

Órgãos de Máquinas

Engrenagens – Aula TP 3

Carlos M. C. G. Fernandes

1 Aplicação numérica

Exemplo de cálculo de características geométricas de uma engrenagem normal (sem correção de dentado), com os dados da Tabela 1.

Tabela 1: Dados da Engrenagem

z_1	20
z_2	41
m	2 mm
α	20°
b	20 mm

Tabela 2: Valores Calculados (mm)

p	6.283	
p_b	5.904	
r	20.000	41.000
r_a	22.000	43.000
r_d	17.500	38.500
r_b	18.794	38.527
a	61.000	
k	3	5
W_k	15.3209	27.7176

2 Velocidades no Engrenamento

Num dado ponto M ao longo do caminho de engrenamento $T_1 T_2$, as velocidades lineares $\overrightarrow{v_{M1}}$ e $\overrightarrow{v_{M2}}$ são perpendiculares ao vector posição do pinhão

$\overrightarrow{O_1M}$ e roda $\overrightarrow{O_2M}$ ver Figura 2.

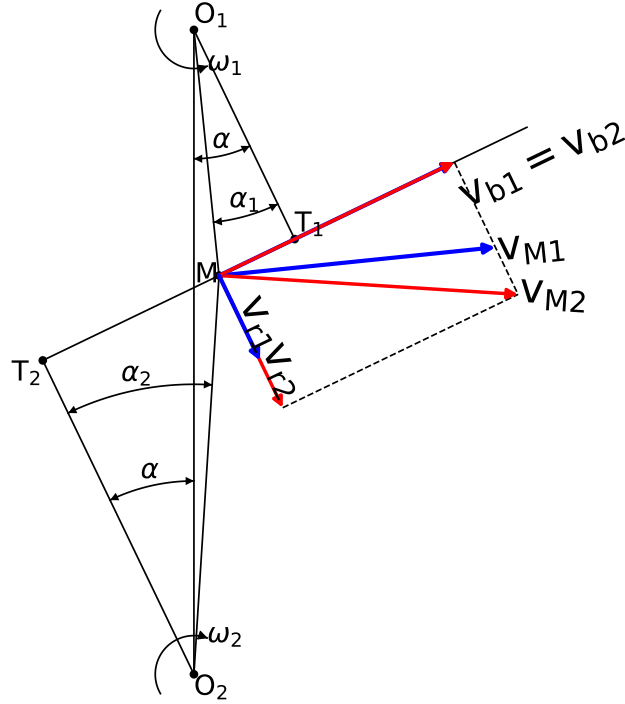


Figura 1: Velocidades num ponto M ao longo do caminho de engrenamento.

A magnitude da velocidade linear é calculada pela equação (1).

$$\begin{cases} v_{M1} = \omega_1 \cdot \overline{O_1M} = \omega_1 \cdot r_{M1} \\ v_{M2} = \omega_2 \cdot \overline{O_2M} = \omega_2 \cdot r_{M2} \end{cases} \quad (1)$$

A velocidade tangencial ao círculo de base, isto é, na direção do caminho de engrenamento, calcula-se com a equação (2).

$$\begin{cases} v_{b1} = v_{M1} \cdot \cos \alpha_1 = (\omega_1 \cdot r_{M1}) \cdot \cos \alpha_1 \\ v_{b2} = v_{M2} \cdot \cos \alpha_2 = (\omega_2 \cdot r_{M2}) \cdot \cos \alpha_2 \end{cases} \quad (2)$$

A velocidade de rolamento, que é tangencial ao contacto, calcula-se com a equação (3).

$$\begin{cases} v_{r1} = v_{M1} \cdot \sin \alpha_1 = (\omega_1 \cdot r_{M1}) \cdot \sin \alpha_1 = \omega_1 \cdot \overline{T1M} \\ v_{r2} = v_{M2} \cdot \sin \alpha_2 = (\omega_2 \cdot r_{M2}) \cdot \sin \alpha_2 = \omega_2 \cdot \overline{T2M} \end{cases} \quad (3)$$

3 Escorregamento Específico

O escorregamento específico num ponto de contacto M ao longo do caminho de engrenamento é dado para o pinhão g_{s1} (equação (4)) e roda g_{s2} (equação (5)):

$$g_{s1} = \left| \frac{\omega_1 \cdot \overline{T_1 M} - \omega_2 \cdot \overline{T_2 M}}{\omega_1 \cdot \overline{T_1 M}} \right| = \left| 1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{\overline{T_2 M}}{\overline{T_1 M}} \right| = \left| 1 - \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{T_2 M}}{\overline{T_1 M}} \right| \quad (4)$$

$$g_{s2} = \left| \frac{\omega_1 \cdot \overline{T_1 M} - \omega_2 \cdot \overline{T_2 M}}{\omega_2 \cdot \overline{T_2 M}} \right| = \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\overline{T_1 M}}{\overline{T_2 M}} - 1 \right| = \left| \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\overline{T_1 M}}{\overline{T_2 M}} - 1 \right| \quad (5)$$

Os escorregamentos específicos variam ao longo do caminho de engrenamento, para o pinhão e roda, tal como representado na Figura 2.

3.1 Escorregamento específico máximo do pinhão e da roda

Como se percebe pela Figura 2, os pontos A e B são os pontos de máximo escorregamento específico da roda e pinhão, respetivamente.

O escorregamento específico do pinhão sobre o ponto B é dado pela equação (6).

$$g_{s1_B} = \left| 1 - \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{T_2 B}}{\overline{T_1 B}} \right| = \left| 1 - \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}}{a \cdot \sin \alpha - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}} \right| = 4.270 \quad (6)$$

O escorregamento específico do pinhão sobre o ponto B é dado pela equação (7).

$$g_{s2_A} = \left| \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\overline{T_1 A}}{\overline{T_2 A}} - 1 \right| = \left| \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}}{a \cdot \sin \alpha - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}} - 1 \right| = 1.487 \quad (7)$$

O comprimento do caminho de engrenamento $T_1 T_2$ é dado pela equação (8) - ver Figura 3.

$$\overline{T_1 T_2} = \overline{T_2 T_1} = \overline{O_1 O_2} \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \alpha \quad (8)$$

A distância entre os pontos A e B e os pontos de tangência aos círculos de base T_1 e T_2 podem ser obtidos com as equações (9), (10), (11) e (12).

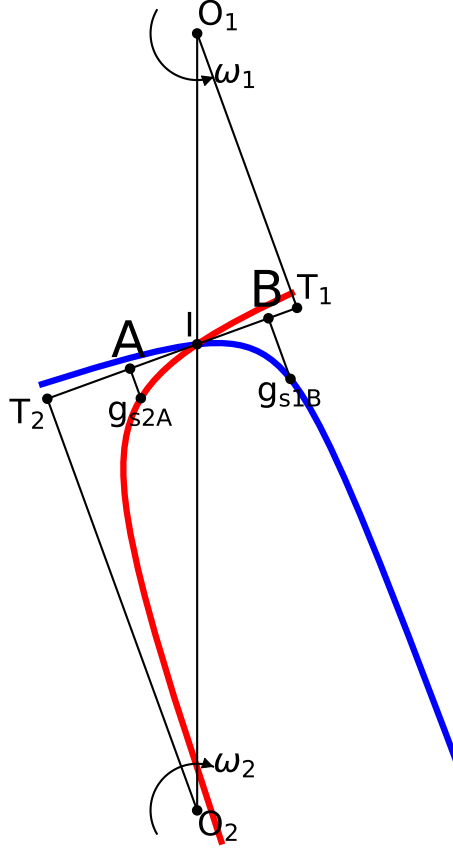


Figura 2: Escorregamento específico

$$\overline{T_1A} = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} \quad (9)$$

$$\overline{T_2A} = \overline{T_2T_1} - \overline{T_1A} = a \cdot \sin \alpha - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} \quad (10)$$

$$\overline{T_2B} = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \quad (11)$$

$$\overline{T_1B} = \overline{T_1T_2} - \overline{T_2B} = a \cdot \sin \alpha - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \quad (12)$$

Substituindo os valores da Tabela 2 na equação (17), obtemos a equação (18) e um valor de $x = 0.2511$.

O escorregamento específico do pinhão $z_1 = 20$ sobre o ponto B é dado pela equação (13).

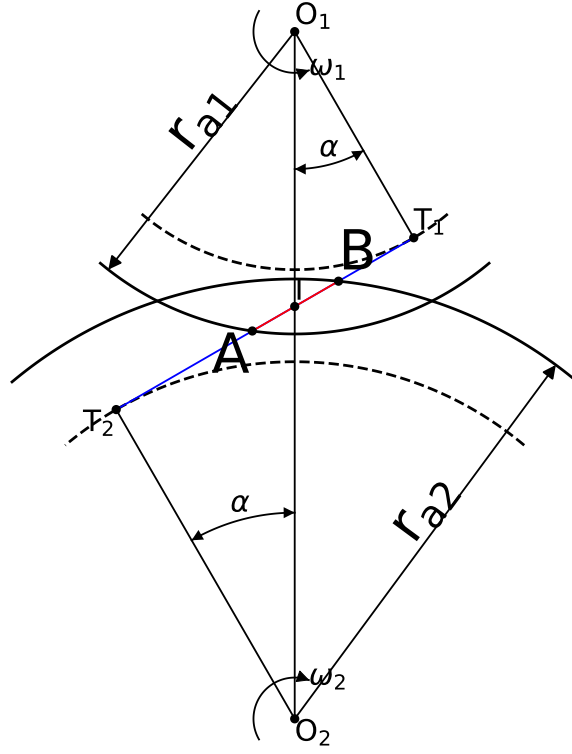


Figura 3: Caminho de Engrenamento

$$g_{s1_B} = \left| 1 - \frac{20}{41} \cdot \frac{\sqrt{43.000^2 - 38.527^2}}{61.000 \times \sin(\pi/9) - \sqrt{43.000^2 - 38.527^2}} \right| = 4.270 \quad (13)$$

O escorregamento específico da roda $z_2 = 41$ sobre o ponto A é dado pela equação (14).

$$g_{s2_A} = \left| \frac{41}{20} \cdot \frac{\sqrt{22.000^2 - 18.794^2}}{61.000 \times \sin(\pi/9) - \sqrt{22.000^2 - 18.794^2}} - 1 \right| = 1.487 \quad (14)$$

3.2 Determinar a correção que iguala os escorregamentos específicos máximos

De maneira a igualar os escorregamentos específicos máximos, é necessário introduzir a correção de dentado, fator adimensional x . Para tal, é

necessário mover os pontos A e B para a esquerda, diminuindo assim o escorregamento específico máximo do pinhão e igualando ao escorregamento específico da roda (Figura 4).

Para se verificar a igualdade da equação (15), torna-se necessário introduzir o fator adimensional x multiplicado pelo módulo m na equação (17), que afetará os raios de cabeça do pinhão e roda.

$$g_{s2A} = g_{s1B} \quad (15)$$

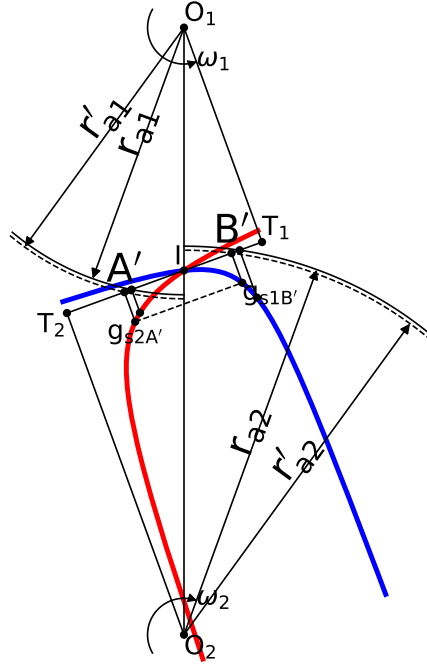


Figura 4: Igualar os escorregamentos específicos máximos.

$$\left| 1 - \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\sqrt{r_{a2}'^2 - r_{b2}^2}}{a \cdot \sin \alpha - \sqrt{r_{a2}'^2 - r_{b2}^2}} \right| = \left| \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\sqrt{r_{a1}'^2 - r_{b1}^2}}{a \cdot \sin \alpha - \sqrt{r_{a1}'^2 - r_{b1}^2}} - 1 \right| \quad (16)$$

$$\left| 1 - \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\sqrt{(r_{a2} - x \cdot m)^2 - r_{b2}^2}}{a \cdot \sin \alpha - \sqrt{(r_{a2} - x \cdot m)^2 - r_{b2}^2}} \right| = \left| \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\sqrt{(r_{a1} + x \cdot m)^2 - r_{b1}^2}}{a \cdot \sin \alpha - \sqrt{(r_{a1} + x \cdot m)^2 - r_{b1}^2}} - 1 \right| \quad (17)$$

Substituindo os valores da Tabela 2 na equação (17), obtemos a equação (18) e um valor de $x = 0.2511$.

$$\left| 1 - \frac{20}{41} \cdot \frac{\sqrt{(43.000 - x \cdot 2)^2 - 38.527^2}}{61.000 \times \sin(\pi/9) - \sqrt{(43.000 - x \cdot 2)^2 - 38.527^2}} \right| = \left| \frac{41}{20} \cdot \frac{\sqrt{(22.000 + x \cdot 2)^2 - 18.794^2}}{61.000 \times \sin(\pi/9) - \sqrt{(22.000 + x \cdot 2)^2 - 18.794^2}} - 1 \right| \quad (18)$$

4 Método gráfico

Através do ábaco da Figura 5 é possível determinar os valores das correções de dentado.

Para $z_1 + z_2 > 60$, a soma das correções é $x_1 + x_2 = 0$, logo o entre-eixo mantém-se igual ao de corte. Devemos então implementar o seguinte procedimento para determinação de x_1 e x_2 :

1. Escolher z_1 nas abcissas;
2. Interceptar z_1 com a razão de transmissão $u = \frac{z_2}{z_1}$ (à direita de ABA')
– neste caso $u = \frac{41}{20} = 2.05$;
3. Escolher x_1 nas ordenadas;
4. $x_2 = -x_1$

Utilizando o valor da correção determinada através do método gráfico da Figura 5, $x = 0.24$, obtemos os escorregamentos específicos das equações (19) e (20)

$$g_{s1B} = \left| \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\sqrt{(r_{a1} + 0.24 \cdot m)^2 - r_{b1}^2}}{a \cdot \sin \alpha - \sqrt{(r_{a1} + 0.24 \cdot m)^2 - r_{b1}^2}} - 1 \right| = 2.05 \quad (19)$$

$$g_{s2A} = \left| 1 - \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\sqrt{(r_{a2} - 0.24 \cdot m)^2 - r_{b2}^2}}{a \cdot \sin \alpha - \sqrt{(r_{a2} - 0.24 \cdot m)^2 - r_{b2}^2}} \right| = 1.965 \quad (20)$$

Podemos verificar que o método gráfico não é tão preciso como o método descrito na secção 3.2. No entanto é adequado e útil do ponto de vista prático.

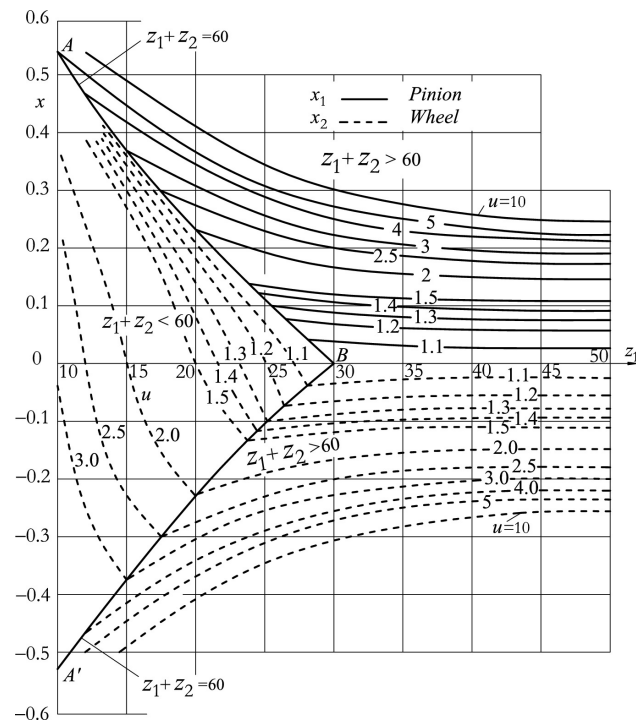


Figura 5: Ábaco de Henriot para escolha das correções x_1 e x_2 [1].

Referências

- [1] Vullo, Vincenzo: *Gears*, volume 10 de *Springer Series in Solid and Structural Mechanics*. Springer International Publishing, Cham, 2020, ISBN 978-3-030-38631-3.