作业

29. 设函数$f(z)$在z_0连续且$f(z_0)\neq 0$,那末可找到z_0的小邻域,在邻域内$f(z)\neq 0$.

解: $\because \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

$$\therefore \forall 0<\varepsilon<\frac{|f(z_0)|}{2},\ \exists\delta>0,\text{当}z\in N_\delta(z_0)\text{时}$$

$$\big||f(z)|-|f(z_0)|\big|\le|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$

$$\text{故 } 0<\frac{|f(z_0)|}{2}<|f(z_0)|-\varepsilon<|f(z)|\le|f(z_0)|+\varepsilon$$

$$\therefore f(z)\neq 0$$

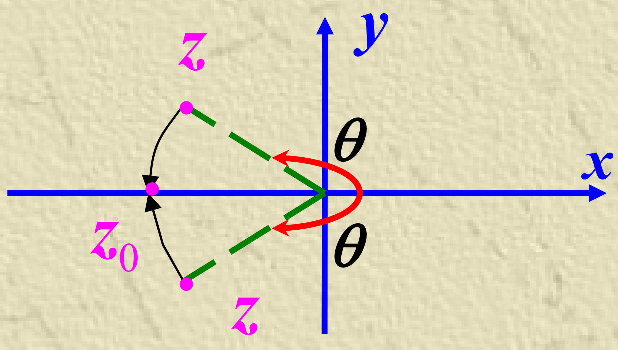
32. 试证 $\arg z$ 在原点与负实轴上不连续.

证明: 当 $z_0=0$ 时, $\arg z_0$ 无定义, $\therefore$ 不连续

当 z_0 在负实轴上时, $\arg z_0=\pi$

而 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\(\operatorname{Im} z>0)}} \arg z=\pi$

$\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\(\operatorname{Im} z<0)}} \arg z=-\pi$



$\therefore \lim\limits_{z\to z_0} \arg z$ 不存在, 即 $f(z)$ 在 z_0 点不连续

第二章　解析函数

本章首先介绍复变函数的导数概念和求导法则，在此基础上，介绍解析函数的概念及判别法。

第一节 解析函数的概念

一、复变函数的导数与微分

1. 导数定义：

设$w = f(z)$定义于区域D，$z_0 \in D, z_0 + \Delta z \in D$

如果 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 存在

则称$f(z)$在z_0点可导，而极限值为$f(z)$在z_0点的导数，记作 $f'(z_0)$或$\left.\dfrac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}$

即 $$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

等价定义： $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $0 < |\Delta z| < \delta$ 时

恒有 $$\left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

如果$f(z)$在区域D内处处可导，则称$f(z)$在D内可导。 导函数记为

$$f'(z) \text{或} \frac{dw}{dz}$$

例1 求$f(z)=z^2$的导数.

解: 设z为复平面上任意一点

则 $$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z$$

$\therefore\ f'(z)=2z,$ 即 $(z^2)'=2z$

一般的, $(z^n)'=nz^{n-1}$ (n为正整数)

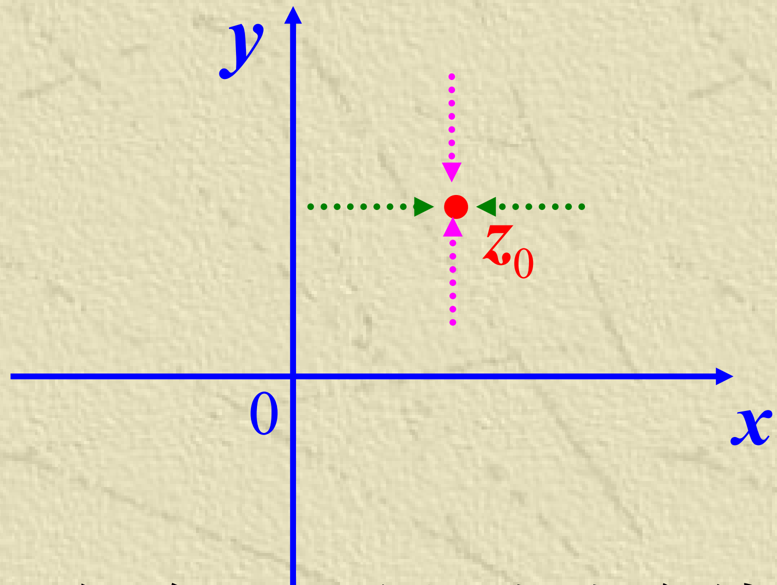
例2 证明：$f(z)=\bar{z}$在z平面上处处不可导

证：$\because \dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\dfrac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}=\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$

$\therefore$ 当$\Delta z \xrightarrow{\text{沿实轴}} 0$时，$\lim\limits_{\substack{\Delta z\to 0\\(\Delta y=0)}}\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$

$\therefore$ 当$\Delta z \xrightarrow{\text{沿虚轴}} 0$时，

$$\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\(\Delta x=0)}}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta yi}{\Delta yi}=-1$$



$\therefore$ $f(z)=\bar{z}$在复平面上处处不可导，但在z平面上处处连续

2. 可导与连续的关系

$f(z)$在z_0点可导$\Rightarrow f(z)$在z_0点连续，反之，不成立。

证明: $\because\ f'(z_0)$存在, $\therefore\ \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0,$ 当$0<|\Delta z|<\delta$时

$$\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)\right|<\varepsilon$$

记 $\rho(\Delta z)=\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)$ 则有 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$

$$\therefore\ f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\rho(\Delta z)\cdot\Delta z$$

故 $\lim\limits_{\Delta z\to 0} f(z_0+\Delta z)=f(z_0)$, 即 $f(z)$在z_0点连续

反之: 由例2可知 $f(z)=\bar{z}$处处连续，但处处不可导。

3. 求导法则 （与高等数学相同）

(1) $(c)'=0$　　c为复常数

(2) $(z^n)'=nz^{n-1}$，　n为正整数

(3) $\left[f(z)\pm g(z)\right]'=f'(z)\pm g'(z)$

(4) $\left[f(z)\cdot g(z)\right]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$

(5) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]' = \dfrac{g(z)f'(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$, $g(z)\neq 0$

(6) $\{f[g(z)]\}' = f'(w)g'(z)$, 其中$w=g(z)$

(7) $f'(z)=\dfrac{1}{\varphi'(w)}$

其中$w=f(z)$与$z=\varphi(w)$是互为反函数的单值函数，且$\varphi'(w)\neq 0$

4. 微分的概念（形式上与一元函数得微分完全一致）

设$w=f(z)$在z_0可导，则

$$\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z$$

其中 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$ $\therefore$ $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\dfrac{\rho(\Delta z)\Delta z}{\Delta z}\right|=0$

故 $|\rho(\Delta z)\Delta z|=o(|\Delta z|)$

称$f'(z_0)\Delta z$为$w=f(z)$在z_0点的微分。

记作 $dw=f'(z_0)dz$

当$f(z)=z$

可见：可导$\Leftrightarrow$可微，且 $f'(z_0)=\left.\dfrac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}$

如果$f(z)$在区域D内每一点可微，

则称$f(z)$在D内可微.

记作 $dw=f'(z)dz$

二、解析函数

定义:

1° 如果$f(z)$在z_0及z_0的某邻域内处处可导，

则称$f(z)$在z_0点解析。

2° 如果$f(z)$在区域D内每一点解析，

则称$f(z)$在区域D内解析(或解析函数)。

3° 如果$f(z)$在z_0点不解析，

则称z_0为$f(z)$的奇点。

注意:

(1) $f(z)$在z_0解析$\Rightarrow f(z)$在z_0可导。

反之，不成立。

(2) $f(z)$在区域D内解析

$\Leftrightarrow f(z)$在区域D内可导。

(3) $f(z)$在z_0解析$\Leftrightarrow$

$f(z)$在z_0的某邻域$N_\delta(z_0)$内解析。

思考：闭区域解析与闭区域可导是否等价？

定理：(解析函数的运算法则)

1) 在区域D内解析的函数$f(z)$与$g(z)$的和、差、积、商（除分母为零的点）在D内解析.

2) 设$h=g(z)$在z平面上区域D内解析,

$w=f(h)$在h平面上区域G内解析.

如果$\forall z\in D\to g(z)\in G$,则复合函数

$w=f[g(z)]$在D内解析.

例如:

多项式 $P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n$ 在 z 平面上解析。

有理分式 $\dfrac{P(z)}{Q(z)} = \dfrac{a_0 z^n + \cdots + a_n}{b_0 z^m + \cdots + b_m}$

除使 $Q(z) = 0$ 的点外处处解析。

例3. 研究 $f(z)=z^2, g(z)=x+2yi$ 的解析性。

解: (1) $\because (z^2)' = 2z$, 即 $f(z)$ 处处可导。

$\therefore$ 处处解析

(2) $$\because \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x+\Delta x)+2(y+\Delta y)i-x-2yi}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi} \text{ 不存在}$$

$\therefore g(z)=x+2yi$ 处处不可导，亦处处不解析

例4. 研究$f(z)=|z|^2$的解析性

解: 设z_0为复平面上任意一点

则 $$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{|z_0+\Delta z|^2-|z_0|^2}{\Delta z}$$

$$=\frac{(z_0+\Delta z)(\overline{z_0}+\overline{\Delta z})-z_0\overline{z_0}}{\Delta z}=\overline{z_0}+z_0\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\overline{\Delta z}$$

当$z_0=0$时，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=0$，即$f'(z_0)=0$

当 $z_0\neq 0$ 时，由例2知 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ 不存在

$$\therefore \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\text{不存在}$$

故 $f(z)$ 在 z_0 不可导.

因此，$f(z)=|z|^2$ 在 $z=0$ 点可导，但处处不解析.

例5. 求出 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 的奇点

解: $\because$ $z\neq 0$ 时, $f'(z)=-\dfrac{1}{z^2}$

$z=0$ 时，无定义

$\therefore$ 不可导

故 $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 的奇点.

$\therefore$ 在除 $z=0$ 的复平面内, $f(z)$ 处处解析.

第二节　函数解析的充要条件

由前节的讨论看出，用定义判别一个函数的解析性是很复杂的，有时是很困难的. 因此，有必要寻找判别函数解析的简便方法.

定理一(函数在一点可导的充分必要条件)

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在定义区域D内一点

$z=x+iy$可导

$\overset{\text{充要}}{\underset{\text{条件}}{\Leftrightarrow}}$ 1° $u(x,y),v(x,y)$在点(x,y)可微

2° $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 柯西—黎曼方程$(C.-R.)$

$$\boxed{\text{且 } f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{或 } f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}}$$

证明: $\overset{\text{必要性}}{\Rightarrow}$ $\because f(z)$在$z=x+iy$可导

$$\therefore \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)$$

故 $f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z$

其中$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$

令$f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+i\Delta v$, $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$

$f'(z)=a+ib$, $\rho(\Delta z)=\rho_1+i\rho_2$

则 $\Delta u+i\Delta v=(a+ib)(\Delta x+i\Delta y)+(\rho_1+i\rho_2)(\Delta x+i\Delta y)$

$$=(a\Delta x-b\Delta y+\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y)$$

$$+i(b\Delta x+a\Delta y+\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y)$$

比较知：$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y$

$$\Delta v=b\Delta x+a\Delta y+\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y$$

由于 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$ $\therefore \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\rho_1=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\rho_2=0$

故 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0,\quad \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$

$$\therefore \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o_1\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o_2\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$$

即 $u(x,y), v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分.

且满足 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = a,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -b$

充分性

$\Leftarrow$ $\because$ $u(x,y), v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微

则 $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y$$

其中 $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_k = 0 \quad (k = 1,2,3,4)$

从而 $f(z+\Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v$

$$= (u_x + iv_x)\Delta x + (u_y + iv_y)\Delta y + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\Delta y$$

又 $u_y = -v_x = i^2 v_x$， $v_y = u_x$

$$\therefore \quad f(z+\Delta z) - f(z) = (u_x + iv_x)(\Delta x + i\Delta y)$$

$$+(\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\Delta y$$

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = u_x + iv_x + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

而 $\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \leq 1 \quad \left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \leq 1 \therefore \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = u_x + iv_x$

即 $\boxed{f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y}$

定理二(函数解析的充分必要条件)

函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在定义域D内解析

$\Leftrightarrow$ 1° $u(x,y)$与$v(x,y)$在D内可微

2° 满足$C.-R.$方程 $u_x=v_y, u_y=-v_x$

注: $f(z)$在定义区域D内解析的充分条件:

1° $u(x,y)$, $v(x,y)$在D内偏导连续

2° 满足$C.-R.$方程 $u_x=v_y, u_y=-v_x$

在讨论函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$的极限与连续问题时，U 和V 之间的关系没有任何要求。但在讨论可导 与解析时，即使U 和V均可导，$f(z)$也未必可导当然更未必解析。需要考虑C-R

在讨论函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$的极限与连续问题时，U 和V 之间的关系没有任何要求。但在讨论可导 与解析时，即使U 和V均可导，$f(z)$也未必可导当然更未必解析。需要考虑C-R

例1 判定下列函数在何处可导，在何处解析.

(1) $f(z)=\left(x^2-y^2-x\right)+i\left(2xy-y^2\right)$

解： $\because u=x^2-y^2-x,\ v=2xy-y^2$

$\therefore u_x=2x-1 \qquad u_y=-2y$

$v_x=2y \qquad v_y=2x-2y$

显然 u_x,u_y,v_x,v_y在R^2平面内连续

但只在$y=\dfrac{1}{2}$时，满足$u_x=v_y, u_y=-v_x$

$\therefore f(z)$仅在直线$y=\dfrac{1}{2}$上可导，而在复平面内处处不解析

(2) $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$

解： $u=e^x\cos y,\quad v=e^x\sin y$

则 $u_x=e^x\cos y,\qquad u_y=-e^x\sin y$

$v_x=e^x\sin y\qquad v_y=e^x\cos y$

显然,四个偏导连续，且 $u_x=v_y, u_y=-v_x$

$\therefore f(z)$在复平面内处处可导，处处解析

并且 $f'(z)=u_x+iv_x=e^x(\cos y+\sin y)=f(z)$

(3) $W = z\,\mathrm{Re}\,z$

解: $\because W = (x+iy)x = x^2 + ixy$

则 $u = x^2,\quad v = xy$

$\therefore\quad u_x = 2x,\quad u_y = 0,\quad v_x = y,\quad v_y = x$

显然,四个偏导连续,但仅在$x = y = 0$时满足

$u_x = v_y,\ u_y = -v_x$

$\therefore W = z\,\mathrm{Re}\,z$只在$z = 0$上可导,从而在复平面内处处不解析

例2 如果$f'(z)$在区域D内处处为零，则$f(z)$在D内为常数.

解：$\because f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y=0$

$\therefore u_x=u_y=0$ 故$u=$常数

$v_x=v_y=0$ 故$v=$常数

从而$f(z)$为常数

例3 如果$f(z)$在区域D内解析，$\overline{f(z)}$也在D内解析，证明：$f(z)$在D内为常数.

解： 设 $f(z)=u+iv$，则 $\overline{f(z)}=u-iv$

$\because f(z)$及$\overline{f(z)}$解析 $\therefore$ 满足$C.-R.$方程

故 $\begin{cases} u_x=v_y \\ v_x=-u_y \end{cases}$ 且 $\begin{cases} u_x=-v_y \\ -v_x=-u_y \end{cases}$

解得 $u_x=u_y=0$，$v_x=v_y=0$

$\therefore u=$ 常数，$v=$ 常数 从而$f(z)$为常数

例4 设$f(z)$在区域D内解析，且满足关系$v=u^2$，则$f(z)$在D内为常数.

证明: $\because f(z)=u+iv=u+iu^2$且解析

$$\therefore \quad u_x=v_y=2uu_y, \quad u_y=-v_x=-2uu_x$$

故 $u_x=-4u^2u_x$ 即$(1+4u^2)u_x=0$

$\because \ 1+u^2\neq 0 \quad \therefore u_x=0$ 从而$u_y=0$, $u=$常数

又$v_x=v_y=0 \quad \therefore v=$常数

$\therefore f(z)$为常数

例5 如果$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$为一解析函数，

且$f'(z)\neq 0$，那么曲线族$u(x,y)=c_1$和

$v(x,y)=c_2$必互相正交.

证明： $\because f'(z)=v_y-iu_y\neq 0$ $\therefore u_y$与v_y不全为零

1° 若u_y, v_y在交点均不为零，

则曲线$u(x,y)=c_1, v(x,y)=c_2$的斜率分别为

$$k_1=-\frac{u_x}{u_y},\quad k_2=-\frac{v_x}{v_y}$$

$$\therefore k_1 \cdot k_2 = \left(-\frac{u_x}{u_y}\right) \cdot \left(-\frac{v_x}{v_y}\right) = -1 \left(\text{根据}C_{.}-R_{.}\text{方程}\right)$$

即 曲线族正交.

2° 若u_y, v_y中有一个为零，则另一个必不为零.

$\therefore$两曲线在交点的切线一条是水平的,

另一条是铅直的

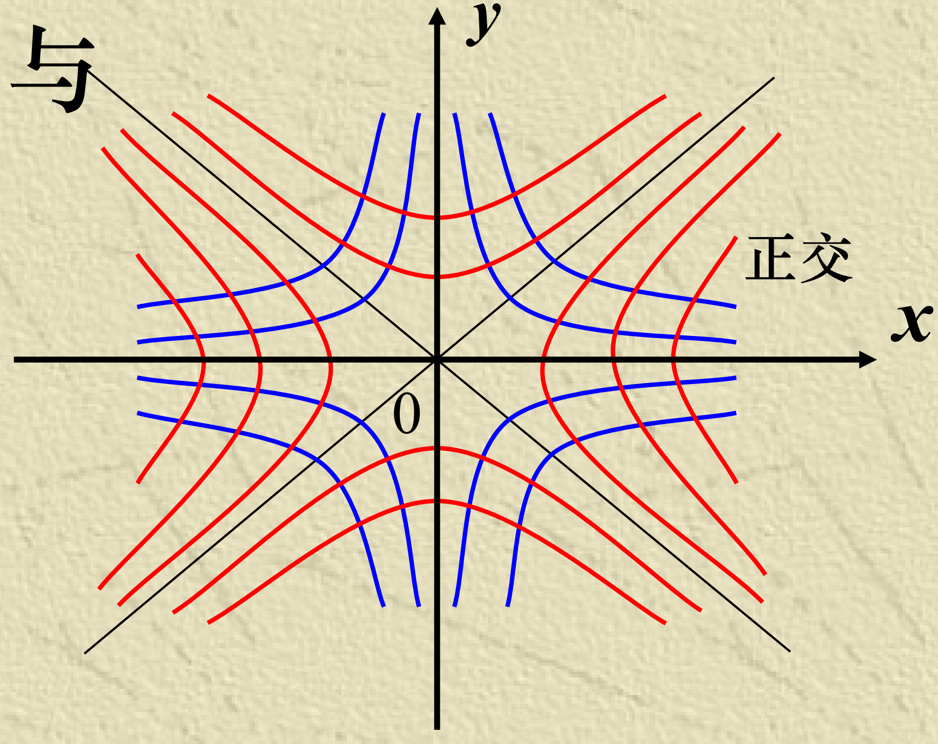
即 曲线族正交.

例如 $W = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

当$z \neq 0$时, $\dfrac{dw}{dz} = 2z \neq 0$

$\therefore$ 曲线族$x^2 - y^2 = c_1$与

$2xy = c_2$正交



作业: P_{66} 2. 1) 2)

4, 8, 10. 3) 4),

第三节　初等函数

本节将把实变量函数中一些常用的初等函数推广到复变量函数中，研究这些函数的性质，特别是解析性.

一、单值函数

1. 指数函数:

设$z = x + iy$, 则$f(z) = e^{x}(\cos y + i\sin y)$称为$z$的指数函数，记作$\exp z$或$e^{z}, e^{x+iy}$

即 $e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$

特别的: $z = x$时，$e^{z} = e^{x}$是实指数函数

$z = iy$时，$e^{iy} = \cos y + \sin y$ －欧拉公式

性质:

(1) $\left|e^z\right| = e^x > 0, \quad \therefore e^z \neq 0$

$$Arg\, e^z = y + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

(2) $\because \left(e^z\right)' = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$

$\therefore e^z$在Z平面内处处解析

(3) 服从加法定理: $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

(4) e^z是$2k\pi i$为周期的周期函数, $2\pi i$称为基本周期

(5) $\lim\limits_{z \to \infty} e^z$不存在 $\therefore$ 在扩充复平面上, e^∞无意义

2. 三角函数

由欧拉公式 $e^{iy} = \cos y + i\sin y,\quad e^{-iy} = \cos y - i\sin y$

则 $\cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2},\quad \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$

定义: 余弦函数 $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

正弦函数 $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

特别的: $z=y$时，与实变量函数一致

性质:

(1) $\because (\sin z)' = \cos z, \ (\cos z)' = -\sin z$

$\therefore \ \sin z, \cos z$为解析函数

(2) 对于复数z,欧拉公式仍成立.

即 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

(3) $\sin z$为奇函数，$\cos z$为偶函数.

常用的三角恒等式:

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1,\qquad \sin 2z=2\sin z\cos z,$$

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\sin z_2\cos z_1$$

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$$

从而 $\underline{\cos z=\cos(x+iy)}=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy$

$$=\underline{\cos x\operatorname{ch} y-i\sin x\operatorname{sh} y}$$

$$(\because \cos iy=\operatorname{ch} y,\quad \sin iy=i\operatorname{sh} y)$$

$$\underline{\sin z=\sin(x+iy)}=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy$$

$$=\underline{\sin x\operatorname{ch} y+i\cos x\operatorname{sh} y}$$

第三节 初等函数

(4) $\sin z, \cos z$均是以2π为基本周期的周期函数

(5) 使$\sin z = 0$的零点为$z = n\pi\ (n = 0, \pm 1 \cdots)$

解: $\because \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \quad \therefore e^{2iz} = 1 = e^{2n\pi i} \quad \therefore z = n\pi$

同样 $\cos z = 0$的零点$z = n\pi + \dfrac{\pi}{2}\ (n = 0, \pm 1, \cdots)$

(6) 在复数域内 $|\sin z| \le 1$和$|\cos z| \le 1$不再成立

例如: 取$z = iy$,

则$\cos iy = \dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2} > \dfrac{e^{y}}{2} \to +\infty\ (y \to +\infty)$

其它三角函数:

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\qquad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\sec z=\frac{1}{\cos z},\qquad \csc z=\frac{1}{\sin z}$$

3. 双曲函数

定义： 双曲正弦 $shz = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$，双曲余弦 $chz = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

特别的 $z = x$ 时，同实变量双曲函数一致

性质： (1) $\because\ (shz)' = chz,\ \ (chz)' = shz$

$\therefore\ shz, chz$ 为解析函数

(2) shz 为奇函数，chz 为偶函数

(3) shz 与 chz 均是以 $2\pi i$ 为基本周期的函数

基本公式:

$$ch(z_1+z_2)=chz_1chz_2+shz_1shz_2$$

$$sh(z_1+z_2)=shz_1chz_2+shz_2chz_1$$

$$\because\quad chiy=\cos y,\qquad shiy=i\sin y$$

$$\therefore\quad \underline{chz=ch(x+iy)=chx\cos y+ishx\sin y}$$

$$\underline{shz=sh(x+iy)=shx\cos y+ichx\sin y}$$

二、多值函数

1. 对数函数:

满足$e^w = z\left(z \neq 0\right)$的函数$w = f\left(z\right)$称为对数函数

记为 $w = Ln\left(z\right)$ $\left(\text{即 } e^{Lnz} = z\right)$

如果令 $z = re^{i\theta}$, $w = u + iv$

则 $e^{u+iv} = re^{i\theta}$, $\therefore$ $u = lnr$, $v = \theta + 2k\pi$

即 $w = Lnz = ln\left|z\right| + i\left(\arg z + 2k\pi\right)$ $\left(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right)$

是多值函数

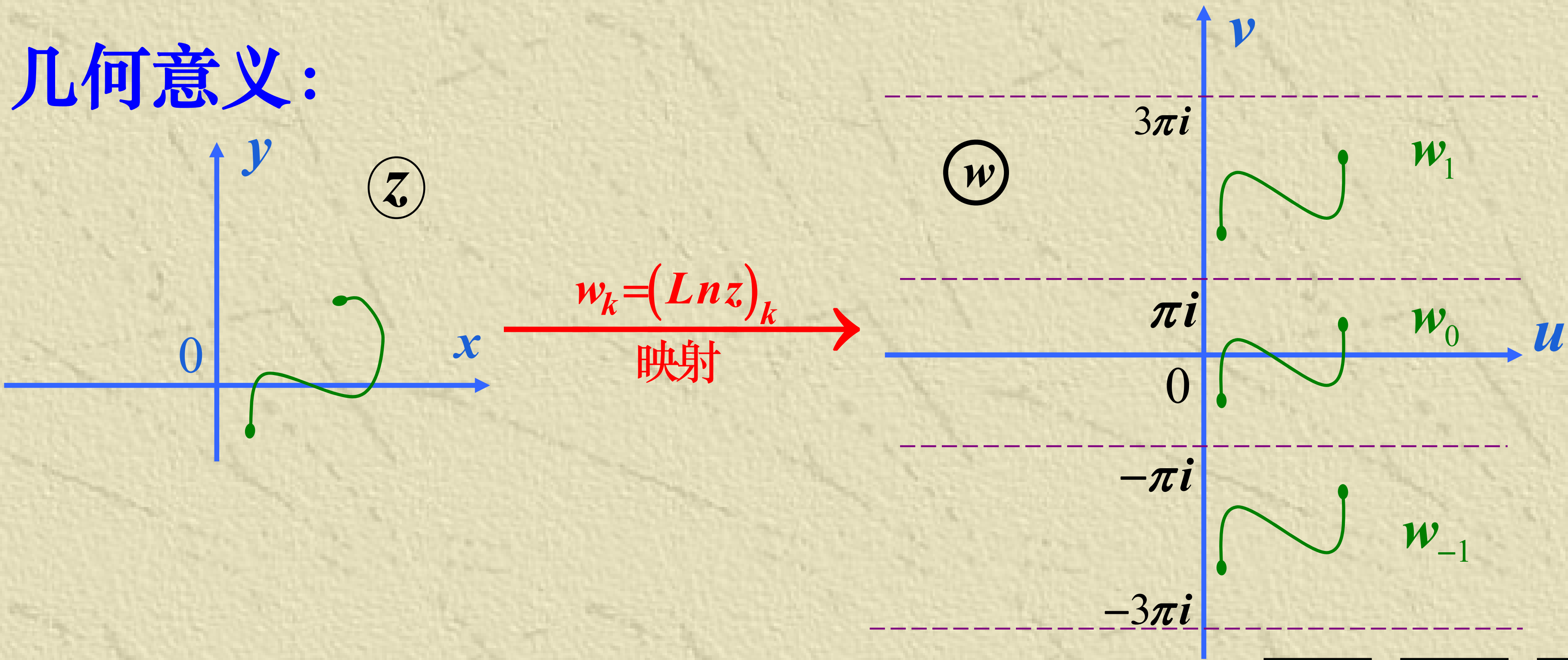
特别的：$k=0$时，$\ln z=\ln|z|+i\arg z$称为Lnz的主值

故 $Lnz=\ln z+2k\pi i \quad (k=\pm1,\pm2,\cdots)$

通常， 记$w_k=(Lnz)_k=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)\ (k=0,\pm1,\cdots)$

为$w=Lnz$的第k个单值分支，$k=0$为主值分支

几何意义：



例1 求下列各值及相应的主值

(1) $Ln(-1)$

解： $Ln(-1) = ln|-1| + i\left[arg(-1) + 2k\pi\right]$

$$= i(\pi + 2k\pi) = (2k+1)\pi i$$

主值 $ln(-1) = \pi i$

此题说明： 复数域内，负数的对数有意义.

(2) $Ln\left(1+\sqrt{3}i\right)$

解: $Ln\left(1+\sqrt{3}i\right)=ln2+i\left[arg\left(1+\sqrt{3}i\right)+2k\pi\right]$

$$=ln2+\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)i$$

主值 $ln\left(1+\sqrt{3}i\right)=ln2+\frac{\pi}{3}i$

(3) Lni

解: $Lni=ln|i|+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\left(\frac{1}{2}+2k\right)\pi i$

主值 $ln\,i=\frac{\pi}{2}i$

性质:

(1) 服从对数运算定理

$$Ln(z_1 \cdot z_2) = Lnz_1 + Lnz_2, \qquad Ln\frac{z_1}{z_2} = Lnz_1 - Lnz_2$$

注：指集合相等

证明: $\because e^{Ln(z_1 \cdot z_2)} = z_1 \cdot z_2$

$$e^{Lnz_1 + Lnz_2} = e^{Lnz_1} \cdot e^{Lnz_2} = z_1 \cdot z_2$$

故 $e^{Ln(z_1 \cdot z_2)} = e^{Lnz_1 + Lnz_2}$

$$Ln(z_1 \cdot z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$$

注意: 在复数域内, $Lnz^n \neq nLnz$, $Ln\sqrt[n]{z} \neq \frac{1}{n}Lnz$

例如: $Lni^2 = Ln(-1) = (\pi + 2k\pi)i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$$2Lni = 2\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right)i = (\pi + 4m\pi)i$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

显然 $k = 3$时, $\left(Lni^2\right)_3 = 7\pi i$

而无论m取什么整数, $2Lni \neq 7\pi i$

(2) 解析性

对于主值分支： $\ln z = \ln|z| + i\arg z \quad (-\pi < \arg z \leq \pi)$

显然 $z \neq 0$时， $\ln|z|$处处连续

而$\arg z$在$z = 0$及负实轴上不连续

$$\left(\because \lim_{\substack{z\to z_0 \\ (\mathrm{Im}\, z>0)}} \arg z = \pi \qquad \lim_{\substack{z\to z_0 \\ (\mathrm{Im}\, z<0)}} \arg z = -\pi \qquad \therefore \lim_{z\to z_0} \arg z \text{不存在} \right)$$

故$\ln z$除$z = 0$及负实轴上点处处连续

综上： $z = e^w$在区域$-\pi < v = \arg z < \pi$内反函数

$w = \ln z$是单值连续函数

且由求导法则 $\dfrac{d\ln z}{dz}=\dfrac{1}{\dfrac{de^w}{dw}}=\dfrac{1}{z}\quad(z\neq 0$及负实轴上点$)$

从而$\ln z$在除$z=0$及负实轴上点外处处解析

类似可得：Lnz的各分支$(Lnz)_k$在除$z=0$及负实轴上点解析，且$\dfrac{d(Lnz)_k}{dz}=\dfrac{1}{z}$

可见，不同分支上相同点的导数值相等

2. 乘幂与幂函数

(1) 乘幂: 设$a \neq 0$,且a,b为复数,

则$a^b = e^{bLna}$称为a的b次幂

由于 $Lna = ln|a| + i(\arg a + 2k\pi)$

$$\therefore \quad a^b = e^{b[ln|a| + i(\arg a + 2k\pi)]} \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

因而 a^b为多值的

其中$k = 0$时, $a^{bLna} = e^{b(ln|a| + i\arg a)}$称为$a^b$的主值

特别的:

(1) b为整数时

$$a^{b}=e^{b\left[\ln|a|+i(\arg a+2k\pi)\right]}=e^{b(\ln|a|+i\arg a)}=e^{b\ln a}$$单值的

比如 $b=n$时，$a^{n}=e^{n\ln a}=aa\cdots a$单值的

(2) $b=\dfrac{p}{q}$ $(p,q$为互质的整数，$q>0)$时

$$a^{b}=e^{\frac{p}{q}\ln|a|+i\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)}$$

$$=e^{\frac{p}{q}\ln|a|}\left[\cos\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)+i\sin\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)\right]$$

$k=0,1,2,\cdots,q-1$对应有q个值

比如：$b=\dfrac{1}{n}$时

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\arg a+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg a+2k\pi}{n}\right)$$

$$k=0,1,\cdots,n-1$$

例2 求$1^{\sqrt{2}},i^{i}$和$(1+i)^{1-i}$的值.

解：(1) $1^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}Ln1}=e^{\sqrt{2}(0+i2k\pi)}=e^{2\sqrt{2}k\pi i}$

(2) $i^{i}=e^{iLni}=e^{i\left[i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right]}=e^{-\left(\frac{1}{2}+2k\right)\pi}$

$$(3)\ (1+i)^{1-i}=e^{(1-i)Ln(1+i)}=e^{(1-i)\left[\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]}$$

$$=e^{(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi-\ln\sqrt{2}\right)}$$

$$=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi-\ln\sqrt{2}\right)\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi-\ln\sqrt{2}\right)\right]$$

当$k=0$时，得$(1+i)^{1-i}$的主值.

(2) 幂函数:　当 a^b中 $a = z$为一复变数时

则 $w = z^b\,(b$为复数$)$称为幂函数，一般为多值函数.

特别的:

$(1)\ b = n$时，$w = z^n$

由于$\left(z^n\right)' = nz^{n-1}$，　$\therefore w = z^n$解析

$(2)\ b = \dfrac{1}{n}$时，$w = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$又称为根式函数

且各分支 $\left(z^{\frac{1}{n}}\right)_k = \left(\sqrt[n]{z}\right)_k$ 在除原点及负实轴上可导

$$\frac{d\left(z^{\frac{1}{n}}\right)_k}{dz} = \left(\sqrt[n]{z}\right)_k' = \left[e^{\frac{1}{n}(Lnz)_k}\right]' = e^{\frac{1}{n}(Lnz)_k} \cdot \frac{1}{nz}$$

$$= \left(\sqrt[n]{z}\right)_k \cdot \frac{1}{nz} = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}$$

一般的：对z^b $(b$为复数$)$有

$$\left(z^b\right)' = bz^{b-1} \quad (z \neq 0\text{及负实轴上点})$$

$$\left(\because \left(z^b\right)' = \left(e^{bLnz}\right)' = e^{bLnz} \cdot \frac{b}{z} = bz^{b-1}\right)$$

综上：z^b在各单值分支内除$z=0$及负实轴上点外解析.

3. 反三角函数与反双曲函数:

(1) 反三角函数:

设$z=\cos w$,则 $w=f(z)$ 为反余弦函数

记作 $w=\mathrm{Arccos}\,z$

由于 $z=\cos w=\frac{1}{2}\left(e^{iw}+e^{-iw}\right)$

即 $2z=e^{iw}+e^{-iw}$ $\left(e^{iw}\right)^2-2ze^{iw}+1=0$

解得: $e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}$ $\left(\sqrt{z^2-1}\text{理解为双值函数}\right)$

$$\therefore \quad w = -iLn\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

即 $\boxed{Arc\cos z = -iLn\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)}$ 是多值函数

类似可定义：$\boxed{Arc\sin z = -iLn\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)}$

$$\boxed{Arc\tan z = -\frac{i}{2} Ln \frac{1 + iz}{1 - iz}}$$

(2) 反双曲函数:

设$z = shw$,则 $w = f(z)$称为反双曲正弦

记作 $w=Arshz$

同上可推出: $Arshz = Ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$

作业 12双数、14、15、18

$$Archz = Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$Arthz = \frac{1}{2} Ln \frac{1+z}{1-z}$$

指出下列函数的解析区域，并求出导数。

(1) $f(z)=\dfrac{z^2}{z^2+1}$; (2) $f(z)=\sin x\operatorname{ch}y+i\cos x\operatorname{sh}y$.

5. 复变函数的可导性与解析性有什么不同?判断函数的解析性有哪些方法?

解 (1) 函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{z^2+1}$ 的分子与分母均为解析函数，所以 $f(z)=\dfrac{z^2}{z^2+1}$ 在除去分母为零的点 $z=\pm i$ 外是解析的. 又分子在 $z=\pm i$ 处不为零，故 $f(z)$ 的解析区域为复平面除去 $\pm i$ 两点，而且

$$f'(z)=\left(\frac{z^2}{z^2+1}\right)'=\frac{2z}{(z^2+1)^2}\quad(z\neq\pm i)$$

(2) $u=\sin x\operatorname{ch}y$, $v=\cos x\operatorname{sh}y$，故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x\operatorname{ch}y,\quad\frac{\partial u}{\partial y}=\sin x\operatorname{sh}y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\operatorname{sh}y,\quad\frac{\partial v}{\partial y}=\cos x\operatorname{ch}y.$$

以上四个偏导在复平面上连续，故 u,v 可微，又满足 C-R 方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$，易得 $f(z)$ 在复平面上处处解析，且

$$f'(z)=u_x+iv_x=\cos x\operatorname{ch}y-i\sin x\operatorname{sh}y.$$

解　复变函数的可导性反映了函数在某一点的局部性质，而解析性则反映了函数在一个区域内的整体性质．函数可以在某个区域内仅在一点处可导，在这个区域内的其他点均不可导，此时在这一点处不解析；而如果说函数在某一点处解析，则这个函数必定在这一点的某邻域内处处可导．因此，函数在一点处解析与在这一点的领域内可导才是等价的．

判断函数的解析性有两种常用方法：(1) 是用定义，利用可导性判断解析性；(2) 是用定理：函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在其定义域 D 内解析 $\Leftrightarrow u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内任一点 $z=x+iy$ 可微，且满足 C-R 方程 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.