西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

第1章　概率论的基本概念

概率论与数理统计课程组

CHAPTER 1

概率论的基本概念

§1.1 随机现象与随机试验
§1.2 样本空间与随机事件
§1.3 概率及其性质
§1.4 古典概率
§1.5 几何概率
§1.6 条件概率与概率的三大公式
§1.7 独立性

1.6 条件概率与概率的三大公式

引例

一人用颤抖的双手拿着检测呈阳性的化验单找医生：“医生，检验呈阳性是什么意思啊？”

医生：“做好心理准备…目前此病粗略估计大概每1000人中就有5人得。

采用的检测法可能带来两种误诊：

首先可能会让某些真得病的人得到阴性，称假阴性，不过只有0.05的概率发生；

其次还可能让某些没得病的人得到阳性，称假阳性，不过只有0.05的概率发生。

根据这些数据，你差不多可以估计出来自己的囧况了…”

先不要计算，尝试猜一下：在阳性结果的情况下他果真患病的概率是多大呢？

请从下面ABC三选项中选出与你的直觉最接近的：

A. 90%	B. 50%	C. 10%

即已知得病率0.005，假阴性0.05，假阳性0.05

得病率0.005， 假阴性0.05， 假阳性0.05，在你认为：
拿到阳性结果又真的得病的概率是？

A 90%

B 50%

C 10%

条件概率

定义 $P(B|A)$或$P(\bullet|A)$

设A, B是两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件A发生条件下事件B发生的条件概率

条件概率 $P(\cdot/A)$ 具有概率的所有性质

1° **非负性**：对于每一个事件B，有 $P(B|A)\geq 0$

2° **规范性**：对于必然事件Ω，有 $P(\Omega|A)=1$

3° **可列可加性**：设$B_1, B_2, \ldots$ 是两两不相容的事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i|A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A)$$

一般古典概型问题，试验包含n个基本事件，A包含m个基本事件数 $(m>0)$，AB包含k个基本事件，即有

$$P(B|A)=\frac{k}{m}=\frac{k/n}{m/n}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

条件概率 $P(\cdot|A)$ 也满足概率的其他性质，例如

$$P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)-P(BC|A)$$

$$P(B|A)\geq P(C|A) \qquad C\subset B$$

$$P(B|A)=1-P(\overline{B}|A)$$

例 一枚硬币抛两次，记录正反面出现情况

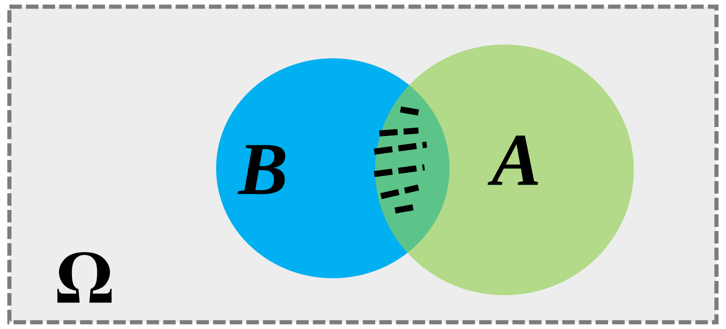
记 A ={至少一次为正面H}，B ={两次掷出同一面}

求事件A 已发生前提下事件B 发生的概率即 $P(B|A)$

解 样本空间 Ω ={HH, HT, TH, TT}

事件 A ={HH, HT, TH}　　事件 B ={HH, TT}

古典概型问题，A 的三个样本点中，只有HH∈ B



$P(B|A) = 1/3$　　此时$P(B) = 1/2$　　显然 $P(B) \neq P(B/A)$

$P(A) = 3/4$　　$P(AB) = 1/4$

$$P(B|A) = 1/3 = \frac{1/4}{3/4} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(AB) = P(A)P(B\,|\,A)$$

——乘法公式

乘法公式 条件概率情况下积事件的概率求解

设$P(A)>0$，则$P(AB)=P(A)P(B|A)$

推广至多个事件的积事件

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

例 某厂生产的产品能直接出厂的概率为70%，余下的30%的产品要调试后再定，已知调试后有80%的产品可以出厂，20%的产品要报废，求该厂产品的报废率。

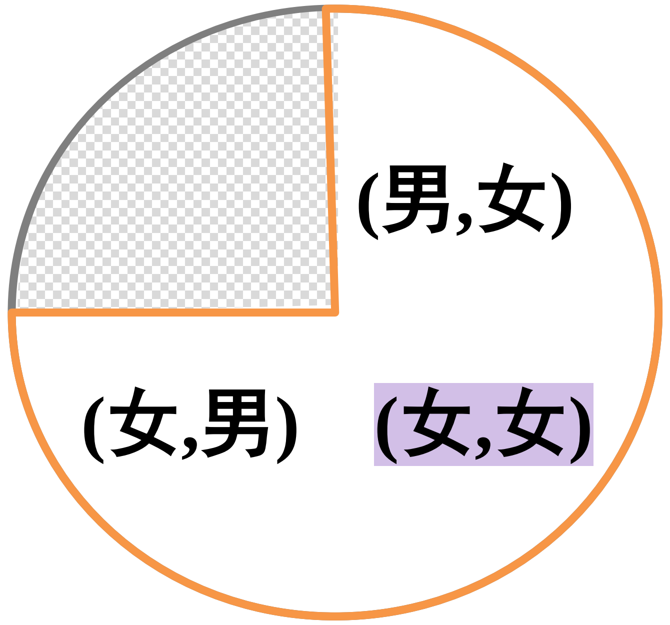
解 设 A={生产的产品要报废} B={生产的产品要调试}

已知 $P(B)=0.3$, $P(A|B)=0.2$, $A\subset B, A=AB,$

$$P(A)=P(AB)=P(B)P(A|B)=0.3\times 0.2=6\%$$

例 一个家庭中有两个小孩，已知至少一个是女孩，问两个都是女孩的概率是多少？（假定生男生女是等可能的）

解 记俩娃的性别结果序列是一个样本点



样本空间Ω为 Ω={(男,男), (男,女), (女,男), (女,女) }

A 表示事件“至少有一个是女孩” A={ (男,女), (女,男), (女,女) }

B 表示事件“两个都是女孩” B={ (女,女) }

由于事件A 已经发生，所以这时试验的所有可能结果只有三种，而事件B 包含的基本事件只占其中一种， 所以 $P(B \mid A) = 1/3$

在这个例子中，若不知道事件A已经发生的信息，那么事件B发生的概率为 $P(B) = 1/4$

但是，这里 $P(B) \neq P(B \mid A)$ 条件概率

其原因在于事件A 的发生改变了样本空间，使它由原来的 Ω 缩减为$\Omega_A = A$，而 $P(B|A)$ 是在新的样本空间 Ω_A 中由古典概率的计算公式而得到的

例 某行业进行专业劳动技能考核，一个月安排一次，每人最多参加3次；某人第一次参加能通过的概率为60%；如果第一次未通过就去参加第二次，这时能通过的概率为80%；如果第二次再未通过，则去参加第三次，此时能通过的概率为90%。

求这人能通过考核的概率。

解 设 A_i={ 这人第 i 次通过考核 }，i =1, 2, 3

$P(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1) = 1 - P(A_2 \mid \bar{A}_1) = 1 - 0.8 = 0.2$

A={ 这人通过考核 }，$A = A_1 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$

$$P(A) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 \mid \bar{A}_1) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1)P(A_3 \mid \bar{A}_1 \bar{A}_2)$$

$$= 0.60 + 0.4 \times 0.8 + 0.4 \times 0.2 \times 0.9 = 0.992$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(\bar{A}_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2)$$

$$= 1 - 0.4 \times 0.2 \times 0.1 = 0.992$$

例 《儒林外史》中有一章讲的是范进中举的故事，这其实是一个概率问题。现在我们来算一下，范进晚年中举的概率究竟是多大？

解 假设每次乡试，范进考中的概率是0.3（较小），令A_i={第i次乡试未考中}，i=1, 2, ...，则他考10次都不中的概率是：

$$\begin{aligned}&P(A_1A_2\cdots A_{10})\\&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_{10}\mid A_1\cdots A_9)\\&=(1-0.3)^{10}\approx 0.0282\end{aligned}$$

通过计算我们发现，范进晚年中举的概率高达97.18%

全概率公式和贝叶斯公式

定义 设 Ω 为试验 E 的样本空间，$B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为E 的一组事件，若

(i) $B_iB_j=\varnothing,\ i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n$

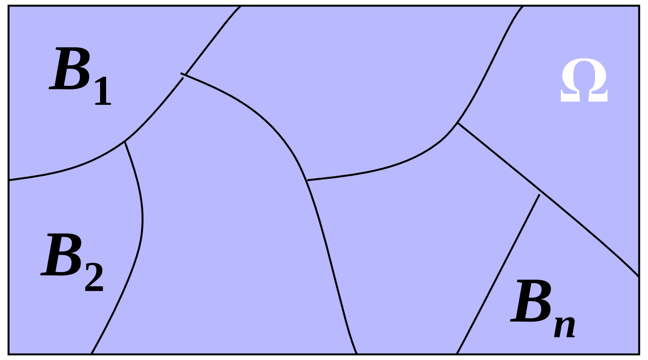
(ii) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=\Omega$

则称$B_1, B_2, \ldots, B_n$为样本空间Ω 的一个划分或称为一组完备事件组

定理：设试验E 的样本空间为Ω，A 为E 的事件，$B_1, B_2, \ldots, B_n$为Ω 的一个划分，$P(B_i)>0$，$i=1, 2,\ldots, n$, 则

$$P(A)=\sum_{j=1}^{n}P(AB_j)=\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)$$

AB_i与AB_j不相容$(i\neq j)$ **全概率公式**



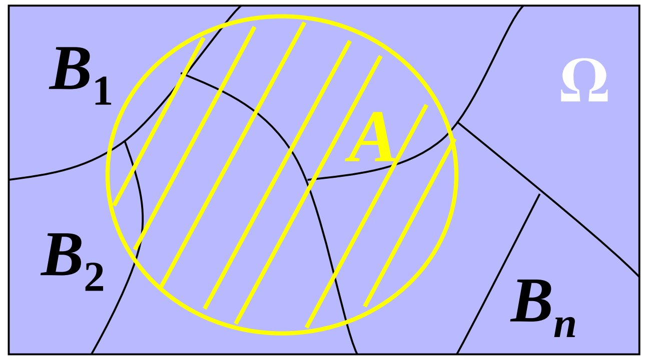
即一次试验中：$B_1, B_2, \ldots, B_n$ 至少有一发生是必然的，两两同时发生又是不可能的

证 $A=A\Omega$

$$=AB_1\cup AB_2\cup\cdots\cup AB_n$$

$$P(A)=P(AB_1\cup AB_2\cup\cdots\cup AB_n)$$

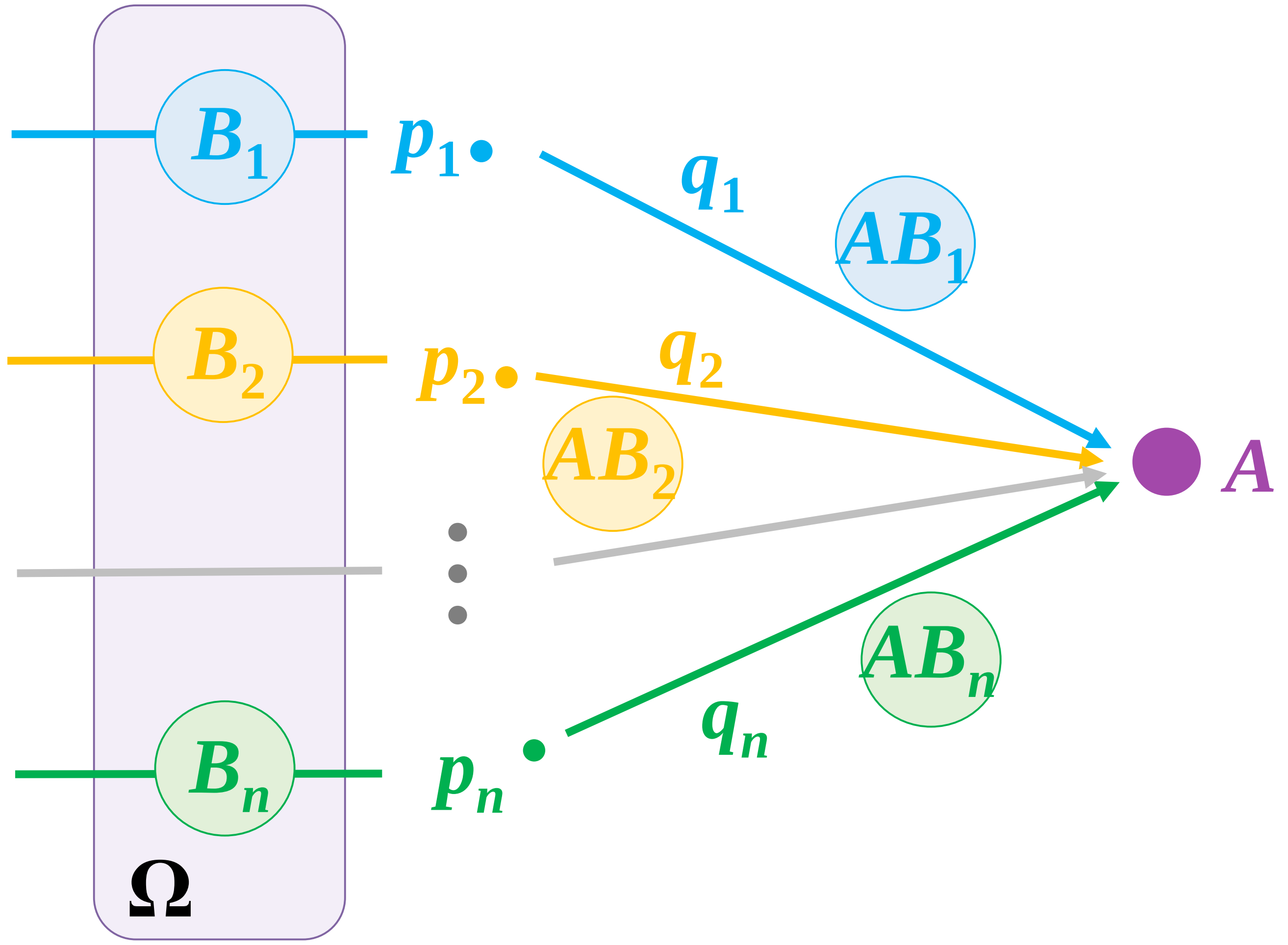
$$=\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)$$



全概率公式可由以下框图表示

记 $P(B_j)=p_j$, $P(A|B_j)=q_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$$



$$P(A)=\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)$$

$$P(A) = p_1q_1 + p_2q_2 + \cdots + p_nq_n$$

例 你在西安买了一辆二手车。你知道大约5%的二手车都被水泡过，而在被水泡过的车中大约80%今后都会出现严重的发动机问题；而没有被水泡过的车大约只有10%才会有严重的发动机问题。当然，没有任何二手经销商会称职的告诉你这辆二手车是不是被水泡过。所以你就必须求助于概率。你买的二手车发动机会坏的概率是多少呢？

解 如果没有学过全概率公式，我们可以通过比例来解决这个问题：

每卖出1000辆车，有50辆之前被水泡过，其中80%也就是40辆之后会出问题；

剩下的950辆没被水泡过的车，我们预计10%即95辆也会发生同样的问题；

因此，今后会出问题的概率是（40+95）/1000=13.5%

全概率公式

记 B={发动机坏}　A={被水泡过}

$$P(B)=P(B\mid A)\times P(A)+P(B\mid \bar{A})\times P(\bar{A})=0.05\times 0.8+0.95\times 0.1=0.135$$

定理：设试验E 的样本空间为Ω，A 为E 的事件，$B_1, B_2, \ldots, B_n$为Ω 的一个划分，$P(A)>0$，$P(B_i)>0$，$i=1, 2,\ldots, n$, 则

$$P(B_i|A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}$$

条件概率　乘法公式　全概率公式

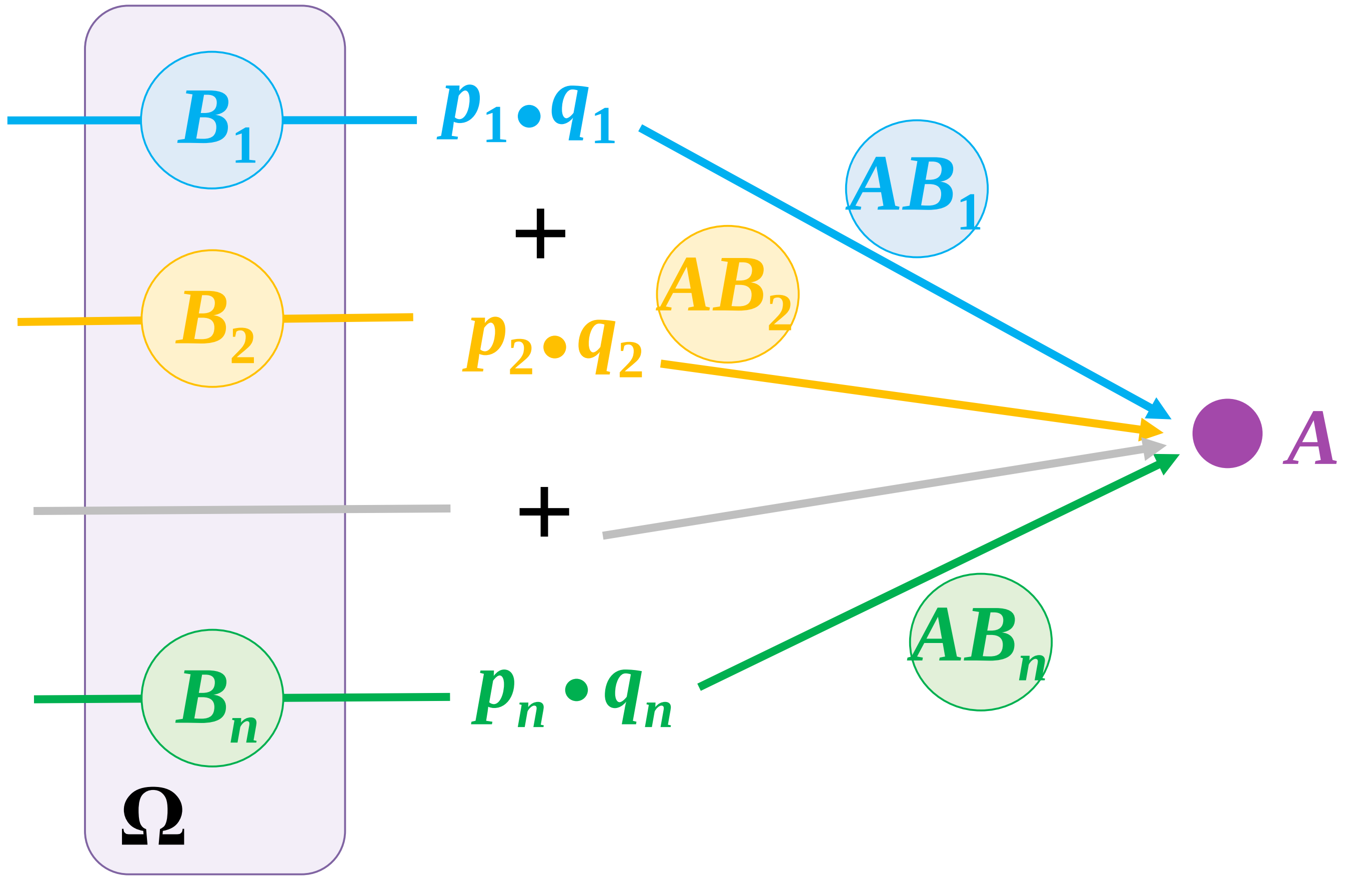
贝叶斯 (*Bayes*) 公式

特别地，当n=2时，Ω的划分为$B, \bar{B}$, 贝叶斯公式为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$

贝叶斯公式：已知“结果”已存在求其是由哪个“原因”导致

记 $P(B_j)=p_j$,　$P(A|B_j)=q_j$　　$(j=1, 2, \ldots, n)$

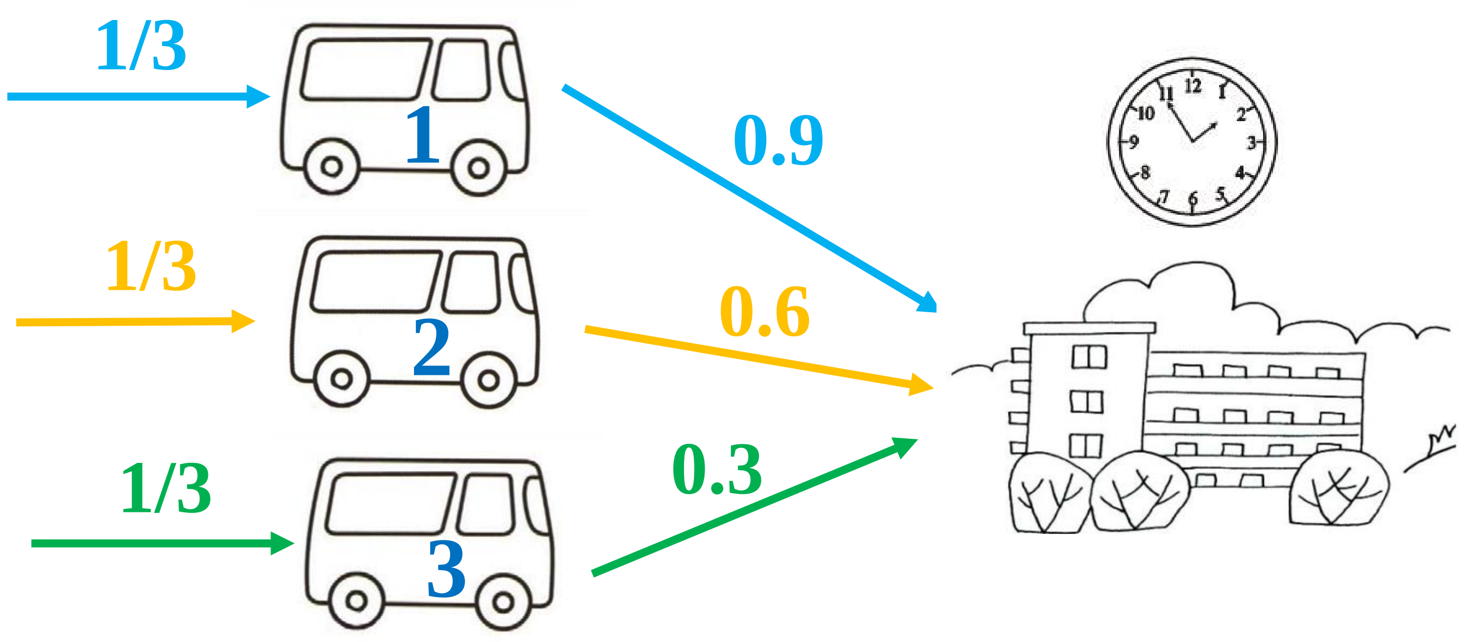


$$P(A)=\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)$$

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}$$

例如：$P(B_2|A)=\dfrac{p_2q_2}{p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n}$

例 从北区到南区，乘第一、二、三班次的车准时到达不迟到的概率分别为0.9、0.6、0.3，若某乘车人坐上这三班车的概率是可能的，且不会选择其他交通方式。若已知他没有迟到，求分别是乘第一班、第二班、第三班车的概率。



解 记 A_i={乘第 i 班车}，$i=1, 2, 3$　　B={不迟到}

已知 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\dfrac{1}{3}$

$$P(B|A_1)=0.9,\quad P(B|A_2)=0.6,\quad P(B|A_3)=0.3$$

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

全概率公式

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}=\frac{1}{2}$$

贝叶斯公式

$$P(A_2|B)=\frac{1}{3}\qquad P(A_3|B)=\frac{1}{6}\qquad P(A_1|B)+P(A_2|B)+P(A_3|B)=1$$

例 一单位有甲、乙两人，已知甲近期出差的概率为80%，若甲出差，则乙出差的概率为20%；若甲不出差，则乙出差的概率为90%

(i) 求近期乙出差的概率；(ii) 若已知乙近期出差在外，求甲出差的概率。

解 设 A={甲出差}，B={乙出差}

已知 $P(A)=0.80,\quad P(B\mid A)=0.20,\quad P(B\mid \bar{A})=0.90$

(i) $P(B)=P(AB\cup \bar{A}B)$

AB 与 $\bar{A}B$ 互不相容

$=P(AB)+P(\bar{A}B)$

$=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})$

全概率公式

$=0.8\times 0.2+0.2\times 0.9=34\ \%$

(ii) $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(AB)}{P(AB)+P(\bar{A}B)}=\dfrac{16}{34}=\dfrac{8}{17}$

贝叶斯公式

例 **本节引例：**某种诊断病症的试验具有5%的假阳性及5%的假阴性，若设A={试验反应是阳性}，C={患病}，则有：$P(A|\bar{C})=5\%$，$P(\bar{A}|C)=5\%$

已知人群中患病率 $P(C)=0.005$，实际患病概率？

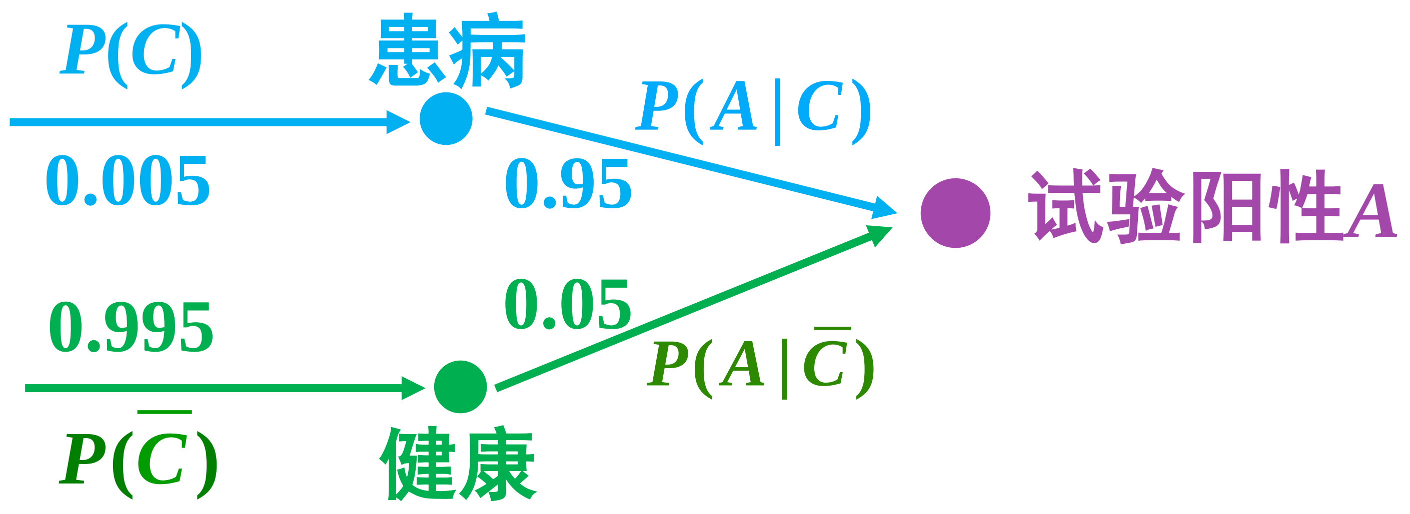
解 核心在于考察 $P(C/A)$ 的值

$$P(A|\bar{C})=5\% \quad P(A|C)=1-P(\bar{A}|C)=95\%$$

	患病C	健康$\bar{C}$
试验阳性A	有病、确诊	假阳性
试验阴性$\bar{A}$	假阴性	无病、确诊

$$P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\bar{C})P(A|\bar{C})}$$

$$=\frac{0.005\times0.95}{0.005\times0.95+0.995\times0.05}=0.087$$



不可混淆$P(A|C)$和 $P(C|A)$

100个阳性结果中被诊断患有病症的大约有8.7个，所以该试验方式不宜用于普查

若$P(C)$较大，设$P(C)=0.8$，推出$P(C|A)=0.987$，说明这种试验方法可在医院用

分清$P(A|C)$与$P(C|A)$

$P(A|C)$和 $P(C|A)$的来源：由统计、经验得到；采用贝叶斯公式计算　二者数值不一定接近

例如：记事件A表示“有某种高危因素”，如吸烟、感染某病毒或某细菌

记事件C表示“身体表现某种症状”，如肺病、咳嗽、胃病等

$P(C|A)$描述的是某高危因素的确能够导致某症状的概率

$P(A|C)$描述的是某种症状是由某该高危因素引起的概率

小结

典型例题： 已知导致某事件有好几种情形，求该事件的发生是某个情形导致的概率

应用场合： 贝叶斯公式是人工智能分支——机器学习的主要方法

概率中的频率学派和贝叶斯学派　　“狼来了”、“三人成虎”的故事

当信息改变时，我们对事件的推断也随之改变

贝叶斯公式与先验概率、后验概率

以n=2分析

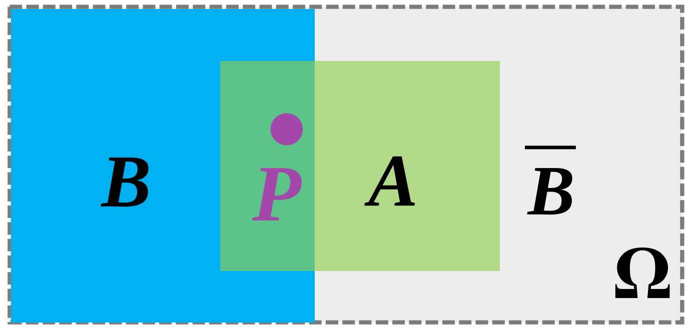
$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(A)}$$

$$=P(B)\times\frac{P(A\mid B)}{P(A)}$$

后验概率

先验概率

调整因子



概念

先验概率： 作为分析以往数据和经验得到的理论值，它往往描述的是“由因求果”问题中的“因”

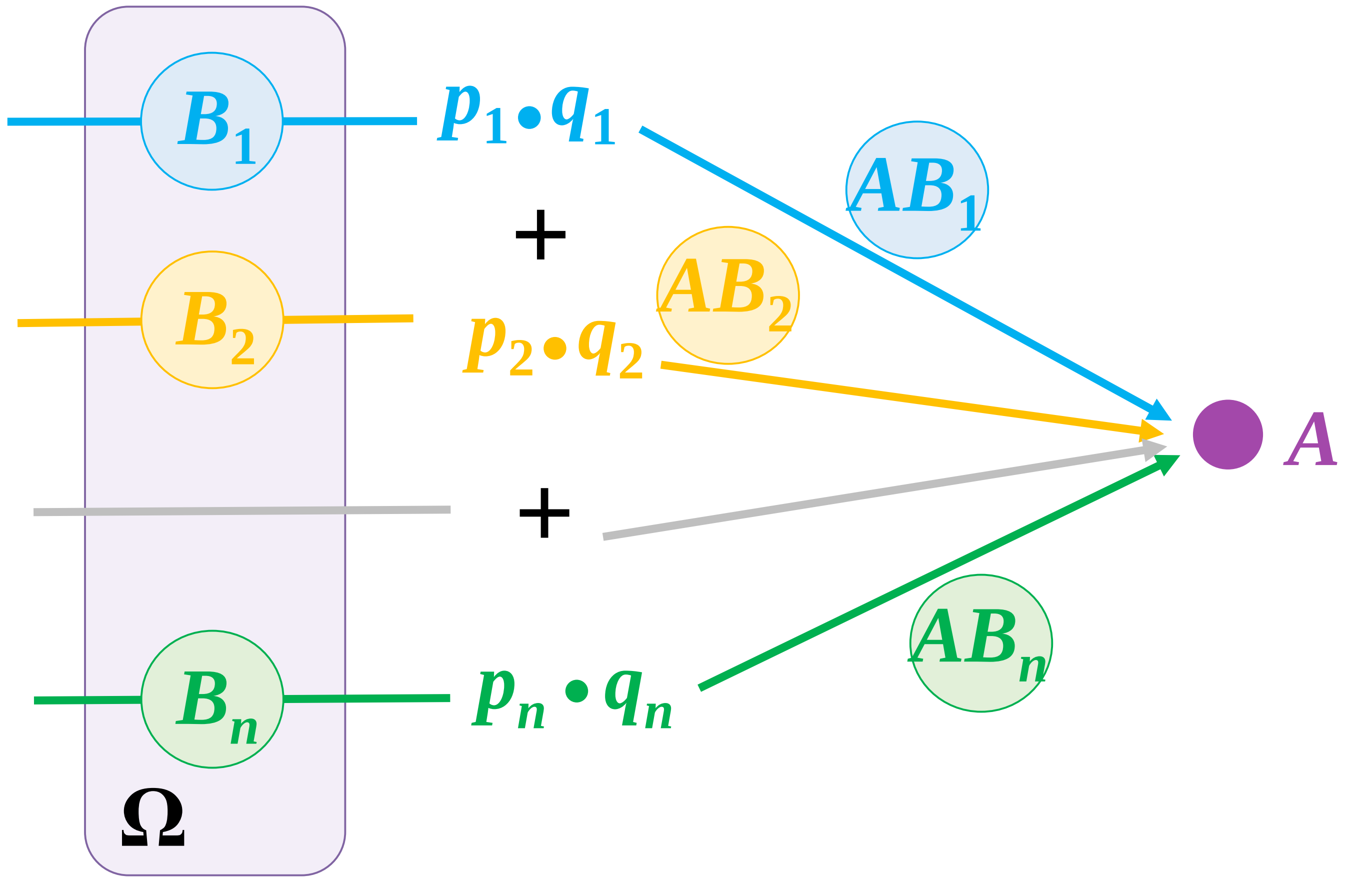
后验概率： 基于新信息修正原来先验概率后获得的更接近实际情况的概率估计，后验概率是指在得到“结果”的信息后重新修正的概率，是“执果寻因”中的“因”

先验概率和后验概率是相对的，如果以后还有新的信息引入更新了当前所谓的后验概率，又得到新的概率值，那么这个新的概率值仍被称为后验概率

小结

设A, B是两个事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件A发生条件下事件B发生的**条件概率**

设$P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$ **乘法公式**——用于已知条件概率情况下积事件的概率求解



记 $P(B_j)=p_j$, $P(A|B_j)=q_j$ (j=1, 2, …, n)

全概率公式：求由多原因引发的 “**结果**” 概率

$$P(A)=\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j) \quad P(A)=p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n$$

贝叶斯公式：推断已出现的“**结果**”是由哪个“**原因**”导致

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}$$

例如：

$$P(B_2|A)=\frac{p_2q_2}{p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n}$$

本节回顾

条件概率

设A, B是两个事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件A发生条件下事件B发生的条件概率

乘法公式

设$P(A)>0$，则$P(AB)=P(A)P(B|A)$

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

全概率公式和贝叶斯公式

全概率公式：求由多原因引发的“结果”概率 $P(A)=\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)$

贝叶斯公式：推断已出现的“结果”是由哪个“原因”导致 $P(B_i|A)=\dfrac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}$