Para obter $\operatorname{inv}\alpha' = \operatorname{inv}\alpha + 2 \cdot \tan\alpha \cdot \frac{x_1+x_2}{z_1+z_2}$, fazer:

$$\begin{cases} p' = s_1' + s_2' \Leftrightarrow p' = r_1' \cdot \left[\frac{s_1}{r_1} + 2 \cdot (\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha')\right] + r_2' \cdot \left[\frac{s_2}{r_2} + 2 \cdot (\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha')\right] \\ p \cdot \cos\alpha = p' \cdot \cos\alpha' \Leftrightarrow p' = p \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} \end{cases}$$

Igualando as duas equações do sistema:

$$p \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} = r_1' \cdot \left[\frac{s_1}{r_1} + 2 \cdot (\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha')\right] + r_2' \cdot \left[\frac{s_2}{r_2} + 2 \cdot (\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha')\right]$$

Substituindo r_1' por $r_1 \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}$ e r_2' por $r_2 \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}$:

$$p \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} = r_1 \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} \cdot \left[\frac{s_1}{r_1} + 2 \cdot (\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha')\right] + r_2 \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} \cdot \left[\frac{s_2}{r_2} + 2 \cdot (\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha')\right]$$

Recordando que o passo $p = \pi \cdot m$ e $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}$ é comum a todos os termos da equação:

$$\pi \cdot m = r_1 \cdot \left[\frac{s_1}{r_1} + 2 \cdot (\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha')\right] + r_2 \cdot \left[\frac{s_2}{r_2} + 2 \cdot (\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha')\right]$$

Substituindo r_1 por $\frac{z_1 \cdot m}{2}$ e r_2 por $\frac{z_2 \cdot m}{2}$:

$$\pi \cdot m = \frac{z_1 \cdot m}{2} \cdot \left[\frac{\pi \cdot m/2 + 2 \cdot x_1 \cdot m \cdot \tan\alpha}{\frac{z_1 \cdot m}{2}} + 2 \cdot (\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha')\right] + \frac{z_2 \cdot m}{2} \cdot \left[\frac{\pi \cdot m/2 + 2 \cdot x_2 \cdot m \cdot \tan\alpha}{\frac{z_2 \cdot m}{2}} + 2 \cdot (\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha')\right]$$

Simplificando o módulo m por ser comum a todos os termos da equação:

$$\pi = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot x_1 \cdot \tan\alpha + z_1 \cdot (\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha') + \frac{\pi}{2} + 2 \cdot x_2 \cdot \tan\alpha + z_2 \cdot (\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha')$$

Agrupando os termos comuns:

$$\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2 \cdot (x_1 + x_2) \cdot \tan\alpha + (z_1 + z_2) \cdot (\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha')$$

$$(z_1 + z_2) \cdot (\operatorname{inv}\alpha' - \operatorname{inv}\alpha) = 2 \cdot (x_1 + x_2) \cdot \tan\alpha$$

Passando o somatório do número de dentes para o lado direito da igualdade:

$$(\operatorname{inv}\alpha' - \operatorname{inv}\alpha) = 2 \cdot \tan\alpha \cdot \frac{x_1+x_2}{z_1+z_2}$$

Escrevendo a equação em função da $\operatorname{inv}\alpha'$, c.q.d:

$$\boxed{\operatorname{inv}\alpha' = \operatorname{inv}\alpha + 2 \cdot \tan\alpha \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2}}$$