第三章　复变函数的积分

第一节 复变函数积分的概念

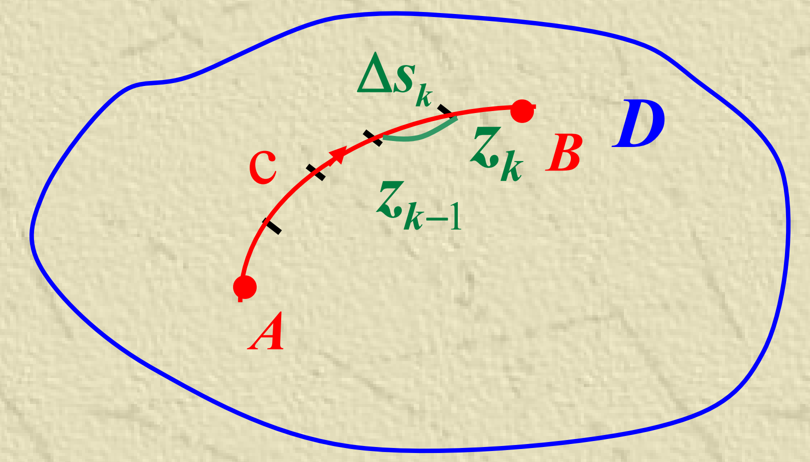
1. 定义：设 $w=f(z)$ 在区域 D 内有定义，C 为 D 内一条光滑的有向曲线（如图）

(1) 分割：$\forall$ 分割 $\overset{\frown}{AB}$ 为 $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ $(k=1\cdots n)$

(2) 作和：$\forall \zeta_k \in \overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$



其中 $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$

记 ΔS_k 为 $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ 的长度，$\delta=\max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta S_k\}$

(3) 取极限：$\lim\limits_{\substack{\delta \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta)\Delta z_k$

若极限存在，则极限值称为$w = f(z)$沿C的积分，

记作 $$\int_c f(z)\,dz = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta)\Delta z_k$$

注： 1° 若C封闭，记为$\oint_C f(z)\,dz$, 其中C表示正向，反向为C^-.

2° 当C是x轴上的线段，$a \le x \le b$, 且$f(z) = u(x)$,

则$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b u(x)\,dx$

积分的性质:

$$1^\circ \int_C [k_1 f(z) + k_2 g(z)]\,dz = k_1 \int_C f(z)\,dz + k_2 \int_C g(z)\,dz$$

$$2^\circ \int_C f(z)\,dz = -\int_{C^-} f(z)\,dz$$

3° 设 $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$,

则 $\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz$

4° 设曲线C的长度为L, $\left|f(z)\right| \le M\ (z \in C)$

则 $\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C \left|f(z)\right| ds \le ML$(估值不等式)

证明:

$$\because \left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} \left|f(\zeta_k)\right|\left|\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} \left|f(\zeta_k)\right|\Delta s_k$$

取极限得: $\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C \left|f(z)\right| ds \le M\int_C ds = ML$

2. 积分存在的条件及计算方法

定理： 设光滑曲线C: $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, 其中 $\alpha\le t\le\beta$, C正向为t增加的方向，且$z'(t)\neq 0$. 如果 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域D内连续, 且$C\subset D$

则 1) $\int_C f(z)dz$一定存在

2) $$\int_C f(z)dz=\int_C u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int_C v(x,y)dx+u(x,y)dy$$

简写为 $$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy$$

证明:

设 $z_k = x_k + iy_k, \zeta_k = \xi_k + i\eta_k, \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$, 则

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)\right](\Delta x_k + i\Delta y_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$

$$+ i\sum_{k=1}^{n}\left[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$

$\because f(z)$ 在 C 上连续,

$\therefore u(x,y), v(x,y)$ 也在 C 上连续，故在 C 上可积.

上式取极限得:

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy = \int_C (u+iv)(dx+idy)$$

进一步

$$\because z = z(t) = x(t) + iy(t) \Leftrightarrow C:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} (\alpha \le t \le \beta)$$

则 $$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta \{u[x(t),y(t)]x'(t) - v[x(t),y(t)]y'(t)\}dt$$

$$+ i\int_\alpha^\beta \{v[x(t),y(t)]x'(t) + u[x(t),y(t)]y'(t)\}dt$$

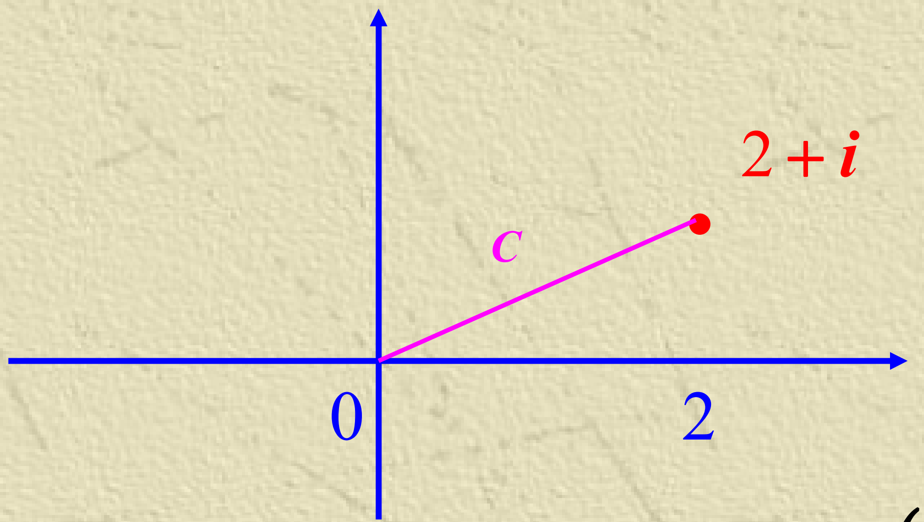
$$= \int_\alpha^\beta \{u[x(t),y(t)] + iv[x(t),y(t)]\}[x'(t) + iy'(t)]dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f[z(t)]\cdot z'(t)dt$$

例1. 计算$\int_C z^2 dz$,其中C: (1) 沿直线从$0 \to 2+i$;

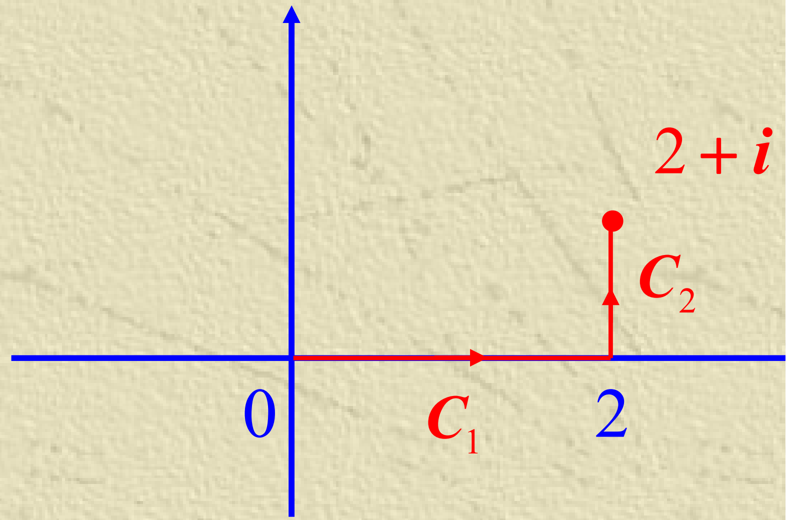
(2) 沿折线从$0 \to 2 \to 2+i$;

解: (1) $C: z = 2t + it = (2+i)t, (0 \le t \le 1)$



$$\therefore \int_C z^2 dz = \int_0^1 (2+i)^2 t^2 (2+i) dt = \frac{(2+i)^3}{3} = \frac{2}{3} + \frac{11}{3} i$$

$$(2)\ C_1: z = 2t \quad (0 \le t \le 1)$$



$$\therefore \int_{C_1} z^2 dz = \int_0^1 4t^2 \cdot 2dt = \frac{8}{3}$$

$$C_2: z = 2 + it \quad (0 \le t \le 1)$$

$$\therefore \int_{C_2} z^2 dz = \int_0^1 (2+it)^2 \cdot idt = -2 + \frac{11}{3}i$$

$$\therefore \int_C z^2 dz = \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$$

结果： 沿两个不同路线积分相 等，不是偶然的。

事实上：

$$\int_C z^2 dz = \int_C \left(x^2 - y^2\right)dx - 2xydy$$

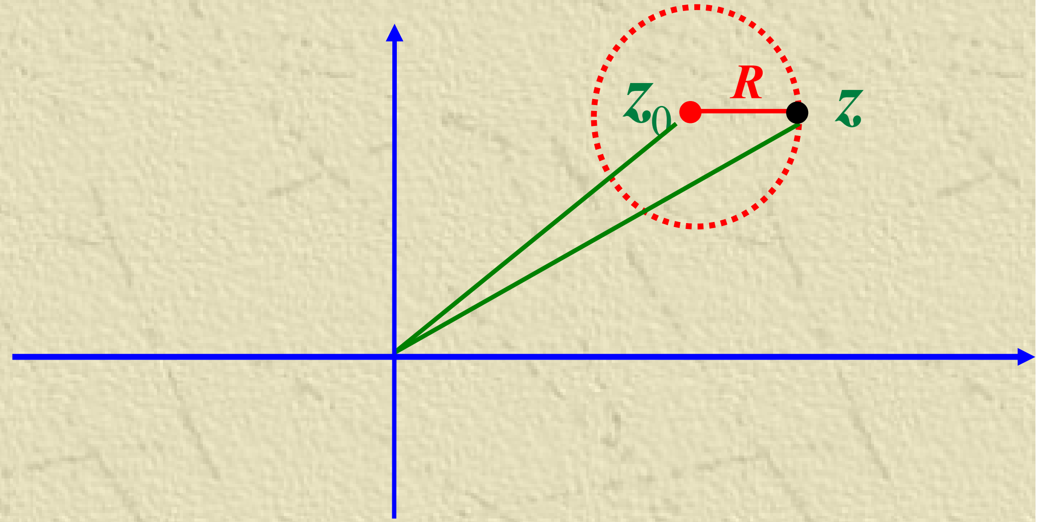
$$+ i\int_C 2xydx + \left(x^2 - y^2\right)dy$$

公式右边两个积分均与路径无关，

$\therefore \int_C z^2 dz$也与路径无关

例2 计算$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ $C:|z-z_0|=R$的正向 $n\in N$

解: $C: z = z_0 + Re^{i\theta}, 0\le\theta\le 2\pi$



则$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$

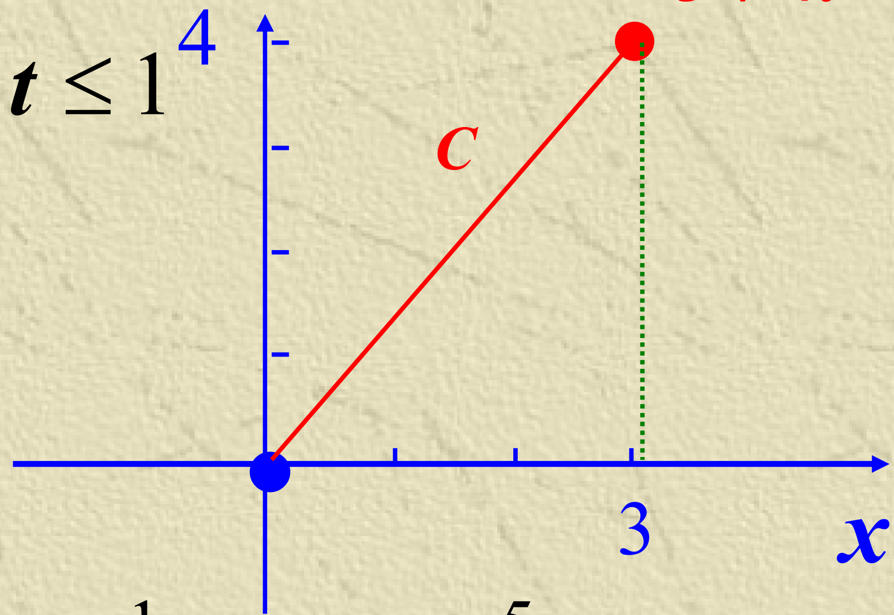
$$= \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{R^{n+1}\cdot e^{i(n+1)\theta}} = \frac{i}{R^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}d\theta = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$

即 $$\oint_{|z-z_0|=R}\frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\begin{cases}2\pi i, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

(此积分与路径中心及半径无关)

如: $$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z-0}=2\pi i$$

例3. 设C沿直线从$0 \to 3+4i$，求$\left|\int_C \frac{dz}{z-i}\right|$的一个上界。



解: $C: z = 3t + i4t \quad 0 \le t \le 1$

则$\left|\int_C \frac{1}{z-i}dz\right| \le \int_C \left|\frac{1}{z-i}\right| ds$

而在C上:

$$\left|\frac{1}{z-i}\right| = \frac{1}{|3t+(4t-1)i|} = \frac{1}{\sqrt{25\left(t-\frac{4}{25}\right)^2+\frac{9}{25}}} \le \frac{5}{3}$$

又$\int_C ds = 5 \quad \therefore \quad \left|\int_C \frac{dz}{z-i}\right| \le \frac{5}{3} \times 5 = \frac{25}{3}$

第二节 柯西-古萨基本定理

由前边例子我们看到，$\int_C z^2 dz$ 与积分路径无关

问：$f(z)$满足什么条件，$\int_C f(z)dz$与路径无关？

分析： 首先$\int f(z)dz$与路径无关 $\Leftrightarrow \oint_C f(z)dz = 0$

而$\oint_C f(z)dz = \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy$

从而$\oint_C f(z)dz = 0$

$\Leftrightarrow \oint_C udx - vdy = 0$和$\oint_C vdx + udy = 0$

要求： C是单连通区域B内的简单闭曲线，

$u(x,y),v(x,y)$在B内有连续偏导，

且$-v_x=u_y,u_x=v_y$ ($C-R$方程)

Cauchy定理：若$f(z)$是单连通区域B内的解析函数，

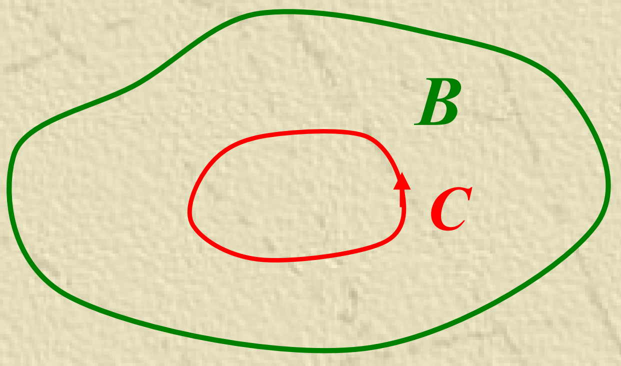
且$f'(z)$连续，则对B内的任一简单闭曲线C

有$\oint_C f(z)dz=0$

Th 柯西-古萨(*Cauchy - Goursat*):

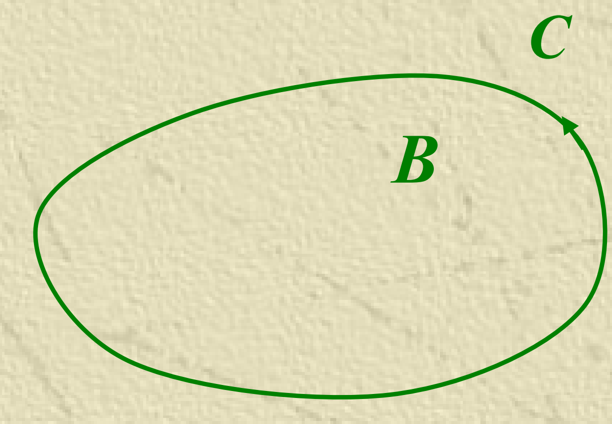
设$f(z)$是单连通区域B内的解析函数，则对B内的任一简单闭曲线C(可以不是简单的),有

$$\oint_C f(z)dz = 0$$



注：这里不予以证明.

定理的推广：



设C为区域B的边界，

1) 若$f(z)$在B内及C上处处解析，则

$$\oint_C f(z)dz=0$$

2) 若$f(z)$在B内解析，在$\bar{B}$上连续，则

$$\oint_C f(z)dz=0$$

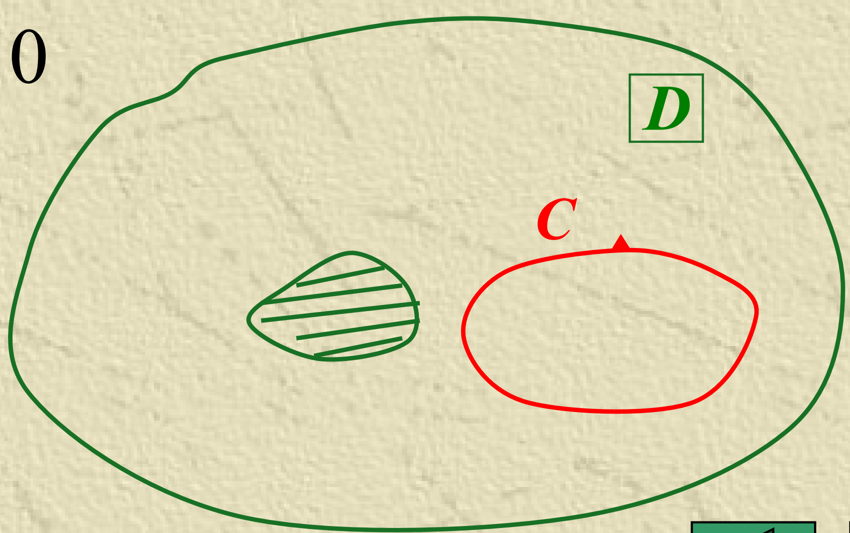
第三节 C-G定理的推广-复合闭路定理

问题： 若D是复连通区域，如何？

分析： 设$f(z)$在复连通区域 D内解析

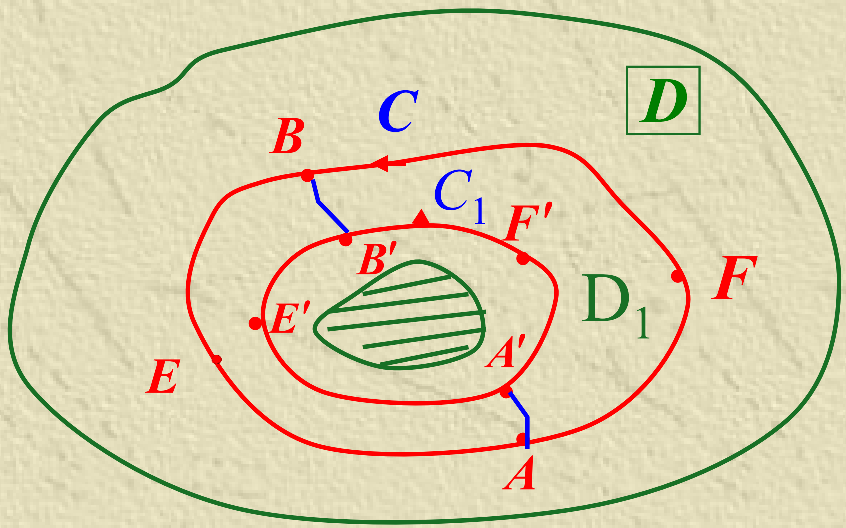
1° 若C是D内简单曲线，且C的内部含于D，

则$\oint_C f(z)dz = 0$



2° 若C是D内简单闭曲线，且C的内部有不属于D的点，又C_1含于C内，且C,C_1围成的区域D_1全含于D.

则 $\oint_{\overset{\frown}{AFBB'F'A'}} f(z)dz = 0$, $\int_{\overset{\frown}{BEAA'E'B'}} f(z)dz = 0$



相加得 $\oint_C f(z)\,dz + \oint_{C_1^-} f(z)\,dz = 0 \quad -(1)$

即 $\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz$ — (2) 闭路变形原理

(外围线积分＝内围线积分)

若记 $\Gamma = C + C_1^-$ —称为复合闭路(或围线)

则(1)式为 $\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$

复合闭路定理： 设C是复连通区域D内一条简单闭曲线，

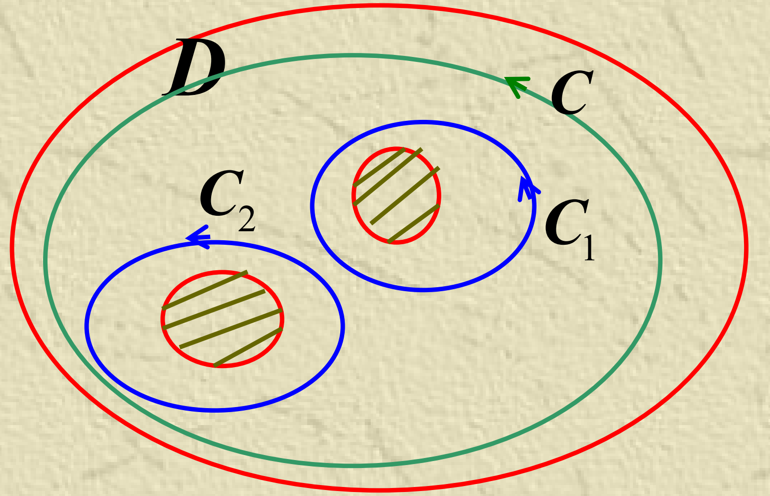
$C_1, C_2, \cdots C_n$是C内的简单闭曲线，且互不包含也不相交，

并且以$C_1, C_2, \cdots C_n, C$为边界的区域，D_1全包含于D，若$f(z)$

在D内解析，

则 1) $\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$

2) $\int_\Gamma f(z)dz = 0$，$\Gamma = C + C_1^- + \cdots + C_n^-$ 复合闭路

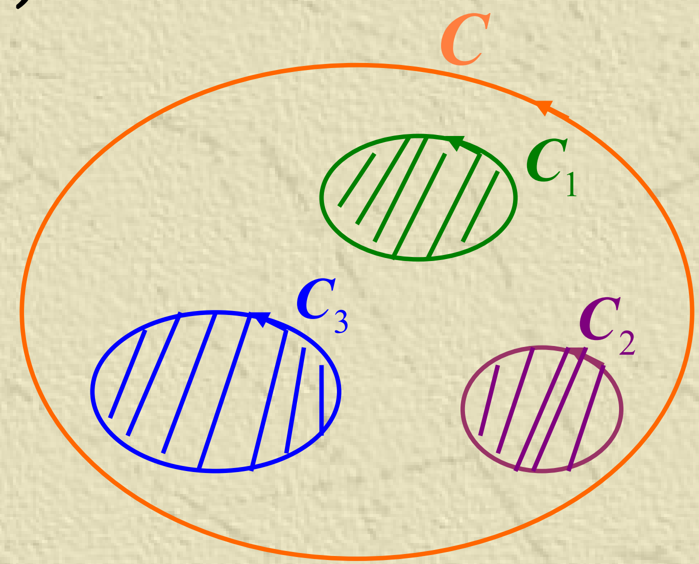


推广： 设D的边界是复合回路$\Gamma = C + C_1^- + \cdots + C_n^-$

又$f(z)$在$\overline{D}$上解析，

则 $\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{C+C_1^-+\cdots+C_n^-} f(z)dz = 0$

或 $\oint_{C} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$



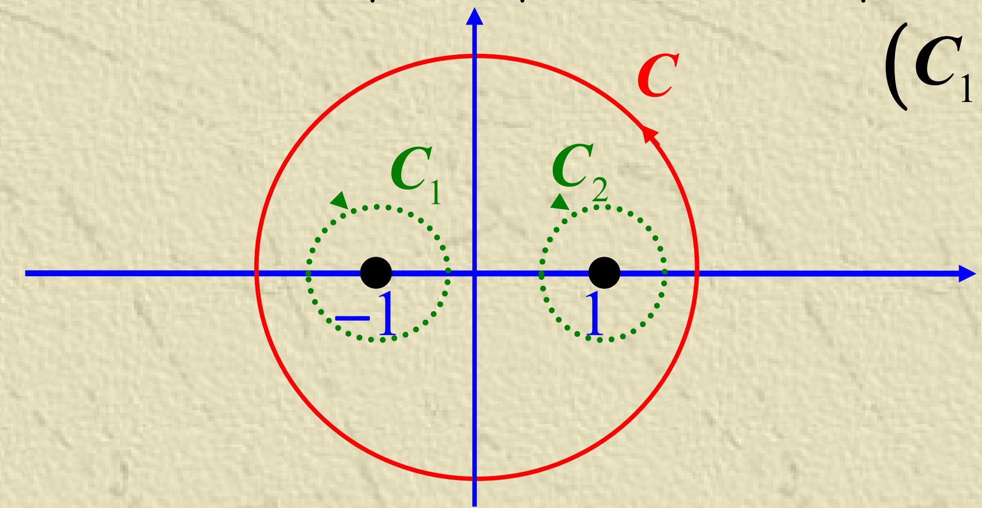
即外围线积分 = 内围线上积分之和

例1 求 $\oint_{|z|=2}\frac{1}{z^2-1}dz$

解： $f(z)=\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)$

作圆 $C_1:|z+1|=\rho_1, C_2:|z-1|=\rho_2$

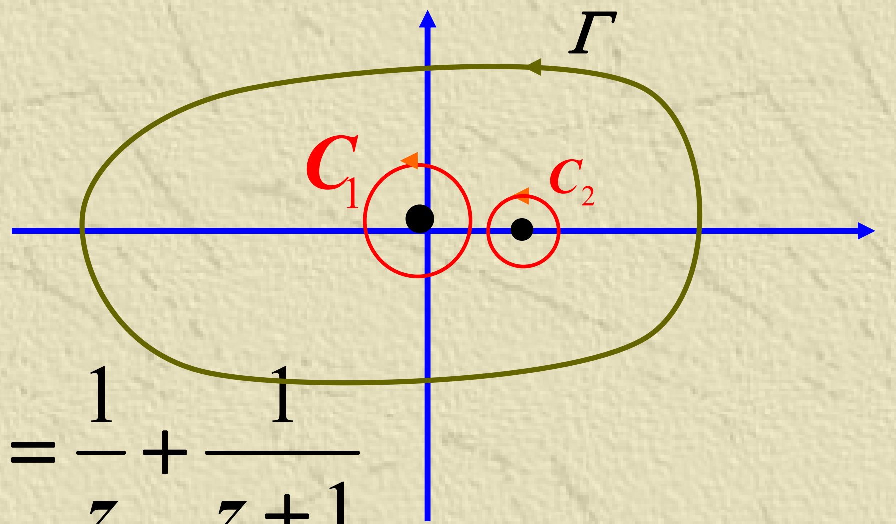
$(C_1, C_2$互不相交，互不包含$)$



则 $\oint_{|z|=2}\frac{1}{z^2-1}dz=\frac{1}{2}\oint_{C_1}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)dz+\frac{1}{2}\oint_{C_2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)dz$

$=-\frac{1}{2}\cdot 2\pi i+\frac{1}{2}\cdot 2\pi i=0$

例2 求 $\oint_{\Gamma}\frac{2z-1}{z^2-z}dz$, Γ是包含$|z|=1$在内的任何正向简单闭曲线.



解:

$$f(z)=\frac{2z-1}{z^2-z}=\frac{2z-1}{z(z-1)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}$$

有两个奇点$z=0$及$z=1$均在Γ内

则 $$\oint_{\Gamma}\frac{2z-1}{z^2-z}dz=\oint_{C_1}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}\right)dz+\oint_{C_2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}\right)dz$$

$$=2\pi i+0+0+2\pi i=4\pi i$$

第四节 原函数与不定积分

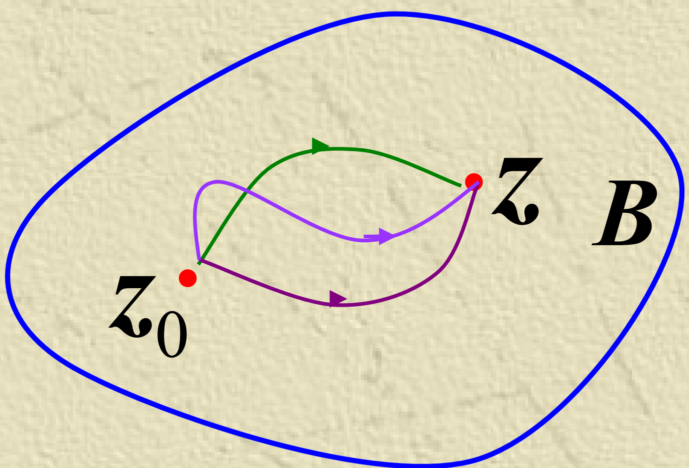
由C-G定理可以证明：

定理1 若$f(z)$在单连通区域B内处处解析，

则 $\int_C f(z)dz$与连接起点及终点的路线C无关

（只与起点,终点有关）

如图：



起点为定点z_0，终点为定点z，

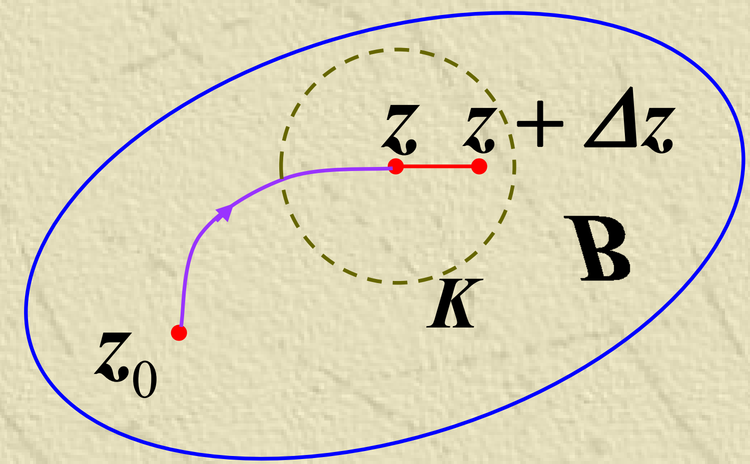
则 $F(z) \overset{\Delta}{=} \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ − 变上限单值函数

定理2: 若$f(z)$在单连通区域B内处处解析，则 $F(z)$也在B内解析，并且$F'(z)=f(z)$

$$\left(\text{分析: 只要证:} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = f(z)\right)$$

证明:

$\forall z \in B$,



以z为中心作小圆K包含于B内，且$z+\Delta z \in K$

则 $$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right]$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$$

$$\therefore \left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta-\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta\right]\right|=\frac{\left|\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta\right|}{|\Delta z|}$$

又$f(z)$在B内解析，

故在B内连续$\left(\lim\limits_{\zeta\to z} f(\zeta)=f(z)\right)$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0\left(\delta<R\right)$，当 $\left|\zeta-z\right|<\delta$ 时，

$$\left|f\left(\zeta\right)-f\left(z\right)\right|<\varepsilon$$

故：

$$\left|\frac{F\left(z+\Delta z\right)-F\left(z\right)}{\Delta z}-f\left(z\right)\right|=\frac{\left|\int_{z}^{z+\Delta z}\left[f\left(\zeta\right)-f\left(z\right)\right]d\zeta\right|}{\left|\Delta z\right|}$$

$$\leq\frac{1}{\left|\Delta z\right|}\int_{z}^{z+\Delta z}\left|f\left(\zeta\right)-f\left(z\right)\right|ds\ \leq\frac{1}{\left|\Delta z\right|}\cdot\varepsilon\cdot\left|\Delta z\right|=\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{F\left(z+\Delta z\right)-F\left(z\right)}{\Delta z}=f\left(z\right)$， $F'\left(z\right)=f\left(z\right)$

另一种证法: $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$

$$=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} udx - vdy + i\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} vdx + udy$$

$\overset{\Delta}{=} P(x,y)+iQ(x,y)$ 由于$f(z)$在B内解析,

所以积分$\int udx - vdy$及$\int vdx + udy$与路径无关。

故 $dP(x,y)=udx-vdy,\ \ dQ(x,y)=vdx+udy$

而 $P_x=u,\quad P_y=-v,\quad Q_x=v,\quad Q_y=u$

$\therefore P_x=Q_y,\qquad P_y=-Q_x$ 且连续

即 $F(z)=P+iQ$满足$C-R$方程，且P,Q有连续偏导

$\therefore F(z)$解析，且$F'(z)=P_x+iQ_x=u+iv=f(z)$

即 $F'(z)=f(z)$

注： 此结论与《高数》类似，故同样引入原函数与不定积分的概念

定义（原函数）：

若在区域B内，$\Phi'(z)=f(z)$，则称$\Phi(z)$是$f(z)$的一个原函数

显然，若$f(z)$在单连通区域B内解析，

则 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$就是$f(z)$的一个原函数

且原函数之间相差一个常数，$\Phi(z)=F(z)+c$，

（这一点很容易证明）.

定义（不定积分）：

$f(z)$的全体原函数，称为$f(z)$的不定积分.

记为：$\int f(z)dz = F(z)+c\ (F(z)$是$f(z)$的一个原函数$)$

定理3： 若$f(z)$在单连通区域B内处处解析，

$G(z)$为$f(z)$的一个原函数，

则对$\forall z_0, z_1 \in B$，有$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = G(z_1)-G(z_0)$

—类似牛顿—莱布尼兹公式

证明： $\because \int_{z_0}^{z} f(z)dz$也是$f(z)$的原函数

$$\therefore \quad \int_{z_0}^{z} f(z)dz = G(z) + c$$

当$z = z_0$时，根据$C-G$基本定理，得$c = -G(z_0)$

因此 $\int_{z_0}^{z} f(z)dz = G(z) - G(z_0)$

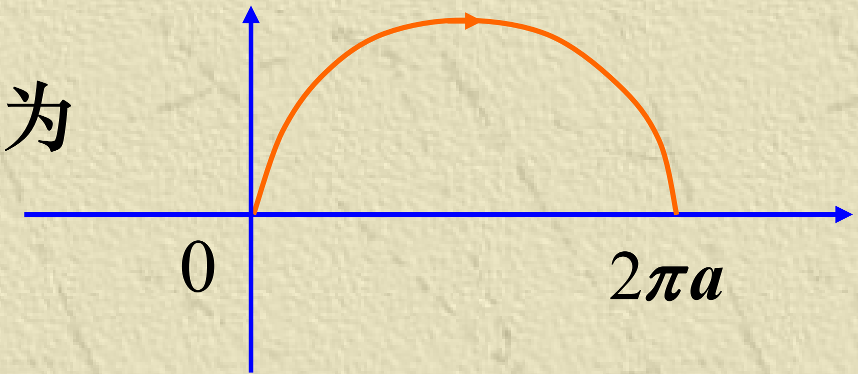
或$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = G(z_1) - G(z_0)$

例1 计算$\int_C \left(2z^2+8z+2\right)dz$，$C$是摆线$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$的一拱.

解: $\because f(z)=2z^2+8z+2$在Z平面处处解析

$\therefore$ 积分与路径无关，起点$z_0=0$，终点$z_1=2\pi a$

又$2z^2+8z+2$的一个原函数为



$$G(z)=\frac{2}{3}z^3+4z^2+2z$$

$$\therefore \text{原式}=\int_0^{2\pi a}\left(2z^2+8z+2\right)dz=\left[\frac{2}{3}z^3+4z^2+2z\right]_0^{2\pi a}$$

$$=4\pi a\left(\frac{4}{3}\pi^2a^2+4\pi a+1\right)$$

例2 计算$\int_0^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}dz$

解: $$\int_0^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}dz = \left[2\sin\frac{z}{2}\right]_0^{\pi+2i} = 2\cos i = 2ch1$$

例3 计算$\int_0^{i} z\cos z dz$

解: $$\int_0^{i} z\cos z dz = z\sin z\Big|_0^i + \cos z\Big|_0^i$$

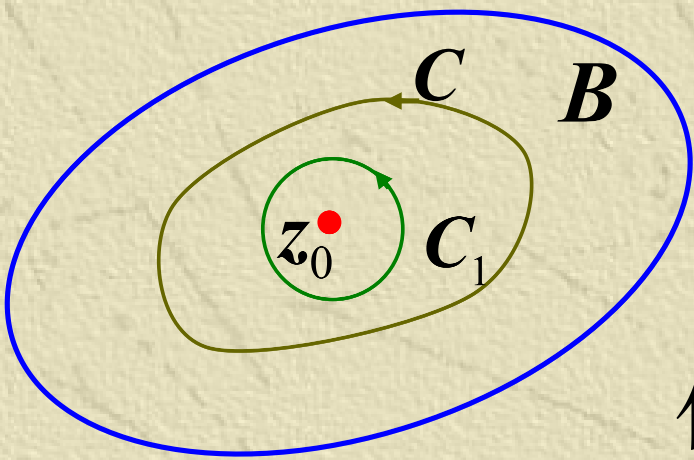
$$= i\frac{e^{-1}-e}{2i} + \frac{e^{-1}+e}{2} = e^{-1} - 1$$

第五节 Cauchy积分公式

问题：

设B为单连通区域，$f(z)$在B内解析，$z_0 \in B$，

且在简单闭曲线C内，则$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = ?$



显然$\frac{f(x)}{z-z_0}$在C内不解析

作圆C_1: $|z-z_0|=R$，且$C_1 \subset C$

分析: 若$f(z)=1$,

$$\text{则}\oint_C \frac{1}{z-z_0}dz=\int_{C_1}\frac{dz}{z-z_0}=2\pi i$$

若$f(z)\neq 1$,

$$\text{则}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

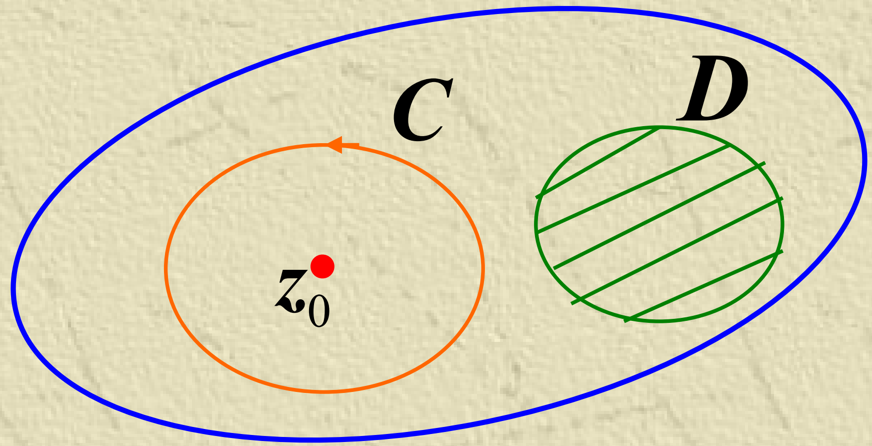
$$(\text{猜测})\approx f(z_0)\int_{C_1}\frac{dz}{z-z_0}=2\pi i f(z_0)\,(R\to 0\text{时})$$

定理（Caychy积分公式）：

设$f(z)$在区域D内处处解析(不一定是单连通区域)，

C是D内任何一条正向简单闭曲线，且C的内部含于D，

z_0为C内一点，



则 $$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

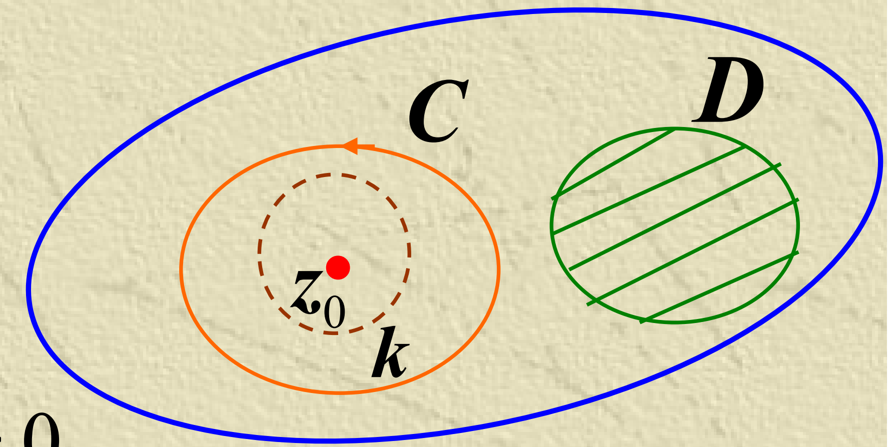
或 $$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$$

第五节 柯西积分公式

分析:

$$\because \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

$$\therefore 只要证: \oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0$$



证明:

$$\because \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \quad (由f(z)在D内处处解析得)$$

$$\therefore \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ 当|z-z_0|<\delta时, |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$

$$取R<\delta, 作圆周K: |z-z_0| = R$$

则 $$\oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = \oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$

而 $$\left|\oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le \oint_K \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}ds$$

$$\le \frac{\varepsilon}{R}\cdot 2\pi R = 2\pi\varepsilon \to 0$$

即 $$\oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0 \quad \therefore \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

注： 若C: $z = z_0 + Re^{i\theta}$

$$\text{则} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} \cdot i\,Re^{i\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})d\theta$$

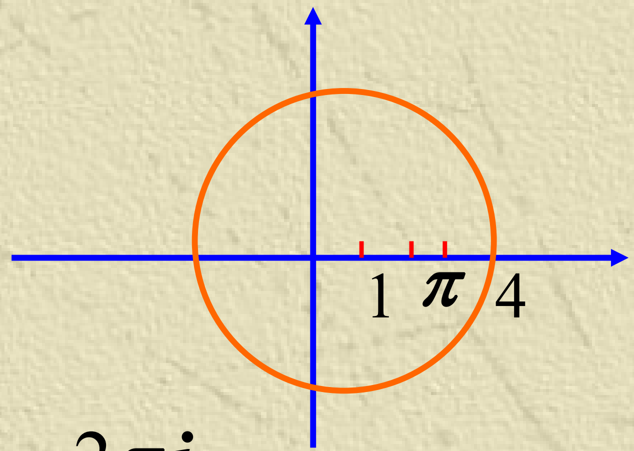
即圆心点的值=圆边界上函数值的平均值

例1 求下列各积分

$$(1)\ \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\frac{z^2}{z-1}dz$$

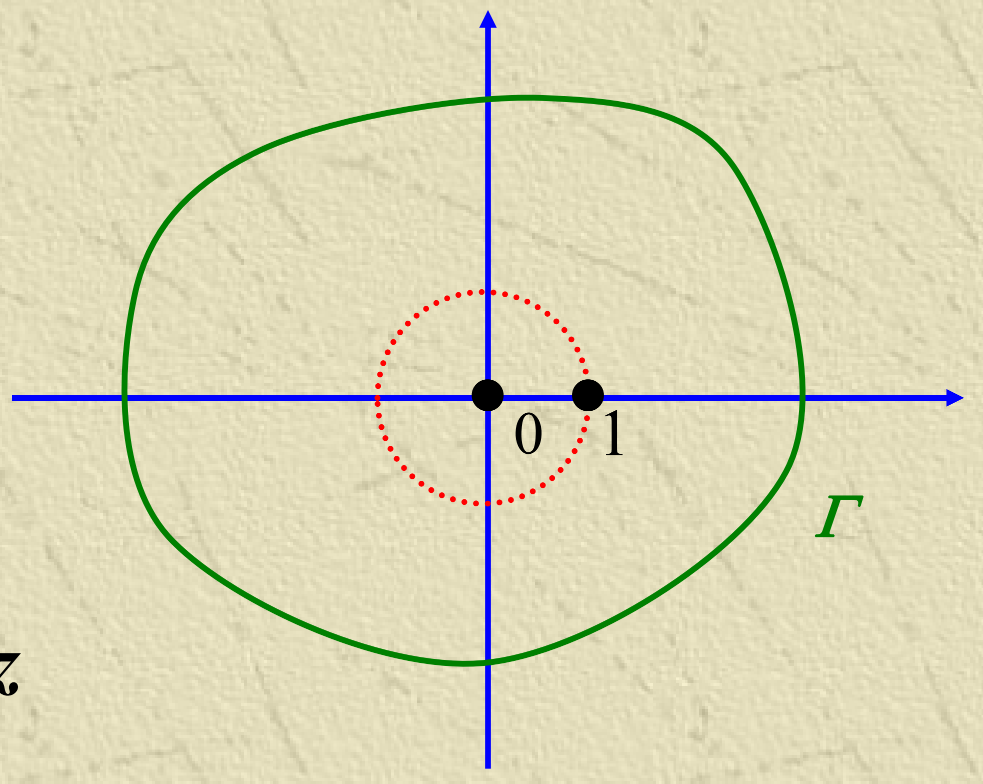
解: $$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\frac{z^2}{z-1}dz = f(z)\Big|_{z=1} = z^2\Big|_{z=1} = 1$$

$$(2)\ \oint_{|z-1|=3}\frac{\cos z}{z-\pi}dz$$



解: $$\oint_{|z-1|=3}\frac{\cos z}{z-\pi}dz = 2\pi i\cos\pi = -2\pi i$$

(3) $\oint_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z}dz$, Γ是包含$|z|=1$在内的任何正向简单闭曲线.



解: $$\oint_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z}dz$$

$$= \oint_{\Gamma} \frac{1}{z-1}dz + \oint_{\Gamma} \frac{1}{z}dz$$

$$= 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i \qquad (\because f(z)=1)$$

(4) $\oint_{|z|=2} \dfrac{z\,dz}{\left(9-z^2\right)(z+i)}$

解: $\oint_{|z|=2} \dfrac{z\,dz}{\left(9-z^2\right)(z+i)} = \oint_{|z|=2} \dfrac{\dfrac{z}{9-z^2}}{z+i}\,dz$

$= 2\pi i \cdot \dfrac{-i}{9-i^2} = \dfrac{\pi}{5}$

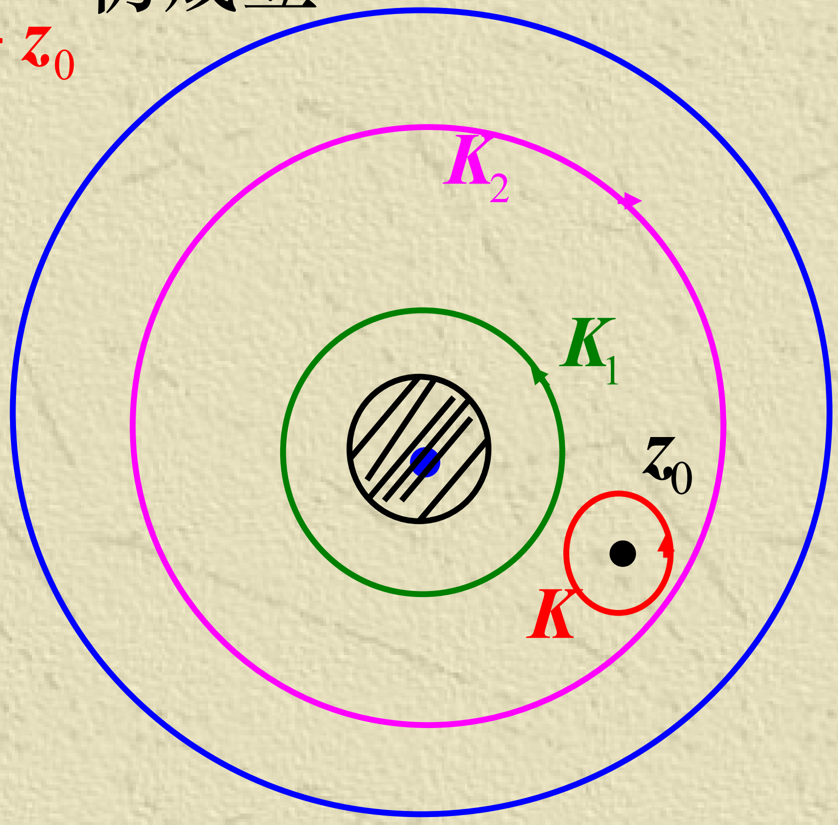
(5) $\oint_{|z-2|=2} \dfrac{z}{z^4-1}\,dz$

解: $\because$ 在$|z-2|=2$内，$f(z)=\dfrac{z}{z^4-1}$只有奇点$z=1$

$\therefore$ 原式$= \oint_{|z-2|=2} \dfrac{\dfrac{1}{(z+1)\left(z^2+1\right)}}{z-1}\,dz = 2\pi i \cdot \dfrac{1}{2\times 2} = \dfrac{\pi}{2} i$

例2 设区域D是圆环域，$f(z)$在D内解析，以圆环的中心为中心作正向圆周K_1与K_2，K_2包含K_1，Z_0为K_1, K_2之间任意一点.

试证：$f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_1^-+K_2}\dfrac{f(z)}{z-z_0}$仍成立



证明：

$\because F(z)=\dfrac{f(z)}{z-z_0}$在除$z_0$外均解析

作充分小圆周$K:|z-z_0|=r$

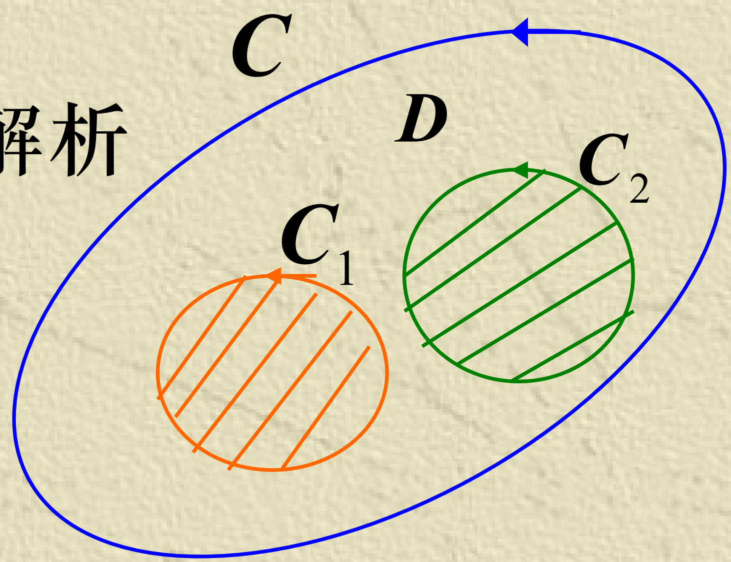
第五节 柯西积分公式

则$F(z)$在围线$\Gamma = K_2 + K_1^- + K^-$所围区域上解析。

由复合闭路定理：$\oint_{K_1^- + K_2} \dfrac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_K \dfrac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$

即 $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_{K_1^- + K_2} \dfrac{f(z)}{z - z_0} dz$

Cauchy积分公式推广：



设$f(z)$在D内及D的边界Γ上解析

$(\Gamma = C + C_1^- + C_2^-)$

则 $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \dfrac{f(z)}{z - z_0} dz$，

作业12题

解：$\because\ f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 在区域D内解析，

$\therefore\ \oint_C f(z)\,dz$与路经无关

$$\therefore\ \int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2}d\zeta = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{\theta_0} \frac{ie^{i\theta}d\theta}{1+(e^{i\theta})^2}$$

$$= \arctan 1 + i\int_0^{\theta_0} \frac{1}{e^{-i\theta}+e^{i\theta}}d\theta = \frac{\pi}{4} + i\int_0^{\theta_0} \frac{1}{2\cos\theta}d\theta$$

$$\therefore\ Re\left[\int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2}d\zeta\right] = \frac{\pi}{4}$$

第六节 解析函数的高阶导数

***Cauchy*积分公式** 在理论上提供了一个研究解析函数局部性质的理想工具，其最为显著的作用，就是证明了一个解析函数具有各阶导数，而各阶导数也必都解析的重要结论（实变函数无此性质）。

定理： 解析函数$f(z)$的导数仍为解析函数，它的n阶

导数为 $$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\,(n=1,2\cdots)$$

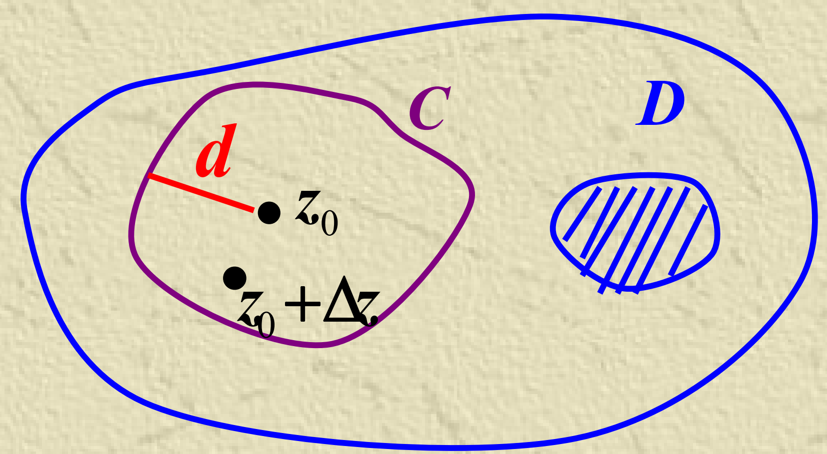
或 $$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

其中C为$f(z)$的解析区域D内围绕z_0的任何一条正向简单闭曲线，并且C的内部全含于D.

注意： 被积函数在C内只有一个奇点.

公式记忆方法： $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$

两边对z_0求n阶导.



证明： 先证$n=1$时成立，

（ 即证$f'(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$ ）

由定义$f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$

根据公式对C进行积分得:

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)dz}{z-(z_0+\Delta z)}-\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)dz}{z-z_0}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-\Delta z)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{(z-z_0-\Delta z+\Delta z)f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz+\frac{\Delta z}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)}dz$$

记 $I \overset{\Delta}{=} \dfrac{\Delta z}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)}dz$

其中 $|I| = \dfrac{|\Delta z|}{2\pi}\left|\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)}dz\right|$

$$\leq \frac{|\Delta z|}{2\pi}\oint_C \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^2|z-z_0-\Delta z|}ds$$

$\because f(z)$在C上解析 $\therefore f(z)$连续，从而有界。

即$\exists M>0$,使得在C上$|f(z)| \leq M$

设$d=\min\limits_{z\in C}|z-z_0|$ (z_0到C上最短距离)，且$|\Delta z|<\frac{1}{2}d$

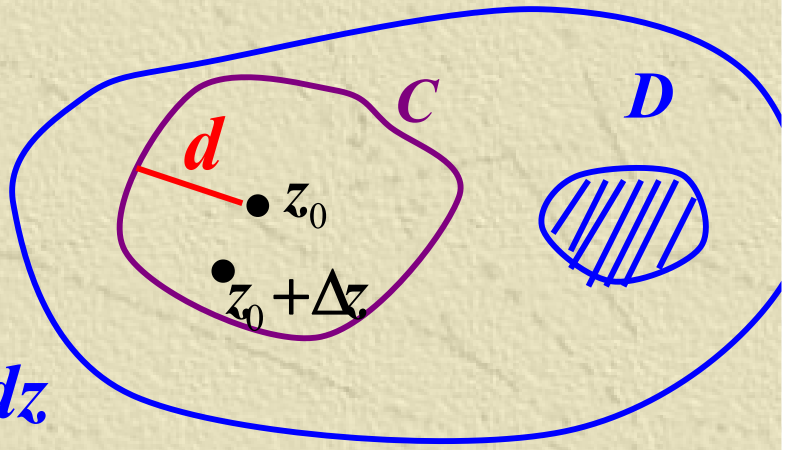
则 $|z-z_0|\geq d$, $\quad \dfrac{1}{|z-z_0|}\leq\dfrac{2}{d}$

$$|z-z_0-\Delta z|\geq|z-z_0|-|\Delta z|>\frac{d}{2},\quad \frac{1}{|z-z_0-\Delta z|}<\frac{2}{d}$$

$$\therefore |I|<\frac{|\Delta z|}{2\pi}\cdot\frac{2M}{d^3}\oint_C ds=|\Delta z|\frac{ML}{\pi d^3}$$

因而，当$\Delta z\to 0$时，$I\to 0$

从而$f'(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$



其次，同样方法可证明：$f''(z)=\dfrac{2!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz$

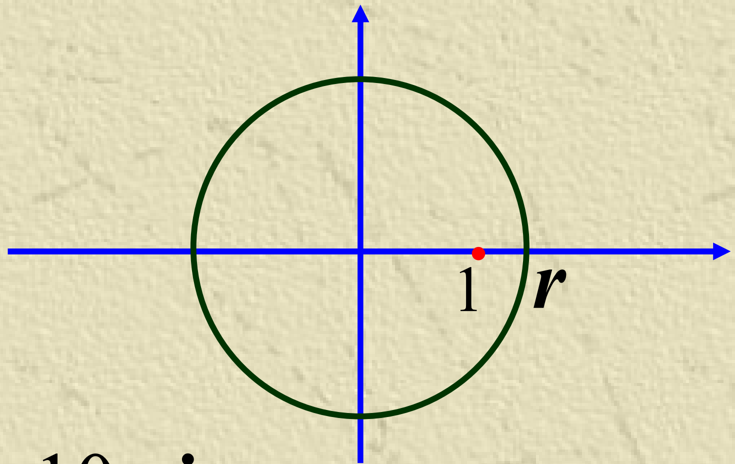
以下用归纳法即可证明结论的正确性.

注意： 此定理数说明：一个解析函数的任意阶导数仍解析.

例1 计算$\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz, C$是$|z|=r>1$的正向。

解： 显然$f(z)=5z^3-3z+2$在C内解析

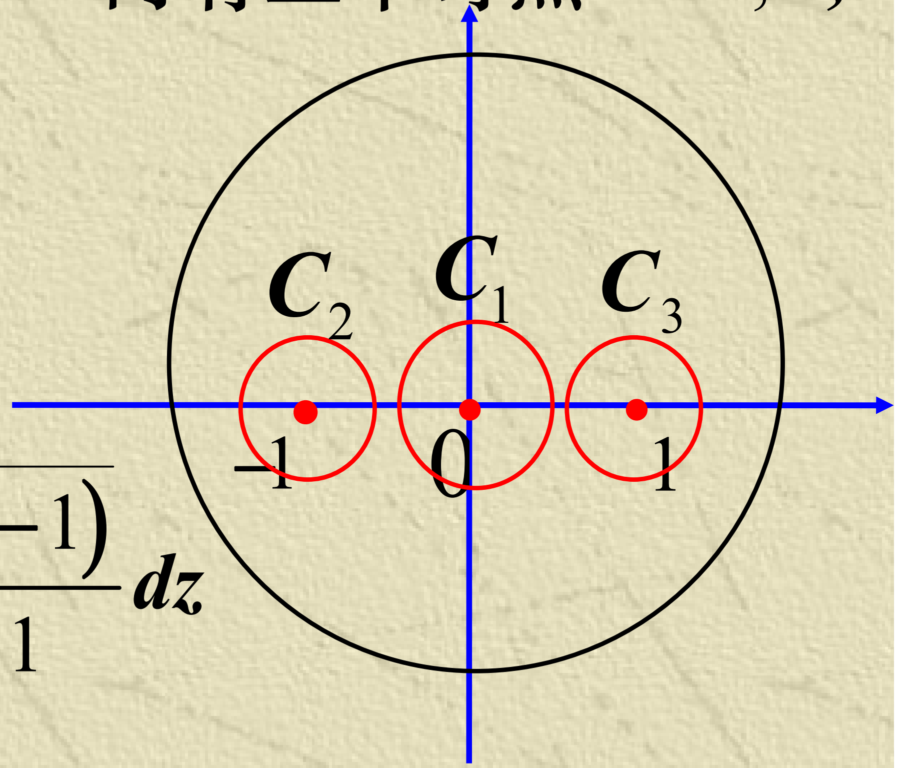
$z_0=1$是C内的点，$n=2$



$\therefore$ 原式$=\frac{2\pi i}{2!}f''(1)=\pi i\cdot 10=10\pi i$

例2 计算$\oint_{|z|=2}\dfrac{dz}{z^3\left(z^2-1\right)}$

解: $F(z)=\dfrac{1}{z^3\left(z^2-1\right)}$在$C:|z|=2$内有三个奇点$z=0,-1,1$



作三个小圆周C_1,C_2,C_3

则原式$=\oint_{C_1}\dfrac{\frac{1}{z^2-1}}{z^3}dz+\oint_{C_2}\dfrac{\frac{1}{z^3(z-1)}}{z+1}dz$

$+\oint_{C_3}\dfrac{\frac{1}{z^3(z+1)}}{z-1}dz$

$$=\frac{2\pi i}{2!}\cdot\left(\frac{1}{z^2-1}\right)''\Bigg|_{z=0}+2\pi i\cdot\frac{1}{z^3(z-1)}\Bigg|_{z=-1}+2\pi i\cdot\frac{1}{z^3(z+1)}\Bigg|_{z=1}$$

$$=\pi i\cdot(-2)+\pi i+\pi i=0$$

另一种解法: $\because \dfrac{1}{z^3(z^2-1)}=-\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1/2}{z-1}+\dfrac{1/2}{z+1}$

$$\therefore \oint_C\frac{1}{z^3(z^2-1)}dz=\oint_C\left(-\frac{1}{z}\right)dz+\oint_C\left(-\frac{1}{z^3}\right)dz$$

$$+\oint_C\frac{1/2}{z-1}dz+\oint_C\frac{1/2}{z+1}dz=0$$

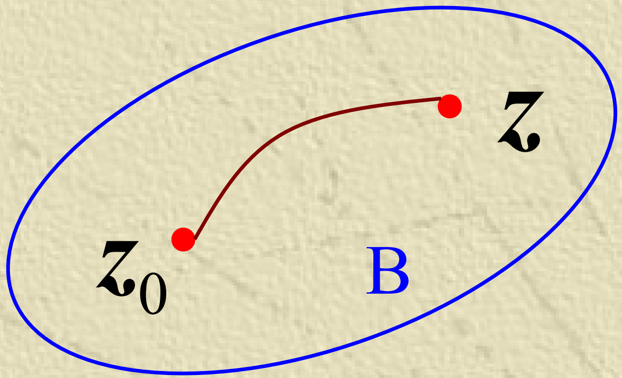
例3（*Cauchy*基本定理的逆定理：Morera摩勒拉）

$f(z)$在单连通区域B内连续，且对于B内任意简单闭曲线C都有$\oint_C f(z)dz=0$

证明：$f(z)$在B内解析.

此定理给出了判别解析的另一充要条件.

证明： 在B内取定点$z_0 \in B$,



则$\forall z \in B$,由$\oint_C f(z)dz = 0$知,

$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$是与路径无关的单值函数

且与第四节定理2同样的证法，得$F'(z) = f(z)$

即$F(z)$解析.

又由高阶导定理知：$F'(z)$解析$\Leftrightarrow f(z)$解析

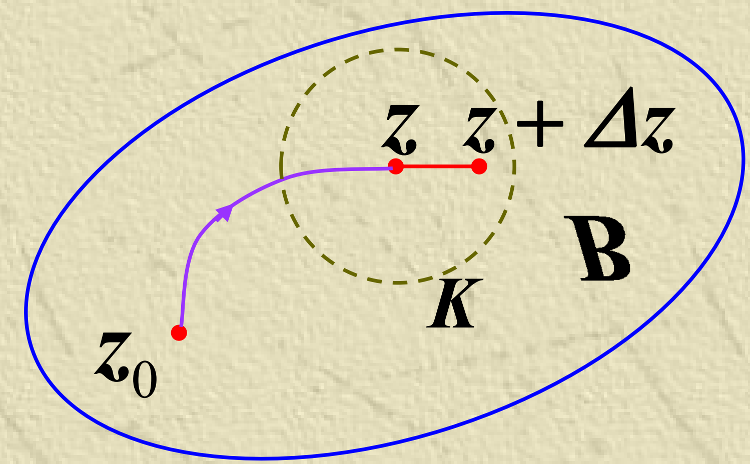
定理2： 若$f(z)$在单连通区域B内处处解析，

则 $F(z)$也在B内解析，并且$F'(z)=f(z)$

$$\left(\text{分析：只要证：}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)\right)$$

证明：

$\forall z\in B$,



以z为中心作小圆K包含于B内，且$z+\Delta z\in K$

则 $$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z_0}^{z+\Delta z}f(\zeta)d\zeta-\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta\right]$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}f(\zeta)d\zeta$$

$$\therefore\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z}^{z+\Delta z}f(\zeta)d\zeta-\int_{z}^{z+\Delta z}f(z)d\zeta\right]\right|=\frac{\left|\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta\right|}{|\Delta z|}$$

又$f(z)$在B内解析，

故在B内连续$\left(\lim\limits_{\zeta\to z}f(\zeta)=f(z)\right)$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \left(\delta < R\right), \text{ 当} \left|\zeta - z\right| < \delta \text{时,}$$

$$\left|f\left(\zeta\right) - f\left(z\right)\right| < \varepsilon$$

故: $$\left|\frac{F\left(z + \Delta z\right) - F\left(z\right)}{\Delta z} - f\left(z\right)\right| = \frac{\left|\int_z^{z+\Delta z}\left[f\left(\zeta\right) - f\left(z\right)\right]d\zeta\right|}{\left|\Delta z\right|}$$

$$\leq \frac{1}{\left|\Delta z\right|}\int_z^{z+\Delta z}\left|f\left(\zeta\right) - f\left(z\right)\right|ds \leq \frac{1}{\left|\Delta z\right|} \cdot \varepsilon \cdot \left|\Delta z\right| = \varepsilon$$

即 $$\lim_{\Delta z \to 0}\frac{F\left(z+\Delta z\right) - F\left(z\right)}{\Delta z} = f\left(z\right), \qquad F'\left(z\right) = f\left(z\right)$$

第七节　解析函数与调和函数的关系

调和函数: 设$\varphi(x,y)$在区域D内有二阶连续偏导，

且满足*Laplace*方程: $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$

则称$\varphi(x,y)$为区域D内的调和函数

共轭调和函数: 设$u(x,y),v(x,y)$是区域D内的调和函数　且$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$

则称$v(x,y)$是$u(x,y)$的共轭调和函数.

注意: $u(x,y)$不一定是$v(x,y)$的共轭调和函数,

$$(\text{除非}\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y})$$

定理(调和函数与解析函数的关系):

若$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域D内解析,

则 1° $u(x,y)$与$v(x,y)$都是D内的调和函数

2° $v(x,y)$是$u(x,y)$的共轭调和函数

证明: 1° $\because f(z)=u+iv$在D内解析

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\quad(1)$$

从而 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\qquad\left(\because \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)$$

同理得 $$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

2° 由(1)式说明: $v(x,y)$是$u(x,y)$的共轭调和函数.

注意： 1°的反之不一定成立

2°的反之成立

下面通过例子，给出怎样从一个调和函数构造解析函数.

例1 证明$u(x,y)=y^3-3x^2y$为调和函数，并求其共轭调和函数$v(x,y)$和由它们构成的解析函数.

证明: 1) $\because \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y \quad \therefore \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

故$u(x,y)$为调和函数

2)法一: 由$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy,$

得$v=\int -6xydy=-3xy^2+\varphi(x)$

又 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 即$-3y^2+\varphi'(x)=-3y^2+3x^2$

从而得 $\varphi'(x)=3x^2 \quad \therefore \varphi(x)=x^3+c$

从而 $\mathrm{v}(x,y)=-3xy^2+x^3+c$

得到一个解析函数 $W=y^3-3x^2y+i\left(-3x^2y+x^3+c\right)$

令$z=x+iy$, 可化为$W=f(z)=i\left(z^3+c\right)$

法二: 设$u(x,y)$的调和函数为$v(x,y)$

则$W=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$解析

故 $f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y=-6xy-i\left(3y^2-3x^2\right)$

$$=3i\left(x^2-y^2+i\cdot 2xy\right)=3iz^2$$

$$\therefore f(z)=iz^3+c_1=i\left(z^3+c\right)$$

例2 已知一调和函数$v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$,求一解析函数

$f(z)=u+iv$,使得$f(2)=0$

解: $\because f'(z)=u_x+iv_x=v_y+iv_x$

$$=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+i\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2-2xyi}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(\bar{z})^2}{(z\cdot\bar{z})^2}=\frac{1}{z^2}$$

$\therefore f(z)=-\dfrac{1}{z}+c$ 又 $f(2)=0$,

故$-\dfrac{1}{2}+c=0$ $\therefore c=\dfrac{1}{2}$ 从而有 $f(z)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{z}$