IIT
INSTITUT INTERNATIONAL TECHNOLOGIE
Université Nord Américaine privée

Cours d'algèbre linéaire

Chapitre 2 : Fractions rationnelles

Licence GLSI

Semestre : S1

Abdessattar LAFI

Table des matières

Chapitre 1

Fractions rationnelles

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Fractions rationnelles

Définition 1.1.1. ***(Fractions rationnelles)***

Une fraction rationnelle est un « quotient » de deux polynômes $P,Q \in \mathbb{K}[X]$. On la note $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$. On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles.

Définition 1.1.2. ***(Égalité de deux fractions)***

On dit que deux fractions $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ et $\frac{P_2(X)}{Q_2(X)}$ sont égales si et seulement si

$$P_1Q_2 = P_2Q_1.$$

Autrement dit $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ et $\frac{P_2(X)}{Q_2(X)}$ sont des écritures d'une même fraction.

Définition 1.1.3. ***(Polynômes)***

On assimile les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ aux fractions $\frac{P}{1}$ de $\mathbb{K}(X)$. En particulier le polynôme nul de $\mathbb{K}[X]$ est assimilé à la fraction nulle $\frac{0}{1}$ de $\mathbb{K}(X)$.

Définition 1.1.4. ***(Opérations sur les fractions)***

On peut définir la somme et le produit de deux fractions rationnelles par les formules suivantes :

$$F_1(X) = \frac{P_1(X)}{Q_1(X)}, \quad F_2(X) = \frac{P_2(X)}{Q_2(X)}$$

et

$$F1 + F2 = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}, \quad F_1F_2 = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}.$$

Les sommes ou produits de fractions ne dépendent pas des écritures choisies.

Définition 1.1.5. ***(Degré d'une fraction rationnelle)***

Soit une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. *On appelle degré de* F *:*

$$degF = degP - degQ \in \mathbb{Z}$$

On vérifie que la notion de degré d'une fraction rationnelle ne dépend pas de l'écriture choisie.

On vérifie que le degré des fractions rationnelles prolonge le degré des polynômes, c'est-à-dire que

$$\underbrace{degP}_{\mathbb{K}[X]} = \underbrace{deg\frac{P}{1}}_{\mathbb{K}(X)}.$$

Proposition 1.1.1. *On a les mêmes propriétés que pour le degré des polynômes :*

$$deg(F_1 + F_2) \leq \max(degF_1, degF_2), \quad deg(F_1F_2) = degF_1 + degF_2$$

Lorsque $F \neq 0$, *le degré de* F *est un entier relatif. Lorsque* $F = 0$, $degF = -\infty$.

Définition 1.1.6. ***(Zéros, pôles d'une fraction rationnelle, fonctions rationnelles)***

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. *On rappelle que* P *et* Q *sont premiers entre eux. Les racines de* P *s'appellent les zéros de* F *et les racines de* Q *les pôles de* F. *Si* $\mathcal{P}$ *désigne l'ensemble des pôles de* F, *on peut définir la fonction rationnelle associée à* F *:*

$$\begin{aligned} \widetilde{F} : \mathbb{K}\backslash\mathcal{P} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)} \end{aligned}$$

Remarque 1.1.1.

Un pôle $a \in \mathbb{K}$ *de la fraction* $F = \frac{P}{Q}$, *est dit de multiplicité* $k \in \mathbb{N}$, *lorsque le scalaire* a *est un zéro de multiplicité* k *du polynôme* Q.

Définition 1.1.7. ***(Dérivée d'une fraction rationnelle)***

Soit une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On définit formellement la dérivée de cette fraction rationnelle par la formule

$$F^{'} = \frac{P^{'}Q - PQ^{'}}{Q^2}$$

1.2 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Proposition 1.2.1. ***(Partie entière d'une fraction rationnelle)***

Soit une fraction rationnelle $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple $(E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que

$$\begin{cases} F = E + G \\ degG < 0 \end{cases}$$

Le polynôme E est appelé la partie entière de la fraction F.

Preuve • **Unicité.** On suppose que $F = E_1 + G_1 = E_2 + G_2$ avec $E_1,\ E_2 \in \mathbb{K}[X]$ et $G_1,\ G_2 \in \mathbb{K}(X)$ avec $degG_1 < 0$ et $degG_2 < 0$. On en déduit $E_1 - E_2 = G_2 - G_1$. Donc $deg(G_2 - G_1) < 0$ soit $deg(E_1 - E_2) < 0$. Le seul polynôme qui a un degré négatif est le polynôme nul. Donc $E_1 = E_2$ et donc $G_2 = G_1$. Ce qu'il fallait vérifier.

• **Existence.** On effectue la division euclidienne du polynôme A par le polynôme B : $A = BE + R$ avec $degR < degB$ et alors $F = E + \frac{R}{B}$ avec $E \in \mathbb{K}[X]$ et $G = \frac{R}{B}$ de degré strictement négatif. □

Proposition 1.2.2. ***(Partie polaire d'une fraction rationnelle)***

Soit une fraction rationnelle $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ et un pôle $a \in \mathbb{K}$ de multiplicité k :

$$B = (X - a)^k \widehat{B} \quad avec \quad \widehat{B}(a) \neq 0$$

Il existe un unique couple $(C, D) \in \mathbb{K}[X]^2$ de polynômes tels que

$$F = \frac{C}{\widehat{B}} + \frac{D}{(X - a)^k} \quad et \quad deg(D) < k$$

La fraction rationnelle $\frac{D}{(X-a)^k}$ est appelée partie polaire de la fraction F relative au pôle a.

Proposition 1.2.3. ***(Coefficient associé à un pôle simple)***

Si une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ *est de degré* < 0 *avec* $Q(X) = (X - a)V(X)$*, où* $V(a) \neq 0$*, la partie polaire de la fraction* F *relativement au pôle simple* a *est de la forme*

$$F = \frac{\lambda}{X - a} + \frac{U}{V}$$

C'est le résultat précédent dans le cas particulier $k = 1$.

1.2.1 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Théorème 1.2.1. ***(Décomposition dans*** $\mathbb{C}(X)$***)***

Soit une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$*, avec la décomposition du polynôme* Q *en éléments irréductibles qui s'écrit :*

$$Q = (X - a_1)^{\alpha_1} ... (X - a_n)^{\alpha_n}$$

Alors la fraction F *s'écrit de façon unique sous la forme*

$$F = E + \Big(\frac{\lambda_{11}}{X - a_1} + \frac{\lambda_{12}}{(X - a_1)^2} + ... + \frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X - a_1)^{\alpha_1}}\Big) + ... + \Big(\frac{\lambda_{n1}}{X - a_n} + \frac{\lambda_{n2}}{(X - a_n)^2} + ... + \frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X - a_n)^{\alpha_n}}\Big)$$

où la partie entière $E \in \mathbb{C}[X]$ *est un polynôme nul, ou de degré* $deg(P) - deg(Q)$ *et où les coefficients* $\lambda_{i,j} \in \mathbb{C}$ *sont complexes.*

Remarque 1.2.1.

Tous les coefficients $\lambda_{k\alpha_k}$ *sont différents de zéro.*

Exemple 1.2.1.

- *Vérifier que* $\dfrac{1}{X^2 + 1} = \dfrac{a}{X + i} + \dfrac{b}{X - i}$ *avec* $a = \dfrac{1}{2}i$ *et* $b = -\dfrac{1}{2}i$.
- *Vérifier que* $\dfrac{X^4 - 8X^2 + 9X - 7}{(X - 2)^2(X + 3)} = X + 1 + \dfrac{-1}{(X - 2)^2} + \dfrac{2}{(X - 2)} + \dfrac{-1}{(X + 3)}$.

Comment se calcule cette décomposition ? En général on commence par déterminer la partie entière. Tout d'abord si $degQ > degP$ alors $E(X) = 0$. Si $degP \leq degQ$ alors effectuons la division euclidienne de P par Q : $P = QE + R$ donc $\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}$ où $degR < degQ$. La partie entière est donc le quotient de cette division. Et on s'est ramené au cas d'une fraction $\frac{R}{Q}$ avec $degR < degQ$. Voyons en détails comment continuer sur un exemple.

Exemple 1.2.2.

Décomposons la fraction $\frac{P}{Q} = \frac{X^5 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 11}{X^3 - 3X + 2}$.

• ***Première étape : partie entière.*** *On calcule la division euclidienne de* P *par* Q *:* $P(X) = (X^2+1)Q(X) + 2X^2 - 5X + 9$. *Donc la partie entière est* $E(X) = X^2 + 1$ *et la fraction s'écrit* $\frac{P(X)}{Q(X)} = X^2 + 1 + \frac{2X^2-5X+9}{Q(X)}$. *Notons que pour la fraction* $\frac{2X^2-5X+9}{Q(X)}$ *le degré du numérateur est strictement plus petit que le degré du dénominateur.*

• ***Deuxième étape : factorisation du dénominateur.*** Q *a pour racine évidente* $+1$ *(racine double) et* -2 *(racine simple) et se factorise donc ainsi* $Q(X) = (X-1)^2(X+2)$.

• ***Troisième étape : décomposition théorique en éléments simples.*** *Le théorème de décomposition en éléments simples nous dit qu'il existe une unique décomposition :* $\frac{P(X)}{Q(X)} = E(X) + \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2}$. *Nous savons déjà que* $E(X) = X^2 + 1$, *il reste à trouver les nombres* a, b, c.

• ***Quatrième étape : détermination des coefficients.*** *Voici une première façon de déterminer* a, b, c. *On récrit la fraction* $\frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2}$ *au même dénominateur et on l'identifie avec* $\frac{2X^2-5X+9}{Q(X)}$ *:*

$$\frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2} = \frac{(b+c)X^2 + (a+b-2c)X + 2a - 2b + c}{(X-1)^2(X+2)}$$

qui doit être égale à

$$\frac{2X^2 - 5X + 9}{(X-1)^2(X+2)}.$$

On en déduit $b + c = 2$, $a + b - 2c = -5$ *et* $2a - 2b + c = 9$. *Cela conduit à l'unique solution* $a = 2$, $b = -1$, $c = 3$.

Donc

$$\frac{P}{Q} = \frac{X^5 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 11}{X^3 - 3X + 2} = X^2 + 1 + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{-1}{X-1} + \frac{3}{X+2}.$$

Cette méthode est souvent la plus longue.

• ***Quatrième étape (bis) : détermination des coefficients.*** *Voici une autre méthode plus efficace. Notons* $\frac{P'(X)}{Q(X)} = \frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2(X+2)}$ *dont la décomposition théorique est :* $\frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2}$. *Pour déterminer* a *on multiplie la fraction* $\frac{P'}{Q}$ *par* $(X-1)^2$ *et on évalue en* $x = 1$.

Tout d'abord en partant de la décomposition théorique on a :

$$F_1(X) = (X-1)^2 \frac{P'(X)}{Q(X)} = a + b(X-1) + c\frac{(X-1)^2}{X+2} \quad \text{donc} \quad F_1(1) = a.$$

D'autre part

$$F_1(X) = (X-1)^2 \frac{P'(X)}{Q(X)} = (X-1)^2 \frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2(X+2)} = \frac{2X^2-5X+9}{X+2}$$

donc $F_1(1) = 2$*. On en déduit* $a = 2$*.*

On fait le même processus pour déterminer c : on multiplie par $(X+2)$ *et on évalue en* -2*. On calcule* $F_2(X) = (X+2)\frac{P'(X)}{Q(X)} = \frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2} = a\frac{X+2}{(X-1)^2} + b\frac{X+2}{X-1} + c$ *de deux façons et lorsque l'on évalue* $x = -2$ *on obtient d'une part* $F_2(-2) = c$ *et d'autre part* $F_2(-2) = 3$*. Ainsi* $c = 3$*. Comme les coefficients sont uniques tous les moyens sont bons pour les déterminer. Par exemple lorsque l'on évalue la décomposition théorique* $\frac{P'(X)}{Q(X)} = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2}$*, on obtient :*

$$\frac{P'(0)}{Q(0)} = a - b + \frac{c}{2}.$$

Donc $\frac{9}{2} = a - b + \frac{c}{2}$*. Donc* $b = a + \frac{c}{2} - \frac{9}{2} = -1$*.*

1.2.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Théorème 1.2.2. ***(Décomposition dans*** $\mathbb{R}(X)$***)***

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$*, où la décomposition en facteurs irréductibles dans* $\mathbb{R}[X]$ *du dénominateur s'écrit :*

$$Q = (X-a_1)^{\alpha_1}...(X-a_n)^{\alpha_n}(X^2+b_1X+c_1)^{\beta_1}...(X^2+b_pX+c_p)^{\beta_p}.$$

Alors la fraction F s'écrit de façon unique :

$$\begin{aligned} F \;=\; & E + \Big[\Big(\frac{\lambda_{11}}{X-a_1} + \frac{\lambda_{12}}{(X-a_1)^2} + ... + \frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X-a_1)^{\alpha_1}}\Big) + ... + \\ & + \Big(\frac{\lambda_{n1}}{X-a_n} + \frac{\lambda_{n2}}{(X-a_n)^2} + ... + \frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X-a_n)^{\alpha_n}}\Big)\Big] \\ & + \Big[\Big(\frac{\mu_{11}X+\delta_{11}}{X^2+b_1X+c_1} + \frac{\mu_{12}X+\delta_{12}}{(X^2+b_1X+c_1)^2} + ... + \frac{\mu_{1\beta_1}X+\delta_{1\beta_1}}{(X^2+b_1X+c_1)^{\beta_1}}\Big) + ... + \\ & + \Big(\frac{\mu_{p1}X+\delta_{p1}}{X^2+b_pX+c_p} + \frac{\mu_{p2}X+\delta_{p2}}{(X^2+b_pX+c_p)^2} + ... + \frac{\mu_{p\beta_p}X+\delta_{p\beta_p}}{(X^2+b_pX+c_p)^{\beta_p}}\Big)\Big] \end{aligned}$$

où la partie entière $E \in \mathbb{R}[X]$ *est un polynôme nul, ou de degré* $deg(P) - deg(Q)$*, et tous les* $\lambda_{i,j}$*,* $\mu_{i,j}$*,* $\delta_{i,j}$ *sont des réels.*

Exemple 1.2.3.

Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P(X)}{Q(X)} = \dfrac{3X^4+5X^3+11X^2+5X+3}{(X^2+X+1)^2(X-1)}$. *Comme* $degP < degQ$ *alors* $E(X)=0$. *Le dénominateur est déjà factorisé sur* $\mathbb{R}$ *car* X^2+X+1 *est irréductible. La décomposition théorique est donc :*

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{aX+b}{(X^2+X+1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} + \frac{e}{X-1}.$$

Il faut ensuite mener au mieux les calculs pour déterminer les coefficients afin d'obtenir :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{2X+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{-1}{X^2+X+1} + \frac{3}{X-1}.$$