

半管滑雪场地模型设计

成文君¹, 赵丹², 东栋¹

(1. 西安交通大学理学院数学系, 陕西 西安 710049; 2. 西安交通大学软件学院, 陕西 西安 710049)

摘要: 建立了半管滑雪场地的优化模型, 以提高运动员的腾空高度并完成更多复杂的技巧动作. 主要分析了运动员在半管场地的曲型过渡滑道上的运动情况, 包括摩擦力做功, 能量转化等因素. 这些因素都决定了运动员的起飞速度和腾空时间. 在传统场地的设计中存在一定的缺陷, 针对这些问题, 模型首先采用与滑雪板长度相近的垂直滑道连接在过渡滑道上, 又考虑到速度会受摩擦力的影响, 为槽的长度, 过渡轨道的弧度设定了适合的值, 以尽量减少运动员的动能损失, 从而保证足够大的腾空高度和缓冲地带长度以调整运动员的姿势来保持平衡.

关键词: 半管滑雪场地; 腾空时间; 起飞速度; 滑道; 牛顿第二定律

中图分类号: O29 **文献标识码:** A **文章编号:** 1008-5513(2011)04-0544-06

1 引言

滑雪竞赛是一项冬季极限运动, 场地主要包括雪覆盖的斜坡, 运动员在雪地上通过滑行完成比赛. 其中, 半管滑雪是集合竞技性与观赏性的一项冬季运动会运动项目. 半管滑雪的场地是一个 U 型雪槽, 滑雪者通过从与 U 型管相连接的助滑道滑入, 以一定的初速度到达 U 型管边缘, 之后运动员在槽中进行往返滑行, 当其每次滑离 U 型管的边缘后可在空中做出翻转, 弹跳等动作以完成表演.

在如何通过设计半管场地以增加滑雪运动员的比赛表现力的方面, 目前尚无较深入的研究. 本文建立模型对半管场地的雪槽进行改善设计, 在考虑运动员的表现的稳定性以及运动的观赏性等前提条件下, 使得运动员腾空距离尽可能高, 表演更具有观赏性.

2 模型建立与求解

半管滑雪场地的形状如图 1^[1] 所示.

图 1 中 Flat 表示水平滑道, Transitions 表示过渡滑道, Vertical 表示垂直滑道, Platform 表示边侧平台, Entry Ramp 表示助滑道.

总体假设:

1) 不考虑风阻力;

收稿日期: 2008-02-10.

基金项目: 国家自然科学基金 (10671155).

作者简介: 成文君 (1989-), 研究方向: 数学模型.

- 2) 假设模型中运动员技术娴熟, 暂不考虑安全问题;
- 3) 运动员不会停留在槽上侧平台 (Platform), 而是在冲出半管向上滑行时只接触槽内侧边缘 (Lip);
- 4) 运动员在滑行助滑道后进入 U 型管时, 总保持恒定的初速度。

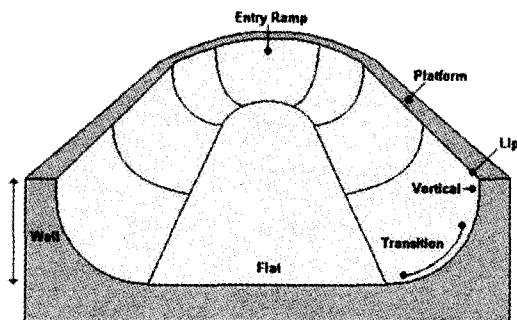


图 1 半管滑雪场地示意图^[1]

2.1 模型设计

在半管滑雪运动员表演时, 运动员沿着空中的抛物线运动轨迹进行翻转, 旋转或扭转. 运动员的腾空高度制约了其动作的难度系数, 观赏性以及可行性. 完成技巧动作的成功与否取决于运动员的腾空时间.

本文基于牛顿经典力学和微积分知识, 首先建立无倾角的半管场地模型, 同时假设过渡区域为半圆, 对运动员进行受力分析得到其运动轨迹, 综合摩擦力做功以及动能受损等因素得出过渡区域半径与出槽速度的关系. 在这个基础上, 又考虑了有倾角的情况, 倾角的增加不仅增大了运动员进入滑道的初速度, 并且在相同条件下增加了运动员的腾空时间, 为运动员完成更精彩的表演创造了先决条件.

尽管雪与滑雪板之间的摩擦系数很小, 但摩擦力仍在一定幅度上减缓了运动员的速度并最终降低腾空高度. 因此, 从理论来讲, 将中间水平滑道去掉可使运动员在比赛中发挥更好.

对于运动员在管道中的运动情况进行分析, 由牛顿第二定律和定积分得出曲率半径越大, 摩擦力越小. 故模型必须设计一个曲率半径最小的半管从而使摩擦力尽可能小, 这将尽可能减少运动员的动能转化并增大运动员的腾空高度. 并且, 通过分析可得当半管的过渡滑道为半圆形时动能的消耗最小.

同时, 适宜的垂直滑道长度是设计高质量比赛场地中不可缺少的部分, 高度不足带来以下两个问题:

- 1) 运动员没有足够的缓冲时间为飞行路线选择最佳起跳点和调整起跳角度, 从而影响了在空中的动作表现力.
- 2) 考虑滑雪板的长度和弹性, 如果垂直滑道的长度远小于滑雪板的长度, 当运动员的速度很高时, 即使技术高超的运动员也会由于巨大的离心力而难以保持平衡.

2.1 无倾角的场地模型

首先我们根据半管的横截面示意图 2 对滑板运动员进行受力分析, 运动员在曲线轨道上运动产生向心加速度 v 产生的向心力 $F_{\text{向}}$, 最终受重力, 轨道支持力 $F_{\text{支}}$ 和摩擦力 $F_{\text{摩}}$ 三力合成产生沿运动方向的合力 $F_{\text{合}}$:

$$\begin{cases} F_{\text{向}} = m \frac{v^2}{r}, \\ F_{\text{支}} = mg \cos \theta + F_{\text{向}}, \\ F_{\text{摩}} = \mu F_{\text{支}}, \\ F_{\text{合}} = -F_{\text{摩}} - mg \sin \theta. \end{cases} \quad (1)$$

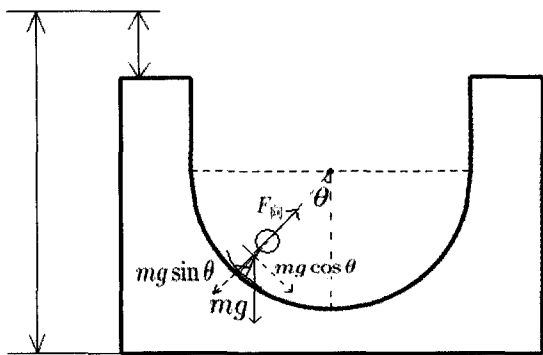


图 2 半管的横截面示意图

其中,

m 为运动员的质量;

g 为重力加速度;

μ 为滑板与雪地之间的动摩擦系数;

h 为运动员腾空后与地面的垂直距离 (即优化的目标值);

θ 为运动半径和垂直方向夹角, 定义域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;

r 为运动轨迹光滑曲线的曲率半径;

s 为滑板运动员的运动轨迹长度;

E 为运动员的瞬时动能.

将方程组 (1) 合力推导结果代入功率公式可知, 运动员的瞬时功率 dE 等于合力与瞬时速度 (也就是运动员的运动轨迹微分) 的乘积:

$$dE = F_{\text{合}} ds = -mg \sin \theta ds - \mu mg \cos \theta ds - \mu \frac{mv^2}{r} ds. \quad (2)$$

由动能公式 $\frac{1}{2}mv^2 = E$ 和运动轨迹与速度方向关系公式 $r = \frac{ds}{d\theta}$ 带入公式 (2), 得:

$$\begin{cases} \frac{dE}{d\theta} + 2\mu E = -mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)\frac{ds}{d\theta}, \\ E = E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2, \text{当}\theta = -\frac{\pi}{2}\text{时}, \end{cases} \quad (3)$$

解微分方程组 (3), 得:

$$Ee^{2\mu\theta} - E_0e^{-\mu\pi} = -\int_0^S e^{2\mu\theta} mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)ds. \quad (4)$$

由简化模型场地可知轨道截面为半圆形, 由 $ds = \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2}d\theta$ 和在任意时刻 $r'(\theta) = 0$ 代入结果 (4), 得到如下等式:

$$Ee^{2\mu\theta} - E_0e^{-2\mu\theta_0} = -\int_{\theta_0}^{\theta} e^{2\mu\theta} mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)r d\theta,$$

将

$$\frac{1}{2}mv^2 = E \text{ 和 } \frac{1}{2}mv_0^2 = E_0$$

回代入该结果, 得

$$\frac{1}{2}mv^2 e^{\mu\pi} - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{mgr}{4\mu^2 + 1}(e^{\pi\mu} + 1)(2\mu + 1).$$

假设运动员脱离轨道瞬间的动能完全转化为重力势能, 即 $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$, 代入上式, 得

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{r}{4\mu^2 + 1}(e^{\pi\mu} + 1)(2\mu + 1),$$

其中 h 为腾空高度与场地高度之和, 由模型目标可知, 设计模型的目的是使 h 尽可能大. 而由最终的表达式结果可知, 过渡滑道的半径 r 越大, h 越小, 即 h 是关于 r 的单调递减函数, 因此, 想获得更高的腾空高度, 应在保证运动员能够及时调整平衡的前提下尽量降低过渡滑道的半径.

2.3 有倾角的场地模型

上文提出的场地模型的滑道是建立在水平面上的, 然而在实地比赛中, 为了使运动员在空中获得更多的腾空时间, 半管都建立在斜坡场地上. 斜坡可以增大运动员进入半管后的初速度, 同时使运动员在往返过程中获得额外的加速度支持.

合适的倾斜角对于场地设计十分关键. 若倾斜角过大, 陡峭的斜坡使得运动员腾空时间过长, 反而使运动员难以在落地时保持平衡和完成其他复杂动作; 若倾斜角过小, 则会制约运动员腾空高度及演出效果. 完整的倾角场地透视图如图 3 所示.

为进一步分析场地倾斜角对运动员腾空高度的影响, 将运动员在半管中纵截面运动轨迹进行截图, 并对运动员在倾角为 α 的轨道内的运动轨迹进行受力分析. 之前的模型没有考虑运动员弹跳、扭曲等在空中其他动作. 然而这些动作都是评价运动员表现的重要标准. 运动员提高空中动作的质量, 主要通过抓板、转动等. 转动可视为一项自由度极高的身体旋转, 但这势必大幅度增加解决问题的难度. 因此, 本文选择简化空中运动, 将人体视为一个柱形刚体, 围绕身体中轴转动. 运动员的腾空飞行轨迹是抛物线. 半管轨道纵截面的运动轨迹如图 4 所示.

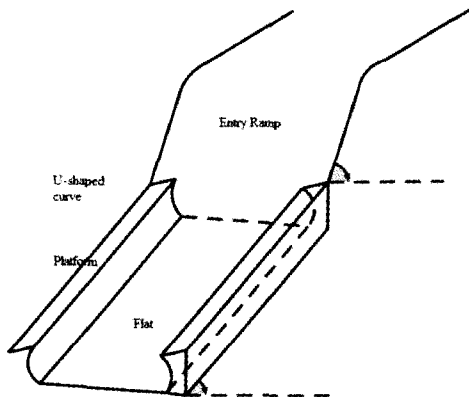


图 3 半管场地的透视视图

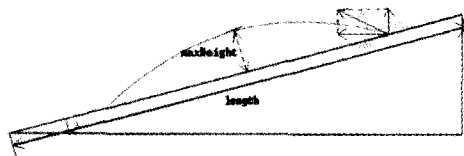


图 4 半管轨道的纵截面图

设 a 为轨道倾角, θ 为运动员在轨道内侧与轨道内垂线的夹角, F_f 为运动员在轨道内收到的摩擦力, F_x 为运动员沿弧形轨道截面方向的合力, F_y 为运动员沿轨道下滑坡度方向的合力, 根据牛顿第二定律得到以下方程组:

$$\begin{cases} F_f = \mu[m\omega^2 r + mg \cos a \cos \theta], \\ F_x = -\frac{gr}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} F_f - mg \cos a \cos \theta, \\ F_y = -\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} F_x + mg \sin a. \end{cases}$$

上述受力分析的微分方程组的推导结果将直接决定该模型运动员的腾空高度, 通常可求出该方程的数值解, 但由于求解如上方程组的复杂性, 我们无法直接求得方程的精确解.

2.4 其它影响运动员表演结果的外界因素

通过进一步的讨论, 还有其他一些在基础模型中未涉及到而会影响运动员比赛的因素, 例如不同类型的单板滑雪板, 雪质, 雪地的平整度等.

滑雪场的雪质分为新雪, 干雪, 湿雪和冰. 不同种类雪质的摩擦因数不同, 其中干雪的摩擦系数较大, 适合滑雪运动. 尽管新雪的摩擦系数是最大的, 然而新雪难以保存, 大多数的滑雪场使用干雪. 建议发展新的滑雪材料, 使得该种雪质即容易保存, 又有足够大的摩擦系数来满足运动员的需求. 摩擦系数过小会导致运动员难以控制自己的运动轨迹, 易发生危险, 尤其对于新手. 所以摩擦系数越大安全系数就越高, 然而过高的摩擦系数会阻碍运动员的滑行.

半管滑雪运动是一种平衡运动, 滑雪场地的不平整必然会给运动员带来负面影响, 如会使运动员失去平衡, 从而浪费大量时间来调整姿势, 甚至会影响运动员的下一个动作的发挥. 因此, 为了避免场地因素给运动员带来的体力消耗, 也为了营造一个公平的比赛环境, 半管滑雪场地应使雪面尽可能得平整.

3 模型评价

(1) 模型优势.

该模型可使运动员在空中的垂直距离达到最高。该模型要求水平滑道的长度为零, 并将过渡滑道视为半圆。由仿真结果可以看到, 半圆确实是最佳选择。

将人体看作刚体, 分析运动员在腾空时的扭转运动, 证明空中扭转并不影响腾空高度。

利用物理知识和微积分, 建立了数学模型并求得了解析解。得到了半管场地设计的结论。该模型较成功的满足了提高运动员腾空高度的需求。

利用物理知识和微积分, 建立了数学模型并求得了解析解。得到了半管场地设计的结论。该模型较成功的满足了提高运动员腾空高度的需求。

(2) 模型劣势

本文没有将风速对运动员的影响考虑进去。对于不同的地区风速是不同的。高水平选手可利用风向来控制速度以提高比赛成绩, 因此大型比赛中会采取一定措施以减少风速对运动员的影响从而保证比赛的公正性。

参考文献

- [1] ABC-of-Snow-Boarding. The snow boarding half pipe[EB/OL].(2010-9-13)[2007-04-10] <http://www.abc-of-snowboarding.com/snowboardinghalfpipe.asp>.
- [2] Timothy A, Vanderpoel B S. Design of a Snowboard Simulating Exercise Device[J]. Mechanical Engineering, 2003(2):231-234.
- [3] 肖宁宁, 高俊. 单板 U 型场地滑雪项目技术动作的特征研究 [J]. 冰雪运动, 2009(6):754-759.
- [4] 杨春怀, 张连涛, 刘贵宝, 等. 单板 U 型场地滑雪运动夏季专项化训练方法研究 [J]. 冰雪运动, 2009(6):801-808.
- [5] 王葆衡. 对 U 型场地单板雪上技巧项目基础滑行和飞起高度的思考 [J]. 沈阳体育学院学报 2005(2):212-215.

The design of half-pipe snowboarding field model

CHENG Wen-jun¹, ZHAO Dan², DONG Dong¹

(1. Department of Mathematics, College of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. College of Software, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: This paper propose a series of optimal designs of the snowboarding courses which will help the players gain more height and finish more complex movements in air. In this optimization model, we mainly focused on the smooth curve-shaped part of half-pipe, which consists of friction loss, the conversion of gravitational potential energy during slides and etc. All of these factors will necessarily affect player's take-off velocity and flight time. In order to solve these problems, the new models in which we conclude that the use of vert ensure slide out of the ditch, and the length of vert and snowboard should are same. Allow for effects on speed by friction, we set proper values for ditch's length and transition sideways's radius to minimize the loss of player's kinetic energy, and thereby guaranteeing sufficiently high speed and create enough large cushion area, which spare time for player to adjust body gesture and maintain his own balance.

Key words: half-pipe snowboarding filed, flight time, take-off velocity, slipway, the second Newtonian law

2000 MSC: 03C65

作者: 成文君, 赵丹, 东栋
作者单位: 西安交通大学理学院数学系, 陕西西安, 710049
刊名: 纯粹数学与应用数学
英文刊名: Pure and Applied Mathematics
年, 卷(期): 2011, 27 (4)

参考文献(5条)

1. [ABC-of-Snow-Boarding The snow boarding half pipe](#) 2010
2. [Timothy A;Vanderpool B S Design of a Snowboard Simulating Exercise Device](#) 2003 (02)
3. [肖宁宁;高俊 单板U型场地滑雪项目技术动作的特征研究](#)[期刊论文]-[冰雪运动](#) 2009 (06)
4. [杨春怀;张连涛;刘贵宝 单板U型场地滑雪运动夏季专项化训练方法研究](#)[期刊论文]-[冰雪运动](#) 2009 (06)
5. [王葆衡 对U型场地单板雪上技巧项目基础滑行和飞起高度的思考](#)[期刊论文]-[沈阳体育学院学报](#) 2005 (02)

本文读者也读过(10条)

1. [秦榜明. QIN Bang-ming 平曲线设计在二级公路改扩建工程中的应用](#)[期刊论文]-[山西建筑](#)2007, 33 (15)
2. [刘利民 自由式滑雪空中技巧的参数测试与分析系统研究](#)[学位论文]2011
3. [马红军. 张连杰. 潘洪健 亚布力滑雪场K125雪道辅道扩建工程设计](#)[期刊论文]-[黑龙江水利科技](#)2011, 39 (1)
4. [纪冬. 闫红光. 徐囡囡 2007-2008赛季国家自由式空中技巧滑雪队情况分析与备战2010冬奥会对策研究](#)[期刊论文]-[沈阳体育学院学报](#)2010, 29 (1)
5. [李镇山. LI Zhenshan 基于MasterCAM的非圆曲线设计加工与校验](#)[期刊论文]-[新技术新工艺](#)2011 (2)
6. [李军艳. LI Jun-yan 冬奥会自由式滑雪空中技巧夺金动作难度和质量的关系](#)[期刊论文]-[冰雪运动](#)2009, 31 (1)
7. [周进雄. 王学明. 张智谦. 张陵 形状设计灵敏度分析的无网格法](#)[会议论文]-2004
8. [扑翼飞行器机翼平面形状设计方法研究](#)[期刊论文]-[飞行力学](#)2009, 27 (5)
9. [崔彦平. 傅其凤. 刘玉秋. 太军君 基于NURBS方法的复杂叶片形状设计](#)[期刊论文]-[现代制造工程](#)2003 (8)
10. [苏永骏. 黄贵 滑雪保险研究](#)[期刊论文]-[体育文化导刊](#)2009 (6)

本文链接: http://d.wanfangdata.com.cn/Periodical_ccsxyysx201104017.aspx