测得飞船 B 的速度为



$$\upsilon'=\frac{\upsilon-u}{1-\upsilon u/c^2}$$

$$=\frac{-0.8c-0.6c}{1+0.8\times0.6c/c^2}=-0.94c$$

§ 14.6 狭义相对论质点动力学简介

原则

(1) 应符合爱因斯坦的狭义相对性原理

即经过洛伦兹变换时保持定律形式不变

(2) 应满足对应原理

即趋于低速时，物理量须趋于经典理论中相应的量

一. 相对论质量、动量

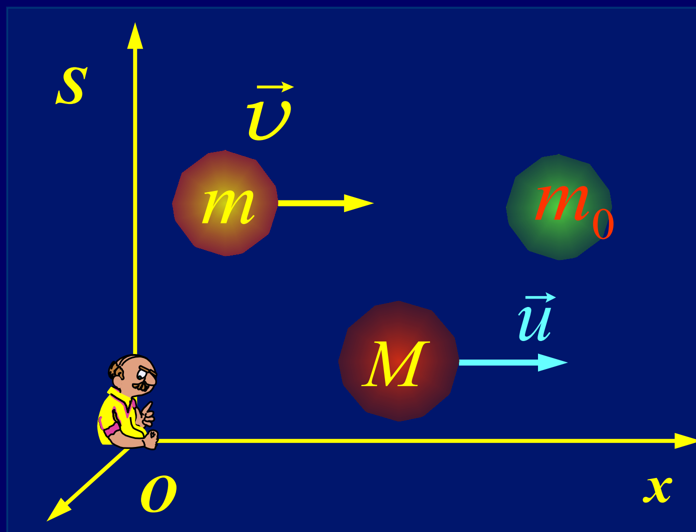
1. 质速关系

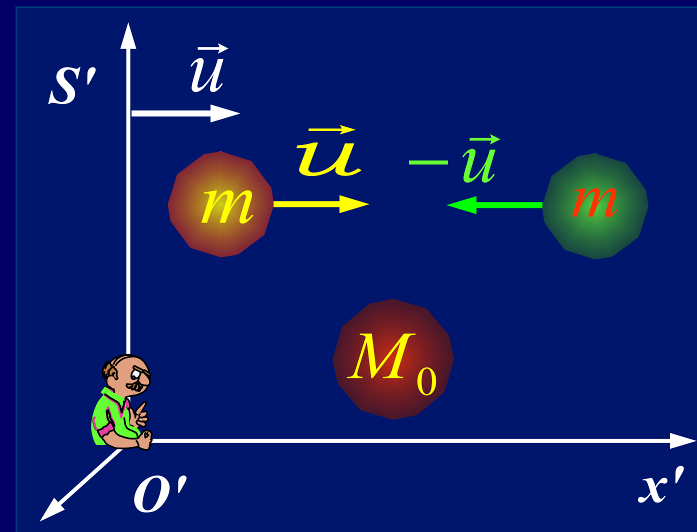
经典理论： $m = m_0 =$ 恒量 ⟷ 与物体运动无关

$$\vec{F} = m_0 \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{t \to \infty} v > c$$

● 以两粒子的弹性正碰为例来导出质速关系

设两粒子完全相同，其静止质量为 m_0





S 系的观察者

$$M = m + m_0$$

$$Mu = m\upsilon$$

$$\Rightarrow \frac{m_0 + m}{m} = \frac{\upsilon}{u}$$

根据洛伦兹变换 $\upsilon = \dfrac{u+u}{1+uu/c^2}$

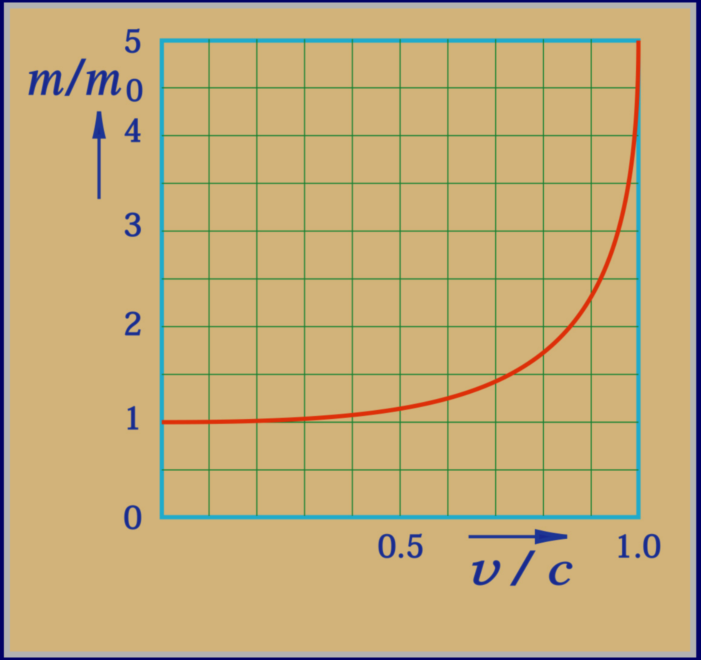
$$\Downarrow$$

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}}$$

讨论

(1) 当$v << c$时，$\beta \to 0$，$m = m_0$

(2) 质速曲线



当$v = 0.1c$　　m 增加 0.5%

当$v = 0.866c$　　$m = 2m_0$

当$v \to c$　　$m \to \infty$

当$v = c$　　$m_0 = 0$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(3) 光速是物体运动的极限速度

2. 相对论动量

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{\upsilon} = m_0\vec{\upsilon} / \sqrt{1-\upsilon^2 / c^2}}$$

3. 相对论质点动力学基本方程

经典力学 $\vec{p} = m_0\vec{\upsilon}$ $\longrightarrow$ $\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m_0\dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = m_0\vec{a}$

低速退化

相对论力学 $$\boxed{\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{\upsilon}\right)}$$

二. 相对论动能

- 经典力学

$$E_k = \frac{m_0 \upsilon^2}{2}$$

- 相对论力学

$$E_k = \cancel{\frac{m_0}{2\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}}\upsilon^2 \quad ?$$

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\vec{p}\cdot\vec{\upsilon} = \left(\vec{\upsilon}\mathrm{d}m + m\mathrm{d}\vec{\upsilon}\right)\cdot\vec{\upsilon} = c^2\mathrm{d}m$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$$

$$m^2c^2 - m^2\upsilon^2 = m_0^2c^2$$

$$2m\upsilon^2\mathrm{d}m + 2m^2\upsilon\mathrm{d}\upsilon = 2mc^2\mathrm{d}m$$

$$\upsilon^2\mathrm{d}m + m\upsilon\mathrm{d}\upsilon = c^2\mathrm{d}m$$

$$E_K = \int_L \vec{F}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r} = \int_{m_0}^{m} c^2\mathrm{d}\,m$$

$$\boxed{E_K = mc^2 - m_0c^2}$$

相对论的动能表达式

$$\boxed{E_K = mc^2 - m_0c^2}$$

讨论

(1) 注意相对论动能与经典力学动能的区别和联系

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 \Longleftrightarrow E_k = m_0\upsilon^2/2$$

当 $\upsilon << c$ **时，** $\beta \to 0$**，有**

$$E_k = c^2\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - m_0\right)$$

$$= m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{\upsilon^4}{c^4} + \cdots - 1\right) \approx \frac{m_0\upsilon^2}{2}$$

牛顿力学中的动能公式

$\upsilon << c$ **出现退化**

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots$$

三. 质能关系

$$\boxed{E_K = mc^2 - m_0c^2}$$

静止能量：$E_0 = m_0c^2$

任何宏观静止物体具有能量

总 能 量：$E = mc^2$

运动物体具有的总能量

$$E_K + E_0 = E$$

质能关系

$$\boxed{E = mc^2}$$

物体的相对论总能量与物体的总质量成正比 ——质量与能量不可分割

$$\boxed{\Delta E = (\Delta m)c^2}$$

质量 亏损

四. 相对论能量和动量的关系

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \xrightarrow{\text{两边平方}} m^2c^2-m^2\upsilon^2=m_0^2c^2$$

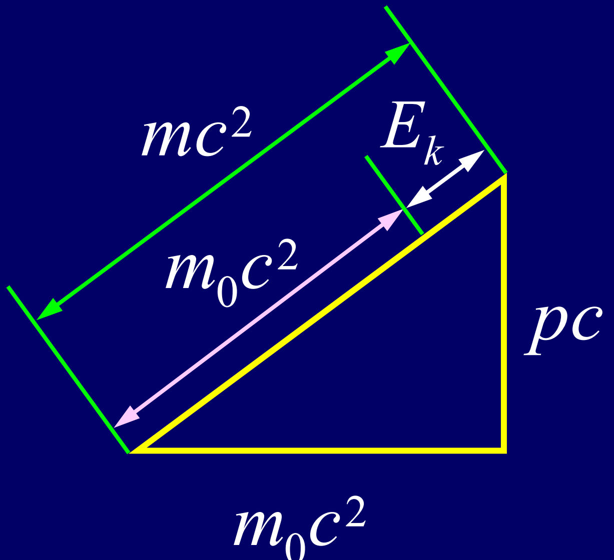
两边乘以 c^2

$$m^2c^4=m^2\upsilon^2c^2+m_0^2c^4$$

$$\boxed{E^2=p^2c^2+E_0^2}$$

取极限情况考虑，如光子

$$\left.\begin{aligned} m_0&=0\\ E&=pc\\ p&=E/c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} E&=h\nu\\ p&=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda}\\ m&=\frac{E}{c^2}=\frac{h\nu}{c^2} \end{aligned}\right.$$



例 两个静质量都为 m_0 的粒子，其中一个静止，另一个以 $v_0 = 0.8\,c$ 运动，它们对心碰撞以后粘在一起。

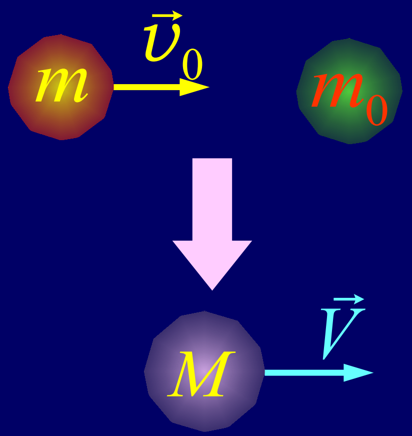
求 碰撞后合成粒子的静止质量。

解 两粒子系统，碰撞前后动量、能量均守恒

$$mv_0 + 0 = MV$$

$$mc^2 + m_0c^2 = Mc^2$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} = \frac{5}{3}m_0$$



$$M_0 = M\sqrt{1 - V^2/c^2} = \frac{8}{3}m_0\sqrt{1 - 0.5} = 2.31m_0$$

$$V = \frac{5}{3}m_0 \cdot 0.8c \Big/ \frac{8}{3}m_0 = 0.5c$$

例 某粒子的静止质量为 m_0 ，当其动能等于其静能时，

求 其质量和动量各等于多少？

解 动能：$E_k = mc^2 - m_0c^2$

$$E_k = m_0c^2 \longrightarrow m = 2m_0$$

由质速关系 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \longrightarrow \upsilon = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$

由此得，动量

$$p = m\upsilon = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\left(\upsilon/c\right)^2}} = \sqrt{3}m_0c$$

例 设火箭的静止质量为 100 t，当它以第二宇宙速度飞行时，

求 其质量增加了多少？

解 火箭的第二宇宙速度 $\upsilon = 11.2\times10^{3}$ m/s，因此 $\upsilon \ll c$，所以火箭的动能为

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = \frac{1}{2}m_0\upsilon^2$$

火箭的质量的增加量为

$$\Delta m = m - m_0 = E_k/c^2 = \frac{1}{2}m_0(\upsilon/c)^2$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times1000\times10^3\times\left(11.2\times10^3\right)^2}{9\times10^{16}} = 0.7\times10^{-3}\ \text{kg}$$

火箭质量可近视为不变