电容器储能 $W=\dfrac{Q^2}{2C} \xrightarrow{Q=CU} =\dfrac{1}{2}CU^2=\dfrac{1}{2}QU$

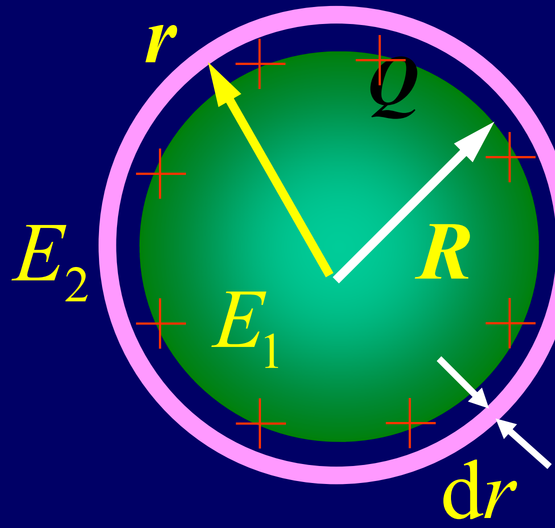
能量密度 $\boxed{w=\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V}=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$ **(适用于所有电场)**

不均匀电场中 $\mathrm{d}W=w\mathrm{d}V$

$$\boxed{W=\int_V \mathrm{d}W=\int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}V}$$

例 已知带电导体球，半径为R，带电量为Q

求 它所产生的电场中储藏的电场能量



解 $E_1 = 0$ $\quad E_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

取体积元 $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$

$$W = \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^{\ 2}\mathrm{d}V = \int_R^\infty \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

$$W = \frac{Q^2}{2C} \longrightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

§ 10.9 静电场中的电介质

(放在电场中的) 电介质 ⟷ 电场

一. 电介质

导电能力极差的物质

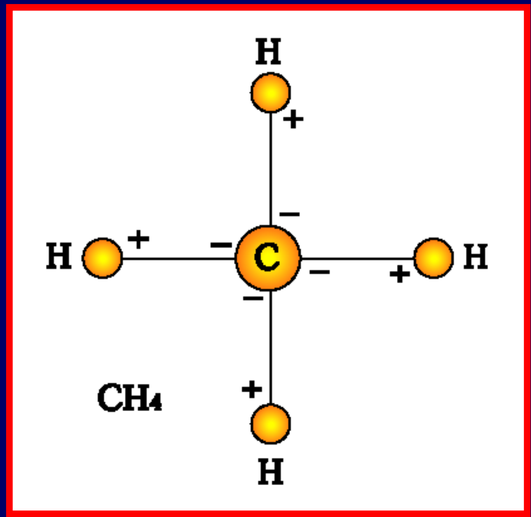
可自由移动的电荷很少, 电阻率超过10^8 Ω m

二. 电介质的极化　束缚电荷（极化电荷）

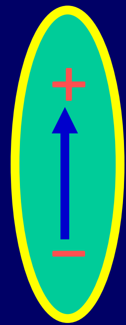
1. 电介质分子的电结构

$\vec{p}=0$

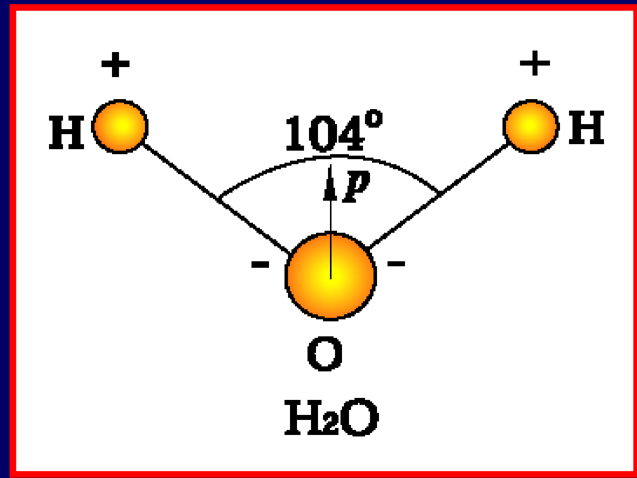
分子的固有电矩



无极分子

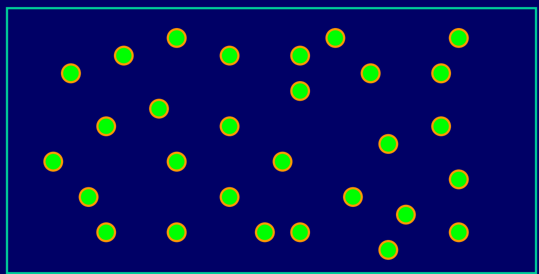


$\vec{p}=q\vec{l}$



有极分子

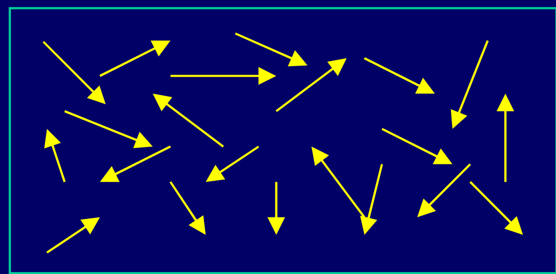
无外场时（热运动）



(无极分子电介质)

整体对外
不显电性

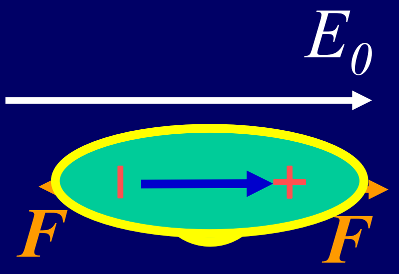
$\sum\vec{p}=0$



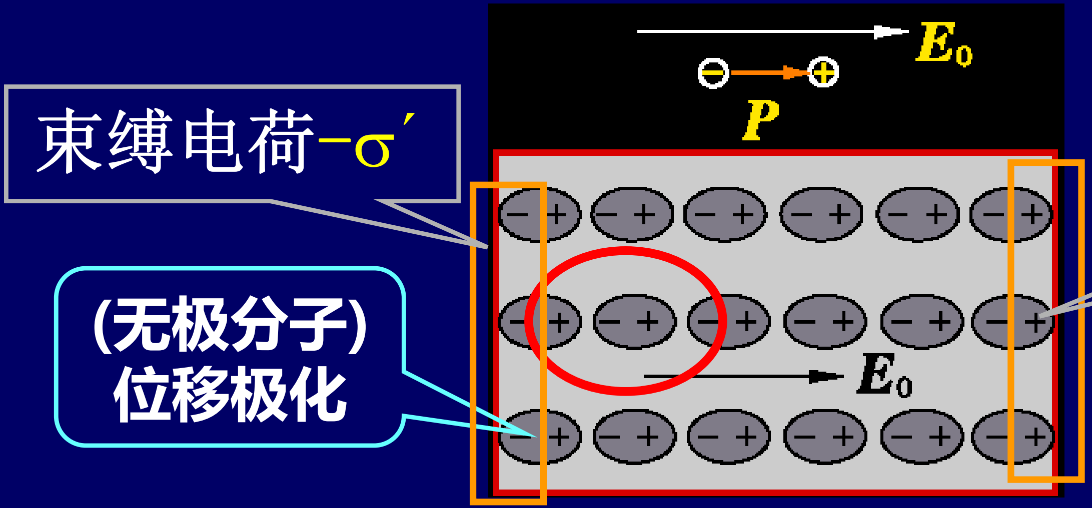
(有极分子电介质)

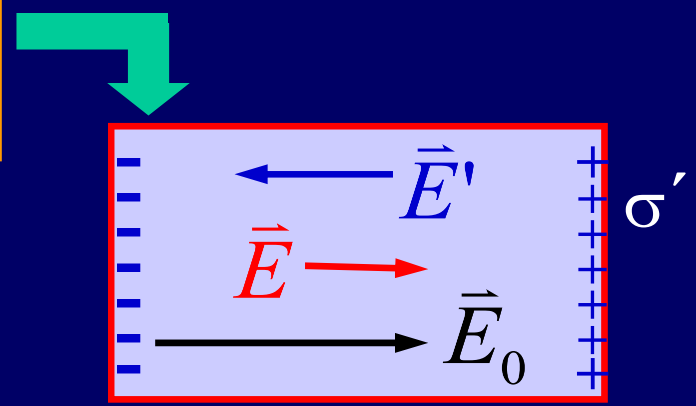
2. 电介质的极化

有外场时



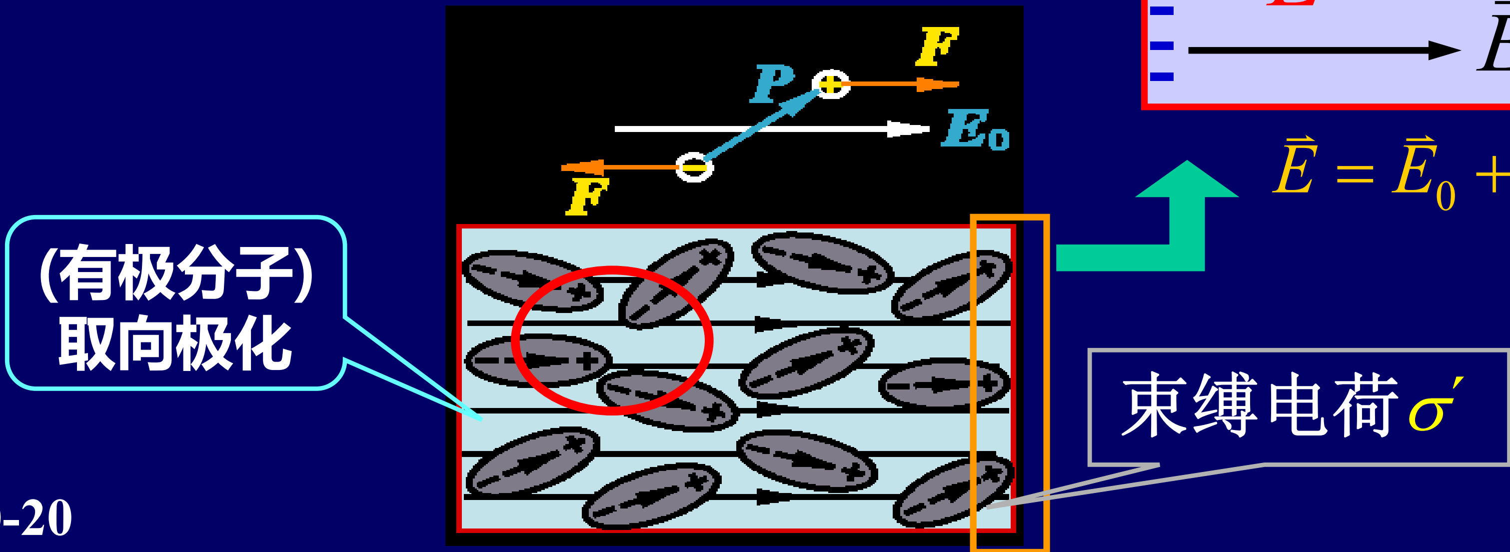
- 无极分子电介质





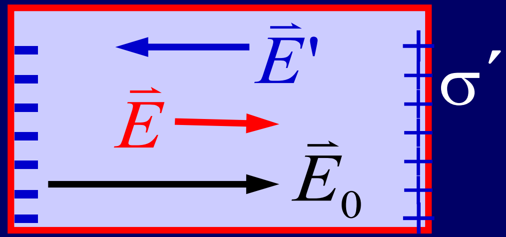
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

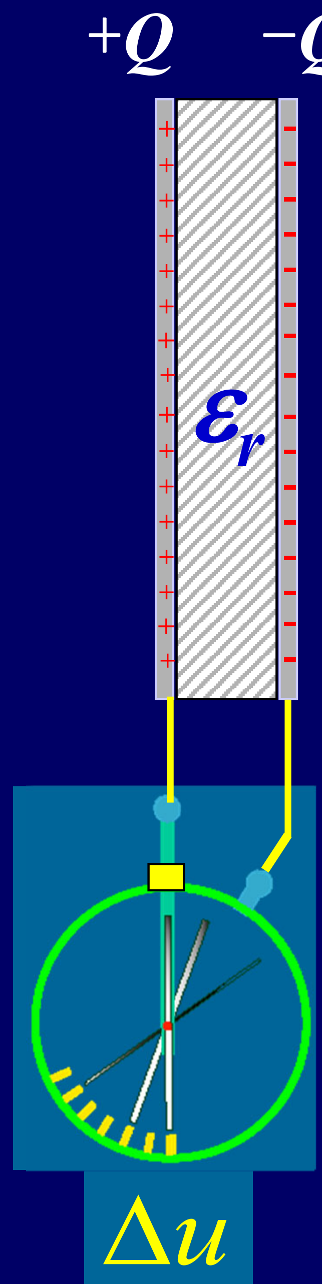
- 有极分子电介质



3. 附加电场 $\vec{E}'$

$$\left|\vec{E}\right| = \left|\vec{E}_0 + \vec{E}'\right| < \left|\vec{E}_0\right|$$





实验

结论： 介质充满电场或介质表面为等势面时

$$\Delta u = \frac{\Delta u_0}{\varepsilon_r} \qquad E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

ε_r——电介质的相对介电常数

$\varepsilon_r \geq 1$ 介质中电场减弱

$$C = \frac{Q}{\Delta u} = \varepsilon_r C_0$$

三. 电介质的高斯定理　电位移矢量

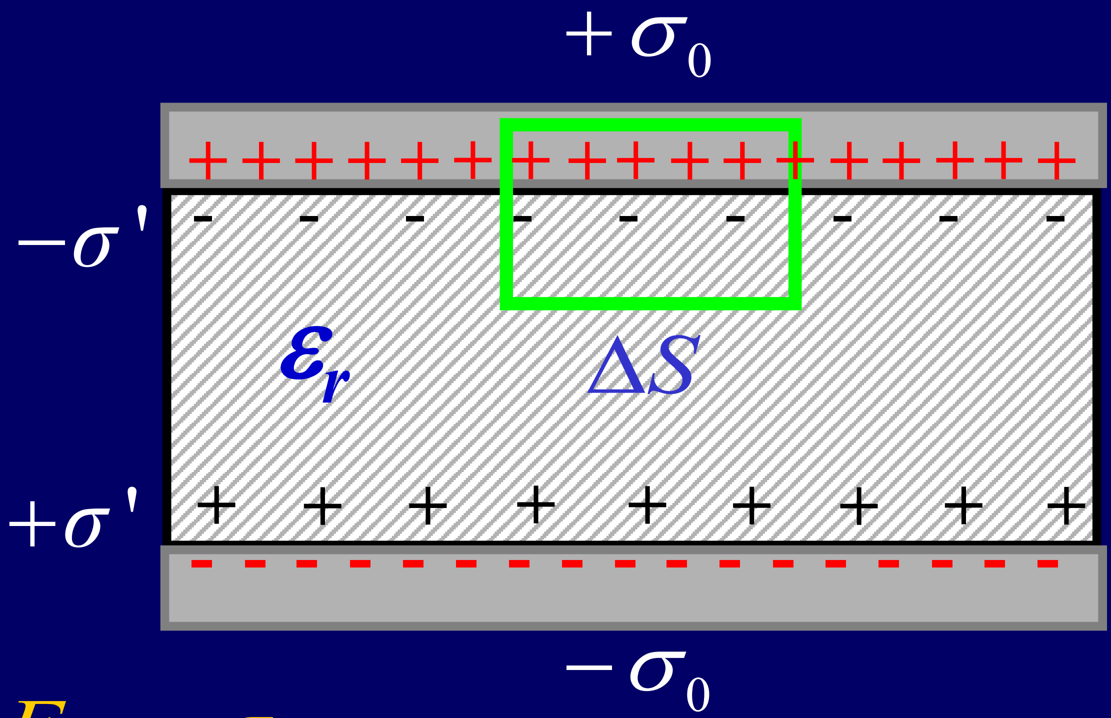
- 无电介质时

$$\oint_S \vec{E}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_0 \Delta S$$

- 加入电介质

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = (\sigma_0 - \sigma')\Delta S$$

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_r}\Delta S$$



$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$(\sigma_0 - \sigma')\Delta S = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_r}\Delta S$$

令：　$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon\ \vec{E}$　　　ε ——介质的介电常数

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_i q_{0i,内}}$$

1.电介质的高斯定理

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_i q_{0i,内}$$

通过高斯面的电位移通量等于高斯面所包围的自由电荷的代数和，与极化电荷及高斯面外电荷无关。

2.电位移矢量

(1).对于各向同性电介质，$\vec{D}$与$\vec{E}$同方向

$$\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon\ \vec{E}$$

(2).介质充满电场或介质表面为等势面时

$$E=\frac{E_0}{\varepsilon_r} \longrightarrow \vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}_0$$

(3). 电位移线与电场线

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum\limits_{内} (q_0 + q')}{\varepsilon_0} \qquad \Phi_D = \oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{内} q_0$$

在介质和真空的界面或不同介质的界面, 电场线不连续, 电位移线连续.

四. 介质中的电场能量密度

$$W = \frac{1}{2} C u_{AB}^2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{2d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 V$$

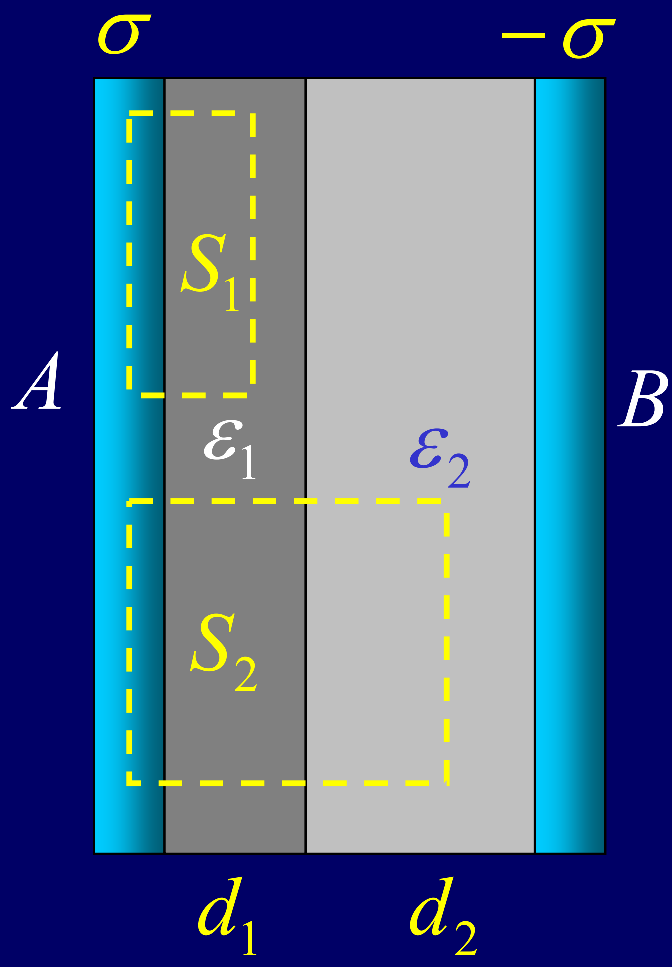
$$C = \varepsilon_r C_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$$

$$\boxed{w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 = \frac{1}{2} DE}$$

例 平行板电容器，其中充有两种均匀电介质。

求 (1) 各电介质层中的场强

(2) 极板间电势差



解 做一个圆柱形高斯面 S_1

$$\oint_{S_1} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_i (S_1\text{内})$$

$$D_1 \Delta S_1 = \sigma \Delta S_1 \qquad D_1 = \sigma$$

同理，做一个圆柱形高斯面 S_2

$$\int_{S_2} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_i (S_2\text{内}) \qquad D_2 = \sigma$$

$$D_1 = D_2 \qquad E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} \neq E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2}$$

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} \qquad E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2}$$

$$\Delta u = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{d_1} \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{d_1}^{d_1+d_2} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_o \varepsilon_{r1}} d_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_o \varepsilon_{r2}} d_2$$

$$C = q / \Delta u \quad = \left(\frac{d_1}{S\varepsilon_1} + \frac{d_2}{S\varepsilon_2} \right)^{-1} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$$

- **各电介质层中的场强不同**
- **相当于电容器的串联**

平板电容器中充介质的另一种情况

$$\Delta u_1 = \Delta u_2$$

$$E_1 = \frac{\Delta u_1}{d} = E_2 = \frac{\Delta u_2}{d}$$

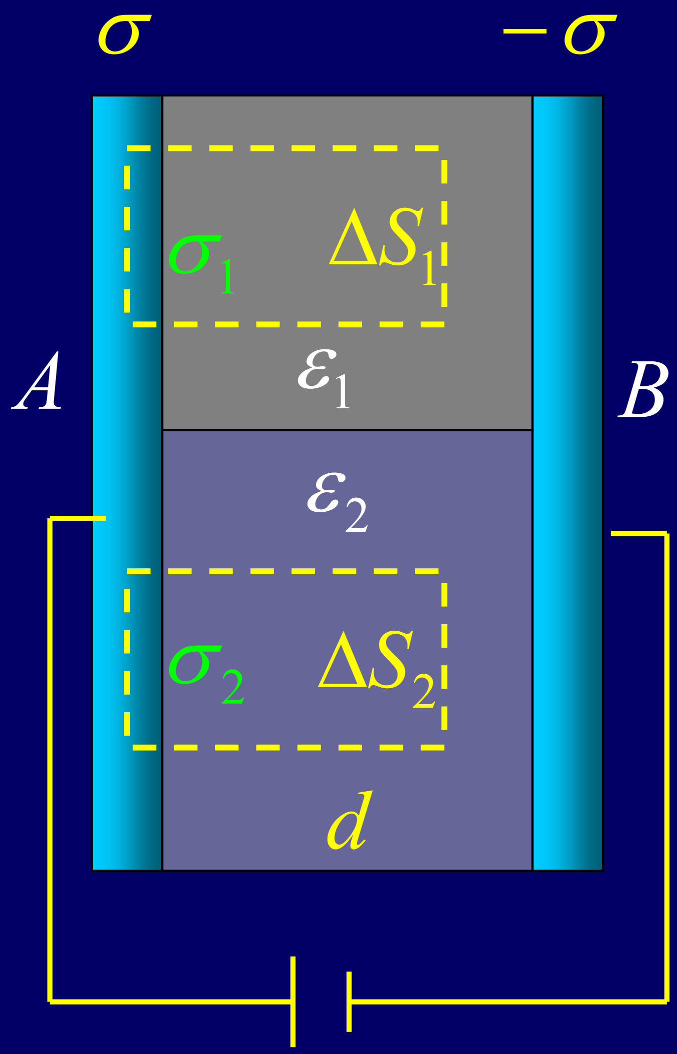
$$D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_1 \neq D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_2$$

$$D_1 = \sigma_1 \neq D_2 = \sigma_2$$

考虑到 $q = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2$

$$\Delta u = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} d = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} d = \frac{qd}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}$$

$$C = \frac{q}{\Delta u} = \frac{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}{d} = C_1 + C_2$$

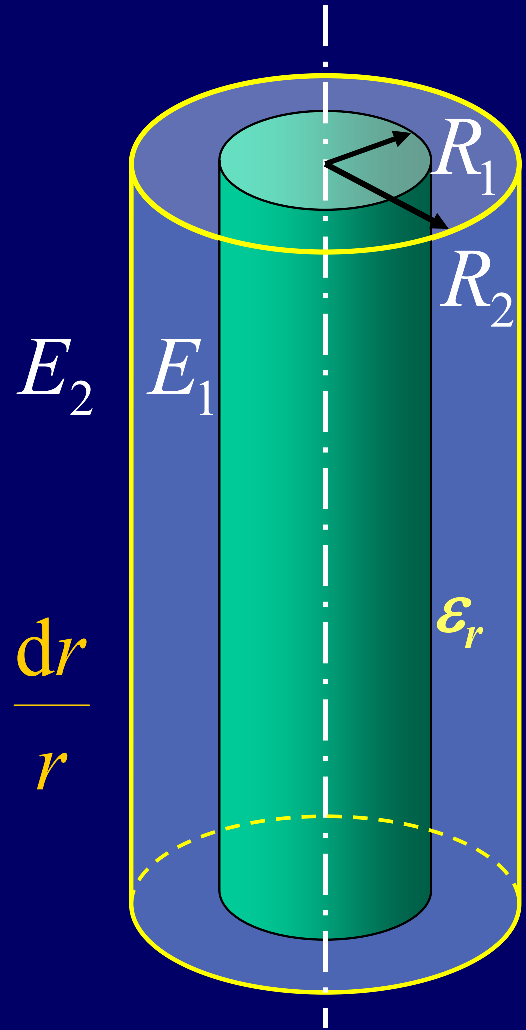


- 各电介质层中的场强相同
- 相当于电容器的并联

例 一单芯同轴电缆的中心为一半径为R_1的金属导线，外层一金属层。其中充有相对介电常数为ε_r的固体介质，当给电缆加一电压后，$E_1=2.5E_2$，若介质最大安全电势梯度为E^*

求 电缆能承受的最大电压？

解 用含介质的高斯定理



$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} \Rightarrow \lambda=2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 E^*$$

$$E_1=2.5E_2 \Rightarrow R_2=2.5R_1$$

$$\Delta u=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\mathrm{d}r=R_1E^*\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$=R_1E^*\ln\frac{R_2}{R_1}=R_1E^*\ln 2.5$$