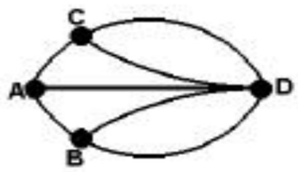
TD n° 3 (Révision)

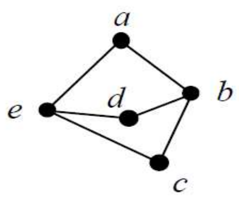
Exercice 1

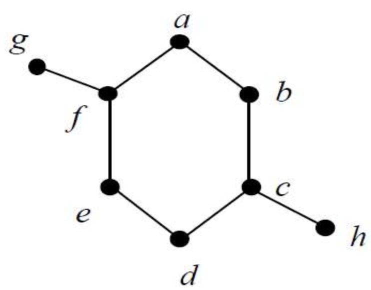
Sept ponts enjambent la Pregel, reliant quatre quartiers de la ville.
Les habitants se demandent s'il existe un trajet leur permettant d'emprunter une seule fois tous les ponts.
Euler modélise le problème et ouvre ainsi une nouvelle théorie.
Les quartiers sont les sommets du graphe, les ponts les arêtes. Il y a quatre sommets (l'ordre du graphe est 4), au sommet A arrivent trois arêtes (le degré de A est 3).
Le problème posé induit deux questions : existe-t-il un trajet partant d'un point donné, passant par toutes les arêtes une et une seule fois (chaîne eulérienne) ? Ou bien existe-t-il une chaîne eulérienne revenant au point de départ (cycle eulérien) ?
Le théorème d'Euler énonce qu'un graphe non orienté admet une chaîne eulérienne si et seulement s'il est connexe et admet zéros ou deux sommets impairs. Si tous les sommets sont pairs, il s'agit de cycle eulérien.
À Königsberg, rebaptisée depuis Kaliningrad, il y a deux nouveaux ponts, l'un entre B et C et l'autre entre B et A. Y-a-t-il une chaîne eulérienne ?
Où faudrait-il construire un autre pont pour obtenir un cycle eulérien ?



Exercice 2

On ne sait pas toujours trouver le nombre minimum de couleurs pouvant colorer un graphe (le « Nombre chromatique » du graphe) ; des algorithmes existent qui donnent un nombre de couleurs possible, ce nombre n'étant pas forcément le plus petit.
Voici un algorithme de coloration de graphes.
On range les sommets dans l'ordre décroissant de leurs degrés : $s1$, $s2$, $s3$ … sn.
On colorie ces sommets dans l'ordre précédemment défini avec pour règle de donner à chaque sommet la couleur la plus petite (on suppose les couleurs numérotées dans l'ordre croissant), en fonction des sommets voisins qui sont déjà colorés.
Appliquer cet algorithme aux deux graphes représentés ci-dessous.

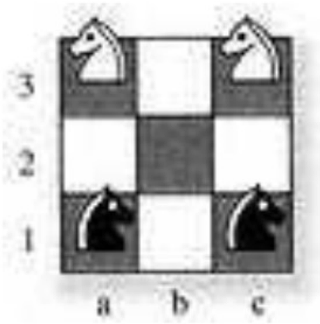




Comparer, pour chaque graphe, le nombre de couleurs obtenues avec son nombre chromatique.

Exercice 3

Sur un échiquier 3×3, les deux cavaliers noirs sont placés sur les cases a1 et c1, les deux cavaliers blancs occupant les cases a3 et c3. Aidez-vous d'un graphe pour déterminer les mouvements alternés des blancs et des noirs qui permettront aux cavaliers blancs de prendre les places des cavaliers noirs, et vice versa. Les blancs commencent.



Exercice 4

Une compagnie fabriquant des Climatiseurs et des Ventilateurs voudrait connaitre le nombre optimal de produits finis à fabriquer par semaine pour maximiser son profit hebdomadaire. Elle vous demande de l'aider en vous informant que les heures-machine et heures de Main d'œuvre sont limitées comme indiqué dans le tableau suivant :

	Heures-Machine h/unité	**Heures-Main d'œuvre h/unité**	**Profit unitaire**
Climatiseurs	2	2	25 DT
Ventilateurs	3	1	15 DT
Total	240	140	

Formuler ce problème sous la forme d'un programme linéaire.

Exercice 5

Résoudre cet exercice graphiquement puis à l'aide de la méthode du simplex :

$$(\mathbf{P_1})\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Max } z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 9 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}\right.$$