

## 2011 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

### 承 诺 书

我们仔细阅读了中国大学生数学建模竞赛的竞赛规则.

我们完全明白, 在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式(包括电话、电子邮件、网上咨询等)与队外的任何人(包括指导教师)研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道, 抄袭别人的成果是违反竞赛规则的, 如果引用别人的成果或其他公开的资料(包括网上查到的资料), 必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺, 严格遵守竞赛规则, 以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为, 我们将受到严肃处理。

我们参赛选择的题号是(从 A/B/C/D 中选择一项填写):         B        

我们的参赛报名号为(如果赛区设置报名号的话):         J2141        

所属学校(请填写完整的全名):         西安电子科技大学        

参赛队员(打印并签名): 1.         张志豪        

2.         陆杨柳        

3.         高小青        

指导教师或指导教师组负责人(打印并签名):         教练组        

日期:     2011    年   9  月   12  日

---

赛区评阅编号(由赛区组委会评阅前进行编号):

## 2011 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

### 编 号 专 用 页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评 分										
备 注										

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

# 交巡警服务平台的设置与调度

## 摘要

本文根据图论中的相关理论,将该城市交通网络抽象为无向图。综合考虑了时限约束、出警时间、巡警平台的均衡度、巡警平台的覆盖率以及发案率等指标,建立了相应的数学规划模型,并利用瞎子爬山法、匈牙利算法、二分答案法、最小费用最大流、深度优先搜索等最优化方法对相应的模型进行了求解,经最后的数据分析,验证了所得平台分配方案的合理性以及最佳封锁围堵策略。

针对问题一,以交巡警尽量在 3 分钟内到达交通路口为约束条件,以各巡警平台的工作量不均衡度最小为目标函数建立规划模型。运用瞎子爬山算法,给各交巡警服务平台分配管辖范围。同时得出在这种分配情况下,工作量不均衡度为  $S=2.908$ 。

要实现对 13 条交通要道的快速封锁,本问使用匈牙利算法求二分图的最大匹配,利用二分时间法得到全封锁的最短时间  $t=8.015\text{ min}$ 。对于以最短时间为条件下的多种匹配方案,使用最小费用最大流方法,来确定平均耗时最小的封锁方案,求解得到最小的平均耗时为 3.480 分钟。

针对城区 A 的不合理情况,以减少出警时间为主要目标,分析城区 A 的出警时间,得出有 6 个路口不能在 3 分钟之内到达。以工作量尽量均衡为次要目标,利用问题一第(1)问建立的模型和瞎子爬山算法算出分别增加 2 至 5 个平台时,对应的出警时间和工作量不均衡度。从中选出最优方案,求解得出应增加 4 个交巡警平台,具体增加路口有多种方案,本文给出其中一种设置在 28, 40, 48, 90 路口的分配方案。

针对问题二,首先从多个方面分析现有的全市交巡警服务平台设置方案,以发案率接近程度,交巡警平台覆盖率,工作量不均衡度作为三个评价指标。以工作量不均衡度最小为目标,针对该市出警时间过长,工作量不均衡提出一个再增加 20 个交巡警服务平台的方案,增加平台后的不均衡度从 12.00 优化到 4.08。

为了找出最佳围堵方案,利用基于 hash 表与邻接表优化的深度优先搜索算法找出犯罪嫌疑人所能够到达的安全路口,以包围嫌疑犯能够逃到的路口的节点为最佳堵截方案。得出的围堵方案如下表,所需要的时间是 17.5min。

调度的交巡警平台	2	3	3	4	4	5	5	5	11	14	15
要围堵的路口	40	3	55	4	60	49	50	59	26	14	28
调度的交巡警平台	15	16	16	171	171	173	173	173	173	167	
要围堵的路口	29	38	560	240	246	232	233	235	236	248	

关键词: 瞎子爬山法 匈牙利算法 二分答案法 最小费用最大流 深度优先搜索

## 一、 问题重述

警察肩负着刑事执法、治安管理、交通管理、服务群众四大职能。为了更有效地贯彻实施这些职能，需要在市区的一些交通要道和重要部位设置交巡警服务平台。每个交巡警服务平台的职能和警力配备基本相同。由于警务资源是有限的，如何根据城市的实际情况与需求合理地设置交巡警服务平台、分配各平台的管辖范围、调度警务资源是警务部门面临的一个实际课题。

本文就某市设置交巡警服务平台的相关情况，建立数学模型分析研究下面的问题：

### 1.1 问题一

(1)附件 1 中的附图 1 给出了该市中心城区 A 的交通网络和现有的 20 个交巡警服务平台的设置情况示意图，相关的数据信息见附件 2。请为各交巡警服务平台分配管辖范围，使其在所管辖的范围内出现突发事件时，尽量能在 3 分钟内有交巡警（警车的时速为 60km/h）到达事发地。

(2)对于重大突发事件，需要调度全区 20 个交巡警服务平台的警力资源，对进出该区的 13 条交通要道实现快速全封锁。实际中一个平台的警力最多封锁一个路口，请给出该区交巡警服务平台警力合理的调度方案。

(3)根据现有交巡警服务平台的工作量不均衡和有些地方出警时间过长的实际情况，拟在该区内再增加 2 至 5 个平台，请确定需要增加平台的具体个数和位置。

### 1.2 问题二

(1)针对全市（主城六区 A, B, C, D, E, F）的具体情况，按照设置交巡警服务平台的原则和任务，分析研究该市现有交巡警服务平台设置方案（详见附件）的合理性。如果有明显不合理，请给出解决方案。

(2)如果该市地点 P（第 32 个节点）处发生了重大刑事案件，在案发 3 分钟后接到报警，犯罪嫌疑人已驾车逃跑。为了快速搜捕嫌疑犯，请给出调度全市交巡警服务平台警力资源的最佳围堵方案。

## 二、 问题分析

### 2.1 问题一的分析

对于问题（1），主要是考虑 A 区的 20 个交巡警服务平台分配管辖范围，为了尽量在 3 分钟内有交巡警到达事发地，并考虑发案率对工作量的影响。本文首先考虑以交巡警服务平台到达交通要道的时间在 3 分钟内为约束条件，给交巡警服务平台确定可达的交通要道。随后，以各服务平台不均衡度最小为目标建立模型。使用瞎子爬山算法求解得出 A 区交巡警服务平台的管理方案。

对于问题（2），要实现对 13 条交通要道的快速全封锁，即要使 20 个交巡警服务平台匹配到 13 条交通要道中所耗的最长时间尽可能的达到最短，使用匈牙利算法求二分图的最大匹配，通过二分时间得到封锁的最短时间。对于最短时间对应的多种匹配方案，使用最小费用最大流，来确定耗时总和最小的封锁方案。

对于问题（3），由于在问题（1）中，确定有 6 个交通要道是不可能 3 分钟内有

交警到达的，我们以尽量使所有路口 3 分钟内有交警到达为首要目标，确定增加的交巡警平台。利用问题（1）建立的模型，用枚举法枚举位置，求出不均衡总和尽可能最小为目标，来确定增加 2 至 5 个平台的位置。并给出增加平台后 A 区警力的调度方案。

## 2.2 问题二的分析

对于问题（1），要求研究该市现有交巡警服务平台的设置方案的合理性并给出解决方案。首先我们从现有设置方案中分析各个区域的路口数，平台数、平均各路口的发案率，平均每万人所拥有的平台数之间的关系，分析他们的和合理性。随后，我们建立三个指标综合分析现有交巡警服务平台的设置方案的缺陷。指标一：各区平均发案率尽可能均衡。指标二：交巡警平台覆盖率最大，即在 3 分钟内，有交巡警到达的道路数占总到路数的比值最大。指标三：各区各管辖平台的工作量应尽可能均衡，即方差  $S$  最小。建立模型尽可能满足上述三个指标。

对于问题（2），要求给出一个最佳的围堵方案，我们考虑犯罪嫌疑人在警车到达之前所能够到达的路口，这些路口对犯罪嫌疑人来说视为安全路口。凡是不安全路口，警车都能在犯罪嫌疑人到达之前到达。只要警车能够包围他的安全路口，就能围堵住犯罪嫌疑人，则寻找到了最佳围堵方案。具体能够安全逃到的路口可以利用基于 *hash* 表与邻接表优化的深度优先搜索的方式求出。

## 三、 模型假设

- 1、假设城区所有道路畅通无阻；
- 2、假设相邻两个交叉路口之间的道路为直线。
- 3、假设所有的事发现场均在交叉路口。
- 4、如果交巡警能在 3min 内到达路口，则认为交巡警平台到路口速度很快。能够及时的处理交通事故。
- 5、警车在所有位置的速度都是 60km/h，不受到道路的弯曲度等其他因素的影响。
- 6、安排交巡警的管辖范围后，交巡警只管辖他的管辖范围内的交通事故。不管辖超过他的管辖范围的交通事故。
- 7、假设犯罪嫌疑人的速度和警车的速度相近。
- 8、在追缉嫌疑人过程中，所有交巡警平台都能提供及时围堵的警车。

## 四、 符号说明

$X_i$	工作量
$b_i$	第 $i$ 路口受第 $b_i$ 个交巡警服务台管制
$S$	不均衡度
$V_{巡}$	交巡警平台构成的点集

$e(i, j)$	第 <i>i</i> 巡警平台与第 <i>j</i> 路口的边
$p_i$	第 <i>i</i> 路口的发案率
$x_1, x_2, \cdots x_{20}$	20 个交巡警服务平台
$y_1, y_2, \cdots y_{13}$	13 个交通要道
$m_i$	交巡警服务平台到路口 <i>i</i> 的最短距离
$t_i$	一个交巡警平台能围堵住一个路口所用最短时间
$v_{\text{犯}}$	犯罪嫌疑人逃跑的速度

## 五、 A 区交巡警服务平台设置与调度（问题一）

### 5.1 相关数据处理

首先，根据附图 1，提取 A 区全体交叉口坐标，起始点编号，终止点编号，按编号得其对应坐标。据此，可绘得 A 区道路交叉路口详细信息如下图所示：

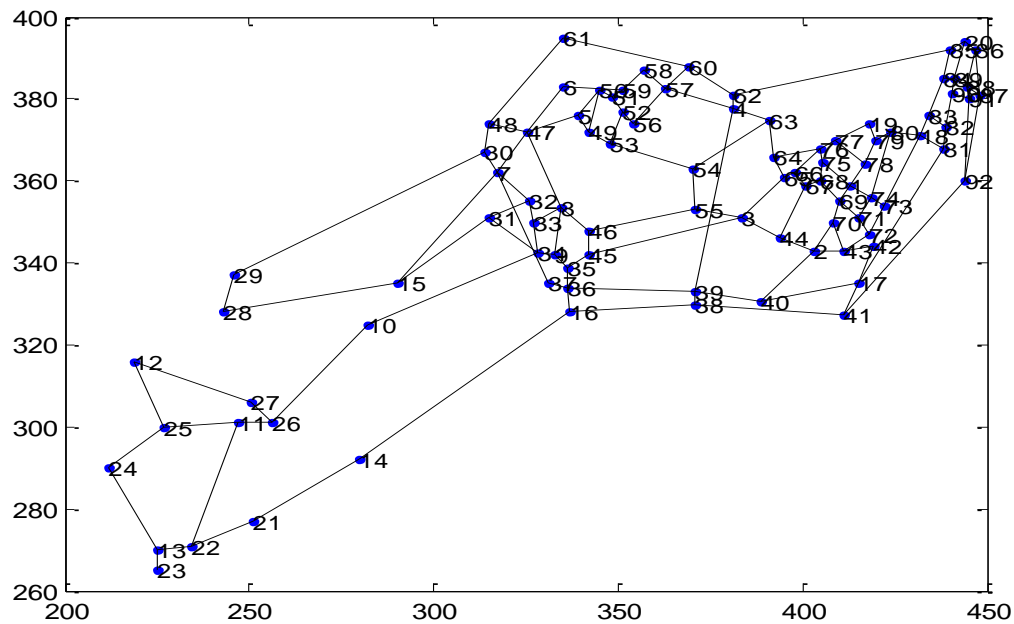


图 1 A 区交叉路口信息详细图

从附录中读取全市交通路口的路线，用邻接表存储。用弗洛伊德算法（*Floyd*）算出每一巡警平台到各道路口的最短路径。

**Step 1:** 赋初值：对所有  $i, j$ ,  $d(i, j) \leftarrow w(i, j)$ ,  $r(i, j) \leftarrow j$ ,  $k \leftarrow 1$ 。

**Step 2:** 更新  $d(i, j)$ ,  $r(i, j)$ : 对所有  $i, j$ , 若  $d(i, k) + d(k, j) < d(i, j)$ , 则

$$d(i, j) \leftarrow d(i, k) + d(k, j), r(i, j) \leftarrow k。$$

**Step 3:** 若  $k = v$ , 则停止; 否则  $k \leftarrow k + 1$ , 转 Step 2。

其中  $d(i, j)$ :  $i$  到  $j$  的距离。  $R(i, j)$ :  $i$  到  $j$  之间的插入点。

Floyd 算法求最短路径的流程图如下:

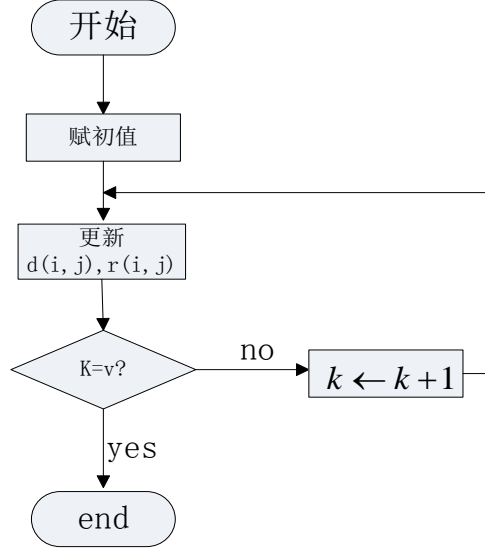


图 2 Floyd 算法流程图

## 5.2 问题 (1)

### 5.2.1 模型的建立

根据题意, 我们可以先构建一个以 A 区所有路口为顶点集的图  $G$ 。点集  $V_{\text{巡}} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ ,  $V_{\text{巡}}$  表示所有交巡警平台构成的点集。

由于题目要求尽量在 3 分钟以内到达事发地。即只有交巡警服务平台到路口的最短距离小于  $(60 \times 3 / 60)$  km, 才能在 3 分钟内到达。以最短距离小于 3km 为约束条件, 构造图  $G$  的编集, 若第  $i$  个巡警服务台能够在 3 分钟内到达第  $j$  个交通要道, 即他们之间的最短距离小于 3km, 则可以连接。否则不可以连接。但分析数据表明, A 区中存在 6 个点找不到小于 3km 的要道, 则连接最近的巡警服务台以保证时间最短。

$$e(i, j) = \begin{cases} 1 & d(i, j) \leq 3 \text{ or } (\forall x \in V_{\text{巡}} d(x, j) > 3 \text{ and } d(i, j) = \min d(k, j) k \in V_{\text{巡}}) \\ 0 & d(i, j) > 3 \text{ and } (\exists x \in V_{\text{巡}} d(x, j) \leq 3 \text{ or } d(i, j) \neq \min d(k, j) k \in V_{\text{巡}}) \end{cases} \quad (1)$$

由于边数数量少, 为了使程序能够更快运行, 我们以邻接表来存储  $e$ 。

定义  $b_i$  为第  $i$  路口受第  $b_i$  个交巡警服务台管制, 显然有

$$e(b_i, i) = 1 \quad (2)$$

定义工作量为  $X_i$ , 表示第  $i$  个交巡警服务台所管制的发案率 (次数) 之和,  $b_j = i$  表示第  $j$  个点受第  $i$  个点管辖。

$$X_i = \sum p_j \quad b_j = i \quad (3)$$

其中为第  $i$  路口的发案率 (次数)

工作量的不均衡是指一个交巡警服务平台的工作量与平均交巡警平台的工作量的偏离程度。一个交巡警服务平台的工作量与平均交巡警平台的工作量偏离程度越大, 则工作量越不均衡。为了量化这种不均衡, 本文使用方差来表示不平衡度。方差反应了每

个交巡警平台工作量与其均值相比平均相差的数值，因此能够准确反应出数据的偏离程度。用方差<sup>[1]</sup>表示的不均衡度如下式：

$$S = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N} \quad (4)$$

以不均衡度最小为目标函数：

$$\min S = \min \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N} \quad (5)$$

结合(1),(2),(3),(4),(5)，建立以时间在3分钟内，工作量的均衡度最小的规划模型如下：

$$\begin{aligned} & \min S \\ & \text{s.t.} \begin{cases} e(i, j) = \begin{cases} 1 & d(i, j) \leq 3 \text{ or } (\forall x \in V_{\text{巡}} d(x, j) > 3 \text{ and } d(i, j) = \min_{k \in V_{\text{巡}}} d(k, j)) \\ 0 & d(i, j) > 3 \text{ and } (\exists x \in V_{\text{巡}} d(x, j) \leq 3 \text{ or } d(i, j) \neq \min_{k \in V_{\text{巡}}} d(k, j)) \end{cases} \\ b_i \in V_{\text{巡}} \\ e(b_i, i) = 1 \\ X_i = \sum_j p_j \quad b_j = i \\ S = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N} \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

### 5.2.2 模型求解

由于“瞎子爬山法”<sup>[2]</sup>是启发式搜索中效率最高的方法，所以我们采取“瞎子爬山法”来解决本题。在状态空间的搜索中，启发式被定义成一系列规则，它从状态空间中选择最有希望到达问题解的路径。相比于非启发式搜索，启发式搜索不是盲目地对整个状态空间进行搜索。因而具有较高的效率。瞎子爬山法是启发式搜索的一种的实现算法。瞎子爬山法在搜索过程中扩展当前结点并估价它的子结点，最优的子结点被选择并进一步扩展。当搜索达到一种状态，该状态达到最优，则搜索停止。

针对本题，具体算法步骤如下：

**Step 1:** 随机把各个路口结点分给能到达的交巡警服务平台。即随机确定  $b_i$ 。

**Step 2:** 算出不平衡度  $S$ ，定义布尔变量 tell 为假。

**Step 3:** 枚举每个路口结点，如果把该路口结点分配给另一个可达到的交巡警服务平台能使不平衡度更小，我们就把该路口结点分配给另一个交巡警服务平台，并更新  $S$  为  $S'$ ， $S'$  为  $b_i = k$  时新的总不平衡度，tell 为真。如下式所示：

$$\text{if } \exists k \ k \neq b_i \text{ and } e(k, i) = 1 \text{ and } S' < S \quad b_i = k \quad S = S' \quad \text{tell} = \text{true} \text{ endif}$$

**Step 4:** 循环 Step 3，直到 tell 为假，因为  $S \geq 0$ ，且分配步骤有限，每次进行调整  $S$  必减小则算法一定能在有限时间内结束。

**Step 5:** 转 Step 1，算出各种情况下  $S$ ，选取最小的  $S$ ，停止。并将相应的分配方法输出。具体方法的流程图如下：



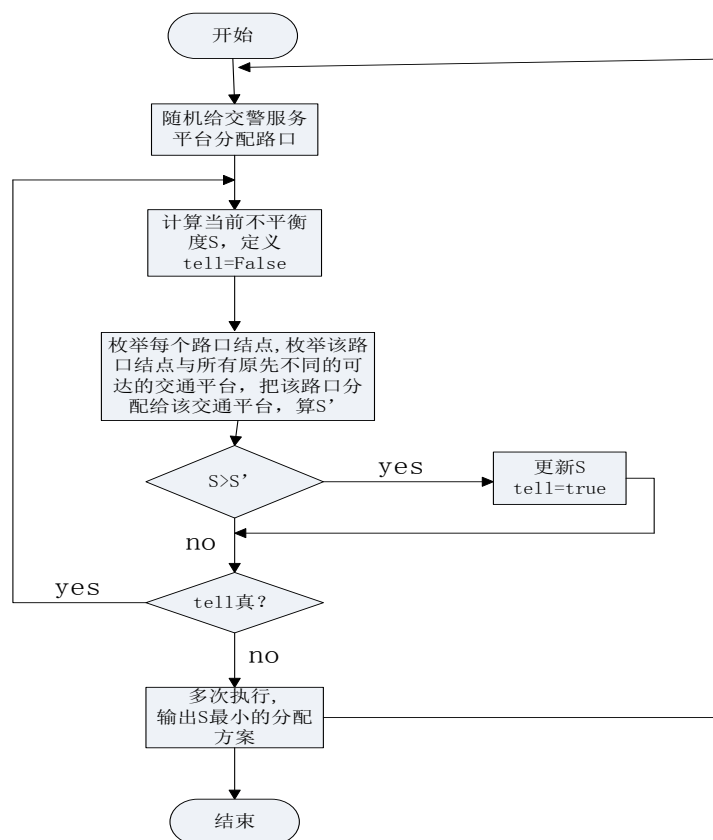


图 3 瞎子爬山算法流程图

执行上述程序 1000 次, 得到总不均衡度最小  $S=2.908$ , 且时间尽量都维持在 3 分钟内。得到了下述的分配方案。

表 1 A 区各交巡警服务平台分配管辖范围

交巡警服务平台	管辖范围 (路口节点)	交巡警服务平台	管辖范围 (路口节点)
1	1 42 43 68 78 80	11	11 26 27
2	2 39 69 71 73 75	12	12 25
3	3 44 54 55 67 76	13	13 21 22 23 24
4	4 57 60 62 63 64 66	14	14
5	5 49 53 56 59	15	15 28 29 31
6	6 50 51 52 58	16	16 33 35 38 45
7	7 30 48 61	17	17 40 41 70 72
8	8 36 37 45 47	18	18 85 87 88 89 91
9	9 32 34 35 37 46	19	19 65 74 77 79 82 83
10	10	20	20 81 84 86 90 92

我们计算出上述 20 个交巡警平台的工作量, 画出各巡警服务平台的工作量的图如下:

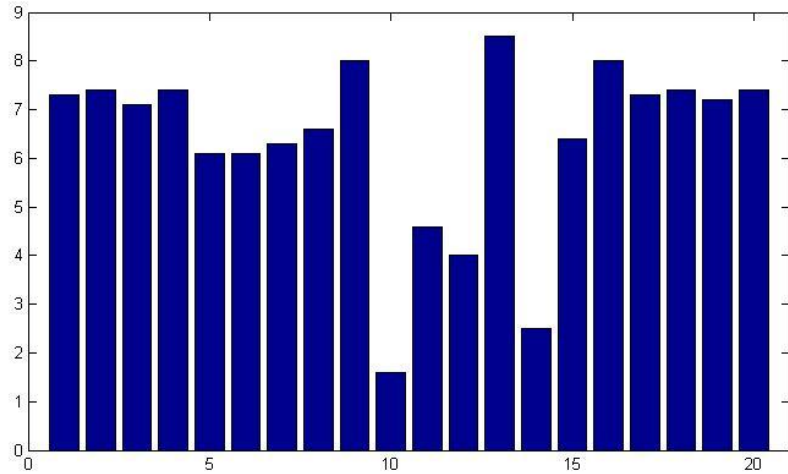


图 4 各交巡警服务平台的工作量

由上图可看出，除 10，11，12，14 号交巡警平台工作量较小之外，其余交巡警服务平台的工作量是基本均衡。从而可以说明此方法得出的结果是满意的，符合了题中的各项指标。

### 5.3 问题（2）模型的建立与求解

本问在于快速的封锁 13 个交通要道，所以要求时间最短。为了确定能否在时间  $t$  内，使 13 个交通要道都有一个交巡警服务平台的警力资源到达。我们使用匈牙利算法<sup>[3]</sup>进行巡警服务平台和交通要道的二分图匹配，如果 13 条交通要道能在时间  $t$  内与 20 个交巡警服务平台匹配，则代表在时间  $t$  内能够封锁，否则表示不能够封锁。再用二分答案法确定最短时间  $t$ 。为了进一步使 20 个交巡警服务平台到 13 个交通要道的时间总和最小，我们使用最小费用最大流算法<sup>[3]</sup>来确定。

设 20 个交巡警服务平台：  $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ ；13 个交通要道：  $y_1, y_2, \dots, y_{13}$ 。则顶点集  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{20}\}$ ，顶点集  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{13}\}$ ，  $x_i$  与  $y_j$  相连表示  $x_i$  交巡服务平台能在时间  $t$  内封锁  $y_j$  交通要道。

由此得到二分图  $G = (X, Y, E)$ ，下面用匈牙利算法进行 20 个交巡警服务平台和 13 个交通要道的匹配，匈牙利算法的步骤如下：

**Step 1:** 令  $S = \emptyset$ ，  $T = \emptyset$ ；

**Step 2:** 若  $M$  饱和  $X \setminus S$  的每个顶点，则  $M$  是最大匹配。否则，取  $M$ -非饱和点  $u \in X \setminus S$ ，令  $S = S \cup \{u\}$ ；

**Step 3:** 若  $N(S) = T$ ，转 **Step 6**，否则取  $y \in N(S) \setminus T$ 。若  $y$  是  $M$ -饱和点，转 **Step 4**，否则转 (5)；

**Step 4:** 设  $(y, x) \in M$ ，则令  $S = S \cup \{x\}$ ，  $T = T \cup \{y\}$ ，转 **Step 3**；

**Step 5:**  $u - y$  路是  $M$ -增广路，设为  $P$ ，并令  $M = M \oplus P$ （对称差），转 **Step 1**；

**Step 6:** 若  $X \setminus S = \emptyset$ ，则  $M$  是最大匹配，否则转 **Step 2**。

通过二分时间并进行匹配的具体算法流程图如下：

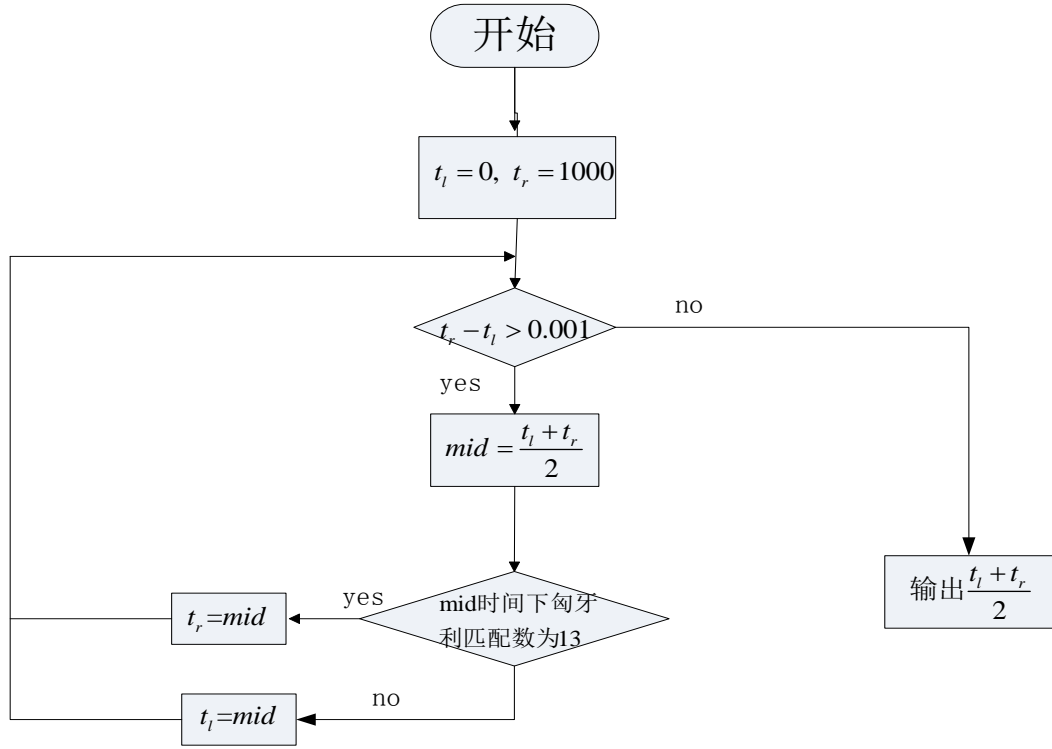


图 5 二分路程匈牙利匹配算法流程图

通过二分路程得到使 20 个交巡警服务平台到 13 个交通要道最短的时间为  $t = 8.015 \text{ min}$ 。

为得到快速全封锁下的调度方案，我们需要在  $t = 8.015 \text{ min}$  条件下，确定各交巡警服务平台具体应对应哪些交通要道，使各巡警平台出警时间和最小。使用最小费用最大流算法，从匈牙利算法得出的最短时间  $t$  情况下的多种匹配方案中，选出一个各交巡警服务平台到对应交通要道的耗时总和最小的方案。该方案即为实现快速全封锁下交巡警服务平台警力合理的调度方案。

首先构建网络  $D = (V, A, C)$ ，弧  $(v_i, v_j) \in A, (1 \leq i \leq 20, 1 \leq j \leq 13)$  上，如果  $v_i$  交巡服务平台能在时间  $t$  内到达  $v_j$  交通要道，则连接  $v_i$  和  $v_j$  之间费用为最短距离  $w_{ij}$ ，流量为  $c_{ij} = 1$  的管道。并创建一个源点  $s$ ，每个源点到交巡警服务平台建立一个费用为  $w_{ij} = 0$ ，流量为  $c_{ij} = \infty$  的管道。再创建一个汇点  $t$ ，每个交通要道到汇点建立一个费用为  $w_{ij} = 0$ ，流量为  $c_{ij} = 1$  的管道。最小费用最大流构图如下：

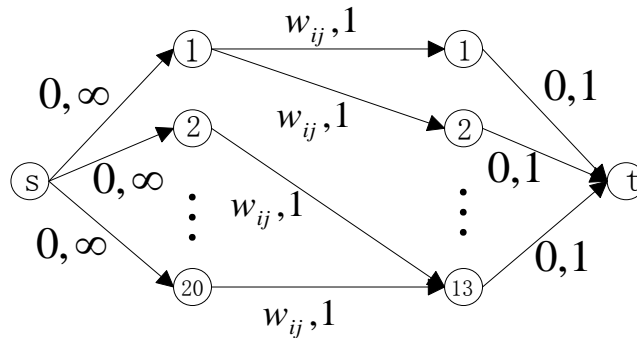


图 6 最小费用最大流示意图

现在要找到一个最大流  $f$ , 使流的总输送费用最小即总耗时最小, 即下面表达式取值最小:

$$w(f) = \sum_{(x_i, y_j)} w_{ij} f_{ij} \quad (7)$$

最小费用最大流的具体算法流程如下:

**Step 1:** 取  $f^{(0)} = 0$  为初始可行流。

**Step 2:** 若在第  $k-1$  步得到最小费用流  $f^{(k-1)}$ , 构造赋权有向图  $W(f^{(k-1)})$ , 在  $W(f^{(k-1)})$  中, 寻求从  $v_s$  到  $v_t$  的最短路。

**Step 3:** 若不存在最短路 (即最短路权是  $+\infty$ ), 则  $f^{(k-1)}$  就是最小费用最大流。

**Step 4:** 若存在最短路, 则在原网络  $D$  中得到相应的增广链  $\mu$ , 在增广链  $\mu$  上对  $f^{(k-1)}$  进行调整。调整量为:  $\theta = \min[\min_{\mu^+}(c_{ij} - f_{ij}^{(k-1)}), \min_{\mu^-}(f_{ij}^{(k-1)})]$

**Step 5:** 令  $f_{ij}^{(k)} = \begin{cases} f_{ij}^{(k-1)} + \theta & (v_i, v_j) \in \mu^+ \\ f_{ij}^{(k-1)} - \theta & (v_i, v_j) \in \mu^- \\ f_{ij}^{(k-1)} & (v_i, v_j) \notin \mu \end{cases}$ , 得到新的可行流  $f^{(k)}$ , 再对  $f^{(k)}$  返回 Step 1 重复上述步骤。

通过最小费用最大流得出各交巡警服务平台对应要封锁的 13 条要道的合理调度方案如下表:

表 2 A 区交巡警服务平台调度方案

交巡警服务平台	2	4	6	7	8	9	10
要封锁路口标号	38	62	48	29	36	16	22
对应耗时 (min)	3.982	0.350	2.506	8.015	2.084	1.533	7.708
交巡警服务平台	11	12	13	14	15	16	
要封锁路口标号	24	12	23	21	28	14	
对应耗时 (min)	3.805	0	0.500	3.265	4.752	6.742	

算出耗时平均值:  $t=3.480$  min。

#### 5.4 问题 (3)

经过问题 (1) 得出 6 个交通要道不能在 3 分钟内有交巡警服务平台到达, 6 个交通要道和对应所属管辖交巡警服务平台为下表:

表 3 不能在 3 分钟内到达的要道

交巡警服务平台	15	15	16	2	7	20
管辖的交通要道	28	29	38	39	61	92
耗费时间 (min)	4.752	5.701	3.406	3.682	4.190	3.601

我们以缩短出警时间为主要目标, 即使所有交巡警能够在 3 分钟内到达管辖的交通要道, 用模型一的方法来确定具体位置。

针对上面 6 组数据, 分析发现交巡警服务平台 15 到达所管辖的交通要道 28, 29 所用时间长达 4.752min, 5.701min; 其次, 交巡警服务平台 7 到达所管辖的交通要道 61

所用时间长达 4.19min。为了缩短出警时间，交巡警服务平台应首先考虑设在管辖的交通要道 28, 29, 61 附近，其中交通要道 28, 29 相距较近，可以用一个交巡警服务平台管辖。下面分别考虑增加 2 至 5 个平台的具体情况：

1、增加两个平台的情况：第一个平台应该放在 28 或 29 的附近，而第二个平台应该放在 61 的附近。

2、增加三个平台的情况：第一个平台应该放在 28 或 29 的附近，而第二个平台应该放在 61 的附近，第三个平台应该放在 38 或 39 的附近。

3、增加四个平台的情况：第一个平台应该放在 28 或 29 的附近，第二个平台应该放在 61 的附近，第三个平台应该放在 38 或 39 的附近，第四个平台应该放在 92 的附近。

4、增加五个平台的情况：第一个平台应该放在 28 或 29，而第二个平台应该放在 61，第三个平台应该放在 38 或 39 的附近，第四个平台应该放在 92 的附近，第五个平台放在任意位置。

我们用模型一的“瞎子爬山法”对每种情况进行枚举，算出每种情况下  $S$  的值，根据所算得使  $S$  最小的情况来确定平台所建的位置。得到了下面的结果：

在增加两个平台的情况下，第一个平台放在 28 或 29、第二个平台放在 48 (61 附近) 能使得  $S$  最小，且这种情况下，最长出警时间为 3.682 分钟。

表 4 增加 2 个平台情况

增加平台数	可选增加平台的方案	最长出警时间 (min)	3 分钟内不能达到的路口	不均衡度
2	28 48	3.682	38 39 92	3.34
	29 48			

在增加三个平台的情况下，第一个平台放在 28 或 29、第二个平台放在 48 (61 附近)、第三个平台放在 40 (38 和 39 附近) 能使得  $S$  最小，且在这种情况下，最长出警时间为 3.601 分钟。

表 5 增加 3 个平台情况

增加平台数	可选增加平台的方案	最长出警时间 (min)	3 分钟内不能达到的路口	不均衡度
3	28 48 40	3.601	92	2.60
	29 48 40			

在增加四个平台的情况下，得到多种情况下使得  $S$  最小，且在這些情況下，最长出警时间为 2.318。已经控制在了 3 分钟以内。

表 6 增加 4 个平台情况

增加平台数	可选增加平台的方案	最长出警时间 (min)	3 分钟内不能达到的路口数	不均衡度
4	28 或 29 40 48 87	$\leq 3$	0	2.00
	28 或 29 40 48 88			
	28 或 29 40 48 89			
	28 或 29 40 48 90			
	28 或 29 40 48 91			
	28 或 29 40 48 92			

在增加五个平台的情况下，得到多种情况下均能使得  $S$  最小。且在這些情況下，相

对不平衡度为 1.55。由于方案较多，具体情况见附录。

相比于增加 4 个平台的情况，增加 5 个平台仅使得相对不平衡度减少 0.45，增加一个平台对应不均衡度却减少较小。所以认为，增加 4 个平台是最佳的选择。我们以增加 28，40，48，90 这 4 个交巡警服务平台为例，得出各交巡警服务平台分配管辖范围如下表：

表 7 A 区增加 4 个平台的调度方案

交巡警服务平台	管辖范围（路口节点）	交巡警服务平台	管辖范围（路口节点）
1	1 68 75 76	13	13 21 22 23 24
2	2 42 69 74	14	14
3	3 54 55 64 65	15	15 31
4	4 57 60 62 63	16	16 35 36 37
5	5 52 53 58	17	17 41 43
6	6 50 51 56 59	18	18 73 77 79 87 89
7	7 32 33	19	19 66 67 70 71 78
8	8 46 47	20	20 81 85 88
9	9 34 45	28	28 29
10	10	40	38 39 40 44
11	11 26 27	48	30 61
12	12 25	90	48 49 80 84 86 90 91 92

通过增加 4 个交巡警服务平台，使得现有的 24 个交巡警服务平台到所管辖的路口的时间均在 3 分钟以内，并且相对不平衡度也从第（1）问求出的 2.90 减小到 2.00。这说明了，通过增加 4 个交巡警服务平台，能够改善有些地方出警时间过长的的问题，并且在一定程度上缓解了工作量不均衡的问题。

## 六、 全市交巡警服务平台设置与调度（问题二）

### 6.1 问题（1）

#### 6.1.1 现状的分析

针对全市的具体情况，分别列出这 6 个区的具体情况，总体分析各个区域的路口数，平台数、平均各路口的发案率，平均每万人拥有的平台数。发案率是每个区发案次数之和，每个路口发案率是总发案与路口数之商。具体情况见下表：

表 8 现有交巡警平台设置方案

区	路口数	交巡警平台数	面积(平方公里)	人口数(万)	发案率(次数)	平均各路口发案率	平均每万人的平台数
A	92	20	<b>22</b>	60	124.5	1.3532	3
B	73	8	103	21	63.4	0.86849	2.625
C	154	17	221	49	187.2	1.2156	2.882
D	52	9	383	73	67.8	1.30385	8.111
E	103	15	432	76	119.4	1.1592	5.067
F	108	11	274	53	109.2	1.01111	4.818

注：表中斜体加粗的数据为明显有误数据

我们可以通过上表，分析平均各路口发案率，平均每万人的平台数。得出原方案有

一定的合理性，也有明显的不合理之处，为此我们提出三个指标。

### 6.1.2 模型的建立

根据现有交巡警服务平台设置方案，为了进一步分析现有方案的合理性，我们定出下面三个指标来进一步分析现有设置方案的合理性。

**评价指标一：**各区平均发案率尽可能均衡，各区平均每万人的平台数尽可能均衡。

$$\begin{aligned} \min S \\ \left\{ \begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\sum X_A + \sum X_B + \sum X_C + \sum X_D + \sum X_E + \sum X_F}{6} \\ S &= \frac{\sum (\sum X_i - \bar{X})^2}{6} \quad i = A, B, C, D, E, F \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (8)$$

其中， $X_A, X_B, X_C, X_D, X_E, X_F$  表示各区发案率， $\bar{X}$  表示全市平均发案率， $S$  表示方差。

我们根据上表的相关数据，B 区由于人口少导致平均各路口发案率较小。可以相对减少交警的服务平台，增加其他地区平台，来缓解其他地区的压力。

**评价指标二：**交巡警平台覆盖率最大，即在 3 分钟内，有交巡警到达的道路数占总到路数的比值最大。

$$\max F = \frac{V_{\text{到达}}}{V_{\text{总}}} \quad (9)$$

利用问题一第（1）问中的 *floyd* 算法求出全市 485 个交巡警服务平台到对应这 381 条路口的最短路径，求出各交巡警平台出警到对应路口的所耗费的时间，发现有 138 条道路不能保障在 3 分钟内有交巡警到达事发地。其中有 3 个交巡警平台 329, 330, 387 到达路口的时间大于 9 分钟，如果一旦发生事故，很难快速到达。所以需要通过在这些点或这些点的附近增加交巡警服务平台，来减小交巡警到达事发地的具体时间。

**评价指标三：**各区各管辖平台的工作量应尽可能均衡，即方差  $S$  最小。

利用第一问（1）的瞎子爬山法计算出全市各交巡警服务平台所要管辖的路口和对应的工作量，发现有些交巡警服务平台的工作量过大。而有些交巡警服务平台工作量小，产生了不均衡的现象，且不均衡度极大，达到 12.00。所以为了缓解不均衡的现象，可以在工作量较大的路口旁增加交巡警服务平台。

### 6.1.3 模型的求解

根据上面的三个评价指标，我们以工作量应尽可能均衡为主要目标求解增加交巡警服务平台数目和所在位置。具体方法如下：

**Step 1:** 添加 329, 330, 387 三个特殊路口为交巡警服务平台。

**Step 2:** 枚举每个不是交巡警服务平台的路口  $V$ ，通过“瞎子爬山法”得出相应的最小不均衡度，选取其中最小的  $S$ ，它对应的  $V$  为新加的交巡警服务平台

**Step 3:** 重复步骤 2。直到  $S$  减少量几乎为 0。

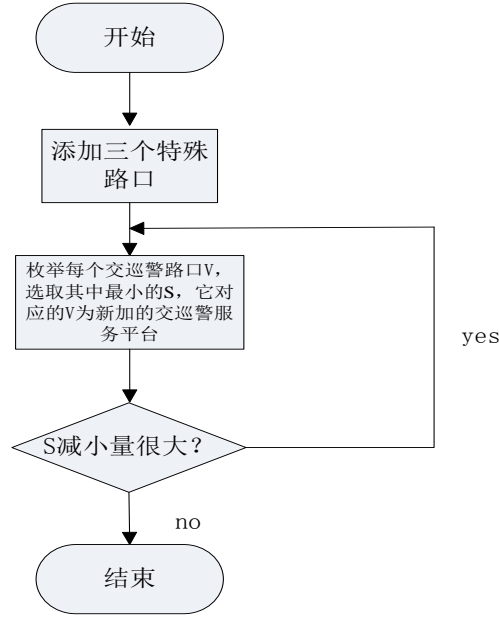


图 7 以覆盖为主要目标的流程图

我们做出在下面的 20 个路口增加交巡警服务平台，这些路口的标号如下表：

表 9 增加的 20 个交巡警平台对应路口标号

路口	29 38 48 102 112 210 219 226 256 268 286 296 329 330 387 451 534 544 548 564
----	---

此方案大大增加了覆盖率，算出方差，即不均衡度  $S = 4.08$ ，相比于现有的全市的交巡警平台的工作量不均衡度  $S = 12$ ，工作量的不均衡度也大大减小。大大改善了原来的设置方案。

## 6.2 问题（2）

### 6.2.1 模型的建立

定义  $m_i$  为所有交巡警服务平台到路口  $i$  的最短距离，即

$$m_i = \min d(k, i) \quad k \in V_{\text{巡}} \quad (10)$$

定义  $t_i$  为一个交巡警平台能围堵住一个路口所用最短时间，即

$$t_i = \frac{m_i}{v} \quad (11)$$

由于在 P 点犯罪嫌疑人驾车逃跑方向不确定，我们考虑他所有可能逃跑路线。由于交巡警服务平台是在案发 3 分钟后接到报警，所以如果犯罪嫌疑人逃到  $i$  路口时所花的时间不小于  $t_i - 3$ ，即  $\frac{d(i, 32)}{v_{\text{犯}}} < t_i - 3$ （其中  $d(i, 32)$  为  $i$  到 32 的最短距离），则他能逃到

这路口，称这路口为安全路口，否则他不能安全逃到该路口，称为不安全路口。我们用基于 *hash* 表与邻接表优化的深度优先搜索的方式求出他能安全逃到哪些路口，并以包围他能安全逃到这些路口的节点为最佳堵截方案。易知这些节点为不安全路口。

### 6.2.1 模型的求解

我们使用基于 *hash* 表与邻接表优化的深度优先搜索算法，我们用 *hash* 表存储某个



点有没有被搜索过，用邻接表记录此节点能连接的点具体步骤：

**Step 1:** 把 hash 表值全至为 false，把搜索的起点即 32 节点对应的 hash 值定为 true

**Step 2:** 搜索起点即 32 节点

**Step 3:** 对于搜索的点  $v_i$ ，枚举它的每一个连接的点  $v_i'$ ，如果  $v_i'$  的 hash 值为 false 且

$$\frac{d(i,32)}{v_{\text{犯}}} < t_i - 3 \quad (\text{式子中 } d(32,i) \text{ 为 } 32 \text{ 路口到 } i \text{ 路口的最短路})$$

则搜索  $v_i'$  点，继续

继续进行 **Step 3**。

**Step 4:** 输出所有 hash 值为 true 的路口，把包围这些路口的点定为最佳堵截方案。

我们得出犯罪嫌疑人所能够到达的 21 个安全路口的标号如下：

表 10 嫌疑犯能够到达的 21 个安全路口

安全路口	7	8	9	30	31	32	33	34	35	36	37	39	45	46	47	48	61
标号	237	238	239	247													

全市交巡警服务平台警力资源的最佳围堵方案是围堵如下 21 个路口，表中给出了 21 个路口及调度到该路口的交巡警平台。

表 11 交巡警围堵方案

调度的交巡警平台	2	3	3	4	4	5	5	5	11	14	15
要围堵的路口	40	3	55	4	60	49	50	59	26	14	28
耗费时间 (min)	5.0	3.5	2.2	5.8	4.7	1.4	1.7	2.4	6.7	7.0	5.9
调度的交巡警平台	15	16	16	171	171	173	173	173	173	167	
要围堵的路口	29	38	560	240	246	232	233	235	236	248	
耗费时间 (min)	6.2	3.5	3.4	7.2	3.5	2.7	2.2	1.1	1.1	17.5	

通过上表，计算出交巡警围堵所耗费的时间为 17.5min。

对应的 21 个交巡警服务平台围堵路口的示意图如下：

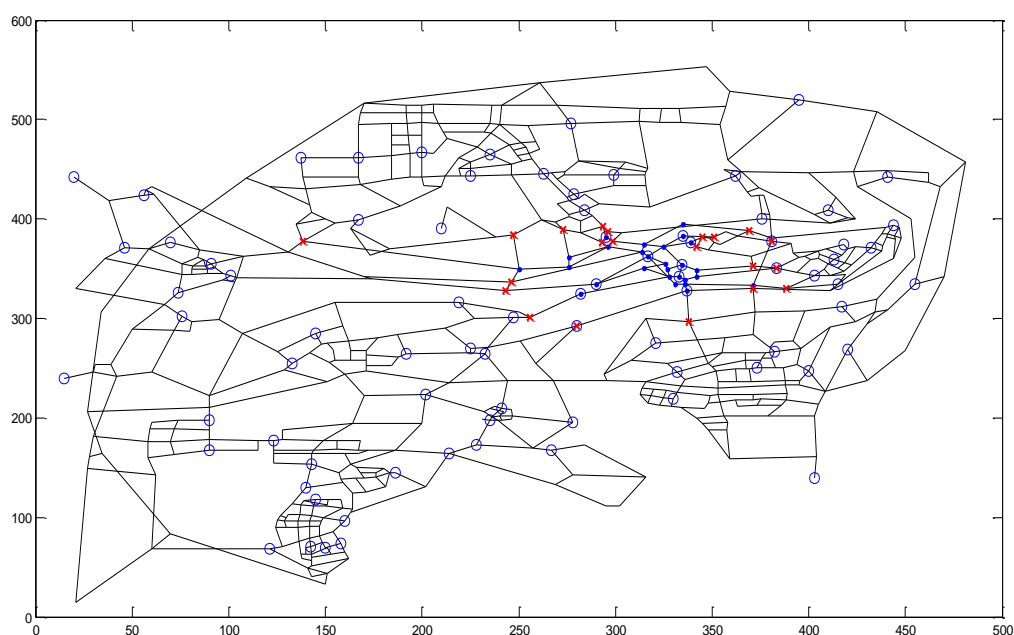


图 8 围堵示意图

图中“•”表示可以安全达到的路口，“×”表示要拦截的路口。只要交巡警能够围堵住嫌疑犯能够到达的路口，就能保证快速搜捕嫌疑犯。

## 七、 模型评价

### 7.1 模型的优点

(1) 对于问题一第(1)问，使用的瞎子爬山算法速度快，由于“瞎子爬山法”是启发式搜索中效率最高的方法，它从状态空间中选择最有希望到达问题解的路径。相比于非启发式搜索，启发式搜索不是盲目地对整个状态空间进行搜索。因而具有较高的效率。瞎子爬山法在搜索过程中扩展当前结点并估价它的子结点，最优的子结点被选择并进一步扩展。使用瞎子爬山法得到的值与全局最优解非常接近，编程复杂度低。

(2) 对于问题一第(2)问，使用全局最优解，用二分法的算法复杂度大为下降。

(3) 对于问题二第(2)问，利用基于 *hash* 表与邻接表优化的深度优先搜索算法找出犯罪嫌疑人所能够到达的安全路口，以包围他能安全逃到这些路口的节点为最佳堵截方案进行围堵。算法速度快，使用邻接表降低了较多的时间和空间复杂度。使用哈希表优化，使得深搜不会搜索到重复的点，同样降低了至少一半的时间复杂度。并且得到的最佳围堵方案是全局最优解。

(4) 文中所建立的“交巡警服务平台的设置与调度模型”具有通用性，可以推广至旅游线路规划，公交线路规划等。

### 7.2 模型的缺点

(1) 只考虑了犯罪嫌疑人和警车速度相近的情况，没有考虑速度相差较多的情况。

(2) 文中所用的部分数值已将现实问题简化，实际中影响警车行驶路线因素很多，还有待改进。

### 参考文献：

- [1] 赵静 但琦等 数学建模与数学实验[M] 北京：高等教育出版社.2001.7
- [2] 武汉，毛卫英，谌明，贺贵明武汉大学集成媒体研究中心 随机技术在瞎子爬山法中的应用
- [3] Thomas H.Cormen、Charles E.Leiserson、Ronald L.Rivest、Clifford Stein 算法导论 机械工业出版社 2006-9-1
- [4] 《编程之美》小组 编程之美 电子工业出版社 2008
- [5] 卜月华 图论及其应用 南京 东南大学出版社 2003.7