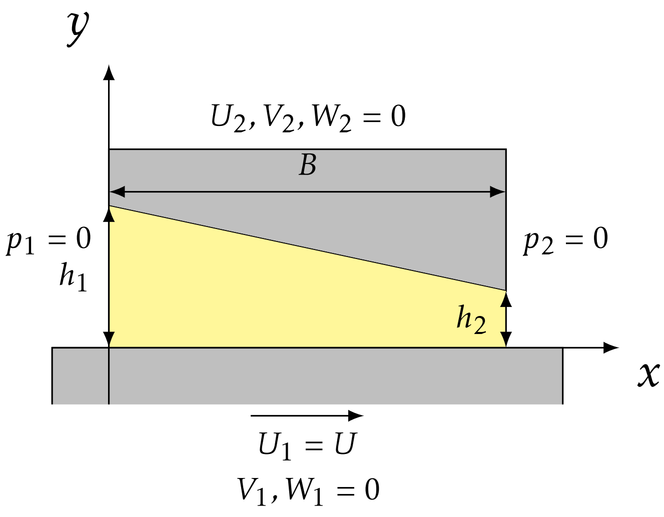
Órgãos de Máquinas
Tribologia – Aula TP 1

Carlos M. C. G. Fernandes

1 Exercício

A existência de um convergente juntamente com o movimento relativo dos maciços é o motor para a geração de capacidade de sustentação hidrodinâmica.

Considere o patim inclinado da figura seguinte de largura infinita (L) segundo oz. A placa inferior (1) está animada de uma velocidade $U1 = U$ de valor constante e o patim de comprimento B segundo ox está parado. Considere que a viscosidade é constante e considere que o fluido é incompressível.



1. Obtenha a equação da distribuição de pressão no interior do contacto
2. Calcule a capacidade de carga do patim

3. Calcule o caudal na direção xx

4. Verifique o equilíbrio de forças no patim

5. Aplicação numérica*:
   $L = 5\,\text{mm}$
   $B = 100\,\text{mm}$
   $h_1 = 0.1\,\text{mm}$
   $h_2 = 0.05\,\text{mm}$
   $U = 1\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$
   $\eta = 40\,\text{mPa}\,\text{s}$

   * verifique novamente as simplificações da equação de Reynolds

1.1 Equação de Reynolds

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\right)}_{\text{Poiseuille}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho h\frac{U_1+U_2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho h\frac{W_1+W_2}{2}\right)}_{\text{Couette}} + \underbrace{-\rho U_2\frac{\partial h}{\partial x}-\rho W_2\frac{\partial h}{\partial z}+\rho\left(V_2-V_1\right)}_{\text{Esmagamento}} + \underbrace{h\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{Expansão local}} \tag{1}$$

1.2 Equação de Reynolds para o patim hidrodinâmico

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\cancelto{a}{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\right)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cancelto{d}{\rho} h\frac{U_1+\cancelto{c}{U_2}}{2}\right)+\cancelto{b,c,d}{\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho h\frac{W_1+W_2}{2}\right)} + \cancelto{c}{-\rho U_2\frac{\partial h}{\partial x}} + \cancelto{c}{-\rho W_2\frac{\partial h}{\partial z}} + \cancelto{c}{\rho\left(V_2-V_1\right)} + \cancelto{d}{h\frac{\partial \rho}{\partial t}} \tag{2}$$

a) "infinitamente" longo segundo z;

b) espessura de filme constante segundo z;

c) superfícies imóveis: U_2, V_1, V_2, W_1, W_2;

d) fluído incompressível: ρ constante;

Após simplificação da equação (2), obtemos a equação (3).

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h U_1}{2}\right) \tag{3}$$

Devemos agora derivar os termos da equação (3), e obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{U_1}{2} + \cancel{\frac{h}{2}\frac{\partial U_1}{\partial x}} \tag{4}$$

Considerando que não há variação de velocidade ao longo de xx, a equação de Reynolds fica finalmente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 6U\frac{\partial h}{\partial x} \tag{5}$$

1.3 Campo de pressão

Como pretendemos conhecer o campo de pressões segundo xx, integramos ambos os lados da equação a equação (5) e obtemos a equação (6), com C_1 como constante de integração.

$$\frac{h^3}{\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 6Uh + C_1 \tag{6}$$

$$\frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{6U}{h^2} + \frac{C_1}{h^3} \tag{7}$$

Consideremos que $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$ para $x = x_m$ e $h = h_m$:

$$0 = \frac{6U}{{h_m}^2} + \frac{C_1}{{h_m}^3} \tag{8}$$

Deste modo podemos conhecer a constante de integração C_1:

$$\frac{C_1}{{h_m}^3} = -\frac{6U}{{h_m}^2} \Leftrightarrow C_1 = -6Uh_m \tag{9}$$

Agora podemos escrever a equação (7) como:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 6\eta U\left(\frac{1}{h^2} - \frac{h_m}{h^3}\right) = 6\eta U\frac{h - h_m}{h^3} \tag{10}$$

A altura do filme lubrificante ao longo da direção x pode ser escrito como a equação de uma reta:

$$h = mx + b \tag{11}$$

Sendo $b = h_1$ e m o declive do patim inclinado dado pela equação (12):

$$m = \frac{h_1 - h_2}{0 - B} = \frac{h_2 - h_1}{B} \tag{12}$$

A altura do patim em função de x é então:

$$h = \frac{h_2 - h_1}{B} x + h_1 \tag{13}$$

Derivando a altura em ordem a x:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{h_2 - h_1}{B} \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \frac{B}{h_2 - h_1} \mathrm{d}h \tag{14}$$

A derivada $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ pode ser escrita como:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = 6\eta U \frac{h - h_m}{h^3} \tag{15}$$

Substituindo o valor de $\mathrm{d}x$ obtido na equação (14) obtemos:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = 6\eta U \frac{h - h_m}{h^3} \frac{B}{h_2 - h_1} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}h} \tag{16}$$

Integrando a equação (16) obtemos o campo de pressão como função da altura do lubrificante:

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} \mathrm{d}h = \int 6\eta U \frac{h - h_m}{h^3} \frac{B}{h_2 - h_1} \mathrm{d}h \tag{17}$$

Assim obtemos a equação (18) com C_2 como constante de integração.

$$p(h) = 6\eta U \frac{B}{h_2 - h_1} \left(-\frac{1}{h} + \frac{h_m}{2h^2} \right) + C_2 \tag{18}$$

Para $x = 0$, a altura é $h = h_1$ e a pressão é $p = 0$:

$$0 = 6\eta U \frac{B}{h_2 - h_1} \left(-\frac{1}{h_1} + \frac{h_m}{2{h_1}^2} \right) + C_2 \Leftrightarrow C_2 = -6\eta U \frac{B}{h_2 - h_1} \left(-\frac{1}{h_1} + \frac{h_m}{2{h_1}^2} \right) \tag{19}$$

Para $x = B$, a altura é $h = h_2$ e a pressão é $p = 0$:

$$0 = 6\eta U \frac{B}{h_2 - h_1} \left(-\frac{1}{h_2} + \frac{h_m}{2{h_2}^2} \right) - 6\eta U \frac{B}{h_2 - h_1} \left(-\frac{1}{h_1} + \frac{h_m}{2{h_1}^2} \right) \tag{20}$$

$$0 = 6\eta U \frac{B}{h_2 - h_1}\left(-\frac{1}{h_2} + \frac{h_m}{2{h_2}^2} + \frac{1}{h_1} - \frac{h_m}{2{h_1}^2}\right) \tag{21}$$

$$0 = -\frac{1}{h_2} + \frac{h_m}{2{h_2}^2} + \frac{1}{h_1} - \frac{h_m}{2{h_1}^2} \tag{22}$$

$$\frac{h_m}{2{h_1}^2} - \frac{h_m}{2{h_2}^2} = -\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_1} \tag{23}$$

$$h_m \frac{{h_2}^2 - {h_1}^2}{2{h_1}^2{h_2}^2} = \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2} \tag{24}$$

$$h_m = \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2}\frac{2{h_1}^2{h_2}^2}{{h_2}^2 - {h_1}^2} \tag{25}$$

$$h_m = \frac{2h_1 h_2 (h_2 - h_1)}{{h_2}^2 - {h_1}^2} = \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2} \tag{26}$$

Uma vez determinado C_2 e h_m podemos escrever a equação do campo de pressão, equação (27).

$$p(h) = 6\eta U \frac{B}{h_2 - h_1}\left(-\frac{1}{h} + \frac{1}{2h^2}\frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2}\right) - 6\eta U \frac{B}{h_2 - h_1}\left(-\frac{1}{h_1} + \frac{1}{2{h_1}^2}\frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2}\right) \tag{27}$$

$$p = 6\eta U \frac{B}{h_2 - h_1}\left(-\frac{1}{h} + \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h_1} - \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}\frac{1}{{h_1}^2}\right) \tag{28}$$

$$p = 6\eta U \frac{B}{h_2 - h_1}\left(-\frac{1}{h} + \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h_1} - \frac{h_2}{h_1 + h_2}\frac{1}{h_1}\right) \tag{29}$$

Após simplificação, a equação vem finalmente:

$$\boxed{p = 6\eta U \frac{B}{h_2 - h_1}\left(-\frac{1}{h} + \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h_1 + h_2}\right)} \tag{30}$$

O gradiente de pressão segundo xx é:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 6\eta U\left(\frac{1}{h^2} - \frac{2h_1 h_2}{(h_1 + h_2)h^3}\right) \tag{31}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{6\eta U}{h^3}\left(h - \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2}\right)} \tag{32}$$

1.4 Capacidade de carga

Para se conhecer a capacidade de carga do patim hidrodinâmico é necessário integrar o campo de pressão na superfície de contacto. Uma vez que o campo de pressão obtido previamente é função de h, vem que:

$$W = \int p(x)\,\mathrm{d}S = \int_0^B L \cdot p(x)\,\mathrm{d}x = \int_{h_1}^{h_2} p(h)\, L \frac{B}{h_2 - h_1}\,\mathrm{d}h \tag{33}$$

$$W = L \frac{B}{h_2 - h_1} \int_{h_1}^{h_2} 6\eta U \frac{B}{h_2 - h_1} \left(-\frac{1}{h} + \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h_1 + h_2} \right) \mathrm{d}h \tag{34}$$

$$W = 6\eta U L \left(\frac{B}{h_2 - h_1} \right)^2 \int_{h_1}^{h_2} \left(-\frac{1}{h} + \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h_1 + h_2} \right) \mathrm{d}h \tag{35}$$

$$W = 6\eta U L \left(\frac{B}{h_2 - h_1} \right)^2 \left[-\ln(h) - \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \frac{1}{h} + \frac{h}{h_1 + h_2} \right]_{h_1}^{h_2} \tag{36}$$

$$W = 6\eta U L \left(\frac{B}{h_2 - h_1} \right)^2 \left[\ln\left(\frac{h_1}{h_2} \right) - \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} \right) + \frac{h_2 - h_1}{h_1 + h_2} \right] \tag{37}$$

$$W = 6\eta U L \left(\frac{B}{h_2 - h_1} \right)^2 \left[\ln\left(\frac{h_1}{h_2} \right) - \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \frac{h_1 - h_2}{h_2 h_2} + \frac{h_2 - h_1}{h_1 + h_2} \right] \tag{38}$$

Par ao patim inclinado em análise a capacidade de carga é:

$$\boxed{W = 6\eta U L \left(\frac{B}{h_2 - h_1} \right)^2 \left[\ln\left(\frac{h_1}{h_2} \right) - 2 \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \right]} \tag{39}$$

1.5 Campo de velocidades

O termo de ordem 1 da equação de Navier-Stokes segundo xx é:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \tag{40}$$

Integrando a equação (40) podemos obter o gradiente da velocidade segundo xx - equação (41).

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{C_1}{\eta} \tag{41}$$

Integrando novamente obtemos o campo de velocidade segundo xx, tal como pedido - equação (42).

$$u = \frac{y^2}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x} + C_1\frac{y}{\eta} + C_2 \tag{42}$$

Como condições fronteira, temos que para $y = 0$, a velocidade do fluido é $u = U$. Para $y = h$ a velocidade do fluido é nula, $u = 0$. Assim obtemos as constantes de integração C_1 e C_2:

$$U = \frac{0^2}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x} + C_1\frac{0}{\eta} + C_2 \Leftrightarrow C_2 = U \tag{43}$$

$$0 = \frac{h^2}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x} + C_1\frac{h}{\eta} + U \Leftrightarrow C_1 = -\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\eta U}{h} \tag{44}$$

Conhecidas as constantes de integração, o campo de velocidades é:

$$u = \frac{y^2}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x} + \left(-\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\eta U}{h}\right)\frac{y}{\eta} + U \tag{45}$$

$$u = \frac{y^2 - yh}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{Uy}{h} + U \tag{46}$$

$$\boxed{u = \frac{y^2 - yh}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{h-y}{h}U} \tag{47}$$

1.6 Caudal

Para determinar o caudal segundo xx temos de integrar o campo de velocidades

$$Q = \int u \, \mathrm{d}S = \int_0^h L \cdot u \, \mathrm{d}y \tag{48}$$

$$Q = L\int_0^h \left(\frac{y^2 - yh}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{h-y}{h}U\right)\mathrm{d}y \tag{49}$$

$$Q = L\left[\frac{2y^3 - 3y^2h}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2yh - y^2}{2h}U\right]_0^h \tag{50}$$

$$Q = L\left[\frac{2h^3 - 3h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2h^2 - h^2}{2h}U\right] \tag{51}$$

$$Q = L\left[\frac{-h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{hU}{2}\right] \tag{52}$$

Para $h = h_m$ sabemos que o gradiente de pressão segundo xx é $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, então:

$$Q = L\frac{h_m U}{2} \tag{53}$$

O débito segundo xx para o patim inclinado é dado pela equação (54).

$$\boxed{Q = LU\frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}} \tag{54}$$

1.7 Tensões de corte

Utilizando a Lei de Newton da viscosidade, sabemos que a tensão de corte no fluido é o produto da viscosidade dinâmica pela taxa de deformação do fluido:

$$\tau_{yx} = \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{55}$$

O gradiente da velocidade $\frac{\partial v}{\partial x} \approx 0$, logo:

$$\tau_{yx} = \eta\frac{\partial u}{\partial y} = \eta\left(\frac{2y}{2\eta} - \frac{h}{2\eta}\right)\frac{\partial p}{\partial x} - \eta\frac{U}{h} \tag{56}$$

$$\tau_{yx} = \frac{1}{2}(2y - h)\frac{\partial p}{\partial x} - \eta\frac{U}{h} \tag{57}$$

Para $y = 0$, vem que:

$$\tau_{yx} = \frac{1}{2}(2 \times 0 - h)\frac{\partial p}{\partial x} - \eta\frac{U}{h} \tag{58}$$

$$\tau_{yx} = -\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x} - \eta\frac{U}{h} \tag{59}$$

$$\tau_{yx} = -\frac{h}{2}\frac{6\eta U}{h^3}\left(h - \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2}\right) - \eta\frac{U}{h} \tag{60}$$

Recordando que $h_m = \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2}$

$$\tau_{yx} = -\frac{3\eta U}{h^2}(h - h_m) - \eta\frac{U}{h} \tag{61}$$

$$\tau_{yx} = \eta U\left(\frac{3h_m}{h^2} - \frac{3}{h} - \frac{1}{h}\right) \tag{62}$$

$$\boxed{\tau_{yx} = \eta U\left(\frac{3h_m}{h^2} - \frac{4}{h}\right)} \tag{63}$$

1.8 Força tangencial

A força tangencial deve-se às tensões de corte. Então podemos escrever a força tangencial como:

$$F_t = -\int \tau_{yx}\,\mathrm{d}S = -\int_0^B \tau_{yx} L\,\mathrm{d}x = -\int_{h_1}^{h_2} \tau_{yx} L\frac{B}{h_2 - h_1}\,\mathrm{d}h \tag{64}$$

$$F_t = -\int_{h_1}^{h_2} \eta U\left(\frac{3h_m}{h^2} - \frac{4}{h}\right) L\frac{B}{h_2 - h_1}\,\mathrm{d}h \tag{65}$$

$$F_t = \eta UL\frac{B}{h_2 - h_1}\int_{h_1}^{h_2}\left(\frac{4}{h} - \frac{3h_m}{h^2}\right)\mathrm{d}h \tag{66}$$

$$F_t = \eta UL\frac{B}{h_2 - h_1}\left[4ln(h) + 3\frac{h_m}{h}\right]_{h_1}^{h_2} \tag{67}$$

$$F_t = \eta UL\frac{B}{h_2 - h_1}\left(4ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right) + 3\frac{h_m}{h_2} - \frac{3h_m}{2h_1}\right) \tag{68}$$

$$F_t = \eta UL\frac{B}{h_2 - h_1}\left[4ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right) + 3\frac{2h_1h_2}{(h_1 + h_2)}\left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1}\right)\right] \tag{69}$$

$$F_t = \eta UL\frac{B}{h_2 - h_1}\left[4ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right) + 6\frac{h_1h_2}{h_1 + h_2}\frac{h_1 - h_2}{h_1h_2}\right] \tag{70}$$

A força tangencial para o patim inclinado é então:

$$\boxed{F_t = \eta UL\frac{B}{h_2 - h_1}\left[4ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right) + 6\frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}\right]} \tag{71}$$

1.9 Coeficiente de atrito

O coeficiente de atrito é a razão entre a força tangencial e a carga normal:

$$\mu = \frac{F_t}{W} \tag{72}$$

$$\mu = \frac{\eta U L \frac{B}{h_2 - h_1}\left[4ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right) + 6\frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}\right]}{6\eta U L\left(\frac{B}{h_2 - h_1}\right)^2\left[\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right) - 2\frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}\right]} \tag{73}$$

No caso do patim, podemos estimar o coeficiente de atrito como:

$$\boxed{\mu = \frac{h_2 - h_1}{6B}\frac{4ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right) + 6\frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}}{\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right) - 2\frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}}} \tag{74}$$

1.10 Aplicação numérica

No exemplo da aplicação numérica a razão $\frac{L}{B} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$, logo podemos considerar uma chumaceira infinitamente curta segundo zz. Nestes casos a equação de Reynolds escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6U\frac{\partial h}{\partial x} \tag{75}$$