TD 3 ROAD (des goûts et des couleurs)

Objectif :

Ce Td traite le problème de coloration des graphes

Exercice 1

On donne un graphe de 7 sommets par sa matrice d'adjacences M ci-dessous. Ce graphe représente les 7 bancs d'un parc et les allées permettant de passer de l'un à l'autre.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On veut peindre les bancs de façon que deux bancs reliés par une allée soient toujours de couleurs différentes. Donnez un encadrement du nombre minimal de couleurs nécessaire, en justifiant. Déterminez ce nombre.

2. Est-il possible de parcourir toutes les allées de ce parc sans passer deux fois par la même allée ?

3. Est-il possible de parcourir des allées de ce parc en passant à côté de chaque banc exactement une fois ?

Exercice 2

Sept élèves, désignés par A, B, C, D, E, F et G, se sont rendus à la bibliothèque aujourd'hui. Le tableau suivant précise « qui a rencontré qui » (la bibliothèque étant petite, deux élèves Présents au même moment se rencontrent nécessairement...).

l'élève	A	B	C	D	E	F	G
a rencontré	D,E	D,E,F,G	E,G	A,B,E	A,B,C,D,F,G	B,E,G	B,C,E,F

De combien de places assises doit disposer la bibliothèque pour que chacun ait pu travailler correctement au cours de cette journée ?

Exercice 3

Sept agences de voyage proposent des visites de monuments et lieux emblématiques de Saint-Pétersbourg : la cathédrale Saint-Isaac, le Musée de l'Ermitage, le Musée russe et la forteresse Pierre et Paul. Un même lieu ne peut pas être visité par plusieurs groupes de compagnies différentes le même jour.

La première compagnie fait visiter uniquement la cathédrale Saint-Isaac ; la seconde la cathédrale Saint-Isaac et le Musée russe ; la troisième la forteresse Pierre et Paul ; la quatrième le Musée russe et la forteresse Pierre et Paul ; la cinquième la cathédrale Saint-Isaac et le Musée de l'Ermitage ; la sixième le Musée de l'Ermitage et la forteresse Pierre et Paul ; la septième le Musée russe et le Musée de l'Ermitage.

Ces agences peuvent-elles organiser les visites sur les trois premiers jours de la semaine ?

Exercice 4

Un lycée doit organiser les horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7 et enfin 6 et 7. Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée minimale ?

Exercice 5

On veut transporter des produits chimiques par le rail. A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit produits chimiques. Dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les produits ne peuvent pas être entreposés dans le même wagon, car il y aurait risque d'explosion :

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		×	×	×			×	×
B	×				×	×	×	
C	×			×		×	×	×
D	×		×		×			×
E		×		×		×	×	
F		×	×		×			
G	×	×	×		×			
H	×		×	×				

Quel nombre de wagons faut-il ?

Notes de cours :

- Un sous-ensemble *S* de *V* est un stable s'il ne comprend que des sommets non adjacents deux à deux. Le cardinal du plus grand stable est le **nombre de stabilité** de *G* ; on le note $\alpha(G)$.
- La coloration des sommets d'un graphe consiste à affecter à tous les sommets de ce graphe une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur. Une coloration avec *k* couleurs est donc une partition de l'ensemble des sommets en *k* stables.
- Le nombre chromatique du graphe *G*, noté $\gamma(G)$, est le plus petit entier *k* pour lequel il existe une partition de *V* en *k* sous-ensembles stables.

Majoration

- $\gamma(G) <= r+1$, où *r* est le plus grand degré des sommets de *G*.
- $\gamma(G) <= n+1-\alpha(G)$

Minoration

- Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à celui de chacun de ses sous-graphes.
- Le nombre chromatique du graphe sera supérieur ou égal à l'ordre de sa plus grande clique, que l'on note w(*G*) (prononcer oméga de *G*).

  Autrement dit, Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à celui de chacun de ses sous-graphes.

  Preuve : Ce résultat découle de la définition même du nombre chromatique.

  • Le nombre chromatique du graphe sera supérieur ou égal à l'ordre de sa plus grande clique, que l'on note w(*G*) (prononcer oméga de *G*).

  Autrement dit, $\gamma(G) >= w(G)$