Órgãos de Máquinas
Tribologia – Formulário

Carlos M. C. G. Fernandes

Equação de Reynolds

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\right)}_{\text{Poiseuille}}=\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho h\frac{U_1+U_2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho h\frac{W_1+W_2}{2}\right)}_{\text{Couette}}+$$
$$\underbrace{-\rho U_2\frac{\partial h}{\partial x}-\rho W_2\frac{\partial h}{\partial z}+\rho\left(V_2-V_1\right)}_{\text{Esmagamento}}+\underbrace{h\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{Expansão local}}$$

As equações seguintes foram obtidas após derivar os termos de Couette e agrupar os denominadores comuns.

Equação de Reynolds em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6\rho(U_1-U_2)\frac{\partial h}{\partial x}+6\rho(W_1-W_2)\frac{\partial h}{\partial z}+$$
$$6\rho h\frac{\partial}{\partial x}(U_1+U_2)+6\rho h\frac{\partial}{\partial z}(W_1+W_2)+12\rho(V_2-V_1)+12h\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Equação de Reynolds em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho r h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\rho h^3}{\eta r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)=6r\rho(U_1-U_2)\frac{\partial h}{\partial r}+6\rho(V_2-V_1)\frac{\partial h}{\partial \theta}+$$
$$6rh\frac{\partial}{\partial r}(\rho(U_1+U_2))+6h\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho(V_2+V_1))+12\rho r(W_1-W_2)+12h\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Chumaceiras radiais em regime laminar

Hipóteses: escoamento laminar, isotérmico e permanente. Ranhura axial de alimentação situada no ponto de espessura máxima do filme lubrificante.

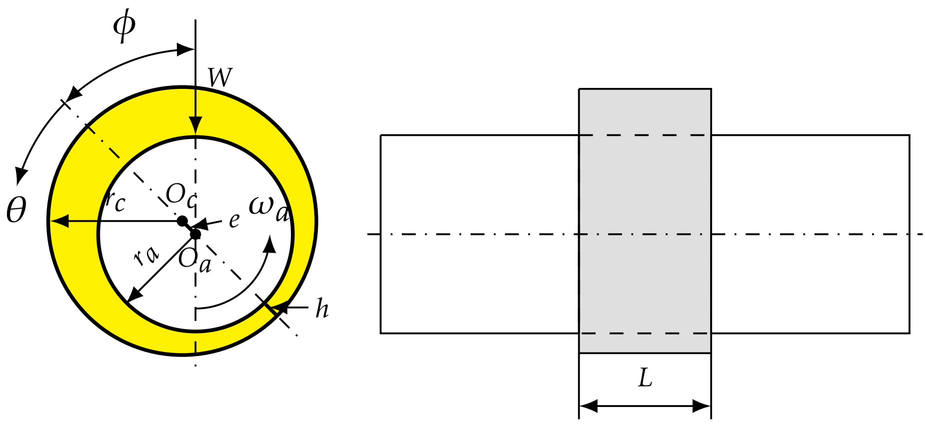

Figura 1: Chumaceira radial.

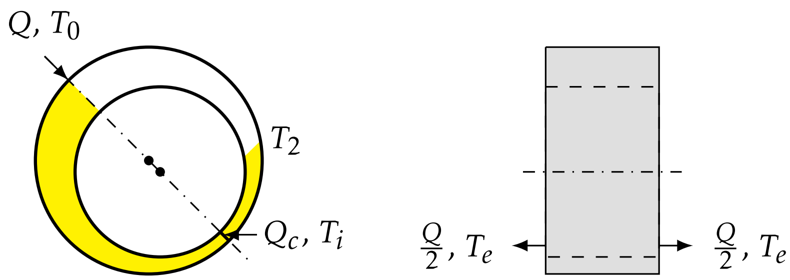

Figura 2: Problema térmico da chumaceira radial.

Equações:

$$C_a = R \cdot W \cdot f_a$$

$$\overline{C_a} = \frac{1}{S}\frac{R}{c} \cdot f_a$$

$$P_a = C_a \cdot \omega_a$$

$$\overline{Q} = \frac{Q}{LcV}$$

$$Q_c = h_{min} \cdot L \cdot \frac{V}{2}$$

$$S = \left(\frac{R}{c}\right)^2 \cdot \left(\frac{\eta \cdot L \cdot V}{\pi \cdot W}\right)$$

$$T_2 = T_0 + \frac{\alpha \cdot P_a \cdot (Q+Q_c)}{\rho \cdot c_p \cdot Q \cdot \left(\frac{Q}{2}+Q_c\right)}$$

$$T_e = \frac{T_0 \cdot Q + T_2 \cdot Q_c}{Q+Q_c}$$

$$T_i = \frac{T_e+T_2}{2}$$

$$V = \omega_a \cdot R$$

$$c = r_c - r_a$$

$$e = \overline{O_a O_c}$$

$$\overline{f} = \frac{R}{c} \cdot f_a = \frac{C_a}{cW}$$

$$f_a = \frac{c}{R} \cdot \overline{f} = \frac{C_a}{RW}$$

$$h = c \cdot (1 + \epsilon \cdot \cos\theta)$$

$$\epsilon = \frac{e}{c}$$

Tabela 1: Notação e unidades para as chumaceiras radiais.

C_a	momento das forças de atrito sobre o veio	$\mathrm{N\,m}$
$\overline{C_a}$	momento adimensional das forças de atrito sobre o veio	-
D	diâmetro da chumaceira	m
L	comprimento da chumaceira	m
P_a	perda de potência devido ao atrito	W
Q	débito axial	$\mathrm{m^3\,s^{-1}}$
Q_c	débito da chumaceira	$\mathrm{m^3\,s^{-1}}$
$\overline{Q}$	débito axial adimensional	-
R	raio da chumaceira	m
S	número de Sommerfeld	-
T_0	temperatura de alimentação do lubrificante	°C
T_2	temperatura de saída do lubrificante	°C
T_e	temperatura de saída do lubrificante pelos bordos	°C
T_i	temperatura média do filme lubrificante	°C
V	velocidade linear	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
W	carga aplicada	N
c	folga radial	m
c_p	calor específico do lubrificante	J/(kgK)
e	excentricidade	m
$\overline{f}$	número de atrito sobre o veio	-
f_a	coeficiente de atrito sobre o veio	-
h	espessura de filme	m
h_{min}	espessura de filme mínima	m
α	coeficiente de dissipação térmica das superfícies	-
ϵ	excentricidade relativa	-
η	viscosidade dinâmica (Figura 3)	$\mathrm{Pa\,s}$
ϕ	ângulo de posicionamento	°
ω_a	velocidade angular do veio	$\mathrm{rad\,s^{-1}}$
ρ	densidade do lubrificante	$\mathrm{kg\,m^{-3}}$

Tabela 2: $\frac{L}{D} < \frac{1}{6}$

ϵ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
$S\left(\frac{L}{D}\right)^2$	0.99	0.461	0.272	0.17	0.106	0.0625	0.033	0.0139	0.00331	0.000812
ϕ	83	75	68	61	54	47	39	31	21	15
$\overline{f}\left(\frac{L}{D}\right)^2$	18.75	8.514	4.98	3.14	2.016	1.25	0.722	0.355	0.114	0.038
$\overline{C_a}$	18.94	18.47	18.31	18.50	19.02	20.02	21.89	25.55	34.58	47.79

Tabela 3: $\frac{L}{D} = \frac{1}{4}$

ϵ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
S	16.2	7.57	4.49	2.83	1.78	1.07	0.58	0.263	0.0728	0.0221
ϕ	82.5	75.5	68.5	61.5	54	47	39.5	31.5	21.5	15.5
$\frac{R}{c} \cdot f_a$	307	140	82.5	52.67	34.26	21.85	13.19	6.97	2.70	1.20
$\frac{Q}{L \cdot c \cdot V}$	0.0983	0.196	0.295	0.393	0.491	0.590	0.688	0.787	0.885	0.933
$\overline{C_a}$	18.95	18.49	18.37	18.61	19.24	20.42	22.74	26.50	37.09	54.30

Tabela 4: $\frac{L}{D} = \frac{1}{2}$

ϵ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
S	4.32	2.03	1.21	0.784	0.508	0.318	0.184	0.0912	0.0309	0.0116
ϕ	82	75	68.5	61.53	55	48	41	33	23.5	17
$\frac{R}{c} \cdot f_a$	82.10	37.71	22.55	14.75	9.94	6.67	4.33	2.59	1.27	0.70
$\frac{Q}{L \cdot c \cdot V}$	0.0938	0.187	0.281	0.374	0.468	0.562	0.657	0.751	0.845	0.890
$\overline{C_a}$	19	18.57	18.64	18.81	19.57	20.97	23.53	28.40	41.10	60.34

Tabela 5: $\frac{L}{D} = 1$

ϵ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
S	1.33	0.631	0.388	0.260	0.178	0.120	0.0776	0.0443	0.0185	0.00831
ϕ	79.5	74	68	62.5	56.5	50.5	44	36	26	19
$\frac{R}{c} \cdot f_a$	25.36	11.87	7.35	5.07	3.67	2.70	1.99	1.40	0.859	0.563
$\frac{Q}{L \cdot c \cdot V}$	0.0801	0.159	0.237	0.314	0.390	0.466	0.542	0.616	0.688	0.721
$\overline{C_a}$	19.06	18.81	18.94	19.50	20.62	22.50	25.64	31.60	46.43	67.75

Tabela 6: $\frac{L}{D} = 2$

ϵ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
S	0.559	0.271	0.173	0.122	0.0893	0.0654	0.0463	0.0297	0.0143	0.00707
ϕ	75	71	67	62.5	58	52.5	46.5	39	29	21
$\frac{R}{c} \cdot f_a$	10.76	5.21	3.40	2.50	1.96	1.60	1.31	1.04	0.730	0.517
$\frac{Q}{L \cdot c \cdot V}$	0.0537	0.104	0.153	0.199	0.243	0.285	0.329	0.369	0.406	0.422
$\overline{C_a}$	19.25	19.22	19.65	20.49	21.95	24.46	28.29	35.01	51.05	73.12

Tabela 7: $\frac{L}{D} > 4$ $\overline{Q} = 0$

ϵ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
S	0.247	0.123	0.0823	0.0628	0.0483	0.0389	0.0297	0.0211	0.0114	0.00605
ϕ	69	67	64	62	58	54	49	42	32	23
$\frac{R}{c} \cdot f_a$	5.02	2.61	1.84	1.47	1.25	1.10	0.98	0.852	0.658	0.494
$\overline{C_a}$	19.54	19.85	20.68	22.03	24.03	26.89	31.39	38.80	55.42	78.42

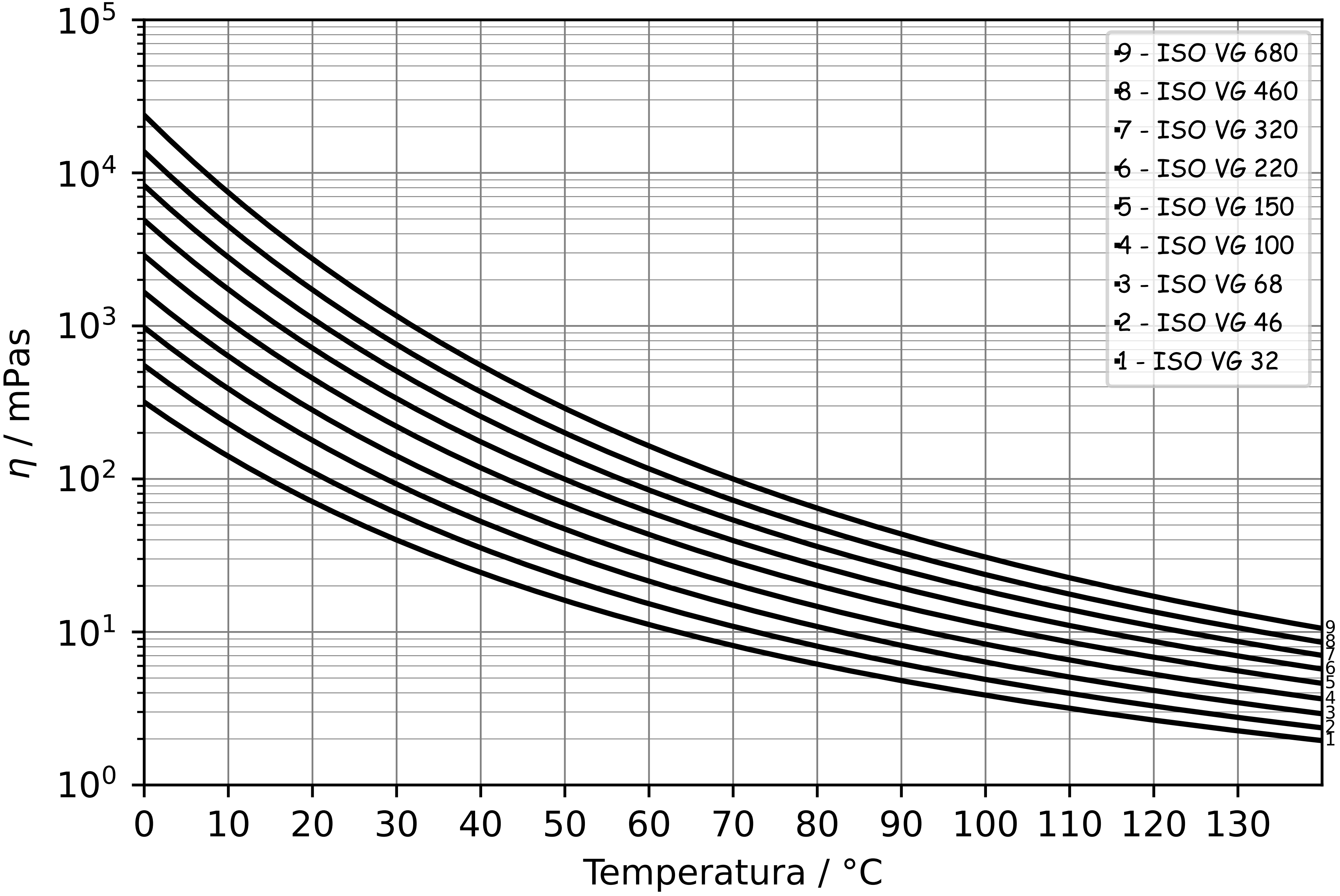

Figura 3: Viscosidade dinâmica de lubrificantes ISO VG.

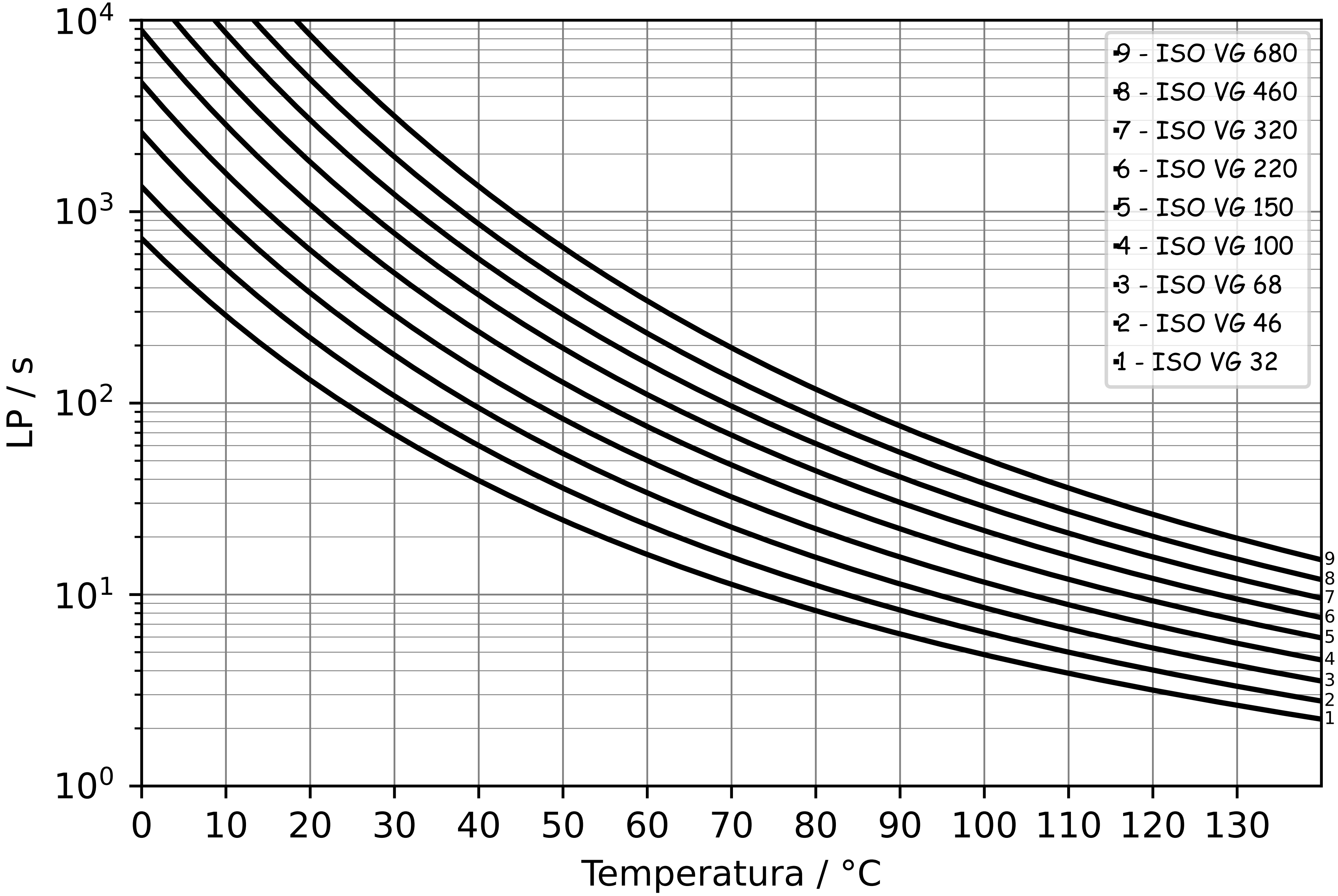

Figura 4: Parâmetro do lubrificante de lubrificantes ISO VG.

Teoria de Cheng

Rolamentos

$$h = C \cdot D \cdot [LP \cdot N]^{0.74}$$

$$\Lambda = \frac{h}{\sigma}$$

Tabela 8: Notação e unidades para rolamentos.

C	constante geométrica (Tabela 9)	-
D	diâmetro exterior do rolamento	m
N	diferença de velocidades dos anéis interior e exterior	rpm
LP	parâmetro do lubrificante (Figura 4)	s
h	espessura de filme	µm
α	coeficiente de piezoviscosidade	Pa^{-1}
η	viscosidade dinâmica (Figura 3)	Pa s
Λ	espessura especifica de filme	-
σ	rugosidade composta (Tabela 10)	µm

Tabela 9: Constante geométrica C para anéis de rolamentos.

Tipo de rolamento	Anel interior	Anel exterior
Esferas	8.65×10^{-4}	9.43×10^{-4}
Rolos cilíndricos ou rolos esféricos	8.37×10^{-4}	8.99×10^{-4}
Cónicos ou agulhas	8.01×10^{-4}	8.48×10^{-4}

Tabela 10: Valores típicos de rugosidade composta σ para rolamentos.

Tipo de rolamento	σ / µm
Esferas	0.178
Rolos ou esféricos	0.356
Rolos cónicos ou agulhas	0.229

Um valor razoável para Λ de modo a proteger as superfícies dos rolamentos de avarias precoces é de $\Lambda \geq 1.5$.

Came-impulsor

$$h = 4.35 \times 10^{-3} \left[f_N \cdot LP \cdot N \right]^{0.74} \cdot R^{0.26}$$

$$\Lambda = \frac{h}{\sigma}$$

$$f_N = \begin{cases} |2 \cdot r_n - l| & \text{com escorregamento} \\ 2l & \text{sem escorregamento} \end{cases}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_f}$$

Tabela 11: Notação e unidades para sistemas came-impulsor.

N	velocidade angular da came	rpm
LP	parâmetro do lubrificante (Figura 4)	s
R	raio de curvatura equivalente	m
h	espessura de filme	µm
f_N	fator de distância	m
l	distância máxima do ponto de contacto ao eixo da came	m
r_f	raio do impulsor	m
r_n	menor raio de curvatura da came	m
α	coeficiente de piezoviscosidade	Pa^{-1}
η	viscosidade dinâmica (Figura 3)	Pa s
Λ	espessura especifica de filme	-
σ	rugosidade composta	µm

Os sistemas came-impulsor operam geralmente em regime de lubrificação mista ou limite ($\Lambda < 1$).

Engrenagens

$$h = \left[G \cdot LP \cdot N \cdot \left(\frac{W_t}{l} \right)^{-0.148} \right]^{0.74}$$

$$\Lambda = \frac{h}{\sigma}$$

$$E = 2 \left[\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right]^{-1}$$

Tabela 12: Equações de Cheng para engrenagens

	Tipo de engrenagem	N	G	$\frac{W_t}{l}$	V
Eixos fixos	Paralelos externos[1]	n_2	$\frac{3.4\times10^{-4}\cdot(u\cdot a\cdot sin\alpha)^{1.5}\cdot E^{0.148}}{(u+1)^2}$	$\frac{T_2\cdot(u+1)}{u\cdot a\cdot b\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\beta}$	$\frac{2\cdot\pi\cdot u\cdot a\cdot n_2}{60\cdot(u+1)}$
	Paralelos internos[1]	n_a	$\frac{3.4\times10^{-4}\cdot(u\cdot a\cdot sin\alpha)^{1.5}\cdot E^{0.148}}{(u-1)^2}$	$\frac{T_a\cdot(u-1)}{u\cdot a\cdot b\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\beta}$	$\frac{2\cdot\pi\cdot u\cdot a\cdot n_a}{60\cdot(u-1)}$
	Cónicas[2] $\Sigma = 90°$	n_2	$\frac{3.4\times10^{-4}\cdot(r_{m2}\cdot sin\alpha)^{1.5}\cdot E^{0.148}}{(u^2+1)^{0.25}}$	$\frac{T_2}{r_{m2}\cdot b\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\beta_m}$	$\frac{2\cdot\pi\cdot r_{m2}\cdot n_2}{60}$
	Cónicas[2] $\Sigma \neq 90°$	n_2	$\frac{3.4\times10^{-4}\cdot(r_{m2}\cdot sin\alpha)^{1.5}\cdot E^{0.148}}{(\cos\gamma_2+u\cdot\cos\gamma_1)^{0.5}}$	$\frac{T_2}{r_{m2}\cdot b\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\beta_m}$	$\frac{2\cdot\pi\cdot r_{m2}\cdot n_2}{60}$
Planetários	Sol-Planeta[1]	$\lvert n_s - n_c\rvert$	$\frac{(r_s\cdot sin\alpha)^{1.5}\cdot E^{0.148}}{3.4\times10^4}\cdot\left(\frac{r_a-r_s}{r_a+r_s}\right)^{0.5}$	$\frac{T_s}{n_p\cdot r_s\cdot b\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\beta}$	$\frac{2\cdot\pi\cdot r_s\cdot\lvert n_s-n_c\rvert}{60}$
	Anel-Planeta[1]	$\lvert n_a - n_c\rvert$	$\frac{(r_a\cdot sin\alpha)^{1.5}\cdot E^{0.148}}{3.4\times10^4}\cdot\left(\frac{r_a-r_s}{r_a+r_s}\right)^{0.5}$	$\frac{T_a}{n_p\cdot r_a\cdot b\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\beta}$	$\frac{2\cdot\pi\cdot r_a\cdot\lvert n_a-n_c\rvert}{60}$

[1] Dentado reto $\beta = 0$
[2] Direitas "zerol" $\beta_m = 0$

Tabela 13: Valores típicos de rugosidade composta σ / para engrenagens.

Acabamento	Valor inicial / µm	Após rodagem / µm
Fresadas	1.78	1.02
"Shaved"	1.27	1.02
Retificadas (suave)	0.89	-
Retificadas (forte)	0.51	-
Polidas	0.18	-

O valor crítico de Λ varia com a velocidade tangencial da engrenagem V. O seu valor crítico para o qual existem 5% de probabilidades de avaria é dado, de forma experimental, pelo gráfico na Figura 5.

Tabela 14: Notação e unidades para engrenagens.

a	entre eixo	m
b	largura do dente	m
E	módulo de Young equivalente	Pa
E_1	módulo de Young do material do pinhão	Pa
E_2	módulo de Young do material da roda	Pa
G	parâmetro geométrico (Tabela 12)	-
h	espessura de filme	µm
LP	parâmetro do lubrificante (Figura 4)	s
n_2	velocidade angular da roda	rpm
n_a	velocidade angular do anel	rpm
n_c	velocidade angular do porta satélites	rpm
n_p	número de satélites (planetas)	-
n_s	velocidade angular do sol	rpm
r_{m2}	raio primitivo da roda na meia face	m
r_a	raio primitivo do anel	m
r_s	raio primitivo do sol	m
T_2	binário da roda	N m
T_s	binário do sol	N m
T_a	binário do anel	N m
u	razão de multiplicação da engrenagem	-
V	velocidade tangencial (Tabela 12)	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
W_t/l	carga por unidade de comprimento (Tabela 12)	$\mathrm{N\,m^{-1}}$
α	ângulo de pressão	°
β	ângulo de hélice	°
β_m	ângulo espiral na meia face	°
γ_1	ângulo do cone do pinhão	°
γ_2	ângulo do cone da roda	°
ν_1	coeficiente de Poisson do material do pinhão	-
ν_2	coeficiente de Poisson do material da roda	-
Λ	espessura especifica de filme	-
σ	rugosidade composta (Tabela 13)	µm

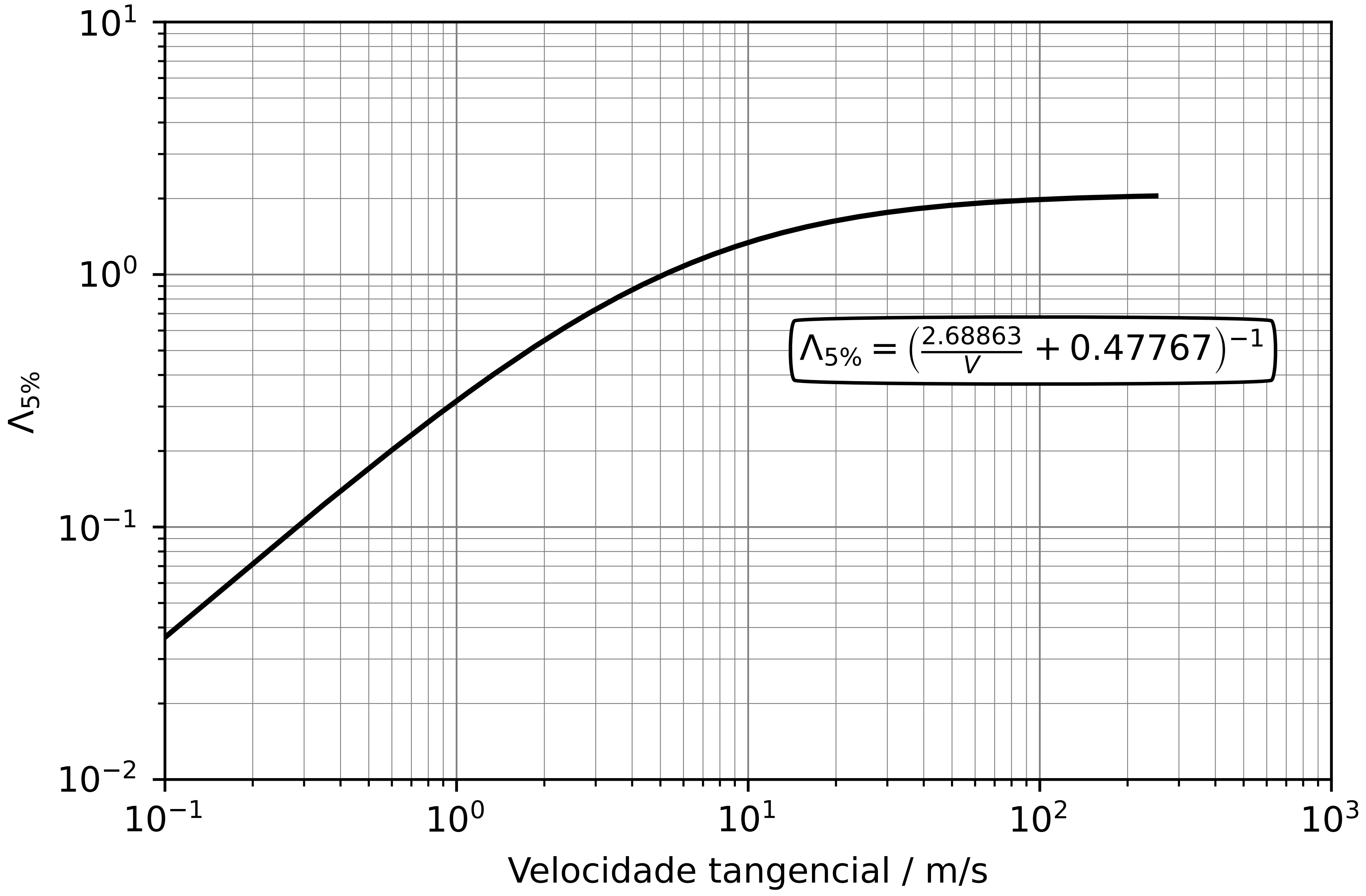

Figura 5: Valor crítico de Λ em função da velocidade tangencial para uma probabilidade de avaria de 5%