Metadata:

- Tags: #TLA
- Course : Theorie des langages et Automates
- Started On : 2020-09-16
- Previous Chapter : --
- Next Chapter : tbd

Slides

TLA-Introduction aux langages.pdf

Summary :

- homework - 2020-09-30 :
  - [x] ~~Fix equations and and stuff~~
  - [ ] partie 2 demo (LM)N=L(MN)
  - [ ] Demonstration $L(M+N) = LM + LN$
  - [ ] Demonstration $L(M \cap N) \subset LM \cap LN$

Intoduction et concepts fondamentaux

Alphabet, Mot, Langage

- **Alphabet** est un *ensemble fini* d'éléments appelés *symboles* ou *lettres*
  - Ensemble : { , , , }
  - Symbole :
    - Lettres : a,b..z ; A,B..Z
    - Chiffres décimaux : 0,1..9
    - Caractères du clavier
  - Alphabet binaire : {0,1}
  - Alphabet Octal : {0, ... ,7}
  - Alphabet Hexadecimal : { 0, ... ,9,A, ... , F}
  - Alphabet Informatique : **ASCII** , **EBCDIC** (obsolete)
- **Mot** sur un Alphabet A est une *séquence finie de symboles* de A
  - sequence signifie que l'ordre est important
  - les symboles d'un mot sécrivent jusxtaposés l'un à l'autre de gauche a droite.
  - La langueur d'un mot s est le nombre de symboles constituant le mot s

- On note | s | ou lg(s)
- Sur tout alphabet A on peut definir un mot special : le mot vide ε tel que $|\varepsilon| = 0$
    - $|s| = 0 \text{ si et seulement si } s = \varepsilon$
- pour un mot $s = \alpha_1\alpha_2..\alpha_n$ de longueur n sur un alphabet A, α_i est le Symbole (ou terme) de rang i et noté s(i)

- **Langage** L sur *un alphabet A* et un *ensemble de mots* sur A
    - Exemple : L = {a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, abb, bbb} A = {a,b}
    - un langage sur un alphabet A peut être Vide, Fini ou Infini.
    - un alphabet A est un langage sur A, en effet, un symbole est un mot de longueur 1
    - l'ensemble vide $\varnothing$ est un langage sur A
    - $\{\varepsilon\}$ est un langage sur A, attention $\{\varepsilon\} \neq \varnothing$
    - **Monoïde Libre** sur A : l'ensemble formé par tous les mots possibles sur l'alphabet A est un langage A. Noté par **A***
        - si $A = \varnothing$ (alphabet vide), alors A* ={ ε }
            - $\Rightarrow \varepsilon \in A^*$ toujours
            - $A^* = \{\varepsilon\}$ si et seulement si $A = \varnothing \; ou \; A = \{\varepsilon\}$
        - Tout langage L sur un alphabet A est une partie de l'ensemble de A* : L est un langage sur l'alphabet A, si et seulement si $L \subset$ A*
- **Langage Formel** est tout sous ensemble de A* dont les mots peuvent êtres definis de deux façons :
    - **Definition par propriété**: modelisation formelle d'une description naturelle du langage
        - Exemple : L = ensemble des mots definis sur {a,b} de longueur paire
        - $\Rightarrow L_1 = \{w \in \{a,b\}^*; |w| = 2n, n >= 0\}$
    - **Definition par Récursivité**: Modelisation dans laquelle un langage est defini sur lui même
        - Exemple 1: $L_2 = \{w \in A^* \,; w = a \text{ ou } w = aw_1 \,; w1 \in L_2\}$
        - Exemple 2 : $L_3 = L_1 = \{w \in A^* \,; w = \varepsilon \text{ ou } w = w_1w_2 \text{ avec } |w_1| = 2 \text{ et } w_2 \in L_3$

Operations sur les mots

- **Concaténation** (collage, jointure)

    - ***Definition***:
      Soit S et t deux mots sur un meme alphabet A,
      La **concaténation** de s et de t est le mot obtenu en écrivant d'abord les symboles de s, suivis ensuite par les symboles de t

    - ***Definition Formelle*** :
      si $s = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ et $t = \beta_1\beta_2\dots\beta_m$ alors la concaténation de s et de t notée st donne le mot suivant $st = \sigma_1\sigma_2..\sigma_{n+m}$
      où $\begin{cases} \sigma_i = \alpha_i \,;\; i \in \{1,n\} \\ \sigma_i = \beta_i \,;\; i \in \{n+1,m\} \end{cases}$

    - ***Propriétés de la concaténation*** :

        - Loi interne : $(A^*, \cdot)$

> > > - $$\begin{array}{ccc} A^* \times A^* & \rightarrow & A^* \\ s_1, s_2 \in A^* & \Rightarrow & s_1 \cdot s_2 \in A^* \end{array}$$
> >
> > - Associativité : $(st)u = s(tu) = stu$
> > - Element nteutre : $\varepsilon s = s\varepsilon = s \text{ pour tout s sur A}$
> > - $|st| = |s| + |t|$
> > - Non Commutative (en général): $st \neq ts$
> > - $|st| = 0\ ssi\ s = t = \varepsilon$

- **Puissance**

> - ***Definition***:
>   Soient s un mot sur un alphabet A et n un entier naturel
>   La **puissance** nème de s notée s^n est definie de façon recusive par :
>
> $$s^0 = \varepsilon$$
> $$s^n = s^{n-1}s\ ; \quad n \geq 1$$
>
> - ***Propriétés de la puissance***:
>
> > - $\forall s \in A^* : s^0 = \varepsilon\ et\ s^1 = s$
> > - $\forall s \in A^*, \forall n, m \in \mathbb{N} : s^n s^m = s^{n+m}$
> > - $\forall s \in A^*, \forall n, m \in \mathbb{N} : (s^n)^m = s^{nm}$
> > - $|s^n| = n|s|$

- **Mirroir** (renversé)

> - ***Definition***:
>   Le mirroir de u est le mot obtenu à partor de u en inversant les lettres de celui ci
>   il est noté u^R ou $\tilde{u}$
>
> - ***Propriété***:
>
> > - $(uv)^R = v^R u^R$
> > - $(u^R)^R = u$
> > - $|s^R| = |s|$

- **Préfixes, Suffixes, Facteurs**

> - Préfixe : u préfixe ssi existe v tel que s= uv
> - Suffixe : v suffixe ssi existe u tel que s= uv
> - facteur : w facteur ssi existe u v tel que s= uwv
> - *Préfixe propre*:
> > - tout préfixe different de ε et s

Structure du Monoïde

En algèbre un Monoïde est un ensemble M muni d'une loi de composition interne $*$ (c'est à dire une application $M \times M \rightarrow M$) qui:

- soit associative : $(c * y) * z = x * (y * z)$
- Admet un element neutre e: $e * x = x * e = x$

> **Theoreme1**
> L'ensemble de tous les mots sur un alphabet A est un monoide pour l'operation de concaténation des mots
> Ce monoide s'appelle le **monoide libre**

Operations sur les langages

Soit A un alphabet et L et M deux langages sur A

- **l'intersection**
  - $L \cap M = \{s \in A^* \mid s \in L \; ET \; s \in M\}$
  - tous les mots de A appartenant simultanément à L et M
- **la reunion**
  - $L \cup M = \{s \in A^* \mid s \in L \; OU \; s \in M\}$
  - Tous les mots appartenant a L ou M
- **la concaténation**
  - $LM = \{s \in A^* \mid \exists u \in L, \; \exists v \in M : s = uv$
  - tous les mots de A obtenus par concaténation de tous les mots de L avec tous les mots de M
- **la Fermeture de kleene (étoile)**
  - $L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 ... = \{s \in A* \mid \exists u_1, .., u_n \in L : s = u_1 ... u_n\}$
  - toues les mots sur A qui sont des puissances de mots de L
- **La fermeture Positive de Kleeen**
  - $L^+ = L^* \; \{\varepsilon\}$
  - tous les mots sur A qui sont des puissances non nulles de mots de L
- **la complémentation**
  - $\bar{L} = \{s \in A^* | s \notin L\}$
  - toues les mots sur A n'appartenant pas à L
- **Puissance**
  - on note L^n l'ensemble formé par les puissances n^{eme} des mots appartenant à L
  - $L^0 = \{\varepsilon\}$
  - $L^1 = L \; et \; L^2 = LL...$
- **Mirroir**
  - $L^R = \{s^R ; s \in L\}$
  - $L^R = \{w \in A^* \mid \exists m \in L \; ; \; w = m^R\}$
  - les mirroirs des mots appartenant à L
  - ***Propriétés***
    - $(L^R)^R = L$
    - $(LM)^R = M^R L^R$
    - $(L + M)^R = L^R + M^R$
    - $(L \cap M)^R = L^R \cap M^R$

Demonstrations de propriétés importantes :

- l'intersection et la réunion sont commutatives, associatives et distributives l'une par rapport à l'autre
  - $L\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}L = L$
  - $(LM)N = L(MN)$
  - $L(M+N) = LM + LN$
  - $L(M \cap N) \subset LM \cap LN$

Demonstration $(LM)N = L(MN)$
la demo se fait en deux etapes:

- **Montrons que** $(LM)N \subset L(MN)$
  1. Soit $s \in (LM)N$ montrons que $s \in L(MN)$
  2. $s \in (LM)N$ alors $\exists s_1 \in LM \; et \; s_2 \in N \; ; \; s = s_1 s_2$
  3. $s_1 \in LM$ alors $\exists s_1 1 \in L \; et \; s_{12} \in M \; ; \; s_1 = s_{11} s_{12}$
     $\Rightarrow s = s_{11} s_{12} s_2 = s_{11}(s_{12} s_2)$
  4. or

$$\left.\begin{matrix} s_{12} \in M \\ s_2 \in N \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} s_{11} \in L \\ \\ s_{12}s_2 \in MN \end{matrix}\right\} \Rightarrow s = s_{11}(s_{12}s_2) \in L(MN)$$

  $\Rightarrow$ d'ou $(LM)N \subset L(MN)$
- **Montrons que** $L(MN) \subset (LM)N$
  -

Demonstration $L(M+N) = LM + LN$

Demonstration $L(M \cap N) \subset LM \cap LN$

Up ----