

TD2

Exercice 1

Trois professeurs P_1 , P_2 , P_3 devront donner lundi prochain un certain nombre d'heures de cours à trois classes C_1 , C_2 , C_3 :

- P_1 doit donner 2 heures de cours à C_1 et 1 heure à C_2 ;
- P_2 doit donner 1 heure de cours à C_1 , 1 heure à C_2 et 1 heure à C_3 ;
- P_3 doit donner 1 heure de cours à C_1 , 1 heure à C_2 et 2 heures à C_3 .

- 1) Comment représenter cette situation par un graphe ?
- 2) Quel type de graphe obtenez-vous ?
- 3) Combien faudra-t-il de plages horaires au minimum ?
- 4) Aidez-vous du graphe pour proposer un horaire du lundi pour ces professeurs.

Exercice 2

*Cet exercice est inspiré de la nouvelle de Claude Berge **Qui a tué le Duc de Densmore** (Bibliothèque Oulipienne n° 67, 1994, Réédition Castor Astral, 2000). Dans cette nouvelle policière, le lecteur peut découvrir le meurtrier grâce à un théorème combinatoire dû au mathématicien hongrois G. Hajós.*

Un jour, Sherlock Holmes reçoit la visite de son ami Watson que l'on avait chargé d'enquêter sur un assassinat mystérieux datant de plus de trois ans.

À l'époque, le Duc de Densmore avait été tué par l'explosion d'une bombe, qui avait entièrement détruit le château de Densmore où il s'était retiré. Les journaux d'alors relataient que le testament, détruit lui aussi dans l'explosion, avait tout pour déplaire à l'une de ses sept ex-épouses. Or, avant de mourir, le Duc les avait toutes invitées à passer quelques jours dans sa retraite écossaise.

Holmes : Je me souviens de cette affaire ; ce qui est étrange, c'est que la bombe avait été fabriquée spécialement pour être cachée dans l'armure de la chambre à coucher, ce qui suppose que l'assassin a nécessairement effectué plusieurs visites au château !

Watson : Certes, et pour cette raison, j'ai interrogé chacune des femmes : Ann, Betty, Charlotte, Edith, Félicia, Georgia et Helen. Elles ont toutes juré qu'elles n'avaient été au château de Densmore qu'une seule fois dans leur vie.

Holmes : Hum! Leur avez-vous demandé à quelle période elles ont eu leur séjour respectif ?

Watson : Hélas ! Aucune ne se rappelait les dates exactes, après plus de trois ans ! Néanmoins, je leur ai demandé qui elles avaient rencontré :

- Ann a rencontré Betty, Charlotte, Félicia et Georgia.
- Betty a rencontré Ann, Charlotte, Edith, Félicia et Helen.
- Charlotte a rencontré Ann, Betty et Edith.
- Edith a rencontré Betty, Charlotte et Félicia.
- Félicia a rencontré Ann, Betty, Edith et Helen.
- Georgia a rencontré Ann et Helen.
- Helen a rencontré Betty, Félicia et Georgia.

Vous voyez, mon cher Holmes, les réponses sont concordantes !

C'est alors que Holmes prit un crayon et dessina un étrange petit dessin, avec des points marqué A, B, C, E, F, G, H et des lignes reliant certains de ces points. Puis, en moins de trente secondes, Holmes déclara :

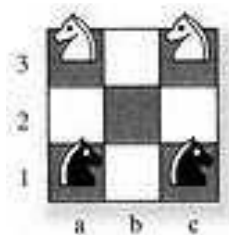
– Tiens, tiens ! Ce que vous venez de me dire détermine d'une façon unique l'assassin.

Qui est l'assassin ?

Exercice 3

Sur un échiquier 3×3 , les deux cavaliers noirs sont placés sur les cases a1 et c1, les deux cavaliers blancs occupant les cases a3 et c3.

Aidez-vous d'un graphe pour déterminer les mouvements alternés des blancs et des noirs qui permettront aux cavaliers blancs de prendre les places des cavaliers noirs, et vice versa. Les blancs commencent.



Exercice 4

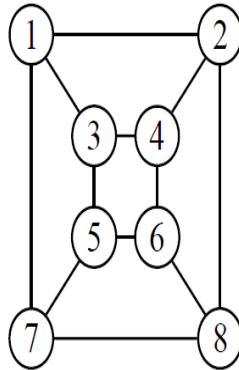
Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?

Exercice 5

On s'intéresse aux graphes 3-réguliers. Construisez de tels graphes ayant 4, 5, 6, puis 7 sommets. Qu'en déduisez-vous ? Prouvez-le !

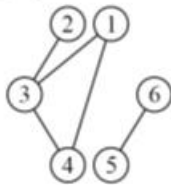
Exercice 6

Montrez que ce graphe est biparti :

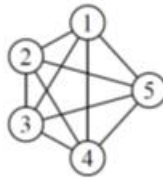


Exercice 7

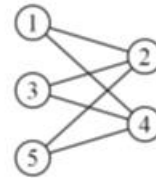
Les graphes suivants sont-ils eulériens (ou semi-eulériens) ?



Graphe 1



Graphe 2



Graphe 3

Exercice 8

Soit G un graphe non eulérien. Est-il toujours possible de rendre G eulérien en lui rajoutant un sommet et quelques arêtes ?

Exercice 9

Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante exactement une fois ?



Exercice 10

On considère des dominos dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.

- 1) En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?
- 2) Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).
- 3) Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?
- 4) Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à n , est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

Exercice 11

Dessinez un graphe d'ordre au moins 5 qui est. . .

- 1) hamiltonien et eulérien
- 2) hamiltonien et non eulérien
- 3) non hamiltonien et eulérien
- 4) non hamiltonien et non eulérien.

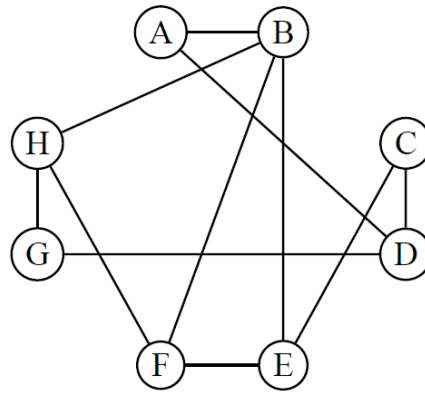
Exercice 12

Un club de 9 joueurs se réunit chaque jour autour d'une table ronde. Une règle du club interdit qu'un joueur ait deux fois la même personne à côté de lui.

- 1) Combien de jours au maximum pourront-ils se réunir en satisfaisant cette règle ?
- 2) Donnez une organisation de la table pour chacun de ces jours.
- 3) Même question que 1), mais avec 3 tables de 3 places.
- 4) Donnez une organisation des trois tables pour chacun de ces jours.

Exercice 13

Huit personnes se retrouvent pour un repas de mariage. Le graphe ci-dessous précise les Incompatibilités d'humeur entre ces personnes (une arête reliant deux personnes indique qu'elles ne se supportent pas).



Proposez un plan de table (la table est ronde) en évitant de placer côte à côte deux personnes Incompatibles.