Chapitre 1: **Modèle Probabiliste**

1 Introduction

Les probabilités vont nous servir à modéliser une expérience aléatoire, c'est-à-dire un phénomène dont on ne peut pas prédire l'issue avec certitude, et pour lequel on décide que le dénouement sera le fait du hasard.
Exemples :
- l'enfant à naître sera une fille,
- l'équipe de CSS va battre EST lors du prochain match qui les opposera,
- le lancé d'un dé (va faire un nombre pair?).

La première tâche qui vous attend est de décrire les différentes issues possibles de cette expérience aléatoire. Puis on cherche à associer à chacune de ces éventualités un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance qu'elles ont de se réaliser. Comment interpréter ce nombre, appelé probabilité? Il existe plusieurs manières de voir.
Exemple:
On lance un dé. Quelle est la probabilité de A="obtenir un chiffre pair"? Chaque face du dé a la même chance, et il y en a 6. Quant aux chiffres pairs, ils sont 3. D'où, $P(A) = 3/6 = 1/2$.

Univers, événements

On étudie une expérience aléatoire. L'univers décrit tous les résultats possibles de l'expérience. Chacun de ces résultats est appelé événement elementaire. On note souvent l'univers par Ω et un résultat élémentaire ω. Un événement est un sous-ensemble de Ω, ou une reunion d'evenements elementaires. On dit qu'un evenement est réalisé si un des événements élémentaires qui le constitue est réalisé. Les événements sont des ensembles, représentés souvent par des lettres capitales.
Exemples :
- Match CSS-EST : $\Omega = \{$CSS gagne, EST gagne, match nul$\}$. Donc Ω est compos'e de trois événements élémentaires. On peut considérer par exemple l'évènement qui correspond à "EST ne gagne pas".
- On lance un dé : $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$. On peut s'intèresser 'a l'événement A="on obtient un chiffre pair", ie $A = \{2, 4, 6\}$.
- On lance deux des : $\Omega = \{1, ..., 6\}\{1, ..., 6\} = \{(i, j) : 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$. Ici, un événement élémentaire ω est un couple (i, j), ou' i repr'esente le résultat du premier dé et j celui du second.
- On lance trois fois une pièce de monnaie. Les événements élémentaires vont décrire le plus précisément possible le résultat de cette expérience. Donc un événement élémentaire ω est un triplet (r_1, r_2, r_3) qui donne les résultats des trois lancers (dans l'ordre). L'événement B : "on obtient pile au deuxième lancer" est

$$B = \{(f, p, f), (f, p, p), (p, p, f), (p, p, p)\}$$

L'événement B est réalisé si on obtient l'un des événements élémentaires listés ci-avant.

notations	**vocabulaire ensembliste**	**vocabulaire probabiliste**
Ω	ensemble plein	événement certain
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
ω	élément de Ω	événement élémentaire
A	sous-ensemble de Ω	évńement
$\omega \in A$	ω appartient à A	ω réalise A
$A \subset B$	A inclus dan B	A implique B
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
A^c ou $\overline{A}$	complémentaire de A	événement contraire de A
$A \cup B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatible

♣ **Exercice 1:** Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule de l'urne. On note :
A : " Tirer une boule blanche ".
B : " Tirer une boule ni blanche ni rouge ".
C : "Tirer une boule noire ou une boule rouge ".
1) A et B sont-ils incompatibles?
2) B et C sont-ils incompatibles?
3) Traduire par une phrase ne comportant pas de négation $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
✓ *Solution:*
1) A et B sont incompatibles car une boule ne peut être simultanément blanche et non blanche.
2) B et C ne sont pas incompatibles car le tirage d'une boule noire les réalise simultanément.
3) L'événement $\overline{A}$ est " tirer une boule noire ou rouge ", et L'événement $\overline{B}$ est " tirer une boule blanche ou rouge ".

Probabilité

La probabilité d'un événement est une valeur numérique qui représente la proportion de fois où l'événement va se réaliser, quand on répète l'expérience dans des conditions identiques. On peut déduire de cette définition qu'une probabilité doit être entre 0 et 1 et que la probabilité d'un événement est la somme des probabilités de chacun des événement élémentaires qui le constituent. Enfin, la somme des probabilités de tous les éléments de Ω est 1. Important : rappelons qu'un événement n'est rien d'autre qu'une partie de Ω. Une probabilité associe à chaque événement un nombre entre 0 et 1. Il s'agit donc d'une application de l'ensemble des parties de Ω, noté $P(\Omega)$, dans $[0,1]$. Exemple : soit $\Omega = \{0,1,2\}$. Construisons $P(\Omega)$.

$$P(\Omega) = \{\Omega, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \emptyset\}$$

Definition 1.1. *Une probabilité est une application sur $P(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω , telle que :*
-$0 \leq P(A) \leq 1$ *pour tout événement* $A \subset \Omega$.
-$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$.

-$P(\Omega) = 1$

Que signifie "un événement A a pour probabilité..."?
0,95 : A va très probablement se produire.
0,03 : A a très peu de chance d'être réalisé.
4: incorrect.
-2 : incorrect.
0,4: A va se produire dans un peu moins de la moitié des essais.
0,5: une chance sur deux.
0 : aucune chance que A soit réalisé.

Proposition 1.2. *Soit A et B deux événement*

1. *Si A et B sont incompatible, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
3. $P(\emptyset) = 0$.
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemple important : probabilité uniforme.
Soit Ω un ensemble fini. Il arrive, comme quand on lance un dé équilibré, que les événement élémentaires ont tous la même probabilité. On parle alors d'événement élémentaires équiprobables. Notons p la probabilité de chaque événement élémentaire. Alors

$$1 = P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p = p.card(\Omega)$$

d'où $p = P(\omega) = \dfrac{1}{card(\Omega)}$, pour tout ω. La probabilité ainsi définie sur l'ensemble s'appelle probabilité uniforme. La probabilité d'un événement A

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

Attention ! Cette formule n'est valable que lorsque les événement élémentaire sont bien équiprobables. Dans ce cas, il suffit de savoir calculer le cardinal des ensembles considérés pour calculer les probabilités.

♣**Exercice 2**
On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On note :
A l'événement : "La carte choisie est un pique".
B l'événement : "La carte choisie est rouge (cur ou carreau)".
C l'événement : "La carte choisie est une figure (valet, dame, roi)".
1) Présenter un modle probabiliste décrivant l'expérience aléatoire.
2) Déterminer les probabilités des événements A,B,C,$A \cap B$,$B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$.
3) Déterminer la probabilité de l'événement D "La carte choisie n'est ni un pique ni une figure".
✓ *Solution:*

1) On note Ω l'univers des possibles, ensemble des 32 cartes du jeu. Ainsi $card\Omega = 32$. Il y a équiprobabilité des tirages de cartes.
2) $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{3 \times 4}{32} = \frac{3}{8}$
$P(A \cap B) = 0$ car une carte ne peut être simultanment rouge et pique,
$P(B \cap C) = \frac{card(B \cap C)}{card(\Omega)} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$,
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 0 = \frac{3}{4}$,
$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{32} = \frac{23}{32}$,
3) On cherche $P(\overline{A \cup C}) = 1 - P(A \cup C) = 1 - \frac{23}{32} = \frac{9}{32}$.

Indépendence et conditionnement

Definition 1.3. *Etant donnés deux événements A et B avec $P(A) > 0$. On appelle probabilité de B conditionnement à A, ou sachant A, la probabilité notée $P(B|A)$ définie par*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On peut écrire aussi $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$.

Exemple: Dans une classe, la probabilité de tomber sur un garon majeur est $P(G \cap M) = 0,26$. La probabilité de tomber sur un élève majeur est $P(M) = 0,8$.
La probabilité de tomber sur un garon sachant que l'élève est majeur est $P(G|M) = \frac{P(G \cap M)}{P(M)} = \frac{0,26}{0,8} = 0,325$.

Proposition 1.4. ***(Formule des probabilités totales)*** *Soit A un événement tel que $0 < P(A) < 1$. Pour tout événement B, on a*

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})$$

Definition 1.5. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements. On l'appelle partition de Ω si elle vérifie les deux conditions:*
(i) $\cup_{i \in I} A_i = \Omega$
(ii) les A_i sont deux à deux incompatibles : pour tous $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Proposition 1.6. ***(Formules des probabilités totales généralisé)*** *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition de Ω (Système complet dévenement), telle que $P(A_i) > 0$, pour tout $i \in I$. Alors, pour tout événement B,*

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i).$$

♣ **Exercice 3:** Trois usines U_1, U_2 et U_3 produisent des pneux. u_1 produit 50%
u_2 produit 30%
u_3 produit 20%
On suppose que

2% des pneux produisent par u_1 sont défectueux.
5% des pneux produisent par u_2 sont défectueux.
10% des pneux produisent par u_3 sont défectueux.
On tire un pneu au hazard du stock. Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux? ✓
Solution:
Soit U_i $1 \leq i \leq 3$ l'évenement"la preuve provient de l'urne u_i"
D "le pneu est défectueux". On a
$P(U_1) = 0,5$; $P(U_2) = 0,3$; $P(U_3) = 0,2$
$P(D|U_1) = 0,02$; $P(D|U_2) = 0,05$; $P(D|U_3) = 0,1$
$P(D) = P(D|U_1)P(U_1) + P(D|U_2)P(U_2) + P(D|U_3)P(U_3) = 0,01 + 0,015 + 0,02 = 0,045$
Donc la probabilité $4,5\%$.

Proposition 1.7. ***(Formules de Bayes)*** *Soient A et B deux événements tels que $0 < P(A) < 1$ et $P(B) > 0$. Alors*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})}$$

♣ **Exercice 4:** Deux opérateurs de saisie, A et B, entrent respectivement 100 et 200 tableaux sur informatique. Les tableaux de A comportent des fautes dans $5,2\%$ des cas et ceux de B dans $6,7\%$ des cas. On prend un tableau au hasard. Il comporte des fautes. Quelle est la probabilité pour que A se soit occupé de ce tableau?
✓ *Solution:*
Soient les événements:
$T_A =$" le tableau est entré par A",
$T_B = \overline{(T_A)}$" le tableau est entré par B",
F=" le tableau comporte des fautes".
D'après le théorème de Bayes,

$$\begin{aligned} P(T_A|F) &= \frac{P(F|T_A)P(T_A)}{P(F|T_A)P(T_A) + P(F|T_B)P(T_B)} \\ &= \frac{0,052 \times 1/3}{0,052 \times 1/3 + 0,067 \times 2/3} = 0,279 \end{aligned}$$

Definition 1.8. *Deux événements A et B sont dits indépendants si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$