IIT
INSTITUT INTERNATIONAL TECHNOLOGIE
Université Nord Américaine privée

Cours d'algèbre linéaire

Chapitre 3 : Espaces vectoriels

Licence GLSI

Semestre : S1

Abdessattar LAFI

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Définitions

Définition 1.1.1. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble non vide E muni :*

- *d'une loi de composition interne, c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans E :*

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow E \\ (u, v) &\longmapsto u + v \end{aligned}$$

- *d'une loi de composition externe, c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E :*

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, v) &\longmapsto \lambda.u \end{aligned}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

1) $(E, +)$ est un groupe commutatif

- *l'addition est associative : $u + (v + w) = (u + v) + w$ (pour tous u, v, $w \in E$).*
- *Il existe un élément neutre $0_E \in E$ tel que $u + 0_E = u$ (pour tout $u \in E$).*
- *Tout $u \in E$ admet un symétrique u_0 tel que $u + u_0 = 0_E$. Cet élément u_0 est noté $-u$.*
- *l'addition est commutative : $u + v = v + u$ (pour tous u, $v \in E$).*

2) la loi externe doit vérifier :

- $1.u = u$ *(pour tout $u \in E$).*
- $\lambda.(\mu.u) = (\lambda\mu).u$ *(pour tous λ, $\mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$).*
- $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$ *(pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, u, $v \in E$).*
- $(\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$ *(pour tous λ, $\mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$).*

Exemple 1.1.1. ***(Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.)***

Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. Un élément $u \in E$ est donc un couple (x, y) avec x élément de $\mathbb{R}$ et y élément de $\mathbb{R}$. Ceci s'écrit

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

- *Définition de la loi interne. Si (x, y) et (x_0, y_0) sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$, alors :*

$$(x, y) + (x_0, y_0) = (x + x_0, y + y_0).$$

- *Définition de la loi externe. Si λ est un réel et (x, y) est un élément de $\mathbb{R}^2$, alors :*

$$\lambda.(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, 0)$. Le symétrique de (x, y) est $(-x, -y)$, que l'on note aussi $-(x, y)$.

Définition 1.1.2.

- *On appelle les éléments de E des **vecteurs**. Au lieu de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on dit aussi espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*
- *Les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés des **scalaires**.*
- *L'**élément neutre** 0_E s'appelle aussi le **vecteur nul**. Il ne doit pas être confondu avec l'élément 0 de $\mathbb{K}$. Lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion, 0_E sera aussi noté 0.*
- *Le **symétrique** $-u$ d'un vecteur $u \in E$ s'appelle aussi l'**opposé**.*
- *La loi de composition interne sur E (notée usuellement $+$) est appelée couramment l'addition et $u + u_0$ est appelée somme des vecteurs u et u_0.*

- *La loi de composition externe sur E est appelée couramment multiplication par un scalaire. La multiplication du vecteur u par le scalaire λ sera souvent notée simplement λu, au lieu de $\lambda.u$.*

Somme de n vecteurs. Il est possible de définir, par récurrence, l'addition de n vecteurs, $n \geq 2$. La structure d'espace vectoriel permet de définir l'addition de deux vecteurs (et initialise le processus). Si maintenant la somme de $n-1$ vecteurs est définie, alors la somme de n vecteurs v_1, v_2, ..., v_n est définie par

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = (v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1}) + v_n.$$

L'associativité de la loi $+$ nous permet de ne pas mettre de parenthèses dans la somme $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$. On notera $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \sum_{i=1}^{n} v_i$.

Exemple 1.1.2. ***(L'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)***

L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est noté $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Nous le munissons d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de la manière suivante.

- *Loi interne. Soient f et g deux éléments de $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction $f + g$ est définie par :*

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

  (où le signe $+$ désigne la loi interne de $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans le membre de gauche et l'addition dans $\mathbb{R}$ dans le membre de droite).

- *Loi externe. Si λ est un nombre réel et f une fonction de $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $\lambda.f$ est définie par l'image de tout réel x comme suit :*

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x).$$

  (Nous désignons par . la loi externe de $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et par $\times$ la multiplication dans $\mathbb{R}$. Avec l'habitude on oubliera les signes de multiplication : $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.)

- *Élément neutre. L'élément neutre pour l'addition est la fonction nulle, définie par :*

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$

  On peut noter cette fonction $0_{\mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$.

- *Symétrique. Le symétrique de l'élément f de $\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = -f(x).$$

Le symétrique de f est noté $-f$.

1.2 Sous-espace vectoriel

Définition 1.2.1. ***(Sous-espace vectoriel)***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est appelée un sous-espace vectoriel si :

- $0_E \in F$,
- $u + v \in F$ *pour tous* u, $v \in F$,
- $\lambda.u \in F$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et tout* $u \in F$.

Exemple 1.2.1.

L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet :

- $(0, 0) \in F$,
- *si $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ appartiennent à F, alors $x_1 + y_1 = 0$ et $x_2 + y_2 = 0$ donc $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0$ et ainsi $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ appartient à F,*
- *si $u = (x, y) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $x + y = 0$ donc $\lambda x + \lambda y = 0$, d'où $\lambda u \in F$.*

Exemple 1.2.2.

L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet : la fonction nulle est continue ; la somme de deux fonctions continues est continue ; une constante fois une fonction continue est une fonction continue.

Exemples 1.2.1.

(1) L'ensemble $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet le vecteur nul $(0, 0)$ n'appartient pas à F_1.

(2) *L'ensemble* $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 ou y = 0\}$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$*. En effet les vecteurs* $u = (1, 0)$ *et* $v = (0, 1)$ *appartiennent à* F_2*, mais pas le vecteur* $u + v = (1, 1)$.

(3) *L'ensemble* $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$*. En effet le vecteur* $u = (1, 1)$ *appartient à* F_3 *mais, pour* $\lambda = -1$*, le vecteur* $\lambda u = (-1, -1)$ *n'appartient pas à* F_3.

Théorème 1.2.1. ***(Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel)***

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* F *un sous-espace vectoriel de* E*. Alors* F *est lui-même un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel pour les lois induites par* E.

Méthodologie.

Pour répondre à une question du type « L'ensemble F est-il un espace vectoriel ? », une façon efficace de procéder est de trouver un espace vectoriel E qui contient F, puis prouver que F est un sous-espace vectoriel de E. Il y a seulement trois propriétés à vérifier au lieu de huit !

1.2.1 Combinaisons linéaires

Définition 1.2.2.

Soit $n \geq 1$ *un entier, soient* v_1*,* v_2*, ...,* v_n*,* n *vecteurs d'un espace vectoriel* E*. Tout vecteur de la forme*

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$$

(où λ_1*,* λ_2*, ...,* λ_n *sont des éléments de* $\mathbb{K}$*) est appelé combinaison linéaire des vecteurs* v_1*,* v_2*, ...,* v_n*. Les scalaires* λ_1*,* λ_2*, ...,* λ_n *sont appelés coefficients de la combinaison linéaire.*

Remarque 1.2.1.

Si $n = 1$*, alors* $u = \lambda_1 v_1$ *et on dit que* u *est colinéaire à* v_1.

Exemple 1.2.3.

Dans le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$*,* $(3, 3, 1)$ *est combinaison linéaire des vecteurs* $(1, 1, 0)$ *et* $(1, 1, 1)$ *car on a l'égalité*

$$(3, 3, 1) = 2(1, 1, 0) + (1, 1, 1).$$

1.2.2 Caractérisation d'un sous-espace vectoriel

Théorème 1.2.2.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie non vide de E. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\lambda u + \mu v \in F \text{ pour tous } u, v \in F \text{ et tous } \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Autrement dit si et seulement si toute combinaison linéaire de deux éléments de F appartient à F.

1.2.3 Intersection de deux sous-espaces vectoriels

Proposition 1.2.1.

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. L'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- $0_E \in F$, $0_E \in G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, donc $0_E \in F \cap G$.
- Soient u et v deux vecteurs de $F \cap G$. Comme F est un sous-espace vectoriel, alors $u, v \in F$ implique $u + v \in F$. De même $u, v \in G$ implique $u + v \in G$. Donc $u + v \in F \cap G$.
- Soient $u \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme F est un sous-espace vectoriel, alors $u \in F$ implique $\lambda u \in F$. De même $u \in G$ implique $\lambda u \in G$. Donc $\lambda u \in F \cap G$.

Conclusion : $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. □

1.2.4 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 1.2.3.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. L'ensemble de tous les éléments $u+v$, où u est un élément de F et v un élément de G, est appelé somme des sous-espaces vectoriels F et G. Cette somme est notée $F + G$. On a donc

$$F + G = \{u + v \mid u \in F, v \in G\}.$$

Exemple 1.2.4.

Soient le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{R}^2$, $D_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *et* $D_2 = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. *Alors,*

$$D_1 + D_2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \textit{ et } y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Proposition 1.2.2.

Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels du* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*.*

(1) $F + G$ *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

(2) $F + G$ *est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois* F *et* G*.*

Preuve

(1) Montrons que $F + G$ est un sous-espace vectoriel.

- $0_E \in F$, $0_E \in G$, donc $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$.
- Soient w et w' des éléments de $F+G$. Comme w est dans $F+G$, il existe u dans F et v dans G tels que $w = u+v$. Comme w' est dans $F+G$, il existe u' dans F et v' dans G tels que $w' = u'+v'$. Alors $w+w' = (u+v)+(u'+v') = (u+u')+(v+v') \in F+G$, car $u + u' \in F$ et $v + v' \in G$.
- Soit w un élément de $F + G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe u dans F et v dans G tels que $w = u + v$. Alors $\lambda w = \lambda(u + v) = (\lambda u) + (\lambda v) \in F + G$, car $\lambda u \in F$ et $\lambda v \in G$.

(2) L'ensemble $F + G$ contient F et contient G : en effet tout élément u de F s'écrit $u = u + 0_E$ avec u appartenant à F et 0_E appartenant à G (puisque G est un sous-espace vectoriel), donc u appartient à $F + G$. De même pour un élément de G.

- Si H est un sous-espace vectoriel contenant F et G, alors montrons que $F+G \subset H$. C'est clair : si $u \in F$ alors en particulier $u \in H$ (car $F \subset H$), de même si $v \in G$ alors $v \in H$. Comme H est un sous-espace vectoriel, alors $u + v \in H$.

□

1.2.5 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 1.2.4. ***(Somme directe de deux sous-espaces)***

Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*.* F *et* G *sont en somme directe dans* E *si*

- $F \cap G = \{0_E\}$,
- $F + G = E$.

On note alors $F \oplus G = E$.

Si F et G sont en somme directe, on dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Proposition 1.2.3.

*F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément de E s'écrit d'une manière **unique** comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.*

Remarques 1.2.1.

- *Dire qu'un élément w de E s'écrit d'une manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G signifie que si $w = u + v$ avec $u \in F$, $v \in G$ et $w = u' + v'$ avec $u' \in F$, $v' \in G$ alors $u = u'$ et $v = v'$.*
- *On dit aussi que F est un sous-espace supplémentaire de G (ou que G est un sous-espace supplémentaire de F).*

1.2.6 Sous-espace engendré

Théorème 1.2.3. ***(Théorème de structure de l'ensemble des combinaisons linéaires)***

Soit $\{v_1, ..., v_n\}$ un ensemble fini de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors :

- *L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{v_1, ..., v_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E.*
- *C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs v_1, ..., v_n.*

Notation. Ce sous-espace vectoriel est appelé sous-espace engendré par v_1, ..., v_n et est noté $\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_n)$. On a donc

$$u \in \mathrm{Vect}(v_1, ..., v_n) \Longleftrightarrow \text{il existe } \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ tels que } u = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n.$$

Remarques 1.2.2.

- *Dire que* $Vect(v_1, ..., v_n)$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de* E *contenant les vecteurs* v_1, ..., v_n *signifie que si* F *est un sous-espace vectoriel de* E *contenant aussi les vecteurs* v_1, ..., v_n *alors* $Vect(v_1, ..., v_n) \subset F$.
- *Plus généralement, on peut définir le sous-espace vectoriel engendré par une partie* V *quelconque (non nécessairement finie) d'un espace vectoriel :* $VectV$ *est le plus petit sous-espace vectoriel contenant* V.

Méthodologie. On peut démontrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E en montrant que F est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs de E.

Exemple 1.2.5.

Est-ce que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *?*
Un triplet de $\mathbb{R}^3$ *est élément de* F *si et seulement si* $x = y + z$. *Donc* u *est élément de* F *si et seulement s'il peut s'écrire* $u = (y + z, y, z)$. *Or, on a l'égalité*

$$(y + z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1).$$

Donc F *est l'ensemble des combinaisons linéaires de* $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$. *C'est le sous-espace vectoriel engendré par* $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ *:* $F = Vect\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$. *C'est bien un plan vectoriel (un plan passant par l'origine).*

1.3 Familles libres, liées et génératrices

Définition 1.3.1. ***(Familles libres)***

On dit que la famille $\{v_i\}_{i \in I}$ *est libre si* $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0_E \Rightarrow \lambda_i = 0, \quad \forall i \in I$.

Définition 1.3.2. ***(Familles liées)***

On dit que la famille $\{v_i\}_{i \in I}$ *est liée si elle n'est pas libre :* $\exists (\lambda_1, ..., \lambda_p) \neq (0, ..., 0)$ *tq* $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0_E$.

Exemple 1.3.1.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ *et soit* $A = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 2), (-2, 1, 2)\}$ *une famille d'éléments de* E.
La famille A *est-elle libre ou liée ?*

Définition 1.3.3. ***(Familles génératrices)***

On appelle famille génératrice de E une famille telle que tout element de E est une combinaison lineaire de cette famille : $\forall v \in E,\ \exists \lambda_i\ tq\ v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$.

Exemple 1.3.2.

$E = \mathbb{R}^2[X]$

Tout élément de E *s'écrit sous la forme* $P = a_0 +_a 1X + a_2X^2$. *Donc,* P *est une combinaison linéaire de* 1, X *et* X^2. *Ainsi, la famille* $\{1, X, X^2\}$ *est une famille génératrice de* E.

1.4 Bases

Définition 1.4.1.

On dit que la famille $\{v_i\}_{i \in I}$ *est une base de* E *si* $\{v_i\}_{i \in I}$ *est une famille libre et génératrice.*

Proposition 1.4.1.

On dit que la famille $\{v_i\}_{i \in I}$ *est une base de* E *si et seulement si* $\forall v \in E$, v *s'écrit de maniere* ***unique*** $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$.

Exemple 1.4.1.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ *considéré comme un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. Soit* G *défini par* $x + y - 2z = 0$, *c'est-à-dire* $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$.
Montrons que G *est un sous-espace vectoriel de* E *et déterminons une base de* G.
Soit $u = (x, y, z)$ *un élément de* E.

$$u \in G \Longleftrightarrow x + y - 2z = 0 \Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \exists \beta \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x = 2\alpha - \beta \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases}$$

Posons $v_0 = (2, 0, 1)$ *et* $v_1 = (-1, 1, 0)$. *Nous obtenons* $u \in G \Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \exists \beta \in \mathbb{R}$ *tels que* $u = \alpha v_0 + \beta v_1$. *Nous en déduisons que* $G = Vect(v_0, v_1)$ *et donc* G *est un sous-espace vectoriel de* E. *De plus, la famille* $\{v_0, v_1\}$ *est génératrice. Il est clair qu'elle est libre. Donc il s'agit d'une base de* G.

1.5 Espace vectoriel de dimension finie

Définitions 1.5.1.

- *Soit* $\{v_i\}_{i\in I}$ *une famille* S *d'éléments de* E*. On appelle* ***cardinal*** *de* S *le nombre d'éléments de* S*.*
- E *est un espace vectoriel de dimension finie si* E *admet une famille génératrice de cardinal fini.*

Théorème 1.5.1.

Toutes les bases d'un même espace vectoriel E *ont le même cardinal. Ce nombre commun est appelé la dimension de* E*. On note* $\dim E$*.*

Définition 1.5.1. ***(Coordonnées d'un vecteur)***

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *et* $B = \{v_1, ..., v_n\}$ *une base de* E *(c'ést-à-dire* $\forall v \in E$, v *s'écrit de manière unique* $v = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i$*), les scalaires* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *sont appelés les coordonnées de* v *dans la base* B*.*

Corollaire 1.5.1.

Dans un espace vectoriel de dimension n*, on a :*

- *Toute famille libre a au plus* n *éléments.*
- *Toute famille génératrice a au moins* n *éléments.*

Remarque 1.5.1.

Si $\dim E = n$*, pour montrer qu'une famille de* n *éléments est une base de* E*, il suffit de montrer qu'elle est libre ou bien génératrice.*

Théorème 1.5.2. ***(Théorème de la base incomplète)***

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n *non nul de base* $B = (e_1, ..., e_n)$ *et* $S = \{u_1, ..., u_p\}$ *une famille libre de* p *vecteurs* $(p \leq n)$*.* S *peut être complétée par* $(n - p)$ *vecteurs de la base* B *pour former une base de* E*.*

Exemple 1.5.1.

Soit $E = \mathbb{R}^4$ *muni de la base canonique* (e_1, e_2, e_3, e_4)*, où,* $e_1 = (1, 0, 0, 0)$*,* $e_2 = (0, 1, 0, 0)$*,* $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ *et* $e_4 = (0, 0, 0, 1)$*. On considère les vecteurs* $w_1 = (1, 2, 0, 0)$ *et* $w_2 = (-1, 1, 0, 0)$ *est un système libre. Complétons le, en une base de* $\mathbb{R}^4$*.*

Il est clair que

$\{w_1, w_2, e_1\}$ *est lié.*

$\{w_1, w_2, e_2\}$ *est lié.*

$\{w_1, w_2, e_3\}$ *est libre.*

$\{w_1, w_2, e_3, e_4\}$ *est libre, donc est une base de* $\mathbb{R}^4$*.*

1.6 Caractérisation des sous-espaces vectoriels de dimension finie

Proposition 1.6.1.

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *et* F *un sous-espace vectoriel de* E *:*

- $\dim F \leq \dim E$.
- $\dim F = \dim E \Longleftrightarrow F = E$.

Théorème 1.6.1.

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie et* F *un sous-espace vectoriel de* E*. Il existe un sous-espace vectoriel* G *tel que* $F \oplus G = E$*. De plus :*

$$\dim E = \dim F + \dim G.$$

Théorème 1.6.2. ***(Formule de Grassmann)***

Soit E *un espace vectoriel,* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels, de dimensions finies.*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Exemple 1.6.1.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ *considéré comme un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel avec les lois usuelles.Soient* P *défini par son équation cartésienne* $3x + 2y + z = 0$*, c'est-à-dire*

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y + z = 0\},$$

un sous-espace vectoriel de E.

Et D *défini par*

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+2z=0 \cap x-y-z=0\}.$$

Il est clair que D *est un sous-espace vectoriel de* E *et* $P\cap D=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$. *La somme est donc directe.*

Montrons à l'aide de la notion de dimension que $P\oplus D=\mathbb{R}^3$.

D'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(P+D)=\dim(P)+\dim(D)-\dim(P\cap D).$$

Or, $\dim(P)=2$, $\dim(D)=1$ *et* $\dim(P\cap D)=0$. *D'où,* $\dim(P+D)=3$. *Or,* $P+D\subset\mathbb{R}^3$ *et* $\dim(\mathbb{R}^3)=3$. *Donc* $P+D=\mathbb{R}^3$. *Ainsi,* P *et* D *sont supplémentaires.*