INSTITUT INTERNATIONAL TECHNOLOGIE

Université Nord Américaine privée

Cours d'algèbre linéaire

Chapitre 1 : Polynômes

Licence GLSI

Semestre : S1

Abdessattar LAFI

Table des matières

Chapitre 1

Polynômes

1.1 Généralités sur les polynômes

1.1.1 Définitions

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1. *(**Polynômes**)*

*Un **polynôme** à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme*

$$P(X) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i,$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0,\ a_1,\ .\ .\ .\ ,\ a_n \in \mathbb{K}$.

- *L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.*
- *Les a_i sont appelés les **coefficients** du polynôme.*
- *Si tous les coefficients a_i sont nuls, P est appelé le **polynôme nul**, il est noté 0.*

Exemple 1.1.1.

- $X^3 - 5X + \frac{3}{4}$ *est un polynôme.*
- $X^2 + \sqrt{2X} - 1$ *n'est pas un polynôme.*
- $\frac{X^3-X+1}{X+13}$ *n'est pas un polynôme.*

Définition 1.1.2. *(**Opérations sur** $\mathbb{K}[X]$)*

On définit les opérations suivantes sur les polynômes : Soient les polynômes $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$, $Q = b_0 + b_1X + ... + b_mX^m \in \mathbb{K}[X]$ *et le scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$P + Q = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i)X^i$$

$$\lambda.P = \lambda.a_0 + \lambda.a_1X + ... + \lambda.a_nX^n = \sum_{i=0}^{n} \lambda.a_iX^i$$

$$P \times Q = \sum_{k=0}^{n+m} c_kX^k \text{ où } c_k = \sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j}.$$

Avec la généralisation $a_k = 0 \ \ \forall k \geq n+1$, $b_k = 0 \ \ \forall k \geq m+1$.

1.1.2 Degré d'un polynôme

Définition 1.1.3.

Les polynômes comportant un seul terme non nul (du type a_kX^k*) sont appelés* ***monômes****.*

Définition 1.1.4. ***(Degré d'un polynôme, terme dominant)***

Soit un polynôme $P = a_0 + ... + a_pX^p \in \mathbb{K}[X]$ *avec* $a_p \neq 0$.

- *On appelle* ***degré de*** P *et on note* $deg(P)$ *l'entier* p.
- *Par convention, le* ***degré du polynôme nul*** *est* $-\infty$.
- *On appelle* ***terme dominant de*** P *le monôme* a_pX_p. *Le coefficient* a_p *est appelé le* ***coefficient dominant*** *de* P.
- *Si le coefficient dominant est* $a_p = 1$, *on dit que* P *est un polynôme* ***unitaire****.*
- *Un polynôme de la forme* $P = a_0$ *avec* $a_0 \in \mathbb{K}$ *est appelé un polynôme* ***constant****. Si* $a_0 \neq 0$, *son degré est* 0.

Théorème 1.1.1. ***(Degré d'un produit, degré d'une somme)***

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, *on a :*

(i) $deg(P + Q) \leq \max\big(deg(P), deg(Q)\big)$.

(ii) $deg(P \times Q) = deg(P) + deg(Q)$.

Preuve

(i) • Si $P = Q = 0$ alors $degP = degQ = -\infty$ et $deg(P+Q) = -\infty$ et la formule est prouvée dans ce cas.

• Si P ou Q est non nul alors, supposant, quitte à interchanger P et Q, que $P \neq 0$, on a : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ où $n = \max\big(deg(P), deg(Q)\big)$ et où les a_k pour $k \in \{1, ..., n\}$ ne sont pas tous nuls (en l'occurence, les b_k peuvent être tous nuls). On a donc :

$$P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k.$$

Si $a_n + b_n \neq 0$ alors,

$$deg(P+Q) = \max\big(deg(P), deg(Q)\big)$$

et sinon

$$deg(P+Q) \leq \max\big(deg(P), deg(Q)\big).$$

(ii) • Si $P = 0$ ou $Q = 0$ alors $PQ = 0$.

Ainsi,

$$deg(PQ) = -\infty = degP + degQ.$$

• Sinon, on suppose que : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ où $a_n \neq 0$ et où $b_m \neq 0$. Par conséquent, $n = degP$ et $m = degQ$. Soit $k \in \{0, ..., n+m\}$. Notons c_k le coefficient d'indice k dans PQ. D'après la définition du produit de deux polynômes, on a : $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$.

Nécessairement, $deg(PQ) \leq m + n$. Mais le coefficient d'indice $m + n$ dans PQ est $a_n b_m \neq 0$.

Donc,

$$deg(P \times Q) = deg(P) + deg(Q).$$

$\square$

Remarque 1.1.1.

Si $deg(P) \neq deg(Q)$, *alors* $deg(P+Q) = \max\big(deg(P), deg(Q)\big)$.

Exemple 1.1.2.

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

• *Si par exemple $P = 3X^4$ et $Q = -3X^4$, alors on obtient que $deg(P+Q) = deg(0) = -\infty < \max\big(deg(P), deg(Q)\big)$.*

• *Si par exemple $P = 2X - 5$ et $Q = -2X + 3X^4$, alors on obtient que $deg(P+Q) = deg(-5+3X^4) = 4 = \max\big(deg(P), deg(Q)\big)$.*

Définition 1.1.5. ***(Composition de deux polynômes)***

Soient deux polynômes P, $Q \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$. On définit le polynôme composé de Q par P, noté $P \circ Q$, par :

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k.$$

Proposition 1.1.1.

Soient deux polynômes non nuls P, $Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

$$deg(P \circ Q) = deg(P) \times deg(Q).$$

Preuve Supposons que $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$. Comme $P \neq 0$, on a $a_n \neq 0$. Alors $P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$ et $deg(P \circ Q) = degQ^n = ndegQ = degP \times degQ$ car $Q \neq 0$. □

1.2 Division euclidienne

Définition 1.2.1. ***(Divisibilité)***

Soient deux polynômes A, $B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A divise B ou que B est un multiple de A si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = QA$. On le note $A \mid B$. On dit qu'un diviseur de A est trivial s'il est de la forme λA ou bien λ avec λ un scalaire non nul.

Exemple 1.2.1.

• *$(X-1)$ divise $X^2 - 2X + 1$. En effet : $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$.*

• *$(X-1)$ divise $X^2 - 1$. En effet : $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.*

• *$(1-X)$ divise $1 - X^{n+1}$. En effet : $1 - X^{n+1} = (1 + X + X^2 + ... + X^n)(1-X)$.*

Proposition 1.2.1.

Soient A, B, $C \in \mathbb{K}[X]$.

(i) Si $A \mid B$ et $B \mid A$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $A = \lambda B$.

(ii) Si $A \mid B$ et $B \mid C$ alors $A \mid C$.

(iii) Si $C \mid A$ et $C \mid B$ alors $C \mid (AU + BV)$, $\forall U,\, V \in \mathbb{K}[X]$.

Définition 1.2.2.

On dit qu'un polynôme P est irréductible si $degP \geq 1$ et tous les diviseurs de P sont triviaux. Autrement dit, si un polynôme A divise P, alors $A = \lambda \in \mathbb{K}$, soit $A = \lambda P$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Théorème 1.2.1. ***(Division euclidienne des polynômes)*** *Soient $A,\, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$, alors il existe un unique polynôme Q et il existe un unique polynôme R tels que :*

$$A = BQ + R \quad et \quad degR < degB.$$

Q est appelé le **quotient** et R le **reste** et cette écriture est la **division euclidienne** de A par B.

Notez que la condition $degR < degB$ signifie $R = 0$ ou bien $0 \leq degR < degB$.

Enfin $R = 0$ si et seulement si $B \mid A$.

Preuve Unicité. Si $A = BQ + R$ et $A = BQ' + R'$, alors $B(Q - Q') = R' - R$. Or $deg(R' - R) < degB$. Donc $Q' - Q = 0$. Ainsi $Q = Q'$, d'où aussi $R = R'$.

Existence. On montre l'existence par récurrence sur le degré de A.

• Si $degA = 0$ et $degB > 0$, alors A est une constante, on pose $Q = 0$ et $R = A$. Si $degA = 0$ et $degB = 0$, on pose $Q = \frac{A}{B}$ et $R = 0$.

• On suppose l'existence vraie lorsque $degA \leq n-1$. Soit $A = a_n X^n + ... + a_0$ un polynôme de degré n ($a_n \neq 0$). Soit $B = b_m X^m + ... + b_0$ avec $b_m \neq 0$. Si $n < m$ on pose $Q = 0$ et $R = A$.

Si $n \geq m$ on écrit $A = B.\frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + A_1$ avec $degA_1 \leq n - 1$. On applique l'hypothèse de récurrence à A_1 : il existe Q_1, $R1 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A_1 = BQ_1 + R_1$ et $degR_1 < degB$. Il vient :

$$A = B\Big(\frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + Q_1\Big) + R_1.$$

Donc $Q = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + Q_1$ et $R = R_1$ conviennent. $\square$

Exemple 1.2.2. *Si* $A = 2X^4 - X^3 - 2X^2 + 3X - 1$ *et* $B = X^2 - X + 1$. *Alors on trouve* $Q = 2X^2 + X - 3$ *et* $R = -X + 2$. *On n'oublie pas de vérifier qu'effectivement* $A = BQ + R$.

1.3 Division selon les puissances croissantes

Théorème 1.3.1. ***(Division selon les puissances croissantes)***

Soient A *et* B *deux polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$. *On suppose que le terme constant de* B *n'est pas nul et on note* p *un entier supérieur ou égal au degré de* B. *Il existe un unique couple de polynômes* (Q, R) *tels que*

$$A = BQ + X^{p+1}R \quad et \quad degQ \leq p.$$

Par exemple : $\underbrace{1 + 3X + 2X^2 - 7X^3}_{A} = \underbrace{(1 + X - 2X^2)}_{B}\underbrace{(1 + 2X + 2X^2 - 5X^3)}_{Q} + X^4\underbrace{(9 - 10X)}_{R}$.

1.4 Racines d'un polynôme

Définition 1.4.1.

A chaque polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$, *on associe la fonction*

$$\begin{aligned} \widehat{P} : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \end{aligned}$$

appellée fonction polynomiale de P *et on dit que* $a \in \mathbb{K}$ *est une racine de* P *si et seulement si* $\widehat{P}(a) = 0$, *dans la suite on notera* $P(a)$ *au lieu de* $\widehat{P}(a)$.

Proposition 1.4.1.

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $a \in \mathbb{K}$ *:* a *est une racine de* P *si et seulement si* $X - a$ *divise* P.

Preuve Effectuons la division euclidienne de P par $X - a$: $P = (X - a)Q + R$ où le $degR < deg(X - a)$. Le polynôme R est donc soit le polynôme nul soit le polynôme constant. L'évaluation en a indique que : $R = R(a) = P(a) = 0$. On déduit la proposition.

□

Remarques 1.4.1. *(i) Un polynôme, non nul de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au maximum n racines.*

(ii) Tout polynômes qui admet un nombre de racines supérieur strictement à son degré est nul, en particulier tout polynôme qui admet une infinité de racines est nul

1.5 Factorisation

1.5.1 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème 1.5.1. ***(de d'Alembert-Gauss)***

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine.

Corollaire 1.5.1.

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement de degré 1. En particulier, dans $\mathbb{C}[X]$ tout polynôme P de degré $n \geq 1$ se factorise sous la forme suivante :

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_i),$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\forall k \in \{1, ..., n\}$, $a_k \in \mathbb{C}$.

Par exemple, $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$ et $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \overline{j})$.

1.5.2 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition 1.5.1.

Soit a une racine d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors $\overline{a}$ est aussi une racine de P.

Preuve Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si $a \in \mathbb{C}$, alors $P(\overline{a}) = \overline{P(a)}$ et par conséquent si $a \in \mathbb{C}$ est une racine de P alors $\overline{a}$ est une racine de P. □

Théorème 1.5.2.

Dans $\mathbb{R}[X]$, tout polynômes de degré $n \geq 1$ se factorise sous la forme :

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{m} (X - a_k) \prod_{l=1}^{p} (X^2 + \alpha_l X + \beta_l),$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \{1, ..., m\}$ $a_k \in \mathbb{R}$ et $\forall l \in \{1, ..., p\}$ $\alpha_l^2 - 4\beta_l < 0$, $m + 2p = n$.

Preuve Le résultat est evident pour un polynôme de degré 0 ou 1. Si $degP \geq 2$, on applique l'algorithme suivant :

Si P admet une racine réelle a, alors il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-a)Q$

Sinon (théorème de d'Alembert-Gauss) P admet une racine complexe $a \in \mathbb{C}$. Par conséquent $\overline{a}$ est aussi une racine de P. Donc $P = (X^2 - 2\Re(a)X + |a|^2)Q$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\Delta = -4Im(a)^2 < 0$. □

On remarquera que X^2+1 et X^2+X+1 sont irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = (X^2+1)(X^2+X+1)$ n'est pas irréductible et qu'il ne possède pas de racines.

1.5.3 Ordre de multiplicité

Définition 1.5.1.

Si $a \in \mathbb{K}$ est une racine du polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, le plus grand entier $m \geq 1$ tel que $(X-a)^m$ divise P est appelé ordre de multiplicité de la racine a.

Proposition 1.5.2.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$. Si P admet r racines 2 à 2 distinctes $a_1, a_2, \ldots, a_r$ dans $\mathbb{K}$, d'ordre de multiplicité $m_1, m_2, \ldots, m_r$ alors $m_1 + m_2 + ... + m_r \leq n$.

Par exemple, dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = (X^2+3)(X-1)^2(X+2)$ est de degré 5 et possède une racine simple et une racine double $(1+2 = 3 \leq 5)$. Dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme P possède 4 racines trois simples et un double et $P = (X+i\sqrt{3})(X-i\sqrt{3})(X-1)^2(X+2)$.

Définition 1.5.2.

Un polynôme non constant est dit sindé si la somme des ordres de multiplicité de ses racines est égale au degré de ce polynôme.