西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

第2章 随机变量及其分布

概率论与数理统计课程组

CHAPTER 2

随机变量及其分布

2.5 随机变量函数及其分布

1. 随机变量函数的定义

实际中，常常会遇到某些随机变量函数的问题。例如，某圆盘的半径 R 是随机变量，它的分布是已知的，但实际中关心的是该圆盘的面积 $A = \pi R^2$，即随机变量 R 的函数 A 。一般地，有下面的定义。

定义 设 X 是随机变量，$y = g(x)$为已知的连续函数，则称 $Y = g(X)$为随机变量 X的函数，简称随机变量函数。

显然，随机变量函数仍是随机变量。

计算Y的分布

两种情况

Y为离散型：Y 的分布律

Y为连续型：Y的密度函数

离散型

随机变量X的分布律为

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$

$Y = g(X)$，计算Y的分布律，只需

1. 逐个计算Y 的取值，$g(x_1), g(x_2), \dots\dots,$ 每个$g(xi)$对应的概率为p_i

2. 合并所有相同的$g(xi)$，并将对应的概率p_i相加

例

例如，若要测量一个圆的面积，总是测量其半径，半径的测量值可看作随机变量X，若已知X分布，则Y服从什么分布？

已知X具有分布如表格，且设$Y=X^2$, 求Y 的分布。

解

X的分布

X	-1	0	1
P	0.2	0.5	0.3

逐个计算Y的取值及概率

Y	1	0	1
P	0.2	0.5	0.3

合并相同取值

Y	1	0
P	0.5	0.5

例 设

X	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

$Y=2X$，$Z=X^2$，求Y, Z 的分布律。

解 逐个计算Y的取值及概率

Y	-2	0	2
P	1/3	1/3	1/3

无相同取值不需合并。

逐个计算Z的取值及概率

Z	1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

合并相同取值

Z	0	1
P	1/3	2/3

求随机变量函数的分布的流程

一般，若已知随机变量X的分布，又知随机变量$Y=g(X)$，求Y的分布的过程为：

关键是找出等价事件

Y 为离散量

1. Y 的可能取值： $y_1, y_2, \dots, y_j, \dots$
2. 再找出$\{Y=y_j\}$的等价事件$\{x\in D\}$，得$P(Y=y_j)=P(x\in D)$

Y 为连续量

"分布函数法"

1. 先写出Y的概率分布函数：$F_Y(y)=P(Y\le y)$
2. 然后找出$\{Y\le y\}$的等价事件$\{x\in D\}$，借助X的分布函数得$F_Y(y)=P(x\in D)$，之后可对其求导得Y概率密度$f_Y(y)$

注意：不一定X是离散型Y就必是离散型，也不一定X是连续型Y就必是连续型， $Y=g(X)$可以是"自定义"，通过设置一种对应规则得到Y

$y=g(x)$单调可微时可用"公式法"求$f_Y(y)$

连续型

设X为连续型随机变量，密度函数为$f_X(x)$, 又设$Y=g(X)$也为连续型随机变量，求其密度函数$f_Y(y)$

步骤

① 计算Y的分布函数

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=\int_{\{x:g(x)\le y\}} f_X(x)dx$$

其中积分区域$\{x: g(x)\le y\}$表示满足$g(x)\le y$的x的点集。

② 对分布函数求导，得到概率密度

例 已知X具有概率密度 $f_X(x)=\begin{cases} x/8, & 0<x<4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 且设$Y=X^2$, 求Y的概率密度$f_Y(y)$

解 分别记X, Y的分布函数为 $F_X(x), F_Y(y)$ 　“分布函数法”

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P\left(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\right)=P\left(0<X\le\sqrt{y}\right)=P\left(X\le\sqrt{y}\right)$$

Y的数值范围实际仅需分析 $(0, 16)$

当$y\le 0$时，$F_Y(y)=0$； 当$y\ge 16$时，$F_Y(y)=1$

当$0<y<16$时，因 $P(-4<x<0)=0$， $F_Y(y)=P\left(0<X\le\sqrt{y}\right)=\int_0^{\sqrt{y}} f_X(t)dt=\int_{-\infty}^{\sqrt{y}} f_X(t)dt=F_X\left(\sqrt{y}\right)$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{d\left[F_X\left(\sqrt{y}\right)\right]}{dy}, & 0<y<16 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} f_X\left(\sqrt{y}\right), & 0<y<16 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\dfrac{\sqrt{y}}{8}=\dfrac{1}{16}, & 0<y<16 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

Y在区间$(0, 16)$均匀分布

$f(x)$连续时 $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$, $\dfrac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)dt=f(u(x))u'(x)$

例 设X 的概率密度为$f(x)$, $|x|<+\infty$, $Y = X^2$，求Y的概率密度 $f_Y(y)$ 。

解 设Y的概率分布函数为$F_Y(y)$

当 $y>0$时，$F_Y(y)= P(Y\le y)= P(X^2\le y) = P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})= F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(t)dt=\int_{-\infty}^{\sqrt{y}} f(t)dt-\int_{-\infty}^{-\sqrt{y}} f(t)dt$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\left[f\left(\sqrt{y}\right)+f\left(-\sqrt{y}\right)\right]\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

由Y分布函数求导获取概率密度时，注意$F_Y(y)$中的 y表达式也同样需要对y求导

例 设X 服从参数为 λ的指数分布，$F(x)$为X的分布函数。

(i) 求$F(x)$

(ii) 设$Y=F(X)$，试证$Y\sim U(0, 1)$即均匀分布

解 (i) $X\sim f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases} \Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

(ii) $Y=F(X)=\begin{cases}1-e^{-\lambda X}, & X>0\\ 0, & X\le 0\end{cases} \Rightarrow 0\le Y\le 1$　　记$F_Y(y)$为Y的分布函数

当 $y\le 0$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0$　　当 $y\ge 1$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=1$

当 $0<y<1$时，$F_Y(y)=P(1-e^{-\lambda X}\le y)=P(e^{-\lambda X}\ge 1-y)=P\left\{X\le -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)\right\}=1-e^{-\lambda\left[-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)\right]}=y$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ y, & 0<y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}\qquad Y\sim U(0,1)$$

例 设X 的分布函数$F(x)$的导数大于0，定义新的随机变量$Y=F(X)$，求Y的分布函数$F_Y(y)$。

解 X分布函数$Y=F(X)$的数值范围为[0, 1]

当 $y<0$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

当 $y\ge 1$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=1$

由于$F(x)$对x的导数大于0，故$F(x)$有反函数$F^{-1}(y)$ 定义在[0, 1]

$Y=F(X)$，$X=F^{-1}(Y)$

当 $0\le y<1$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(F(X)\le y\right)=P\left(X\le F^{-1}(y)\right)$

利用X的分布函数$F(a)=P(X\le a)$

$$=F\left(F^{-1}(y)\right)=y$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ y, & 0<y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}\qquad Y\sim U(0,1)$$

例 设随机变量X具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}, & 0<x<3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$　令 $Y=\begin{cases}2, & X\le 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\ge 2\end{cases}$

“自定义” Y

(i) 求Y的分布函数；

(ii) 求概率$P(X\le Y)$ 。

解 (i) 记Y 的分布函数为 $F_Y(y)$　　$F_Y(y)=P\left(Y\le y\right)$　　Y 的数值范围实际仅在 [1, 2]

$P(Y=2)=P(X\le 1)$

$P(Y=1)=P(X\ge 2)$

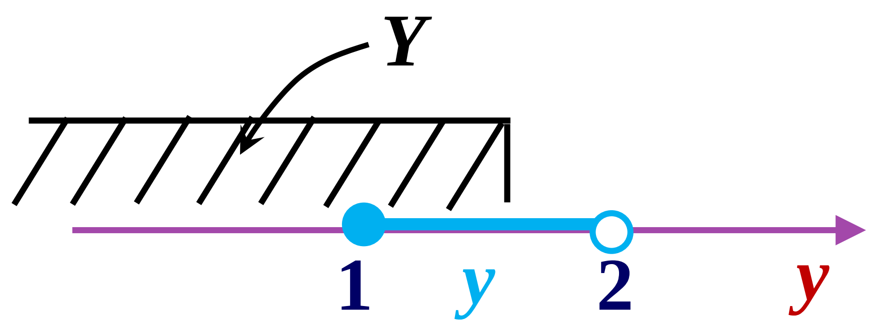
$P(1<Y\le y)=P(1<X\le y)$

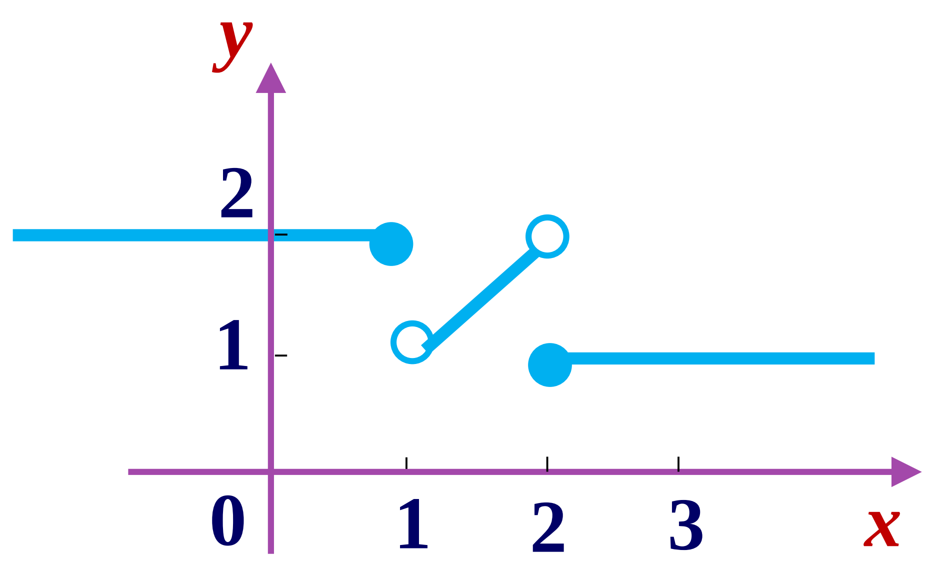
当 $y<1$时，$F_Y(y)=0$；

$P(Y=1)\neq 0$

当 $y\ge 2$时，$F_Y(y)=1$

当 $1\le y<2$时，





思路1　根据变量定义 $F_Y(y)=P\left(Y\le y\right)=P(X\ge 2)+P(1<X\le y)=\int_2^3\frac{x^2}{9}dx+\int_1^y\frac{x^2}{9}dx=\frac{2}{3}+\frac{1}{27}y^3$

例 设随机变量X具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}, & 0<x<3\\ 0, & 其他\end{cases}$ 令 $Y=\begin{cases}2, & X\le 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\ge 2\end{cases}$

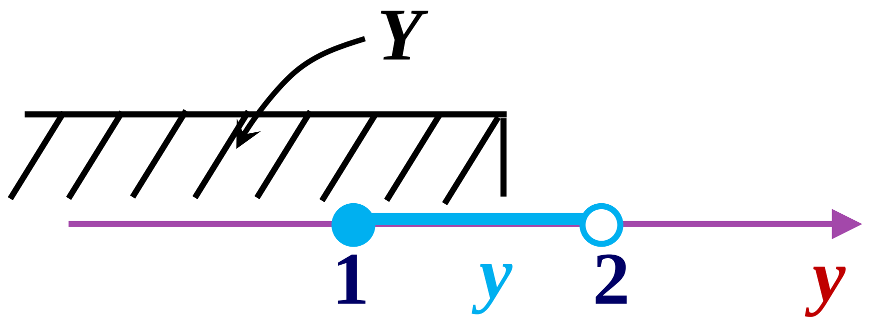
"自定义" Y

(i) 求Y的分布函数；

(ii) 求概率$P(X\le Y)$。

解 (i) $P(Y=1)=P(X\ge 2)$ $\qquad P(Y<1)=0$

$P(1<Y\le y)=P(1<X\le y)$



当 $1\le y<2$时，

思路2 根据事件分解

$$F_Y(y)=P\left(Y\le y\right)=P(Y<1)+P(Y=1)+P(1<Y\le y)$$

$$=P(X\ge 2)+P(1<X\le y)=\int_2^3\frac{x^2}{9}dx+\int_1^y\frac{x^2}{9}dx=\frac{2}{3}+\frac{1}{27}y^3$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{27}y^3, & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

(ii) $P(X\le Y)=P(X\le 1)+P(1<X<2)=P(X<2)=\int_0^2\frac{x^2}{9}dx=\frac{8}{27}$

注意等价事件对应关系的转换

例 设随机变量X具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{9}, & 0<x<3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 令 $Y=\begin{cases}2, & X\le 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\ge 2\end{cases}$

"自定义" Y

(i) 求Y的分布函数；

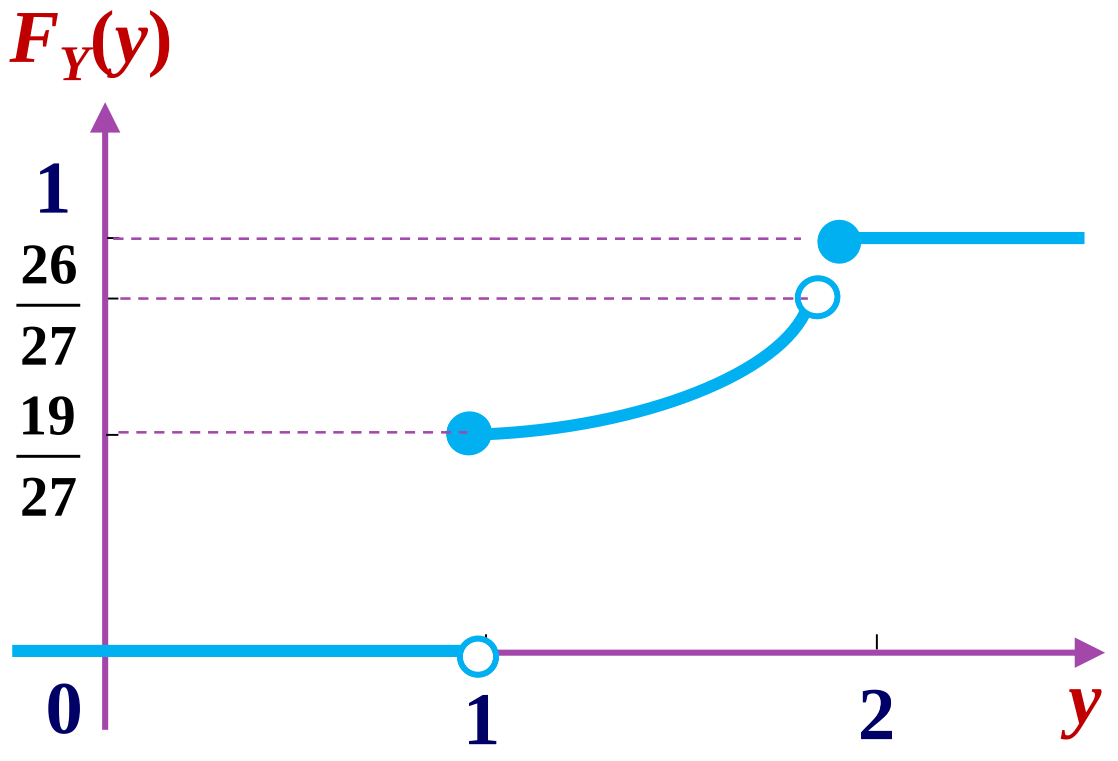
(ii) 求概率$P(X\le Y)$ 。

解 分析Y 的分布函数 $F_Y(y)$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \frac{2}{3}+\frac{1}{27}y^3, & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

$$P(Y=1)=P(X\ge 2)=\frac{19}{27}$$

$$P(Y=2)=P(X\le 1)=\frac{1}{27}$$



随机变量分类
- 离散型
- 非离散型
  - 连续型
  - 其他

Y既不是离散型随机变量，又不是连续型随机变量

定理 不满足“单调且可微”条件则无法使用

设随机变量X具有概率密度$f_X(x)$，$-\infty<x<+\infty$，又设$g(x)$ 处处可微且恒有 $g'(x)>0$或$g'(x)<0$

则$Y=g(X)$ 是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left[h(y)\right]\left|h'(y)\right|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\alpha=\min\left\{g(-\infty),g(+\infty)\right\},\ \beta=\max\left\{g(-\infty),g(+\infty)\right\}$$

$x=h(y)$是 $y=g(x)$ 的反函数

“公式法”，其无法使用时需用“分布函数法”

推论 随机变量$X(-\infty,+\infty)$范围可变为$[a,b]$，此时，

$$\alpha=\min\left\{g(a),g(b)\right\},\ \beta=\max\left\{g(a),g(b)\right\}$$

证

不妨设 $g'(x)>0$

则$g(x)$为单调增函数，且 $h'(y)>0$

当 $y\le\alpha$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=P(X\le-\infty)=0$$

当 $y\ge\beta$ 时，$F_Y(y)=1$

当 $\alpha<y<\beta$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=P(X\le h(y))$$

$$=\int_{-\infty}^{h(y)}f_X(t)dt$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=f_X(h(y))h'(y)=f_X(h(y))\left|h'(y)\right|$$

同理可证，当 $g'(x)<0$ 时，定理为真

求连续型随机变量函数的分布的流程

已知随机变量X具有概率密度$f_X(x)$，求随机变量$Y=g(X)$ 的概率密度$f_Y(y)$

1 • 判断 $y=g(x)$ 严格单调可微，即求 $g'(x)$，看其是否满足 $g'(x)>0$或$g'(x)<0$

满足 → “公式法” “分布函数法”亦可

2 • 求出 $y=g(x)$ 的反函数 $x=h(y)$，以及$h(y)$对y的导数 $h'(y)$

3 • 将$x=h(y)$和 $h'(y)$代入$f_X(x)$相关的表达式

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

注意y的范围由单调函数的两端点求得

不满足 → “分布函数法”

2 • 利用X与Y事件间的等价关系，根据X的$F_X(x)$或$f_X(x)$，分段讨论Y的分布函数$F_Y(y)$

3 • 将$F_Y(y)$对y求导得 $f_Y(y)$

更通用的处理方式

例 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$, 求Y的概率密度$f_Y(y)$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty$$

解 $y=g(x)=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ $\quad g'(x)=\dfrac{1}{\sigma}>0$ $\quad x=h(y)=\sigma y+\mu$ $\quad |h'(y)|=\sigma$

$$f_Y(y)=\sigma f_X(\sigma y+\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}\Rightarrow Y\sim N(0,1)$$

若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y=aX+b$, 则$Y\sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$

例 若 $X\sim f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $\quad Y=X^3$，求Y的概率密度$f_Y(y)$

解 $y=g(x)=x^3$ $\quad g'(x)=3x^2>0$ $\quad x=y^{\frac{1}{3}}=h(y)$ $\quad |h'(y)|=\left|(y^{\frac{1}{3}})'\right|=\dfrac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$

$$f_Y(y)=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}f_X(y^{\frac{1}{3}})=\begin{cases}\dfrac{1}{24}y^{-\frac{1}{3}}, & 0<y<64\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例 设连续型随机变量X的概率密度为 $f_X(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty<x<+\infty$

求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度$f_Y(y)$

解 （一）分布函数法

设Y的分布函数为$F_Y(y)$，则

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(1-\sqrt[3]{X}\le y)=P(\sqrt[3]{X}\ge 1-y)=P(X\ge(1-y)^3)$$

$$=\int_{(1-y)^3}^{+\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=\left[\frac{1}{\pi}\arctan x\right]_{(1-y)^3}^{+\infty}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-(1-y)^3\right]$$

从而Y的概率密度为 $f_Y(y)=F'_Y(y)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{3(1-y)^3}{1+(1-y)^6}$, $-\infty<y<+\infty$

例 设连续型随机变量X的概率密度为 $f_X(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$， $-\infty<x<+\infty$

求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度$f_Y(y)$

解 （二）公式法

由于函数 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 严格单调可微，其反函数为 $x=h(y)=(1-y)^3, -\infty<y<+\infty$

$$h'(y)=-3(1-y)^2, -\infty<y<+\infty$$

$$h'(y)=-3(1-y)^2, -\infty<y<+\infty$$

$$f_X(h(y))>0, -\infty<y<+\infty$$

因此Y的概率密度为

$$f_X(h(y))=f_X((1-y)^3)\left|-3(1-y)^2\right| =\frac{1}{\pi}\frac{3(1-y)^3}{1+(1-y)^6}, \quad -\infty<y<+\infty$$

关于两个随机变量概率密度和分布函数的写法说明

例如：X具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0 & , x\le 0\end{cases}$ Y具有概率密度 $f(y)=\begin{cases}y/8, & 0<y<4\\ 0, & 其他\end{cases}$

当问题中同时出现X 和Y 时，需要记为如下形式

X具有概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0 & , x\le 0\end{cases}$ Y具有概率密度 $f_Y(y)=\begin{cases}y/8, & 0<y<4\\ 0, & 其他\end{cases}$

下角标中的X 和Y 表明该表达式是针对哪个随机变量而求，括号中的变量或表达式表示此处需带入的数据来源

$$f_X(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y}, & y>0\\ 0 & , y\le 0\end{cases} \qquad f_X(*)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda *}, & *>0\\ 0 & , *\le 0\end{cases}$$

$$f_Y(x)=\begin{cases}x/8, & 0<x<4\\ 0, & 其他\end{cases} \qquad f_Y(\Delta)=\begin{cases}\Delta/8, & 0<\Delta<4\\ 0, & 其他\end{cases}$$

本节回顾

求随机变量函数的分布流程

一般，若已知随机变量X的分布，又知随机变量$Y=g(X)$，求Y的分布的过程为：

关键是找出等价事件

Y为离散量

1. • 先写出Y的可能取值：$y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots$
2. • 再找出$\{Y = y_j\}$的等价事件$\{x\in D\}$，得$P(Y = y_j)=P(x\in D)$

Y为连续量

“分布函数法”

1. • 先写出Y的概率分布函数：$F_Y(y)=P(Y\le y)$
2. • 然后找出$\{Y\le y\}$的等价事件$\{x\in D\}$，借助X的分布函数得$F_Y(y)= P(x\in D)$，之后可对其求导得Y概率密度$f_Y(y)$

$y=g(x)$单调可微时可用“公式法”求$f_Y(y)$

复习思考题

1. 什么量被称为随机变量？它与样本空间的关系如何？
2. 满足什么条件的试验称为“n重伯努利试验”？
3. 事件A 在一次试验中发生的概率为p，$0<p<1$，若在n次独立重复的试验中，A发生的总次数为X，则X服从什么分布？并请导出：

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-k)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n$$

4. 什么条件下使用泊松近似公式等式较为合适？
5. 什么样的随机变量称为连续型的？
6. 若事件A为不可能事件，则 $P(A)=0$，反之成立吗？若A为必然事件，则$P(A)=1$，反之成立吗？
7. 若连续型随机变量X 在某一区间上的概率密度为0，则X 落在该区间的概率为0，对吗？
8. 若随机变量X 在区间 (a, b) 上均匀分布，则X落入(a, b) 的任意一子区间 (a_1, b_1) 上的概率为$(b_1-a_1) / (b-a)$，对吗？
9. 若$X\sim N(\mu, \sigma_2)$，则X 的概率密度函数 $f(x)$ 在 $x=\mu$ 处值最大，因此 X 落在 μ 附近的概率最大，对吗？