Cours d'algèbre linéaire

Chapitre 4 : Applications linéaires

Licence GLSI

Semestre : S1

Abdessattar LAFI

Table des matières

Chapitre 1

Applications linéaires

1.1 Définition

Définition 1.1.1.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une application linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

(i) $f(u+v) = f(u) + f(v)$, *pour tous* u, $v \in E$,

(ii) $f(\lambda.u) = \lambda.f(u)$, *pour tout* $u \in E$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Autrement dit : une application est linéaire si elle « respecte » les deux lois d'un espace vectoriel.

Notation. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Exemple 1.1.1.

Soit $f : E \to F$ *définie par* $f : x \mapsto 0_F$. *L'application* f *est linéaire.*

Proposition 1.1.1. ***(Caractérisation d'une application linéaire)***

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. L'application f est linéaire si et seulement si, pour tous vecteurs u et v de E et pour tous scalaires λ et μ de $\mathbb{K}$,

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Plus généralement, une application linéaire f préserve les combinaisons linéaires : pour tous λ_1, ..., $\lambda_n \in \mathbb{K}$ et tous v_1, ..., $v_n \in E$, on a

$$f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v1) + ... + \lambda_n f(v_n).$$

Définitions 1.1.1.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- *Une application linéaire de E dans F est aussi appelée morphisme ou homomorphisme d'espaces vectoriels.*
- *Une application linéaire de E dans E est appelée endomorphisme de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$.*

Proposition 1.1.2.

Si f et g deux endomorphismes de E, alors $f \circ g$ est aussi un endomorphisme de E.

1.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 1.2.1. ***(Image directe et réciproque d'une application linéaire)***

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soient $E^{'}$ un sous-espace vectoriel de E et $F^{'}$ un sous-espace vectoriel de F. On appelle :

- *L'image de $E^{'}$ par f est $f(E^{'}) = \{f(x) \mid x \in E^{'}\}$.*
- *L'image réciproque de $F^{'}$ par f est $f^{-1}(F^{'}) := \{x \in E \mid f(x) \in F^{'}\}$.*

Théorème 1.2.1.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soient $E^{'}$ un sous-espace vectoriel de E et $F^{'}$ un sous-espace vectoriel de F, alors :

- *$f(E^{'})$ est un sous-espace vectoriel de F.*
- *$f^{-1}(F^{'})$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Définition 1.2.2.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle :

- *Noyau de* f *et on note* $\ker f$ *le sous-ensemble de* E *:* $\ker f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$.
- *Image de* f *et on note* Imf *le sous-ensemble de* F *:* $Imf = \{f(x) \mid x \in E\}$.

Théorème 1.2.2.

Soit $f : E \to F$ *une application linéaire. Alors* $\ker f$ *et* Imf *sont des sous-espaces vectoriels.*

1.3 Rang d'une application linéaire

Définition 1.3.1.

Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* f *une application linéaire de* E *dans* F*. Si* E *est de dimension finie, alors si* $(e_1, ..., e_n)$ *est une base de* E*, alors*

$$Imf = Vect\Big(f(e_1), ..., f(e_n)\Big).$$

La dimension de cet espace vectoriel Imf *est appelée* ***rang de*** f *:*

$$rg(f) = \dim Imf = \dim Vect\Big(f(e_1), ..., f(e_n)\Big).$$

1.4 Théorème du rang

Le théorème du rang donne une relation entre la dimension du noyau et la dimension de l'image de f.

Théorème 1.4.1. ***(Théorème du rang)***

Soit $f : E \to F$ *une application linéaire entre deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels,* E *étant de dimension finie. Alors*

$$\dim E = \dim \ker f + \dim Imf.$$

Autrement dit :

$$\dim E = \ dim \ker f + rgf.$$

1.5 Applications injectives, surjectives et bijectives

Théorème 1.5.1.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Alors :

- *f est injective, si et seulement si,* $\ker(f) = \{0_E\}$.
  Autrement dit, f est injective si et seulement si son noyau ne contient que le vecteur nul. En particulier, pour montrer que f est injective, il suffit de vérifier que : si $f(x) = 0_F$ alors $x = 0_E$.
- *f est surjective, si et seulement si, $Imf = F$*

Définitions 1.5.1.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- *Une application linéaire bijective de E sur F est appelée isomorphisme d'espaces vectoriels. Les deux espaces vectoriels E et F sont alors dits isomorphes.*
- *Un endomorphisme bijectif de E (c'est-à-dire une application linéaire bijective de E dans E) est appelé automorphisme de E. L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$.*

Proposition 1.5.1. ***(Linéarité de l'application réciproque d'un isomorphisme)***

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est un isomorphisme de E sur F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

Exemple 1.5.1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + 3y, x + y)$. Il est facile de prouver que f est linéaire. Pour prouver que f est bijective, on pourrait calculer son noyau et son image. Mais ici nous allons calculer directement son inverse : on cherche à résoudre $f(x, y) = (x', y')$. Cela correspond à l'équation $(2x+3y, x+y) = (x', y')$ qui est un système linéaire à deux équations et deux inconnues. On trouve $(x, y) = (-x' + 3y', x' - 2y')$. On pose donc $f^{-1}(x', y') = (-x' + 3y', x' - 2y')$. On vérifie aisément que f^{-1} est l'inverse de f, et on remarque que f^{-1} est une application linéaire.

Proposition 1.5.2.

Soit $f : E \to F$ un isomorphisme d'espaces vectoriels. Si E (respectivement F) est de dimension finie, alors F (respectivement E) est aussi de dimension finie et on a $\dim E = \dim F$.

Théorème 1.5.2.

Soit $f : E \to F$ une application linéaire avec E et F de dimension finie. Supposons $\dim E = \dim F$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est bijective

(ii) f est injective

(iii) f est surjective

Autrement dit, dans le cas d'une application linéaire entre deux espaces de même dimension, pour démontrer qu'elle est bijective, il suffit de démontrer l'une des deux propriétés : injectivité ou surjectivité.

Exemple 1.5.2.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + y)$. Une façon simple de montrer que l'application linéaire f est bijective est de remarquer que l'espace de départ et l'espace d'arrivée ont même dimension. Ensuite on calcule le noyau :

$$(x, y) \in \ker f \iff f(x, y) = 0 \iff (x - y, x + y) = (0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0).$$

Ainsi, $\ker f = \{(0, 0)\}$ *est réduit au vecteur nul, ce qui prouve que f est injective et donc, par le Théorème 1.5.2, f est un isomorphisme.*