

Exercice 1

Vérifier si les applications suivantes sont linéaires ou pas.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x - y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x + y + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto (X^2 + 1)P \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, 0, y, 0, z, 0) \end{aligned}$$

- 1) Prouver que f est linéaire.
- 2) Déterminer le noyau de f .
- 3) Déterminer l'image de f .

Exercice 3

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (2x - y, x + y) \end{aligned}$$

- 1) Prouver que f est linéaire.
- 2) Déterminer le noyau de f .
- 3) Déterminer l'image de f .

Exercice 4

Soit

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto P(X + 1) - P(X) \end{aligned}$$

- 1) Prouver que h est linéaire.
- 2) h est-elle bijective ?

Exercice 5

Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ?