

Engrenagens

Órgãos de Máquinas

Carlos Fernandes

2023/2024

Licenciatura em Engenharia Mecânica

Nota introdutória

A generalidade dos diagramas apresentados, foram largamente influenciados pelo trabalho do Professor Paulo Tavares de Castro.

Os script Python utilizados para geração das figuras e animações do presente documento, serão disponibilizados aos estudantes que demonstrem interesse em utilizar tais ferramentas.

Software recomendado:

- GEARpie: software Python de cálculo de engrenagens, disponível em
<https://github.com/cfernandesFEUP/GEARpie>
- KISSSoft: software comercial para cálculo de órgãos de máquinas (ver instruções de instalação nos diapositivos das aulas laboratoriais)

Bibliografia Engrenagens

Principal:

- Henriot, Georges; *Traité théorique et pratique des engrenages*; Dunod
- MAAG Gear Company, Ltd.; *MAAG gear book*

Complementar:

- Branco, C. M., Ferreira, J. M., Costa, J. D., Ribeiro, A. S.; *Projecto de Órgãos de Máquinas*, Fundação Calouste Gulbenkian

Sugestão de leitura:

- Vullo, V.; *Gears* (3 volumes), Springer International Publishing.

Normas Engrenagens

Disponíveis nos conteúdos:

- NF E 23-001: Vocabulaire des Engrenages: Definitions Géométriques
- NF E 23-002: Vocabulaire des Engrenages: Definitions Géométriques Engrenages à vis
- NF E 23-011: Engrenages: Crémaillère de Référence et Modules des Rous Cylindriques à Developpante de Mécanique Générale et de Grosse Méchanique
- NF E 23-012: Engrenages Cylindriques: Indications à Fournir au Fabricant d'Engrenages
- NF E 23-013: Engrenages: Déport de Dentures des Roues Cylindriques pour Engrenages Réducteurs

Normas Engrenagens

- DIN 780: Series of modules for gears
- DIN 867: Basic rack of Cylindrical Gears with Involute Teeth for General and Heavy Engineering
- DIN 868: General Definitions and Specification Factors for Gears, Gear Pairs and Gear Trains
- DIN 3960: Concepts and parameters associated with cylindrical gears and cylindrical gear pairs with involute teeth
- DIN 3972: Reference Profiles of Gear-cutting Tools for Involute Tooth Systems according to DIN 867
- DIN 3975: Terms and Definitions for Cylindrical Worm Gears with Shaft Angle 90°

Normas Engrenagens

- DIN 3978: Helix Angles for Cylindrical Gear Teeth
- DIN 3979: Tooth Damage on Gear Trains: Designation, Characteristics, Causes
- DIN 3998: Denominations on gears and gear pairs
- NP EN ISO 2203: Desenhos técnicos - Representação convencional de engrenagens

Não disponíveis nos conteúdos, mas relevantes:

- ISO 6336: Calculation of load capacity of spur and helical gears

Hiperligação para aula

Aula 1

Aula 7

Aula 2

Aula 8

Aula 3

Aula 9

Aula 4

Aula 10

Aula 5

Aula 11

Aula 6

Referências

Aula 1

Sumário

1. Engrenagens: Introdução e Classificação	8
2. Perfis de Dentado	12
3. Rodas de atrito	16
4. Conceitos básicos: círculo primitivo, passo e módulo	17
5. Cremalheira geradora	19
6. Razão de multiplicação e transmissão	21

Introdução

Engrenagem:

Conjunto de duas rodas dentadas acopladas entre si.

- Serve para a transmissão do movimento de rotação entre veios.
- Um elemento isolado de uma engrenagem é chamado de roda dentada.
- Ao elemento de maior número de dentes chama-se roda e ao elemento de menor número de dentes chama-se pinhão.
- A representação convencional de engrenagens em desenho técnico é feita de acordo com a NP EN ISO 2203.

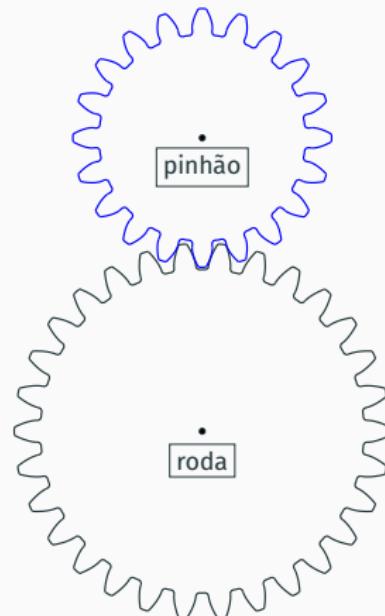


Figura 1: Engrenagem

Classificação das Engrenagens

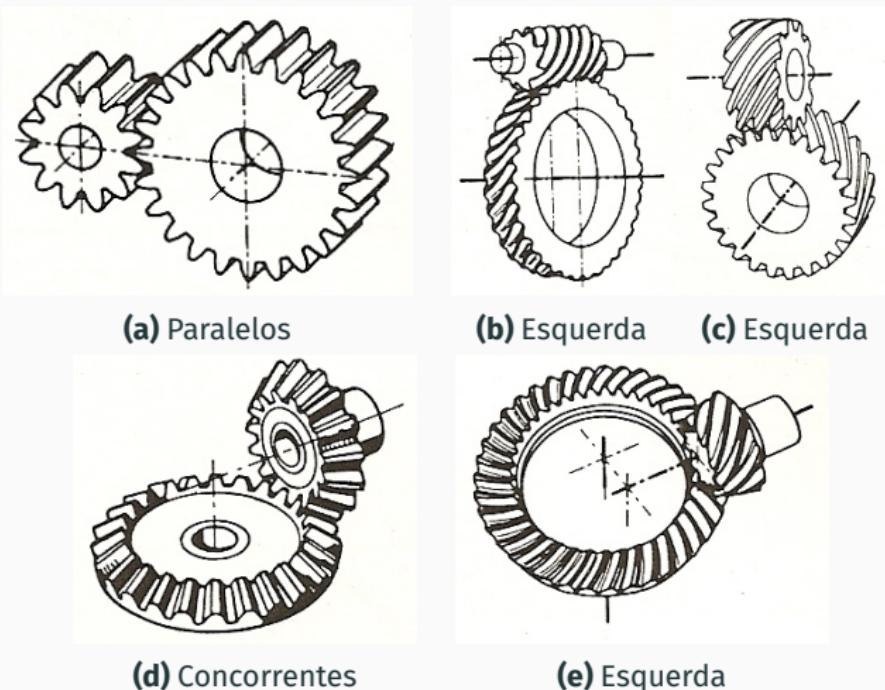


Figura 2: Classificação quanto à Posição dos Eixos [1].

Classificação das Engrenagens

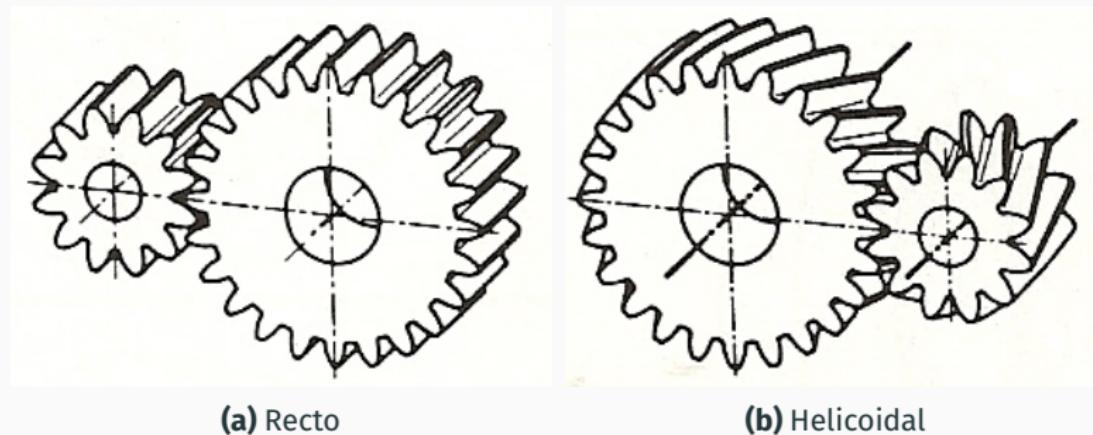
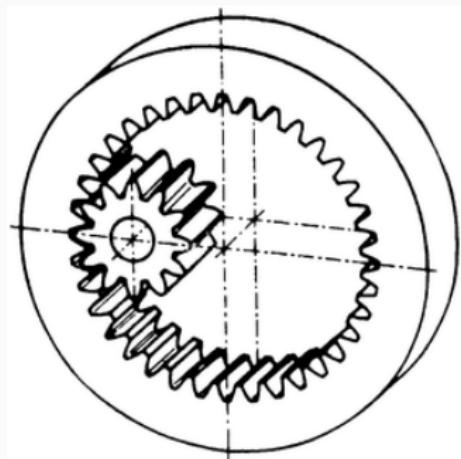
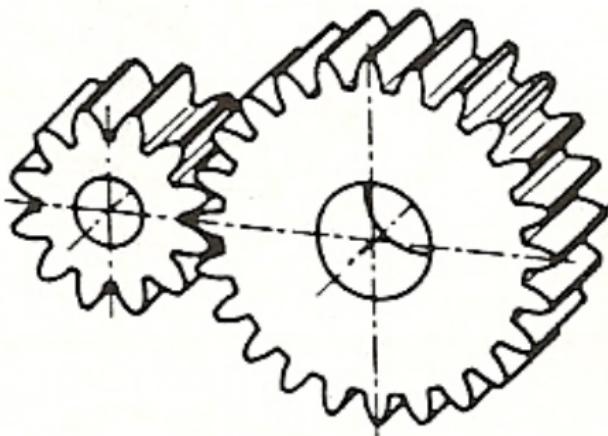


Figura 3: Classificação quanto ao Tipo de Dentado [1].

Classificação das Engrenagens



(a) Interior



(b) Exterior

Figura 4: Classificação quanto à Posição do Centro Instantâneo de Rotação [1].

Perfis de Dentado

Perfil em Cicloide

Em 1639, Girard Desargues aplicou o conceito de cicloide à construção de dentes com perfil cicloide [2].

Aplicações:

- Relógios
- Moinhos de fabrico de papel
- Moinhos de açúcar



Figura 5: Engrenagem com perfil em cicloide

Perfis de Dentado

Perfil em arco circular

- Caixas de velocidades de muito baixa rotação

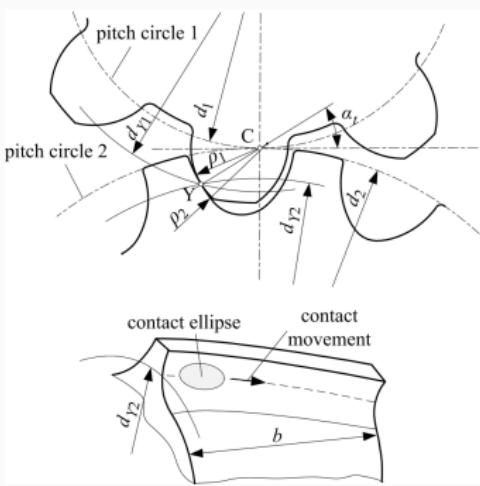


Figura 6: Engrenagem com perfil em arco circular (Wildhaber-Novikov) [3]

Perfil S

- Apresentam algumas vantagens em engrenagens poliméricas

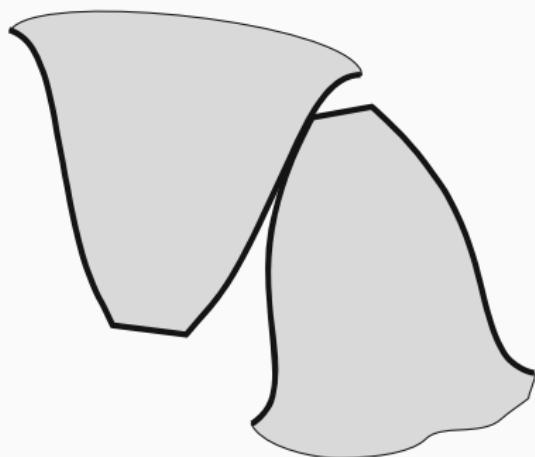


Figura 7: Engrenagem com perfil S [4]

Perfis de Dentado

O **Perfil em Evolente de Círculo** é o mais comum em engrenagens, pois apresenta as seguintes vantagens:

- Fabrico relativamente simples;
- Não é sensível à variação de entre-eixo mantendo a relação de transmissão constante;
- O ângulo de pressão é constante ao longo do engrenamento garantindo um funcionamento suave.



Figura 8: Engrenagem de dentado reto com perfil em evolente de círculo

Aplicações das Engrenagens em Perfil de Evolente



(a)



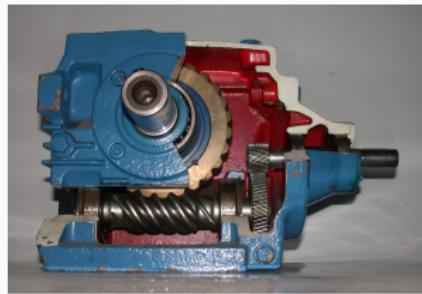
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 9: Exemplos de utilização de engrenagens.

(a) Caixa de velocidades de um Porsche 971 Panamera; (b) Motor MAN DF 3876 LF; (c) Impressora Xerox ColorQube 8570; (d) Relógio da Igreja da Santa Cruz, Dülmen, Renânia do Norte-Vestfália, Alemanha; (e) Caixa de Engrenagens com Parafuso sem-fim/roda de coroa

Rodas de Atrito

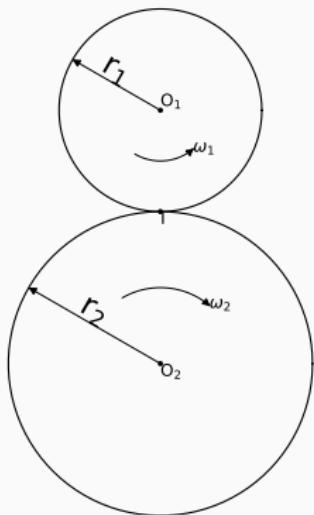


Figura 10: Rodas de Atrito

Entre-eixo:

$$\overline{O_1 O_2} = a$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = r_1 + r_2 \\ \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2 \end{array} \right.$$

- r_1 e r_2 são designados por raios primitivos
- O ponto I tem a designação de **ponto primitivo**

Conceitos básicos: círculo primitivo, passo e módulo

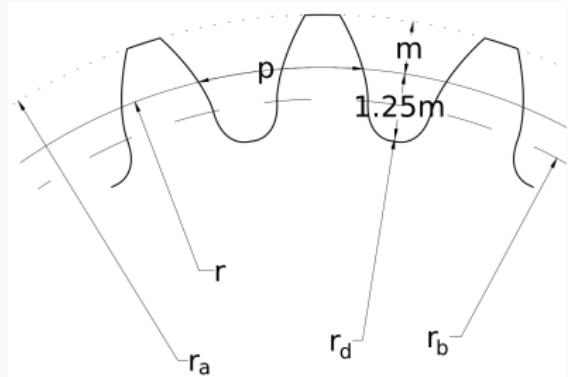


Figura 11: Dentado Normal

- r raio primitivo
- r_a raio de cabeça (ou addendum)
- r_d raio de pé (ou dedendum)
- r_b raio de base
- m módulo (normalizado)
- α ângulo de pressão
- p passo

O perímetro do círculo primitivo é $2 \cdot \pi \cdot r$, então:

$$2 \cdot \pi \cdot r = z \cdot p$$

O raio primitivo de referência (r) é função do módulo e do número de dentes da roda dentada (z):

$$r = \frac{z \cdot p}{2\pi} = \frac{z \cdot m}{2}$$

Outras relações relevantes:

$$r_d = r - h_f = r - 1.25 \cdot m$$

$$r_a = r + h_a = r + m$$

$$r_b = r \cdot \cos \alpha$$

Cremalheira geradora - Processo MAAG

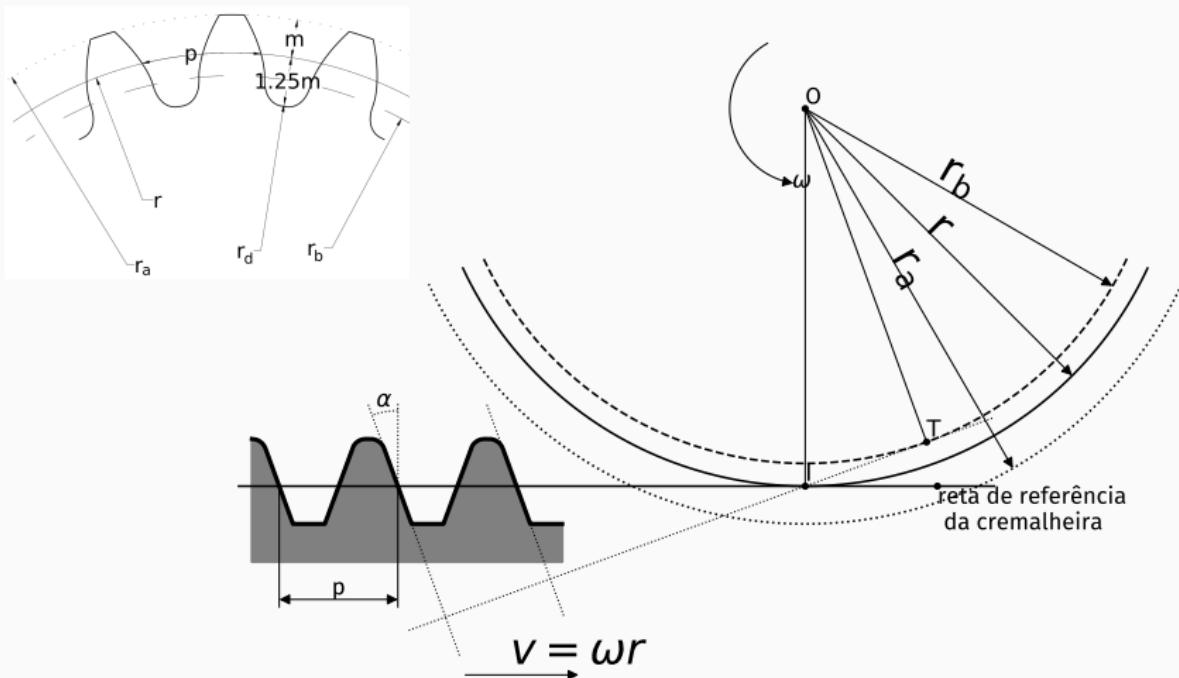


Figura 12: Processo MAAG para geração de dentado.

$$r = \frac{z \cdot m}{2}$$

$$r_a = r + m$$

$$r_b = r \cdot \cos \alpha$$

$$p = \pi \cdot m$$

Cremalheira geradora

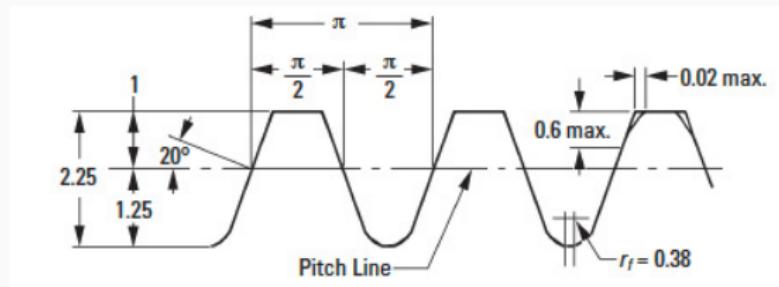


Figura 13: Cremalheira de módulo $m=1$ (cremalheira representada de cima para baixo).

Perfil de referência do Tipo A, de acordo com a ISO 53/ DIN 867:

$$h_a = 1.25m \quad \text{altura de cabeça}$$

$$h_f = m \quad \text{altura de pé}$$

$$r_F = 0.38m \quad \text{raio de curvatura}$$

De notar que são utilizados outros perfis de referência.

Os valores do módulo m (mm) são normalizados segundo a DIN 780.

Série I (preferencial):

0.05	0.06	0.08	0.1	0.12	0.16	0.2
0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0.9	1	1.25	1.5	2	2.5	3
4	5	6	8	10	12	16
20	25	32	40	50	60	

Razão de multiplicação

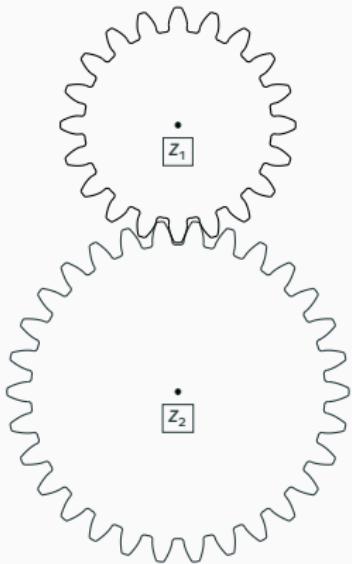


Figura 14: Engrenagem

Razão de multiplicação u representa a razão entre o número de dentes da roda z_2 e o número de dentes do pinhão z_1 :

$$u = \frac{z_2}{z_1}$$

A razão de multiplicação é sempre $|u| \geq 1$

Razão de transmissão

Razão de transmissão i , representa a razão das velocidades angulares das rodas dentadas mandante (subscrito a) e mandada (subscrito b):

$$i = \frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{n_a}{n_b} = -\frac{z_b}{z_a}$$

A engrenagem é redutora para $|i| > 1$.

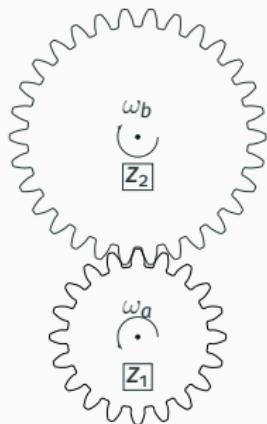


Figura 15: Redutora

A engrenagem é multiplicadora para $|i| < 1$.

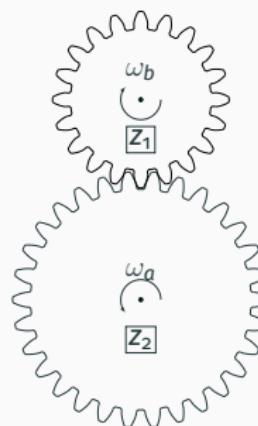


Figura 16: Multiplicadora

Aula 2

Sumário

1. Círculo de base e evolvente desse círculo	23
2. Geração de um flanco em evolvente de círculo	25
3. Conceito de ângulo de incidência e função involuta	29
4. Espessura do dente	31
5. Cota tangencial em K dentes	33

Evolvente de Círculo

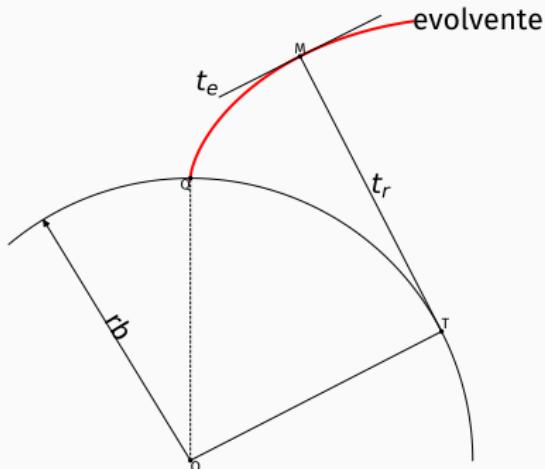


Figura 17: Perfil em evolvente de círculo¹

A evolvente é:

- a curva traçada pela extremidade livre do fio t_r (ponto M), quando é afastado do círculo, mantendo o fio tracionado;
- é descrita pelas sucessivas posições da extremidade do fio t_r que rola sem escorregar sobre o círculo de raio r_b ;
- a reta t_e , tangente à evolvente de círculo, é sempre perpendicular à reta t_r e paralela a \overline{OT} .

¹A teoria das evolventes foi desenvolvida por Christiaan Huygens em 1659 [2].

Geração da Evolvente de Círculo

Geração de um Flanco em Evolente de Círculo

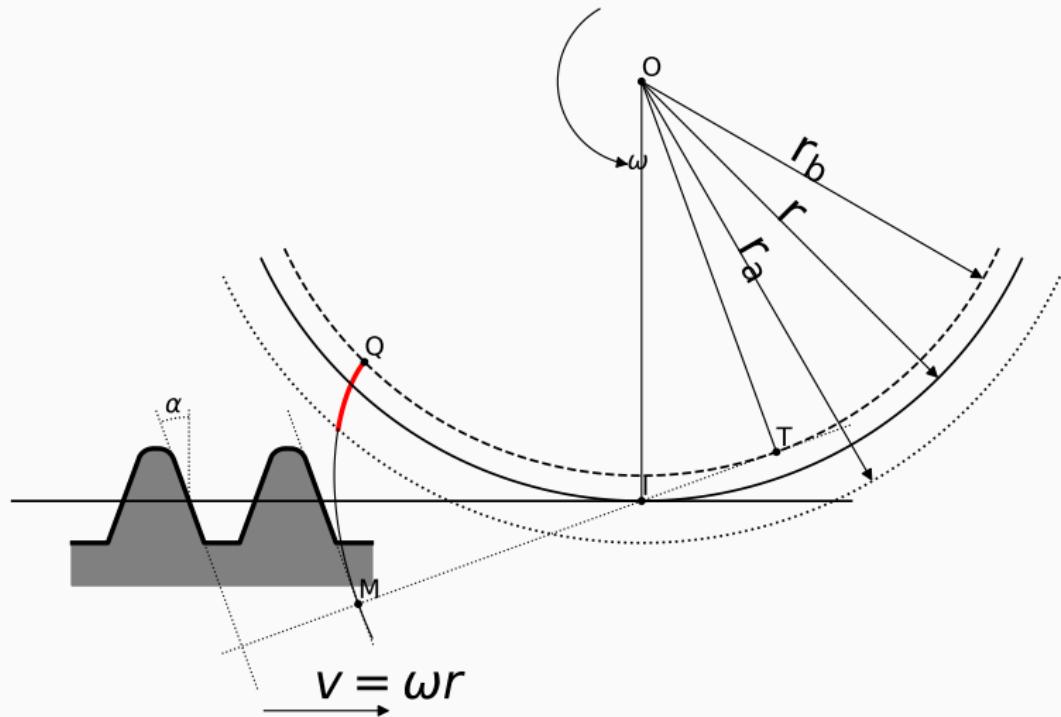


Figura 18: Perfil de Evolente Gerado por Cremalheira

Geração de um Flanco em Evolente de Círculo

Passo de Base

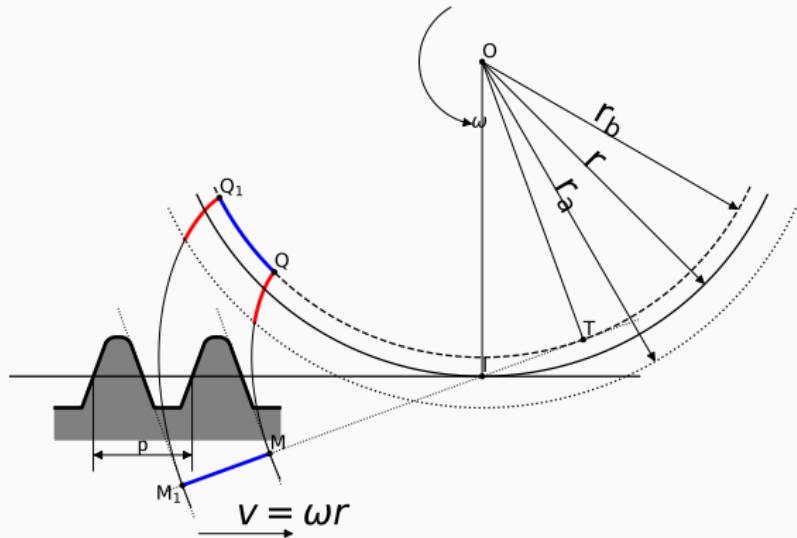


Figura 18: Perfil de Evolvente

$$\widehat{QQ_1} = \overline{MM_1} = p_b = p \cdot \cos \alpha$$

Geração de Dentado por Cremalheira

Geração de Dentado por Cremalheira Geradora

Geração de dentado por uma cremalheira

$$z=20.0, m=2.0, x=0.0$$

$$\alpha=20.0^\circ, haP=1.25, hfP=1.0, \rho=0.38$$

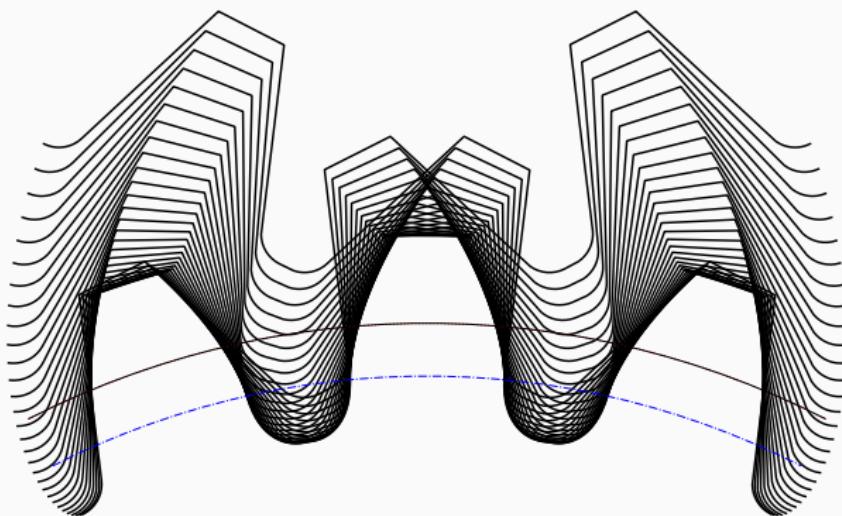


Figura 19: Geração de Dentado por Cremalheira

Ângulo de incidência e função involuta

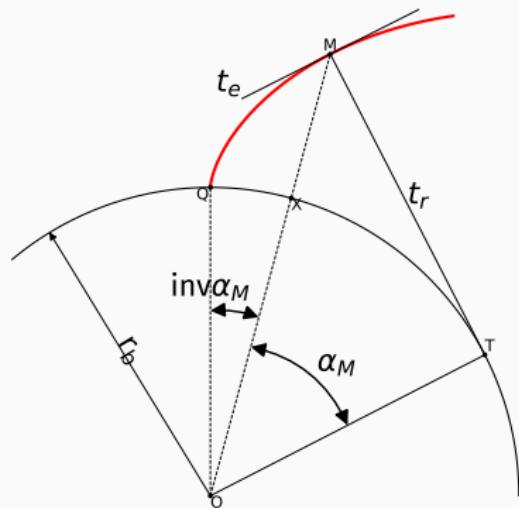


Figura 20: Ângulo de incidência num ponto genérico M

Nota: os valores numéricos da $\text{inv } \alpha_M$ são bastante pequenos. α_M e $\text{inv } \alpha_M$ devem ser

expressos em radianos, com uma precisão de pelo menos 10^{-4} .

$$\widehat{TQ} = \widehat{TM}$$

$$\widehat{TM} = \widehat{TQ} = r_b \cdot \tan \alpha_M$$

$$\widehat{TQ} = \widehat{TX} + \widehat{XQ}$$

$$r_b \cdot \tan \alpha_M = r_b \cdot \alpha_M + \widehat{XQ}$$

Dividindo por r_b :

$$\tan \alpha_M = \alpha_M + \angle QOM$$

Função Involuta:

$$\boxed{\text{inv } \alpha_M = \tan \alpha_M - \alpha_M}$$

Equações Paramétricas da Evolvente de Círculo

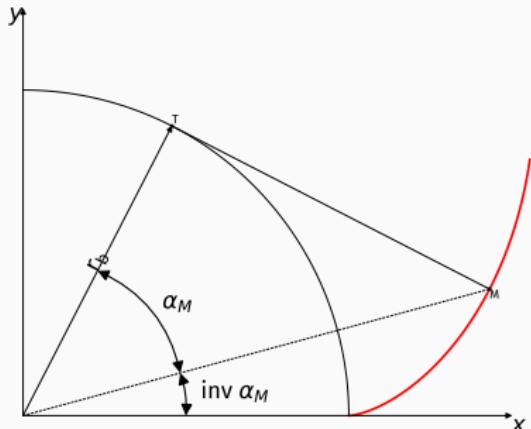


Figura 21: Sistema cartesiano com representação da evolvente

Num sistema cartesiano, as sucessivas posições do ponto M,

pertencente à evolvente de círculo, tem as seguintes componentes cartesianas:

$$\begin{cases} x_M = r_b \cdot \cos \phi + \overline{TM} \cdot \sin \phi \\ y_M = r_b \cdot \sin \phi - \overline{TM} \cdot \cos \phi \end{cases}$$

Sendo $\phi = \alpha_M + \text{inv } \alpha_M$

Podemos ainda considerar a igualdade $\overline{TM} = r_b \cdot \phi$:

$$\begin{cases} x_M = r_b \cdot \cos \phi + r_b \cdot \phi \cdot \sin \phi \\ y_M = r_b \cdot \sin \phi - r_b \cdot \phi \cdot \cos \phi \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x_M = r_b \cdot (\cos \phi + \phi \cdot \sin \phi) \\ y_M = r_b \cdot (\sin \phi - \phi \cdot \cos \phi) \end{cases}}$$

Espessura do Dente

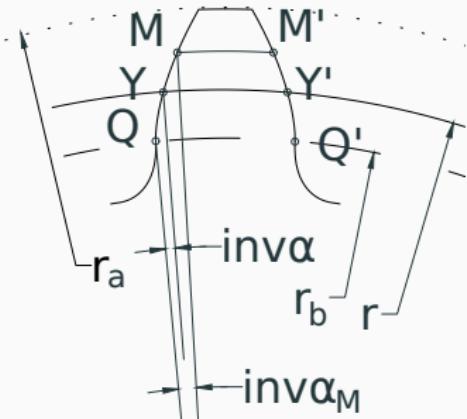


Figura 22: Espessura do dente num ponto genérico M

Relembrar:

$$r = \frac{z \cdot m}{2}$$

$$r_b = r \cdot \cos \alpha$$

$$r_a = r + m$$

Para dentado normal (sem correção), a espessura do dente sobre o círculo primitivo (r) é:

$$s = \widehat{YY'} = \frac{p}{2} = \frac{\pi \cdot m}{2}$$

Num outro ponto M, a espessura é:

$$\begin{aligned}s_M &= r_M \cdot \angle MOM' \\&= r_M \cdot \left(\frac{s}{r} - 2 \cdot \angle YOM \right) \\&= r_M \cdot \left[\frac{s}{r} - 2 \cdot (\angle QOM - \angle QOY) \right] \\&= r_M \cdot \left[\frac{s}{r} - 2 \cdot (\text{inv } \alpha_M - \text{inv } \alpha) \right]\end{aligned}$$

$$s_M = r_M \cdot \left[\frac{s}{r} + 2 \cdot (\text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_M) \right]$$

Espessura do dente sobre o círculo de base

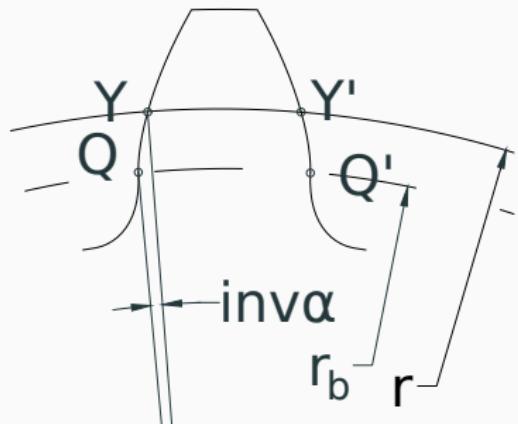


Figura 23: Espessura da base do dente

A espessura do dente para um ponto genérico M com ângulo de incidência α_M é:

$$s_M = r_M \cdot \left[\frac{s}{r} + 2 \cdot (\text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_M) \right]$$

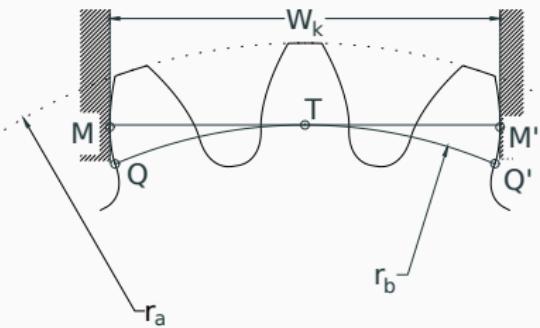
Sobre o círculo de base, o ângulo de incidência α_M é nulo. Assim, temos um caso particular da espessura do dente sobre o círculo de base ser:

$$s_b = r_b \cdot \left(\frac{s}{r} + 2 \text{ inv } \alpha \right)$$

Relembrar que:

- α é o ângulo de pressão, normalmente 20° .
- $\text{inv } \alpha = \tan \alpha - \alpha$

Cota tangencial sobre k dentes



$$W_3 = 2 \underbrace{p_b}_{\text{passo de base}} + \underbrace{s_b}_{\text{espessura da base do dente}}$$

Para qualquer k:

$$W_k = \widehat{QQ'} = (k - 1) \cdot p_b + s_b$$

Passo de base:

$$2\pi \cdot r_b = z \cdot p_b$$

$$r_b = r \cdot \cos \alpha$$

$$p_b = \frac{2\pi \cdot r}{z} \cdot \cos \alpha = p \cdot \cos \alpha$$

A espessura do dente sobre o círculo de base:

$$s_b = r_b \cdot \left(\frac{s}{r} + 2 \operatorname{inv} \alpha \right)$$

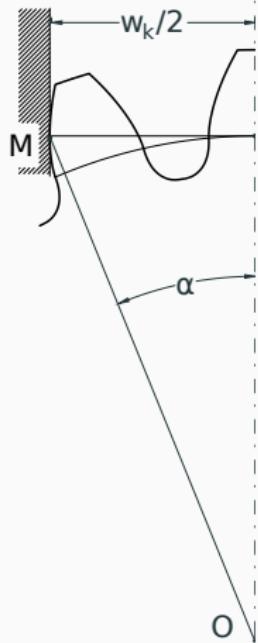
Figura 24: Cota tangencial sobre k=3 dentes

A cota tangencial sobre 3 dentes:

$$W_3 = \overline{MM'} = \widehat{QQ'}$$

$$W_k = m \cdot \cos \alpha \cdot \left[(k - 1) \cdot \pi + \frac{s}{m} + z \cdot \operatorname{inv} \alpha \right]$$

Escolha de k



$$\frac{w_k}{2} = \overline{OM} \cdot \sin \alpha, \text{ com } \overline{OM} = r = \frac{z \cdot m}{2}$$

$$W_k = 2r \cdot \sin \alpha$$

Como visto anteriormente:

$$W_k = m \cdot \cos \alpha \cdot [(k - 1) \cdot \pi + \frac{s}{m} + z \cdot \operatorname{inv} \alpha]$$

Igualando as duas expressões é:

$$2r \cdot \sin \alpha = m \cdot \cos \alpha \cdot [(k - 1) \cdot \pi + \frac{s}{m} + z \cdot \operatorname{inv} \alpha]$$

Substituindo $r = \frac{z \cdot m}{2}$ e $s = \frac{\pi \cdot m}{2}$:

$$z \cdot m \cdot \sin \alpha = m \cdot \cos \alpha \cdot \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) \cdot \pi + z \cdot \operatorname{inv} \alpha \right]$$

$$z \cdot \left(\tan \alpha - \operatorname{inv} \alpha \right) = \left(k - \frac{1}{2} \right) \cdot \pi$$

$$k = \frac{z}{\pi} \cdot \alpha + \frac{1}{2}$$

- escolher o inteiro mais próximo

$$k = 0.111z + 0.5 - \text{para } \alpha = 20^\circ$$

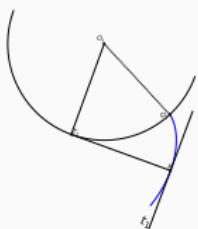
Figura 25: Cota tangencial sobre círculo primitivo

Aula 3

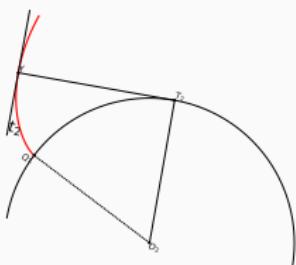
Sumário

1. Engrenamento	36
2. Caminho de Engrenamento	38
3. Razão de Condução	41
4. Valor Crítico da Razão de Condução	43
5. Entre-eixo de corte e de funcionamento	46

Engrenamento



(a)



(b)

Figura 26: Perfis em evolvente.

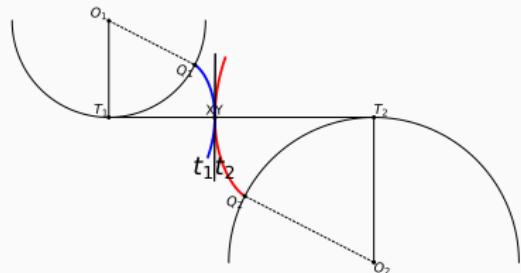


Figura 27: Contacto das evolventes sobre a reta de engrenamento.

- Mover a Figura 26a de maneira a fazer coincidir t_1 com t_2 da Figura 26b;
- Fazer o Ponto X da Figura 26a coincidir com o Ponto Y da Figura 26b.

Engrenamento

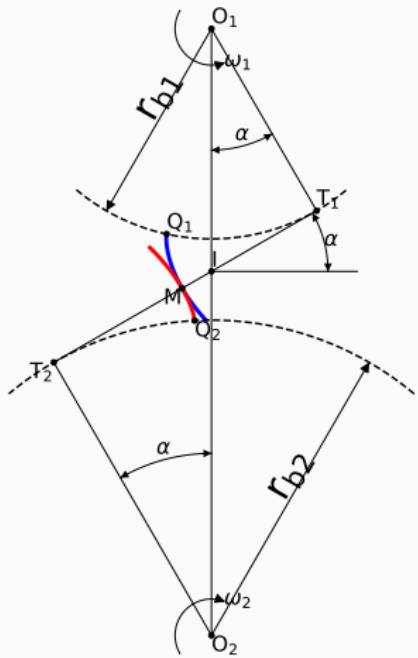


Figura 28: Contacto das evolventes sobre a reta de engrenamento T_1T_2

As evolvente aos círculos de base do pinhão (com centro em O_1) e da roda (com centro em O_2) são:

- tangentes sobre a reta de engrenamento no ponto M;
- as evolventes crescem desde Q_1 e Q_2 , respectivamente.

Entre-eixo normal ou de corte:

$$\overline{O_1O_2} = a = r_1 + r_2 = m \cdot \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Raio de base: $r_b = r \cdot \cos \alpha$

Início do Caminho de Engrenamento

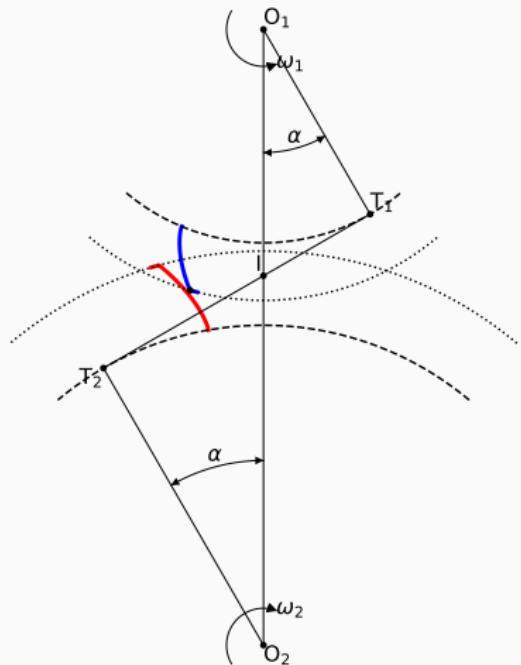


Figura 29: Início do Caminho de Engrenamento

O início do engrenamento acontece quando:

- O raio de cabeça (r_{a1}) da roda dentada 1 contacta com o flanco da roda dentada mandante 2;
- o contacto entre os flancos acontece sempre sobre a linha $\overline{T_1T_2}$;
- Este ponto designa-se por A.

Início do Caminho de Engrenamento

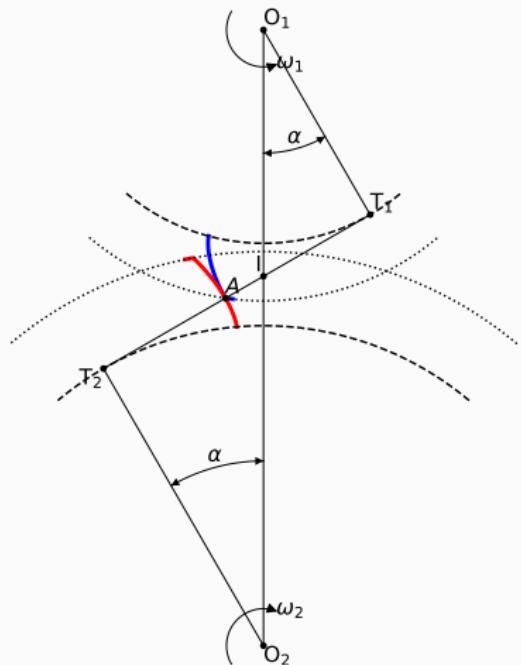


Figura 29: Início do Caminho de Engrenamento

O início do engrenamento acontece quando:

- O raio de cabeça (r_{a1}) da roda dentada 1 contacta com o flanco da roda dentada mandante 2;
- o contacto entre os flancos acontece sempre sobre a linha $\overline{T_1T_2}$;
- Este ponto designa-se por A.

Fim do Caminho de Engrenamento

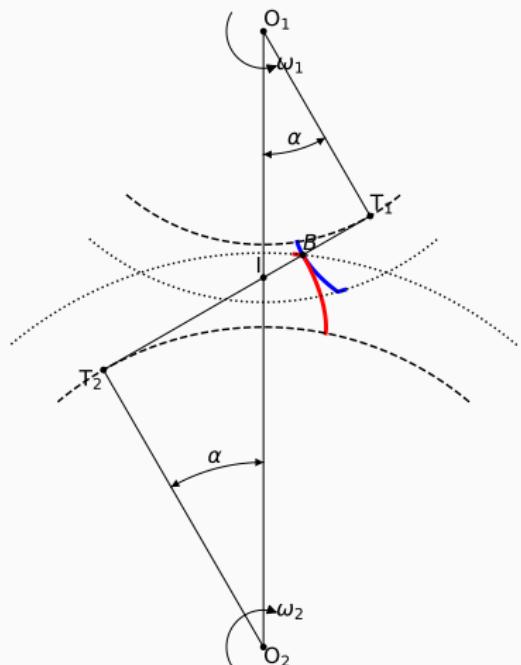


Figura 30: Fim do Caminho de Engrenamento

O fim do engrenamento acontece quando:

- O raio de cabeça (r_{a2}) da roda dentada 2 deixa de contactar com o flanco da roda dentada mandada 1;
- o contacto entre os flancos acontece sempre sobre a linha $\overline{T_1T_2}$;
- Este ponto designa-se por B.

Fim do Caminho de Engrenamento

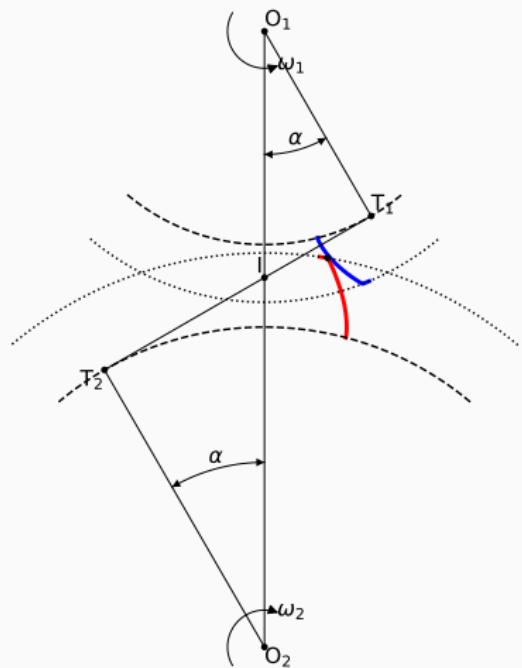


Figura 30: Fim do Caminho de Engrenamento

O fim do engrenamento acontece quando:

- O raio de cabeça (r_{a2}) da roda dentada 2 deixa de contactar com o flanco da roda dentada mandada 1;
- o contacto entre os flancos acontece sempre sobre a linha $\overline{T_1T_2}$;
- Este ponto designa-se por B.

Engrenamento: ação conjugada

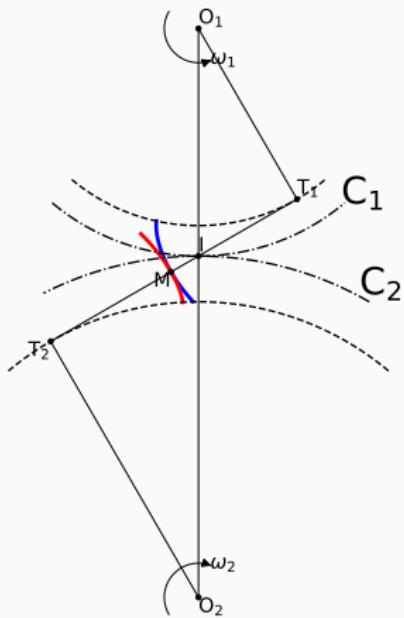


Figura 31: Ação conjugada e identificação das curvas primitivas numa engrenagem

Em 1751, Leonhard Euler definiu pela primeira vez o conceito de ação conjugada de perfis [2].

Considerando as sucessivas posições do ponto I , que coincide com o centro instantâneo de rotação do movimento O_{12} , obtém-se as curvas C_1 e C_2 , que descrevem um movimento de rolamento puro à medida que as rodas 1 e 2 giram em torno de O_1 e O_2 , respectivamente.

Engrenamento: ação conjugada

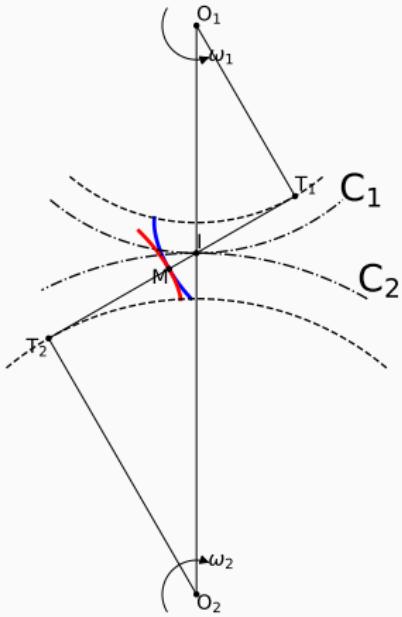


Figura 31: Ação conjugada e identificação das curvas primitivas numa engrenagem

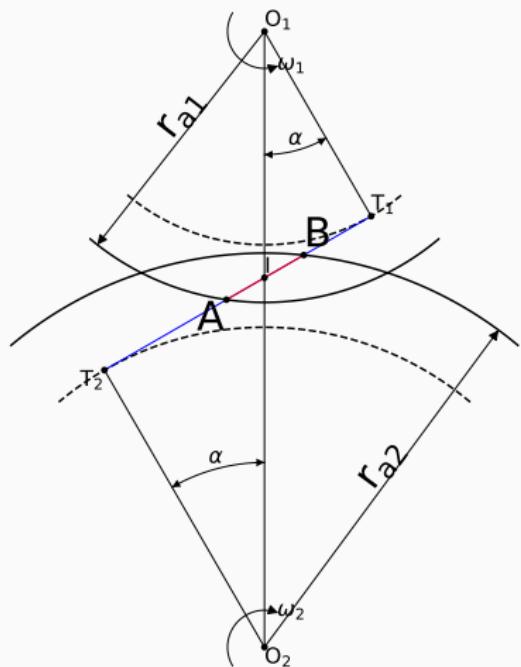
$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 I}{O_1 I}$$

Quando a relação de transmissão é constante, então a posição do ponto primitivo é fixa. Para que isto aconteça:

“A normal comum às superfícies dos dentes no ponto de contacto tem de intersetar a linha de centros sempre no ponto primitivo I .”

Lei fundamental da ação conjugada.

Razão de Condução



$\overline{T_1 T_2}$ é designada por recta de engrenamento (inglês: “line of action”).

\overline{AB} é designado por segmento de engrenamento ou caminho de engrenamento (inglês: “path of contact”).

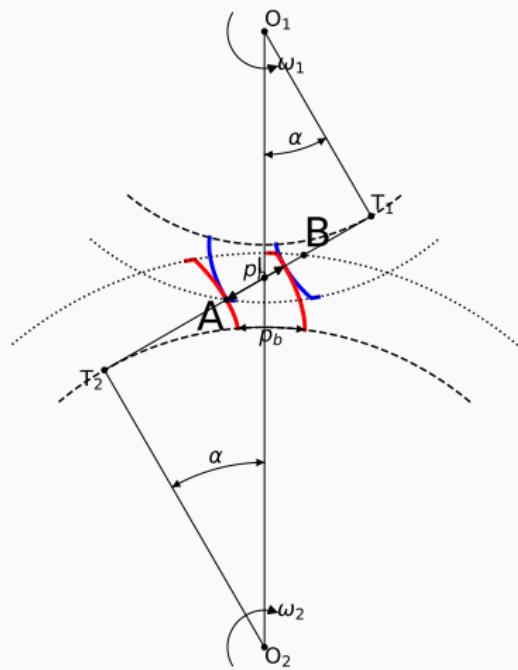
$$\frac{\overline{O_1 I}}{r_{a1}} = r_1 = \frac{z_1 \cdot m}{2}$$
$$\frac{\overline{O_2 I}}{r_{a2}} = r_2 = \frac{z_2 \cdot m}{2}$$

Figura 32: Descrição do caminho de engrenamento

$$r_{a1} = r_1 + m$$

$$r_{a2} = r_2 + m$$

Razão de Condução



$$\epsilon_{\alpha} = \frac{\overline{AB}}{p_b}$$

$$\overline{AB} = \overline{AI} + \overline{IB}$$

$$\overline{AI} = \overline{T_1 A} - \overline{T_1 I}$$

$$\overline{IB} = \overline{T_2 B} - \overline{T_2 I}$$

$$\epsilon_{\alpha} = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a \sin \alpha}{p_b}$$

Figura 33: Razão de Condução

Valor Crítico da Razão de Condução

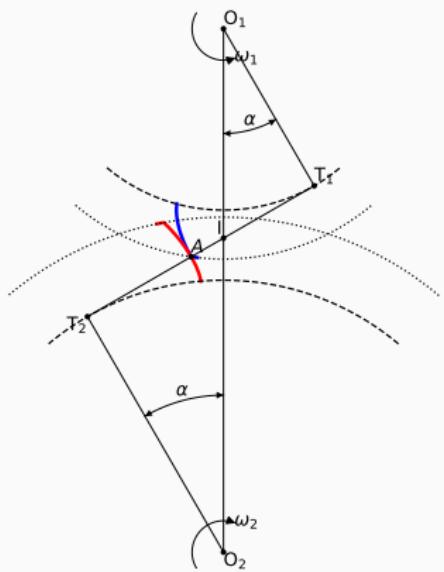


Figura 34: Razão de Condução

$$\epsilon_{\alpha} = \frac{\overline{AB}}{p_b}$$

O valor da razão de condução ϵ_{α} deve ser sempre > 1 .

Quando $\overline{AB} < p_b$, ou seja $\epsilon_{\alpha} < 1$:

- Um par de dentes entra em contacto no ponto A;
- percorre todo o caminho de engrenamento até B sem que **o par seguinte engrene**.

Nesta situação haverá um período de descontinuidade na transmissão do movimento, que quando reiniciado causará choque entre os flancos dos dentes.

Valor Crítico da Razão de Condução

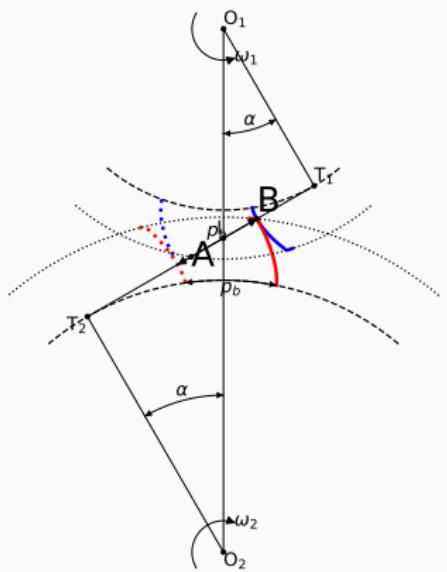


Figura 34: Razão de Condução

$$\epsilon_{\alpha} = \frac{AB}{p_b}$$

O valor da razão de condução ϵ_{α} deve ser sempre > 1 .

Quando $\overline{AB} < p_b$, ou seja $\epsilon_{\alpha} < 1$:

- Um par de dentes entra em contacto no ponto A;
- percorre todo o caminho de engrenamento até B sem que **o par seguinte engrene**.

Nesta situação haverá um período de descontinuidade na transmissão do movimento, que quando reiniciado causará choque entre os flancos dos dentes.

Formas de Variar a Razão de Condução

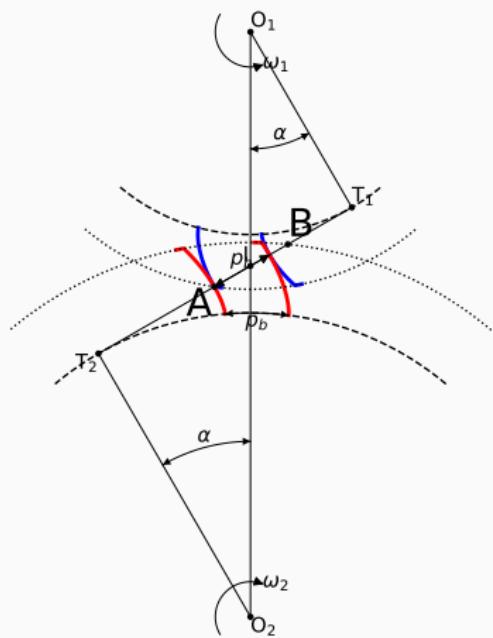


Figura 35: Razão de Condução

O valor da razão de condução ϵ_α aumenta quando:

- a altura de cabeça dos dentes (h_a) aumenta;
- o raio primitivo de uma das rodas aumenta.

O valor da razão de condução ϵ_α diminui quando:

- o ângulo de pressão (α) aumenta.

O aumento da razão de condução é geralmente benéfico pois reduz a carga média que atua sobre os dentes.

Entre-eixo de corte e de funcionamento

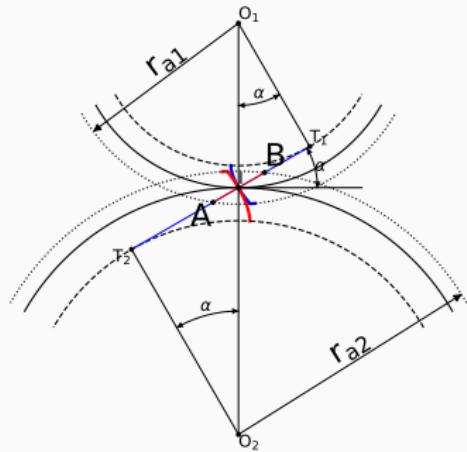


Figura 36: Entre-eixo de corte

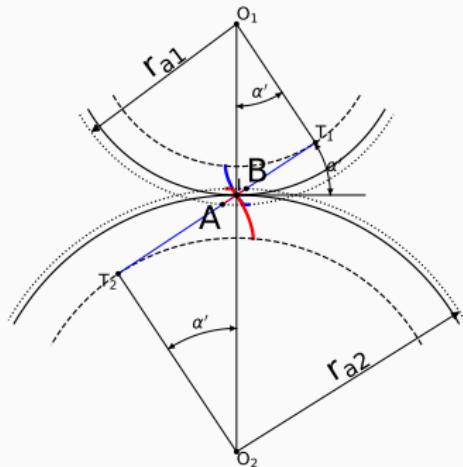
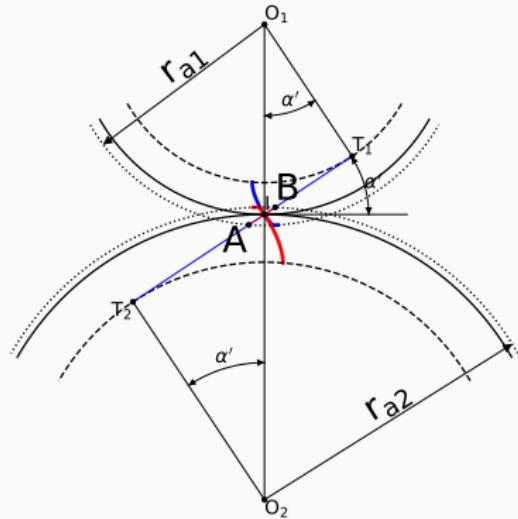


Figura 37: Entre-eixo de funcionamento

$$a = r_1 + r_2 = m \cdot \frac{z_1+z_2}{2}$$

$$a' > a$$

Entre-eixo de corte e de funcionamento



$$a' > a$$

No caso da imposição do entre-eixo $a' > a$, o ângulo de pressão de funcionamento α' é maior que o ângulo de pressão de corte α .

$$a' \cdot \cos \alpha' = a \cdot \cos \alpha$$

Igualdade de velocidades no primitivo:

$$\omega_1 \cdot r'_1 = \omega_2 \cdot r'_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a' = r'_1 + r'_2 \\ \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r'_1}{r'_2} \end{array} \right.$$

Figura 38: Entre-eixo de funcionamento

Aula 4

Sumário

1. Raio ativo de pé	48
2. Velocidades no ponto primitivo	49
3. O escorregamento no engrenamento	50
4. Escorregamento específico	59

Raio ativo de pé

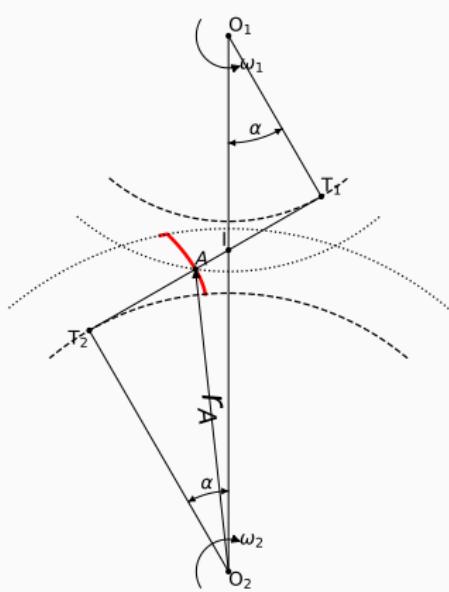


Figura 39: Raio ativo de pé r_A .

$$r_A^2 = r_{b_2}^2 + \overline{T_2 A}^2$$

$$\overline{T_2 A} = \overline{T_2 T_1} - \overline{T_1 A} =$$

$$(r_1 + r_2) \cdot \sin \alpha - \sqrt{r_{a_1}^2 - r_{b_1}^2}$$

Situação aplicável às situações:

1. Raio ativo de pé r_A de funcionamento: engrenamento do pinhão z_1 com a roda z_2 ;
2. Raio ativo de pé r_A de corte: corte da roda z_2 pelo buril-pinhão z_1 – abaixo de r_A o perfil não é em evolvente de círculo.

- O valor mínimo de r_A é obtido pela geração por cremalheira.
- r_A de corte terá de ser sempre menor que r_A de funcionamento.

Velocidades no Ponto Primitivo

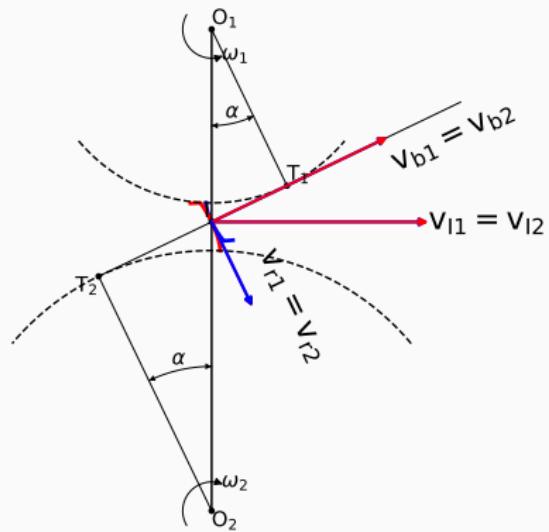


Figura 40: Velocidades no Ponto Primitivo

As velocidades sobre o ponto primitivo (I) são iguais para o pinhão e roda da engrenagem.

A componente na direcção do caminho de engrenamento (tangencial ao círculo de base)
 $v_{b1} = v_{b2}$ em qualquer ponto de contacto compreendido entre $\overline{T_1 T_2}$:

- condição necessária para garantir continuidade da transmissão de movimento da roda mandante para a roda mandada;

O escorregamento no engrenamento

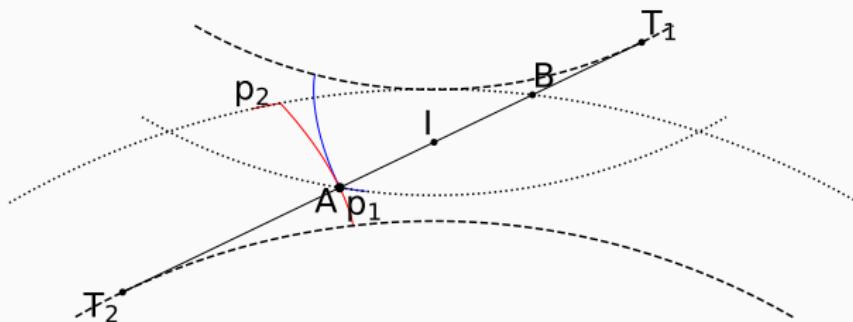


Figura 41: Escorregamento no engrenamento

O escorregamento no engrenamento

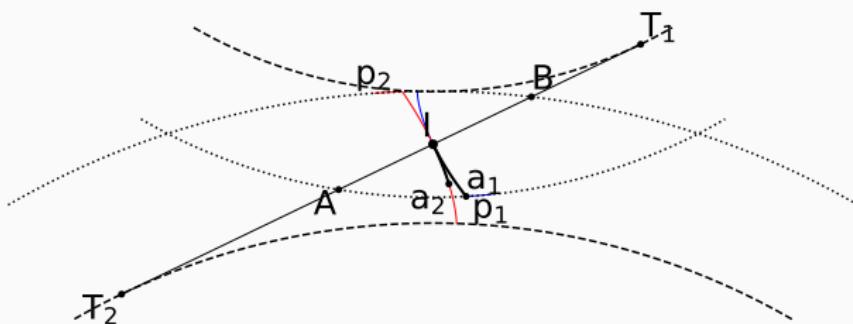


Figura 41: Escorregamento no engrenamento

De A até I:

- o arco $\widehat{a_1 l}$ sobre o perfil p_1 é maior que o arco $\widehat{a_2 l}$ sobre o perfil p_2 ;

O escorregamento no engrenamento

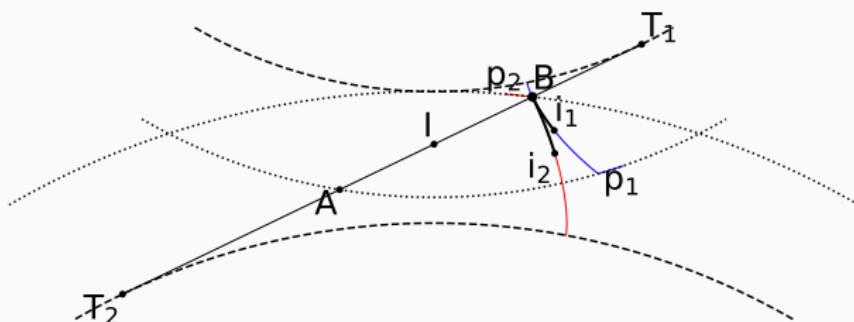


Figura 41: Escorregamento no engrenamento

De I até B:

- o arco $\widehat{i_1B}$ sobre o perfil p_1 é menor que o arco $\widehat{i_2B}$ sobre o perfil p_2 ;

Quando o ponto de contacto se dá de **A até B**, há **escorregamento**.

Caminho de A até ao Primitivo

Caminho do Primitivo até B

Velocidade linear num ponto M

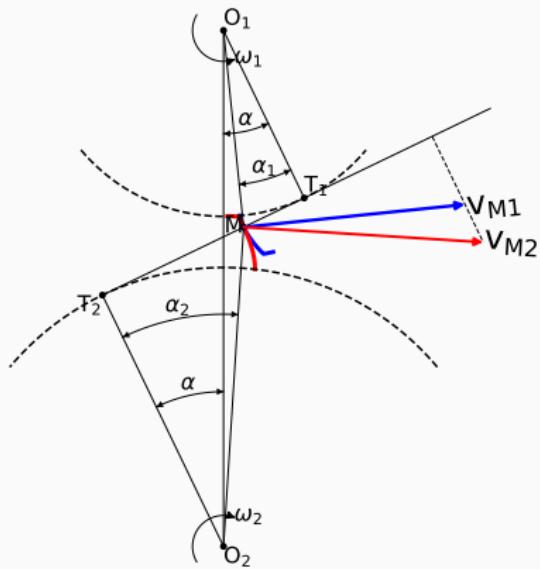


Figura 42: Velocidade linear num ponto M

O ponto de contacto **M** tem as seguintes velocidades lineares:

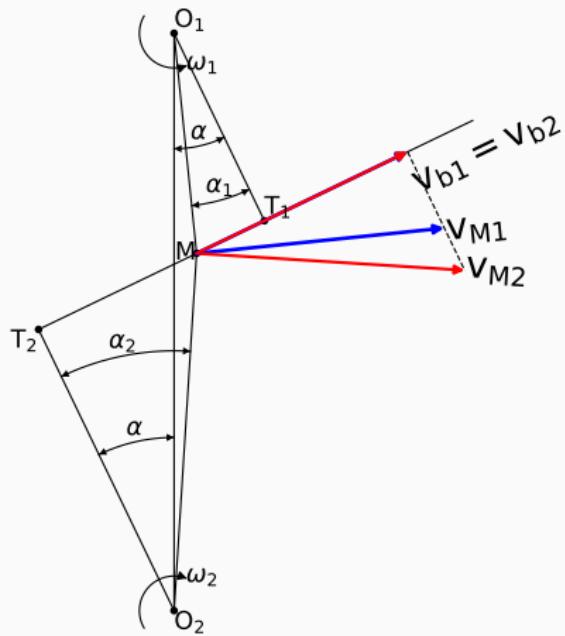
Perfil p_1 :

$$v_{M1} = \omega_1 \cdot \overline{O_1M} = \omega_1 \cdot r_{M1}$$

Perfil p_2 :

$$v_{M2} = \omega_2 \cdot \overline{O_2M} = \omega_2 \cdot r_{M2}$$

Velocidades tangenciais ao círculo de base num ponto M



$$V_{b1} = V_{M1} \cdot \cos \alpha_1 = (\omega_1 \cdot r_{M1}) \cdot \cos \alpha_1$$

$$V_{b2} = V_{M2} \cdot \cos \alpha_2 = (\omega_2 \cdot r_{M2}) \cdot \cos \alpha_2$$

As quantidades:

$$r_{M1} \cdot \cos \alpha_1 = r_{b1}$$

$$r_{M2} \cdot \cos \alpha_2 = r_{b2}$$

já são conhecidas

Condição de continuidade de contacto dos flancos:

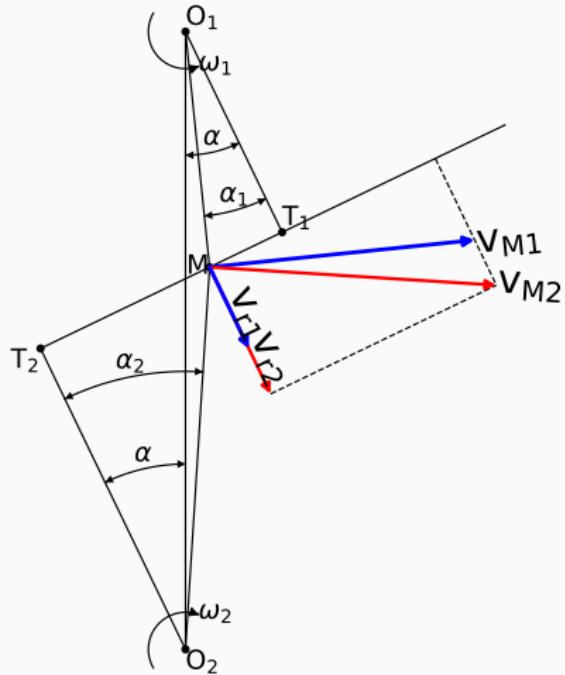
$$V_{b1} = V_{b2}$$

$$\omega_1 \cdot r_{M1} \cdot \cos \alpha_1 = \omega_2 \cdot r_{M2} \cdot \cos \alpha_2$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{M2} \cdot \cos \alpha_2}{r_{M1} \cdot \cos \alpha_1} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}$$

Figura 43: Velocidades na direção do caminho de engrenamento

Velocidades tangenciais à normal do contacto num ponto M



Velocidades na direção tangencial ao contacto:

$$v_{r1} = v_{M1} \cdot \sin \alpha_1 = (\omega_1 \cdot r_{M1}) \cdot \sin \alpha_1$$
$$v_{r2} = v_{M2} \cdot \sin \alpha_2 = (\omega_2 \cdot r_{M2}) \cdot \sin \alpha_2$$

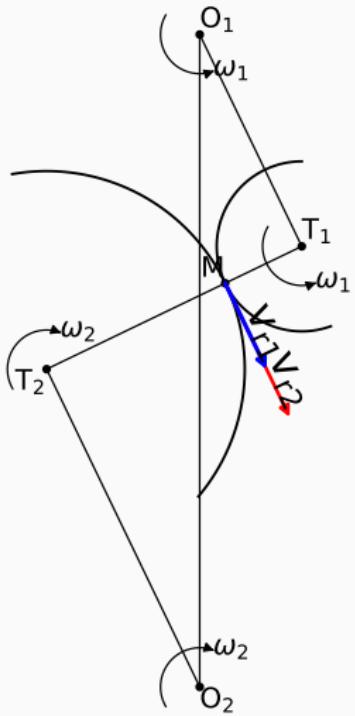
Também conhecidas por velocidades de rolamento dos flancos dos dentes.

A diferença de velocidade de rolamento do perfil 1 relativamente ao perfil 2, origina escorregamento.

A existência de atrito e escorregamento promove perda de potência (\downarrow eficiência).

Figura 44: Velocidades tangenciais à normal do contacto

Círculos Osculadores



As velocidades de rolamento no ponto M do pinhão e roda são, respectivamente:

$$v_{r1} = \omega_1 \cdot r_{M1} \sin \alpha_1$$

$$v_{r2} = \omega_2 \cdot r_{M2} \sin \alpha_2$$

Os perfis podem ser aproximados por dois círculos osculadores na vizinhança do ponto M:

- centro de curvatura em T_1 e raio \bar{T}_1M
- centro de curvatura em T_2 e raio \bar{T}_2M

Figura 45: Círculos osculadores

$$v_{r1} = \omega_1 \cdot \bar{T}_1M$$

$$v_{r2} = \omega_2 \cdot \bar{T}_2M$$

Velocidades de escorregamento num ponto M

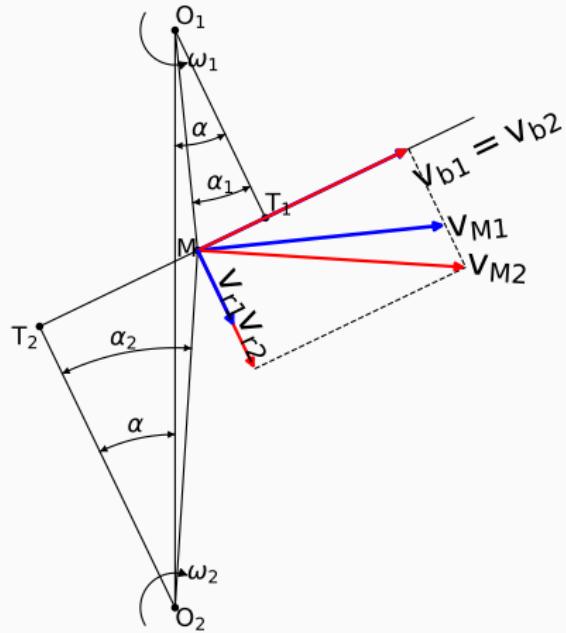


Figura 46: Velocidades num ponto M

A velocidade de escorregamento relativa num ponto M, é dada por:

$$v_g = v_{r1} - v_{r2}$$

É comum representar-se a velocidade de escorregamento em módulo:

$$v_g = |v_{r1} - v_{r2}|$$

Quantidade útil para efeitos de cálculo da perda de potência num ponto M:

$$P_{vzp}^M = F_N^M \cdot v_g^M \cdot \mu^M$$

F_N^M - força normal

μ^M - coeficiente de atrito

O escorregamento no engrenamento

O escorregamento específico

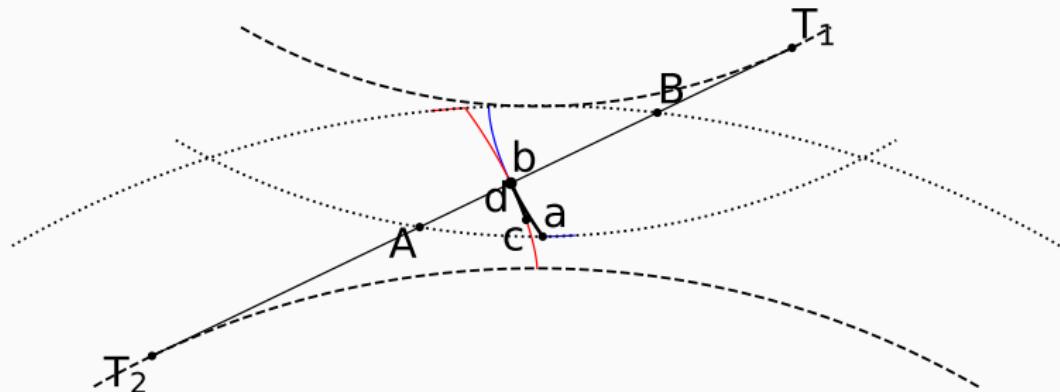


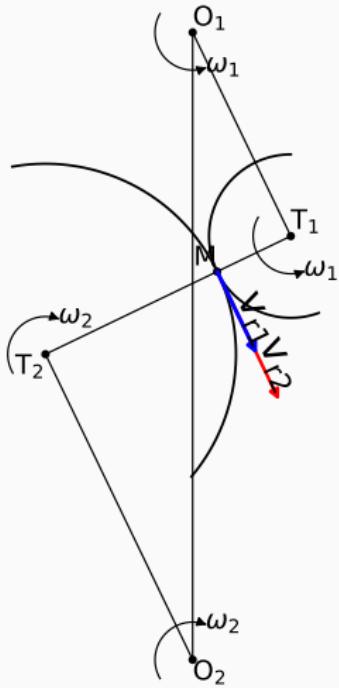
Figura 47: Escorregamento específico

A velocidade de escorregamento não é suficiente para caracterizar as condições de desgaste dos dentes da engrenagem.

$$g_{s1} = \left| \frac{\widehat{ab} - \widehat{cd}}{\widehat{ab}} \right|$$

$$g_{s2} = \left| \frac{\widehat{ab} - \widehat{cd}}{\widehat{cd}} \right|$$

O escorregamento específico



Sobre o perfil p_1 :

$$g_{s1} = \left| \frac{V_{r1} - V_{r2}}{V_{r1}} \right|$$

$$g_{s1} = \left| \frac{\omega_1 \cdot \overline{T_1M} - \omega_2 \cdot \overline{T_2M}}{\omega_1 \cdot \overline{T_1M}} \right|$$

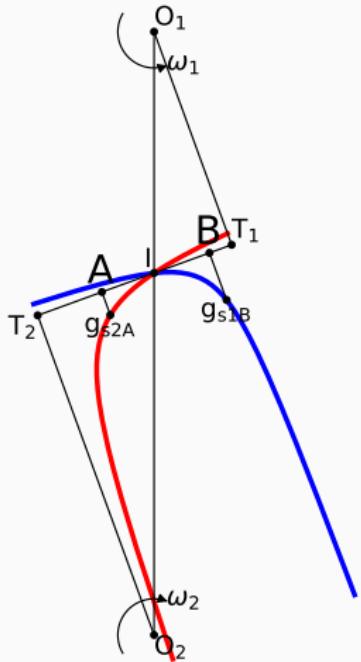
Sobre o perfil p_2 :

$$g_{s2} = \left| \frac{V_{r1} - V_{r2}}{V_{r2}} \right|$$

$$g_{s2} = \left| \frac{\omega_1 \cdot \overline{T_1M} - \omega_2 \cdot \overline{T_2M}}{\omega_2 \cdot \overline{T_2M}} \right|$$

Figura 48: Círculos osculadores e velocidades tangenciais ao contacto

O escorregamento específico



$$g_{s1} = \left| \frac{\omega_1 \cdot \overline{T_1M} - \omega_2 \cdot \overline{T_2M}}{\omega_1 \cdot \overline{T_1M}} \right|$$

Quando o contacto se aproxima de T_2 , o escorregamento específico do pinhão,
 $g_{s1} \rightarrow 1$ porque $\overline{T_2M} \rightarrow 0$

$$g_{s2} = \left| \frac{\omega_1 \cdot \overline{T_1M} - \omega_2 \cdot \overline{T_2M}}{\omega_2 \cdot \overline{T_2M}} \right|$$

Quando o contacto se aproxima de T_1 , o escorregamento específico da roda,
 $g_{s2} \rightarrow 1$ porque $\overline{T_1M} \rightarrow 0$

Figura 49: Escorregamento específico

Aula 5

Sumário

1. Revisão sobre escorregamento específico	63
2. A correção de dentado para equilibrar escorregamentos específicos	64
3. Talhagem de engrenagens com correção de dentado	69
4. Importância de igualar os escorregamentos específicos	76

O escorregamento específico

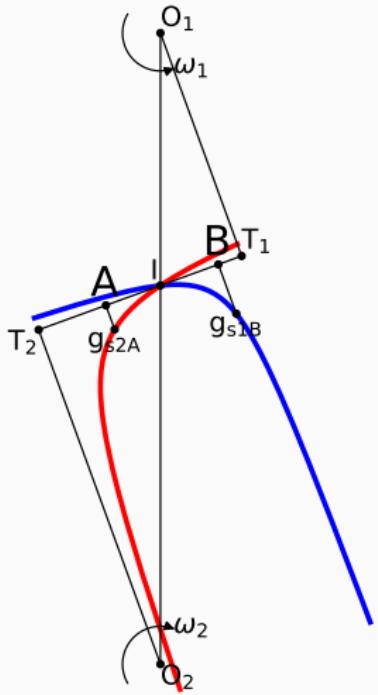


Figura 50: Escorregamento específico

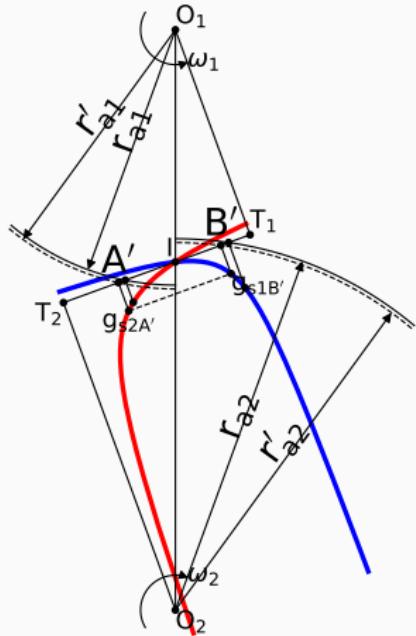
De notar que a engrenagem com dentado normal apresenta um desequilíbrio entre os escorregamentos específicos, tal que: $g_{s1B} > g_{s2A}$

Quanto maior for a razão $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}$ maior será o desequilíbrio.

A solução passa por deslocar AB na direção do elemento com menor escorregamento específico (T₂). Tal consegue-se através da correção de dentado que promova:

$$\left\{ \begin{array}{l} r'_{a1} > r_{a1} \\ r'_{a2} < r_{a2} \end{array} \right.$$

Como equilibrar escorregamentos específicos



Os pontos A e B são definidos pelos raios de cabeça. Então, a correção de dentado deverá afetar os seus valores.

A introdução da “correção de dentado” x (coeficiente de desvio ou correção)

$$r'_{a1} = r_{a1} + x \cdot m$$

$$r'_{a2} = r_{a2} - x \cdot m$$

Antes da Correção:

$$g_{s1B'} > g_{s2A'}$$

Depois da Correção:

$$g_{s1B'} = g_{s2A'}$$

Figura 51: Igualar escorregamentos específicos

Determinar correção que equilibra g_s

O escorregamento específico num ponto de contacto M é dado para o pinhão g_{s1} e roda g_{s2} :

$$g_{s1} = \left| \frac{\omega_1 \cdot \overline{T_1M} - \omega_2 \cdot \overline{T_2M}}{\omega_1 \cdot \overline{T_1M}} \right| = \left| 1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{\overline{T_2M}}{\overline{T_1M}} \right|$$
$$g_{s2} = \left| \frac{\omega_1 \cdot \overline{T_1M} - \omega_2 \cdot \overline{T_2M}}{\omega_2 \cdot \overline{T_2M}} \right| = \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\overline{T_1M}}{\overline{T_2M}} - 1 \right|$$

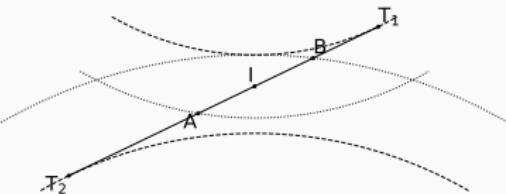


Figura 52: Caminho de Engrenamento

No caso particular do Ponto B:

$$g_{s1B} = \left| 1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{\overline{T_2B}}{\overline{T_1B}} \right| = \left| 1 - \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{T_2B}}{\overline{T_1B}} \right|$$

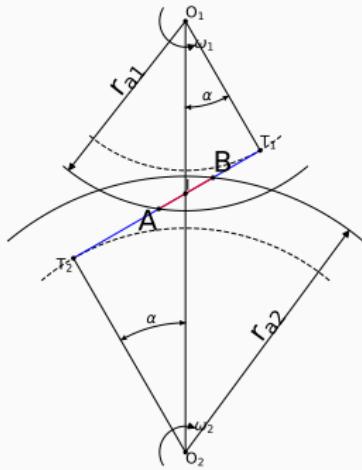
No caso particular do Ponto A:

$$g_{s2A} = \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\overline{T_1A}}{\overline{T_2A}} - 1 \right| = \left| \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\overline{T_1A}}{\overline{T_2A}} - 1 \right|$$

Torna-se necessário determinar:

$$\overline{T_1B}, \overline{T_1A}, \overline{T_2A}, \overline{T_2B}$$

Determinação dos Pontos A e B para cálculo de g_s



$$\overline{T_1 T_2} = \overline{T_2 T_1} = \overline{O_1 O_2} \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \alpha$$

$$\overline{T_1 A} = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}$$

$$\overline{T_2 B} = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}$$

$$\overline{T_2 A} = \overline{T_2 T_1} - \overline{T_1 A} = a \cdot \sin \alpha - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}$$

$$\overline{T_1 B} = \overline{T_1 T_2} - \overline{T_2 B} = a \cdot \sin \alpha - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}$$

Figura 53: Caminho de Engrenamento

$$g_{s1B} = \left| 1 - \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{T_2 B}}{\overline{T_1 B}} \right| = \left| 1 - \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}}{a \cdot \sin \alpha - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}} \right|$$

$$g_{s2A} = \left| \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\overline{T_1 A}}{\overline{T_2 A}} - 1 \right| = \left| \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}}{a \cdot \sin \alpha - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}} - 1 \right|$$

Determinar correção que equilibra g_s

A condição existente é $g_{s1B} \neq g_{s2A}$

$$\left| 1 - \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}}{a \cdot \sin \alpha - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}} \right| \neq \left| \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}}{a \cdot \sin \alpha - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}} - 1 \right|$$

A condição desejável é $g_{s1B'} = g_{s2A'}$

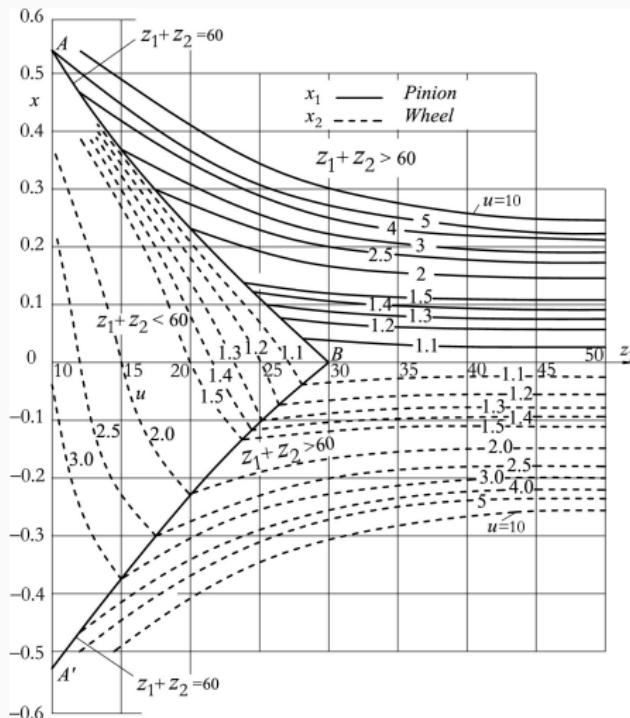
$$\left| 1 - \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\sqrt{{r'_{a2}}^2 - r_{b2}^2}}{a \cdot \sin \alpha - \sqrt{{r'_{a2}}^2 - r_{b2}^2}} \right| = \left| \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\sqrt{{r'_{a1}}^2 - r_{b1}^2}}{a \cdot \sin \alpha - \sqrt{{r'_{a1}}^2 - r_{b1}^2}} - 1 \right|$$

$$\left| 1 - \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\sqrt{(r_{a2} - x \cdot m)^2 - r_{b2}^2}}{a \cdot \sin \alpha - \sqrt{(r_{a2} - x \cdot m)^2 - r_{b2}^2}} \right| = \left| \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\sqrt{(r_{a1} + x \cdot m)^2 - r_{b1}^2}}{a \cdot \sin \alpha - \sqrt{(r_{a1} + x \cdot m)^2 - r_{b1}^2}} - 1 \right|$$

Resolver em ordem a x - única incógnita

O procedimento $x_2 = -x_1 = x$ demonstrado é devido a Henriot e usado para Engrenagens com $z_1 + z_2 > 60$

Correção de dentado - método gráfico $z_1 + z_2 \geq 60$



1. Escolher z_1 nas abscissas;
2. Interceptar z_1 com a razão de transmissão $u = \frac{z_2}{z_1}$ (à direita de ABA');
3. Escolher x_1 nas ordenadas;
4. $X_2 = -X_1$
 $X_1 + X_2 = 0$

Figura 54: Solução gráfica do algoritmo $g_{S1B'} = g_{S2A'}$ [5, 6].

Correção de dentado positiva

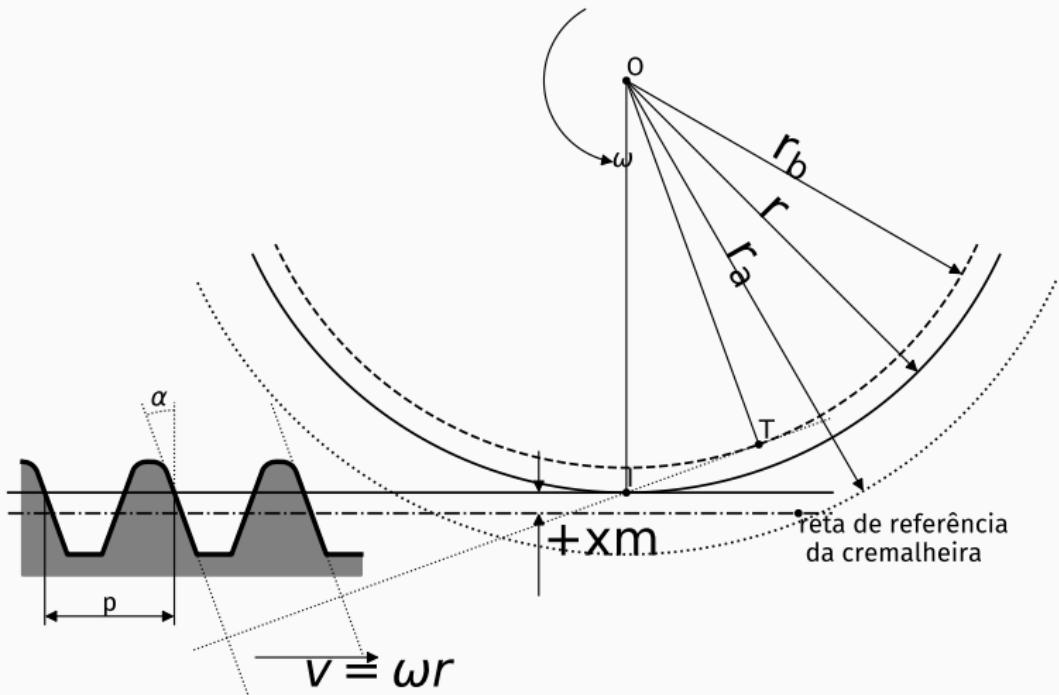


Figura 55: Cremalheira com correção positiva.

Correção de dentado positiva

Geração de dentado por uma cremalheira

$$z=20.0, m=2.0, x=0.5$$

$$\alpha=20.0^\circ, haP=1.25, hfP=1.0, \rho=0.38$$

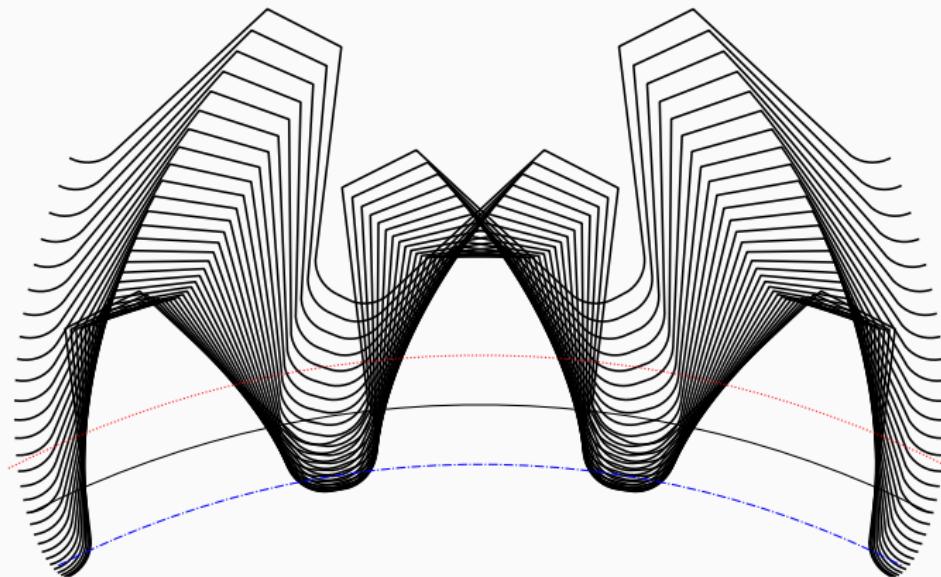


Figura 56: Forma de um dente com correção positiva.

Correção de dentado negativa

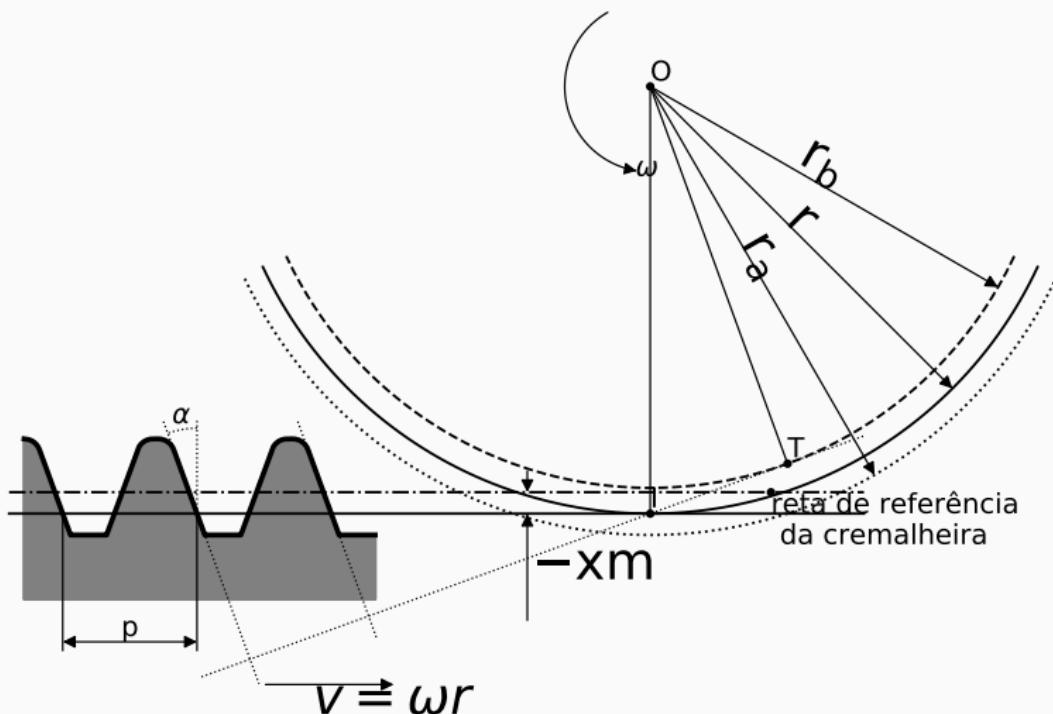


Figura 57: Cremalheira com correção negativa.

Correção de dentado negativa

Geração de dentado por uma cremalheira

$$z=20.0, m=2.0, x=-0.5$$

$$\alpha=20.0^\circ, haP=1.25, hfP=1.0, \rho=0.38$$

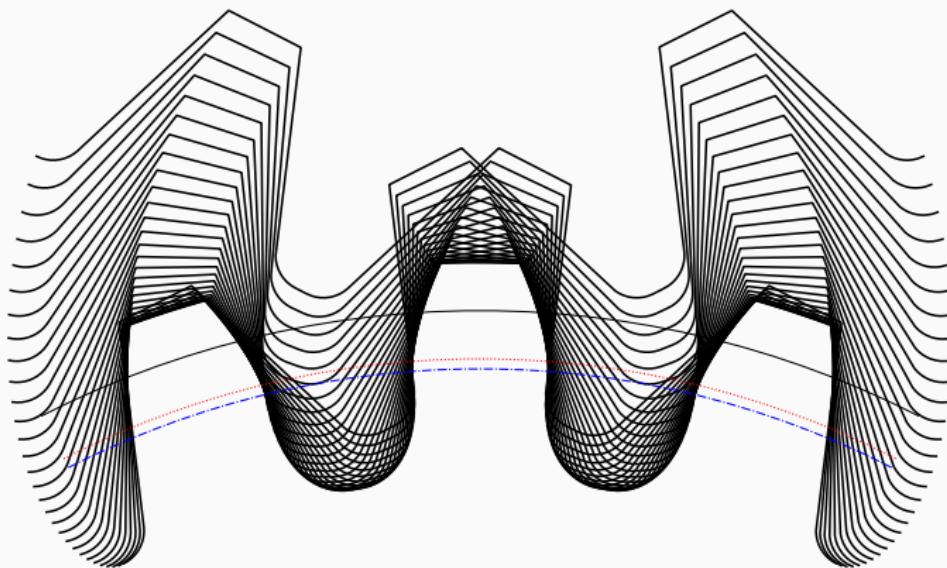


Figura 58: Forma de um dente com correção negativa.

Correção de dentado - método gráfico $z_1 + z_2 < 60$

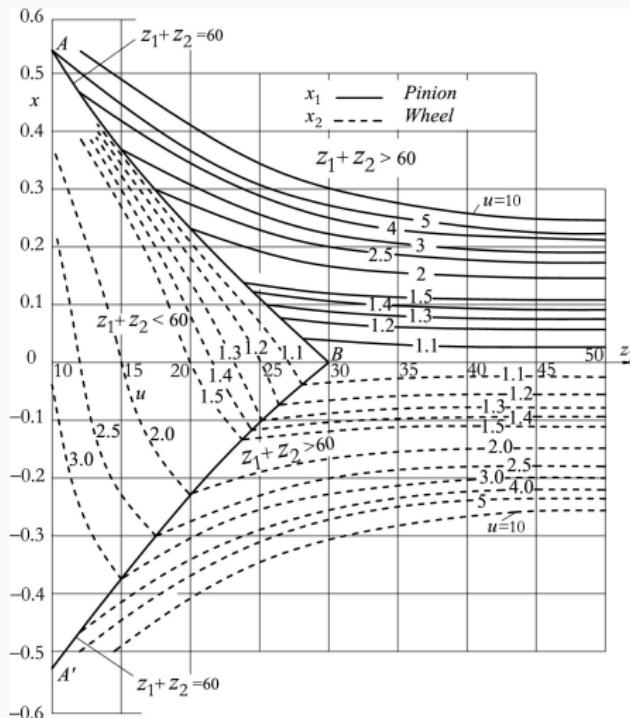


Figura 59: Solução gráfica do algoritmo $g_{S1B'} = g_{S2A'}$ [5, 6].

1. Escolher z_1 nas abscissas;
2. Interceptar z_1 com $z_1 + z_2 = 60$;
3. Escolher x_1 nas ordenadas;
4. Interceptar z_1 com a razão de transmissão $u = \frac{z_2}{z_1}$ (à esquerda de ABA');
5. Escolher x_2 nas ordenadas;

$x_1 + x_2 \neq 0$ – existe variação de entre-eixo

Correção de dentado - $z_1 + z_2 < 60$

Como já visto, para $z_1 + z_2 < 60$, a soma das correções adimensionais é $x_1 + x_2 \neq 0$ e tal implica que **existe variação de entre-eixo.**

Utilizando o procedimento para $z_1 + z_2 > 60$, a igualdade dos escorregamentos específicos também acontecia. No entanto:

- $z_1 + z_2 < 60$ normalmente implicam ter rodas z_2 com número de dentes baixo. Uma correção negativa na roda z_2 com um número de dentes baixo não é recomendado por reduzir a sua qualidade e enfraquecer o dente;
- o valor máximo do escorregamento específico seria ainda assim elevado e pouco recomendável.

Henriot propõe então uma solução mais optimizada para $z_1 + z_2 < 60$ que implica variação do entre-eixo mas minimiza estes problemas.

Correção de dentado - $z_1 + z_2 < 60$

Cálculo analítico para $z_1 + z_2 < 60$:

1. Criar uma engrenagem hipotética $z_1 + z_2^* = 60$, sendo z_1 o pinhão da nossa engrenagem de interesse;
2. Impor $g_{s1_{max}} = g_{s2_{max}}$ para a engrenagem hipotética e determinar $x_1 = x$ e $x_2^* = -x$, tal como para $z_1 + z_2 > 60$
3. Conhecido x_1 , impor $g_{s1_{max}} = g_{s2_{max}}$ para a engrenagem de interesse, mas $x_1 + x_2 \neq 0$ e o entre-eixo a' varia.
4. Resolver o sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| 1 - \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\sqrt{(r_{a2}+x_2 \cdot m)^2 - r_{b2}^2}}{a' \cdot \sin \alpha' - \sqrt{(r_{a2}+x_2 \cdot m)^2 - r_{b2}^2}} \right| = \left| \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\sqrt{(r_{a1}+x_1 \cdot m)^2 - r_{b1}^2}}{a' \cdot \sin \alpha' - \sqrt{(r_{a1}+x_1 \cdot m)^2 - r_{b1}^2}} - 1 \right| \\ a' \cdot \cos \alpha' = a \cdot \cos \alpha \\ \operatorname{inv} \alpha' = \operatorname{inv} \alpha + 2 \tan \alpha \cdot \frac{x_1+x_2}{z_1+z_2} \end{array} \right.$$

Importância de igualar escorregamento específico

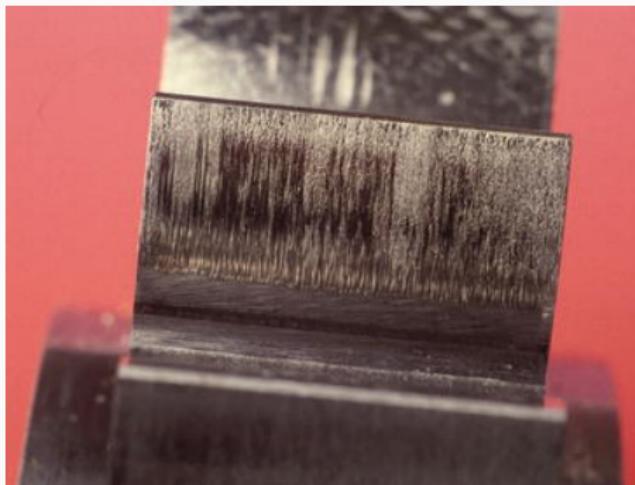


Figura 60: Avaria por gripagem.

Fases da avaria por gripagem:

- Quebra repentina do filme lubrificante;
- Contacto metal-metal;
- Avaria.

Importância de igualar escorregamento específico

A pressão superficial (Hertz) entre duas superfícies cilíndricas de raio ρ_1 e ρ_2 é proporcional a:

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{F_n \cdot E^*}{\pi \cdot b \cdot R}}$$

Força normal: F_n

Largura da roda dentada: b

Módulo de Young equivalente:

$$\frac{1}{E^*} = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)$$

Raio de contacto equivalente:

$$\frac{1}{R} = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

Em A, início do engrenamento:

$$\frac{1}{R_A} = \frac{1}{T_1 A} + \frac{1}{T_2 A} = \frac{T_1 T_2}{T_1 A \cdot T_2 A}$$

Em B, fim do engrenamento:

$$\frac{1}{R_B} = \frac{1}{T_1 B} + \frac{1}{T_2 B} = \frac{T_1 T_2}{T_1 B \cdot T_2 B}$$

O fator de Almen (fator de gripagem) é o produto da pressão de contacto pela velocidade de escorregamento:

$$\boxed{\sigma_H \cdot V_g = \sigma_H \cdot (V_{r1} - V_{r2})}$$

Importância de igualar escorregamento específico

Igualdade de escorregamentos específicos:

$$\frac{\omega_1 \cdot \overline{T_1B} - \omega_2 \cdot \overline{T_2B}}{\omega_1 \cdot \overline{T_1B}} = \frac{\omega_2 \cdot \overline{T_2A} - \omega_1 \cdot \overline{T_1A}}{\omega_2 \cdot \overline{T_2A}}$$

De notar que não deve ser considerada a velocidade de escorregamento em módulo.

$$\omega_2 \cdot \overline{T_2A} \cdot (\omega_1 \cdot \overline{T_1B} - \omega_2 \cdot \overline{T_2B}) = \omega_1 \cdot \overline{T_1B} \cdot (\omega_2 \cdot \overline{T_2A} - \omega_1 \cdot \overline{T_1A})$$

Após agrupar os termos comuns da velocidade angular da roda (à esquerda) e do pinhão (à direita):

$$\boxed{\omega_2^2 \cdot \overline{T_2A} \cdot \overline{T_2B} = \omega_1^2 \cdot \overline{T_1A} \cdot \overline{T_1B}}$$

Importância de igualar escorregamento específico

Igualdade dos fatores de Almen
do pinhão e roda:

$$\sigma_{H_B} \cdot V_{g1_B} = \sigma_{H_A} \cdot V_{g2_A}$$

inversamente proporcional à
raiz quadrada do raio de
curvatura equivalente, por isso:

Lembrar que $\sigma_H = \sqrt{\frac{F_n \cdot E^*}{\pi \cdot b \cdot R}}$

A pressão de contacto é

$$\left(\frac{1}{R_B}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot v_{g1_B} = \left(\frac{1}{R_A}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot v_{g2_A}$$

$$\left(\frac{\overline{T_1T_2}}{\overline{T_1B} \cdot \overline{T_2B}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (\omega_1 \cdot \overline{T_1B} - \omega_2 \cdot \overline{T_2B}) = \left(\frac{\overline{T_1T_2}}{\overline{T_1A} \cdot \overline{T_2A}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (\omega_2 \cdot \overline{T_2A} - \omega_1 \cdot \overline{T_1A})$$

Após simplificação: $\boxed{\omega_2^2 \cdot \overline{T_2A} \cdot \overline{T_2B} = \omega_1^2 \cdot \overline{T_1A} \cdot \overline{T_1B}}$

Assim se conclui que igualar os escorregamentos específicos corresponde a igualar os fatores de Almen (risco de gripagem).

Aula 6

Sumário

1. Dentado corrigido	81
2. Cálculo da espessura de dentes corrigidos	86
3. Entre-eixo de rodas corrigidas ($x_1 + x_2 \neq 0$)	87
4. Passo sobre o círculo primitivo de funcionamento	88
5. Cálculo do entre-eixo de funcionamento	91
6. Controlo com calibres cilíndricos	93

Perfil em evolente com correção

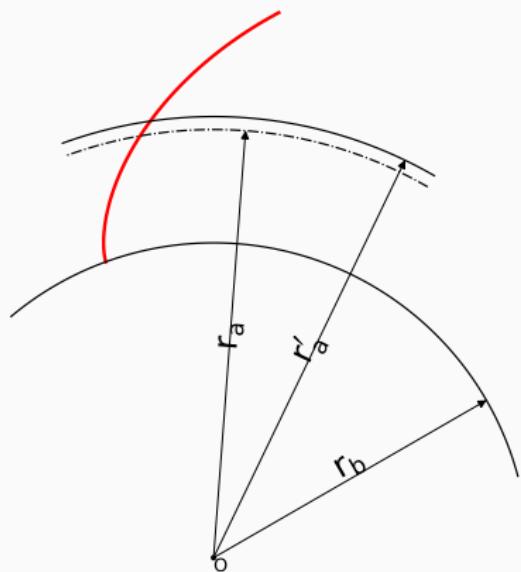


Figura 61: Evolente de círculo
(correção positiva, $x > 0$).

A roda com correção de dentado

$(x \neq 0)$ é maquinada com a mesma ferramenta que a roda sem correção ($x = 0$).

O raio de base r_b será o mesmo para ambas as rodas pois depende apenas do ângulo de pressão da ferramenta (α).

Podemos concluir que a evolente de círculo do raio r_b dá o perfil do dente com ($x \neq 0$) e com ($x = 0$).

Raio de cabeça sem correção:
 $r_a = r + m$

Raio de cabeça com correção:
 $r'_a = r + m + xm$

Flancos com correção

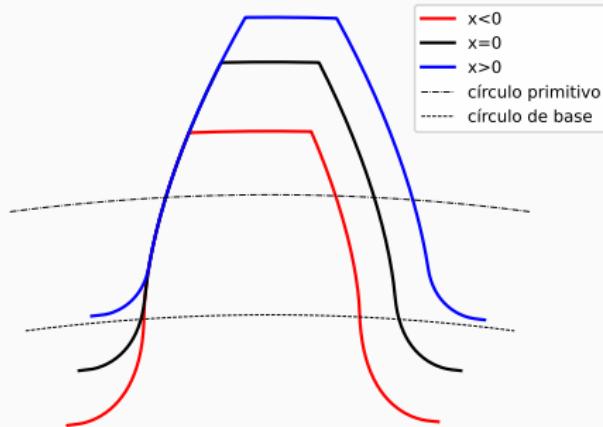


Figura 62: Comparação de dentado sem correção vs. correção positiva e negativa.

Na prática a correção de dentado implica mover os perfis sobre o círculo de base: afastando-os quando a correção é positiva e aproximando-os quando é negativa. Em inglês, a correção chama-se de “profile shift”.

Dentado com correção positiva: corte por cremalheira

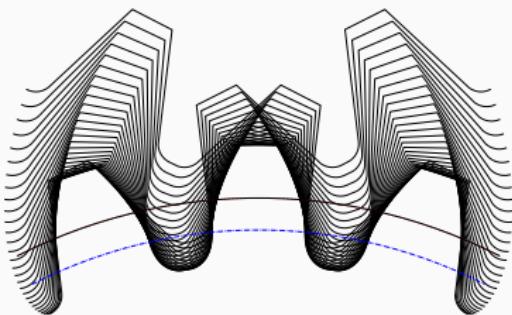
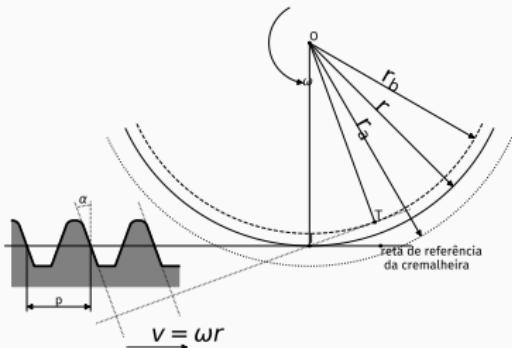


Figura 63: Roda sem correção.

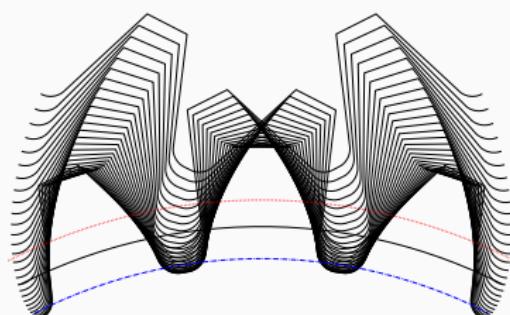
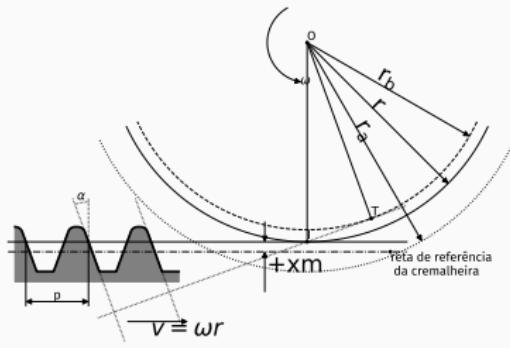


Figura 64: Roda com correção positiva ($x=0.5$).

Espessura do dente da cremalheira com correção positiva

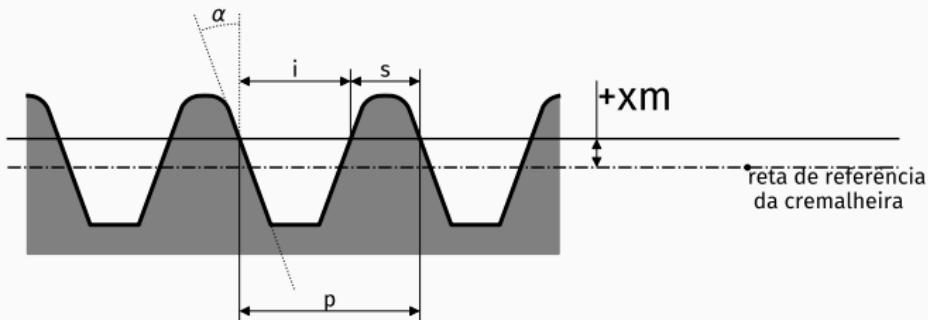


Figura 65: Cremalheira: reta tangente ao círculo primitivo com correção positiva.

A correção positiva corresponde a afastar a reta de referência da cremalheira do centro da roda que se pretende fabricar. A espessura do dente (s) da cremalheira sobre a reta tangente ao círculo primitivo será menor.

$$p_{cremalheira} = \pi \cdot m = s + i \quad \text{com} \quad s < i \text{ (correção positiva)}$$

Espessura do dente da cremalheira com correção positiva

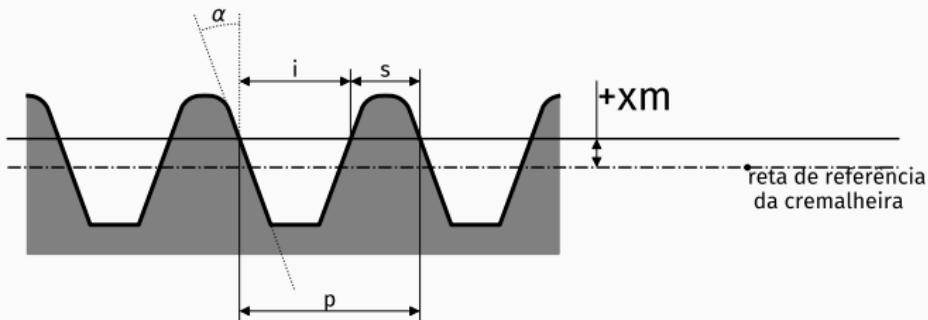


Figura 66: Cremalheira: reta tangente ao círculo primitivo com correção positiva.

$$s_{cremalheira} = \frac{\pi \cdot m}{2} - 2 \cdot x \cdot m \cdot \tan \alpha \quad i_{cremalheira} = \frac{\pi \cdot m}{2} + 2 \cdot x \cdot m \cdot \tan \alpha$$

Se a espessura dente do dente da cremalheira sobre a reta tangente diminui, observa-se um aumento da espessura do dente sobre o círculo primitivo de referência:

$$s_{roda} = i_{cremalheira}$$

$$i_{roda} = s_{cremalheira}$$

Espessura do dente com correção positiva

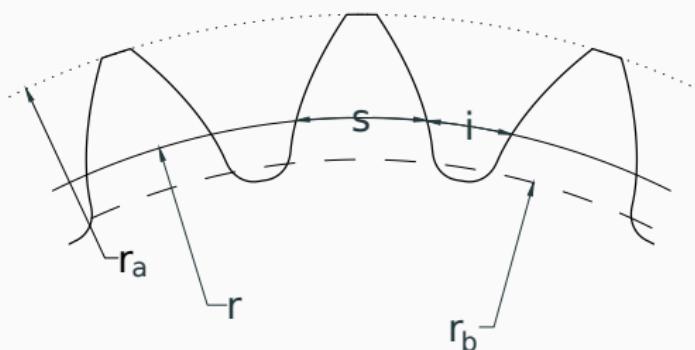


Figura 67: Roda dentada corrigida.

Na roda dentada verifica-se um aumento da espessura do dente sobre o círculo primitivo de corte, mas o passo e o ângulo de pressão mantêm-se inalterados (a ferramenta é a mesma). Assim:

$$p = \pi \cdot m = s + i \text{ com } s > i \text{ (correção positiva)}$$

$$s = \frac{\pi \cdot m}{2} + 2 \cdot x \cdot m \cdot \tan \alpha$$

$$i = \frac{\pi \cdot m}{2} - 2 \cdot x \cdot m \cdot \tan \alpha$$

$$r = \frac{z \cdot m}{2}$$

$$r_a = r + m + x \cdot m$$

Entre-eixo de rodas corrigidas ($x_1 + x_2 \neq 0$)

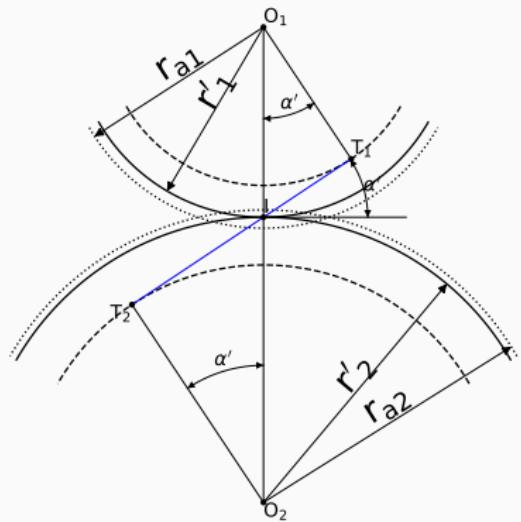


Figura 68: Entre-eixo para uma correção $x_1 + x_2 \neq 0$

Para as situações em que $x_1 + x_2 \neq 0$ há variação de

entre-eixo.

$$\overline{O_1 O_2} = r'_1 + r'_2$$

Os raios primitivos de funcionamento são neste caso diferentes dos círculos primitivos de corte, que se mantêm:

$$r = \frac{z \cdot m}{2}$$

O raio de base não se altera, pois depende apenas do ângulo de pressão de corte (α):

$$r_b = r \cdot \cos \alpha = r' \cdot \cos \alpha'$$

$$a' \cdot \cos \alpha' = a \cdot \cos \alpha$$

Passo sobre o círculo primitivo de funcionamento

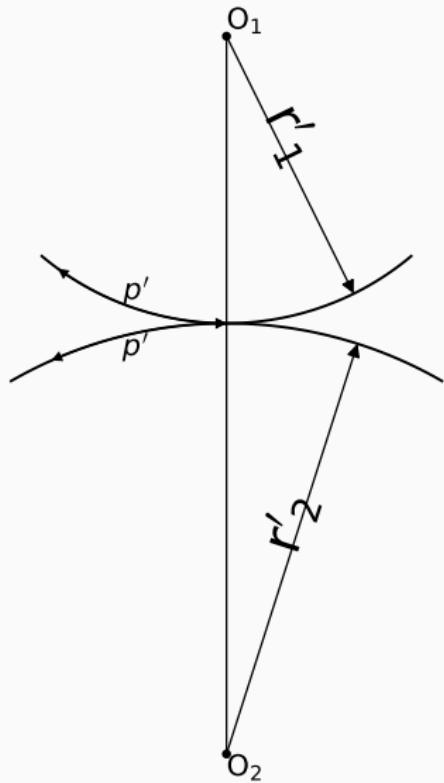


Figura 69: Passo sobre o círculo primitivo de funcionamento

Sobre os círculos primitivos de funcionamento:

O passo do pinhão:

$$p' = s'_1 + i'_1$$

O passo da roda:

$$p' = s'_2 + i'_2$$

No entanto, $s'_1 = i'_2$ e $s'_2 = i'_1$

Então $p' = s'_1 + s'_2$

Passo sobre o círculo primitivo de funcionamento

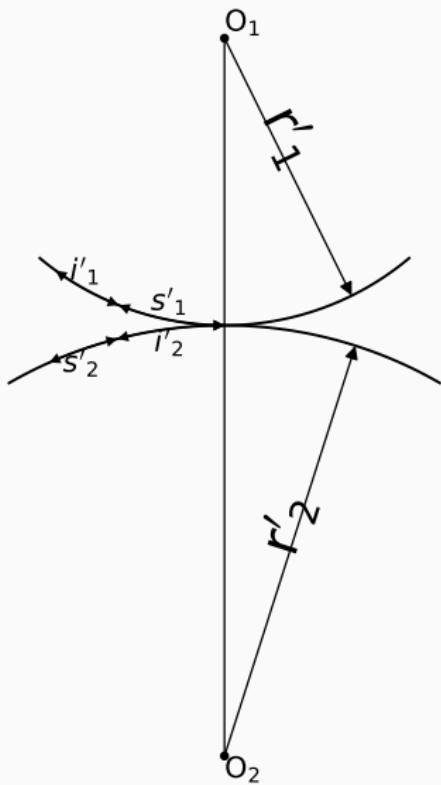


Figura 69: Passo sobre o círculo primitivo de funcionamento

Sobre os círculos primitivos de funcionamento:

O passo do pinhão:

$$p' = s'_1 + i'_1$$

O passo da roda:

$$p' = s'_2 + i'_2$$

No entanto, $s'_1 = i'_2$ e $s'_2 = i'_1$

Então $p' = s'_1 + s'_2$

Espessura do dente sobre o círculo primitivo de funcionamento

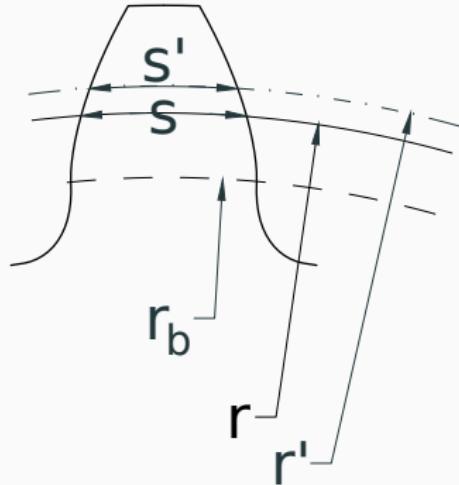


Figura 70: Espessura do dente com correção.

Como determinar r' ?

Não é para já conhecido, mas podemos escrever s'_1 e s'_2 , espessura do dente sobre o círculo primitivo de funcionamento, como:

$$s' = r' \cdot \left[\frac{s}{r} + 2 \cdot (\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha') \right]$$

No entanto, agora devemos notar que a roda dentada tem correção:

$$s = \frac{\pi \cdot m}{2} + 2 \cdot x \cdot m \cdot \tan \alpha$$

$$i = \frac{\pi \cdot m}{2} - 2 \cdot x \cdot m \cdot \tan \alpha$$

$$r = \frac{z \cdot m}{2}$$

Passo sobre o círculo primitivo de funcionamento

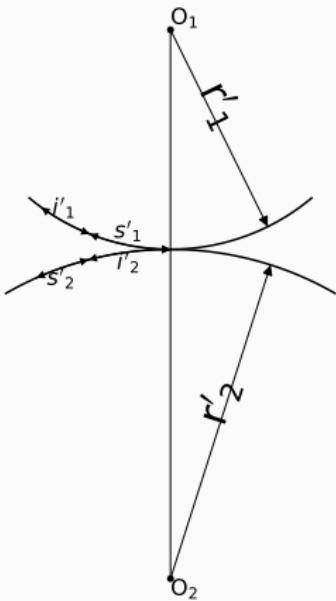


Figura 71: Passo sobre o círculo primitivo de funcionamento

r'_1 e r'_2 – Não conhecidos ainda.

No entanto sabemos que o passo sobre o círculo primitivo de funcionamento é igual à soma das espessuras do pinhão (s'_1) e roda (s'_2):

$$p' = s'_1 + s'_2$$

$$p' = r'_1 \cdot \left[\frac{s_1}{r_1} + 2 \cdot (\text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha') \right] + r'_2 \cdot \left[\frac{s_2}{r_2} + 2 \cdot (\text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha') \right]$$

Cálculo do entre-eixo de funcionamento

Dados já conhecidos:

$$z_1, \quad z_2, \quad x_1, \quad x_2, \quad \alpha$$

No caso de a soma $x_1 + x_2 \neq 0$,
há variação de entre-eixo e
temos 9 incógnitas:

$$\begin{array}{lllll} a', & \alpha', & r'_1, & r'_2, & p', \\ s'_1, & s'_2, & i'_1, & i'_2 & \end{array}$$

Sistema de 9 equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} a' = r'_1 + r'_2 \\ a' \cdot \cos \alpha' = a \cdot \cos \alpha \\ 2\pi \cdot r'_1 = z_1 \cdot p' \\ 2\pi \cdot r'_2 = z_2 \cdot p' \\ p' = s'_1 + i'_1 \\ p' = s'_2 + i'_2 \\ r'_1 \cdot \cos \alpha' = r_1 \cdot \cos \alpha = r_{b1} \\ r'_2 \cdot \cos \alpha' = r_2 \cdot \cos \alpha = r_{b2} \\ p' = s'_1 + s'_2 \end{array} \right.$$

Entre-eixo de engrenagens com correção

Correção com variação de entre-eixo

$$x_1 + x_2 \neq 0$$

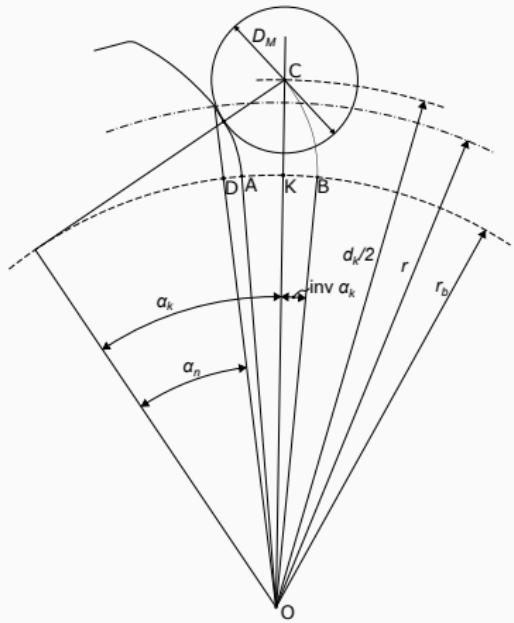
$$\begin{cases} a' \cdot \cos \alpha' = a \cdot \cos \alpha \\ \operatorname{inv} \alpha' = \operatorname{inv} \alpha + 2 \cdot \tan \alpha \cdot \frac{x_1+x_2}{z_1+z_2} \end{cases}$$

Correção sem variação de entre-eixo

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$a' = a$$

Controlo com calibres cilíndricos



$$\widehat{DB} = \widehat{DA} + \widehat{AB} = \widehat{DK} + \widehat{KB}$$

$$\widehat{DB} = \text{inv } \alpha_n \cdot r_b + \frac{D_M}{2} = \frac{i}{2} \cdot \frac{r_b}{r} + \text{inv } \alpha_k \cdot r_b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{inv } \alpha_n \cdot r_b + \frac{D_M}{2} = \frac{i}{2} \cdot \frac{r_b}{r} + \text{inv } \alpha_k \cdot r_b \\ \frac{d_k}{2} \cdot \cos \alpha_k = r_b \\ M_{dk} = d_k + D_M \end{array} \right.$$

Figura 72: Controlo com calibre cilíndrico

Controlo com calibres cilíndricos: número par de dentes

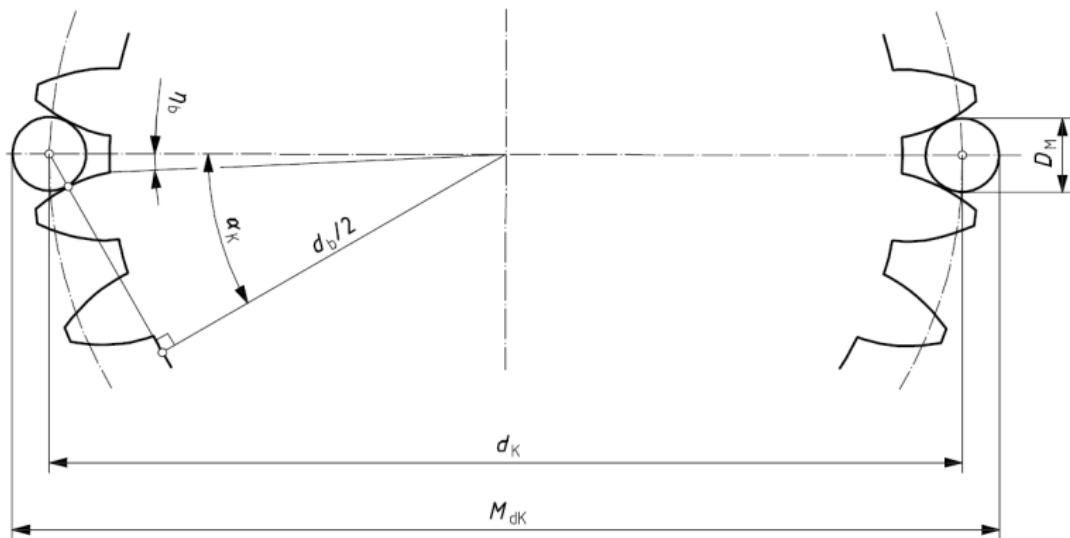


Figura 73: $M_{dk} = d_k + D_M$

Controlo com calibres cilíndricos: número ímpar de dentes

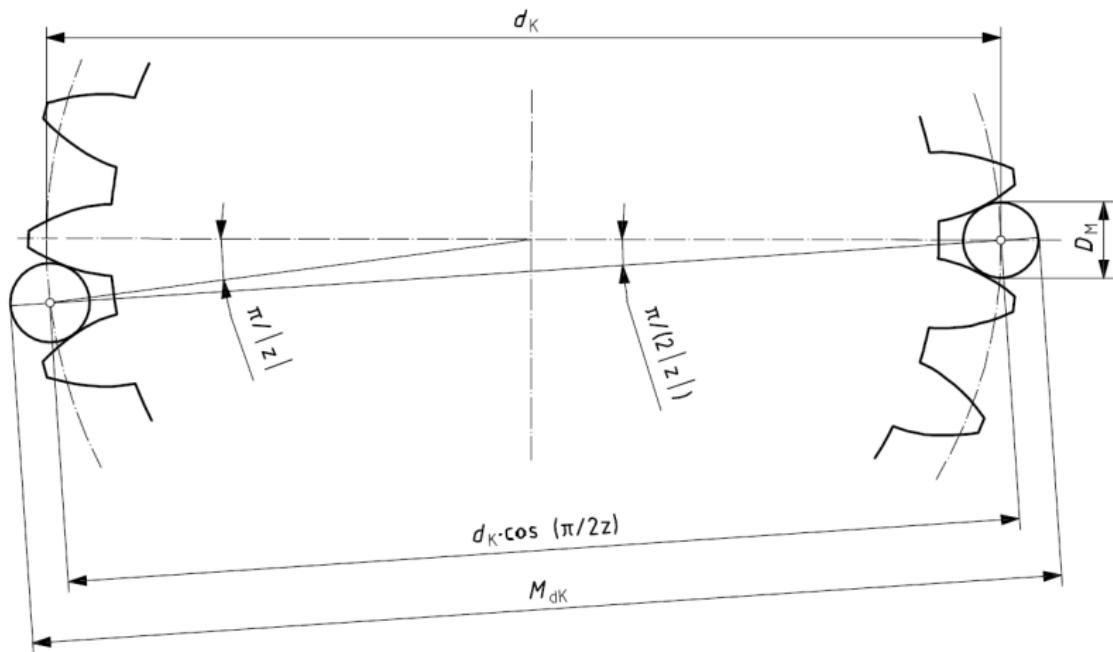


Figura 74: $M_{dK} = d_k \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2 \cdot z}\right) + D_M$

Aula 7

Sumário

1. Interferência de corte	97
2. Número mínimo de dentes para uma roda dentada não corrigida	100
3. Correção necessária para evitar interferência	102
4. Interferência de engrenamento	104

Interferência de corte

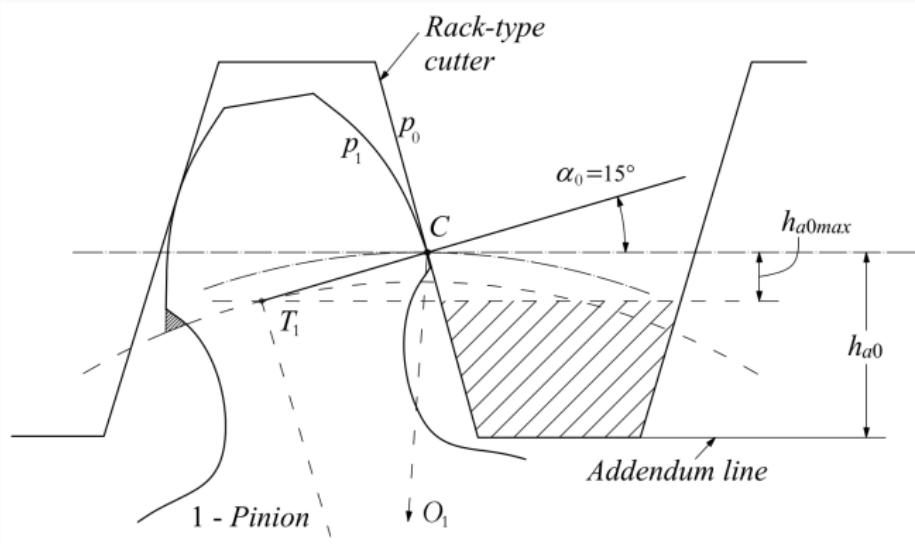


Figura 75: Interferência de corte [6].

O corte da roda dentada acontece mesmo abaixo do raio de base. A interferência de corte (em inglês “undercut”) surge quando o número de dentes da roda dentada é inferior a z' (ver adiante).

Interferência de corte

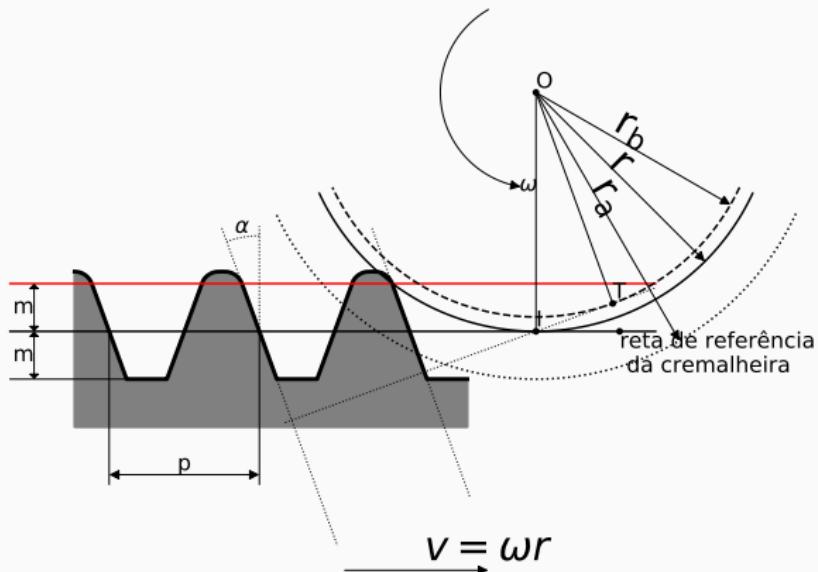


Figura 76: Interferência de corte

A reta superior da cremalheira (a vermelho), delimita o fim do seu flanco tangente à evolvente de círculo.

Dentado com interferência de corte

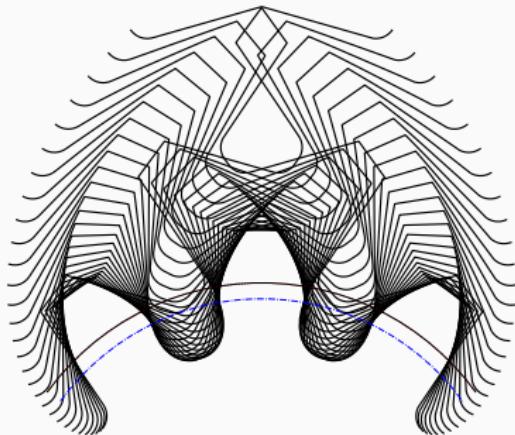


Figura 77: Dentado materializado com Interferência de corte

Um dentado materializado com interferência de corte através de uma cremalheira não tem

interferência em funcionamento, mas tem o seu pé de dente fragilizado.

Formas de evitar a interferência de corte:

- aumentar o ângulo de pressão da ferramenta - reduz o raio de base;
- diminuir a altura cabeça da cremalheira;
- **usar uma correção positiva.**

Apenas o uso de **uma correção positiva** é recomendado.

Número mínimo de dentes para uma roda dentada não corrigida

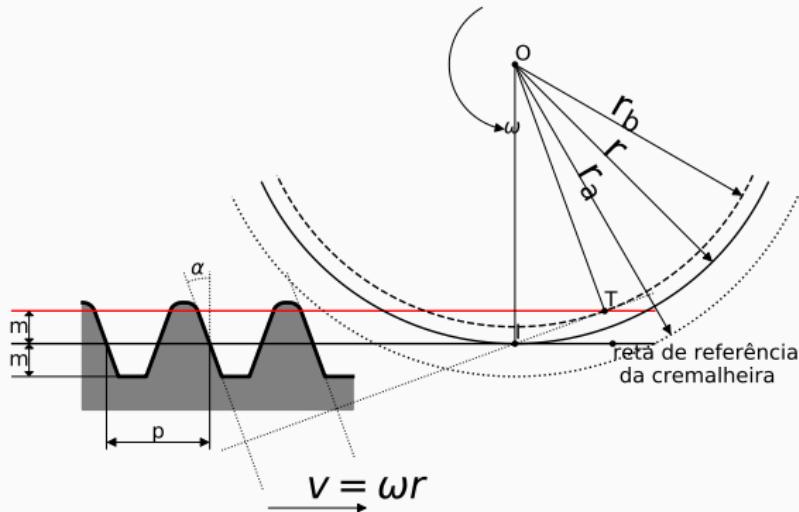


Figura 78: Condição limite de interferência de corte

$$\overline{OT} \cdot \cos \alpha + m = \overline{OI}$$

$$\frac{z' m}{2} \cdot \cos^2 \alpha + m = \frac{z' \cdot m}{2}$$

$$r_b \cdot \cos \alpha + m = r$$

$$\frac{z'}{2} \cdot (\cos^2 \alpha - 1) = -1$$

$$r \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + m = r$$

$$r \cdot \cos^2 \alpha + m = r$$

$$z' = \frac{2}{\sin^2 \alpha} \quad \text{para } \alpha = 20^\circ, z' \approx 17 \quad 100$$

Número mínimo de dentes para uma roda dentada não corrigida

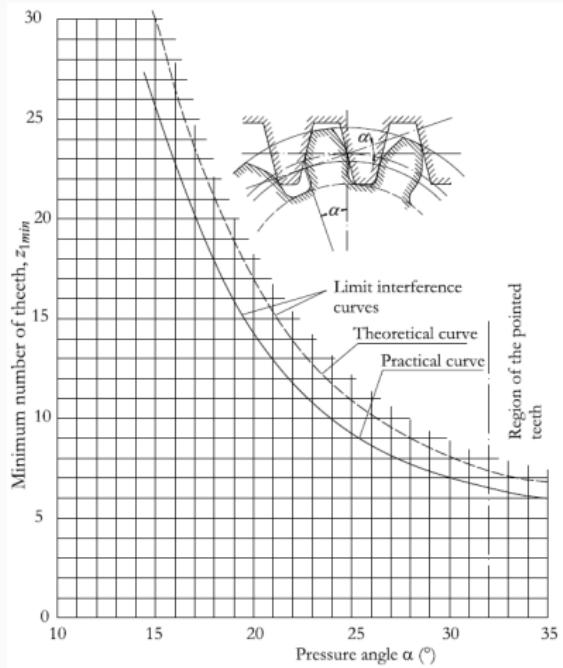


Figura 79: Método gráfico para determinar o número mínimo de dentes para uma roda dentada não corrigida em função do ângulo de pressão da cremalheira de corte [6].

Se for admissível alguma interferência e um nível de ruído mais elevado, principalmente a baixas velocidades, pode-se usar o número mínimo de dentes correspondente à curva prática. No entanto é esperável uma vida útil mais curta.

Correção necessária para evitar interferência de corte

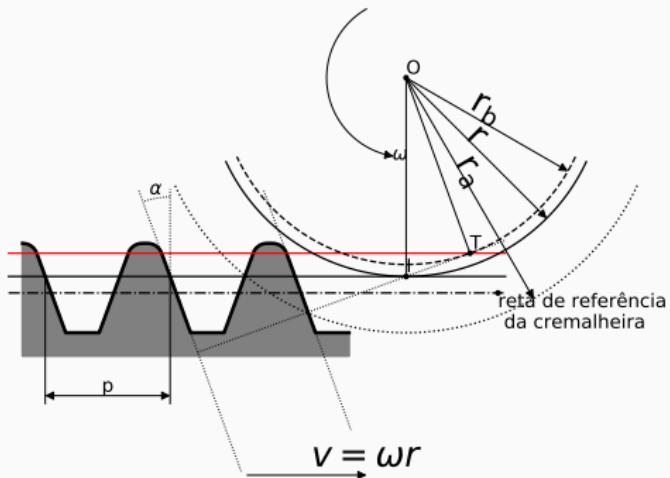


Figura 8o: Correção positiva para evitar a interferência de corte

$$\overline{OT} \cdot \cos \alpha + m - x \cdot m = \overline{OI}$$

$$r_b \cdot \cos \alpha + m - x \cdot m = r$$

$$r \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + m - x \cdot m = r$$

$$r \cdot \cos^2 \alpha + m - x \cdot m = r$$

$$\frac{z \cdot m}{2} \cdot \cos^2 \alpha + m - x \cdot m = \frac{z \cdot m}{2}$$

$$\frac{z}{2} \cdot (\cos^2 \alpha - 1) = x - 1$$

$$\frac{z}{2} \cdot (-\sin^2 \alpha) = x - 1$$

$$\frac{z}{2} \cdot (\sin^2 \alpha) = 1 - x$$

$$\text{Como } z' = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$$

$$\frac{z}{z'} = 1 - x$$

$$x = \frac{z' - z}{z'}$$

Correção positiva para evitar Interferência

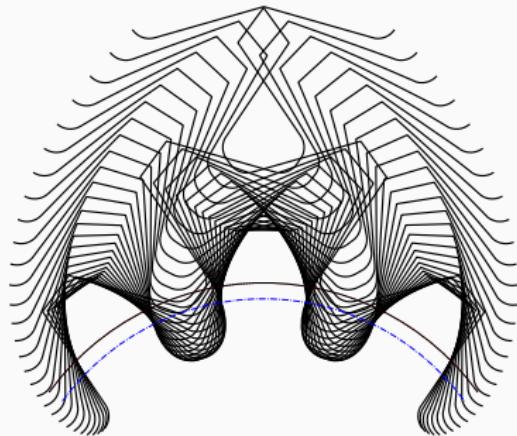


Figura 81: Dentado com interferência de corte

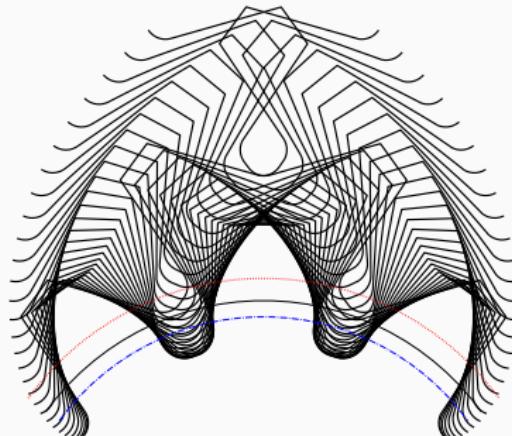


Figura 82: Dentado com correção
 $x = \frac{z' - z}{z'}$

Com a correção de dentado é possível obter números de dentes inferiores a z' , permitindo para a mesma razão de transmissão $u = \frac{z_2}{z_1}$, obter engrenagens mais compactas.

Interferência de engrenamento

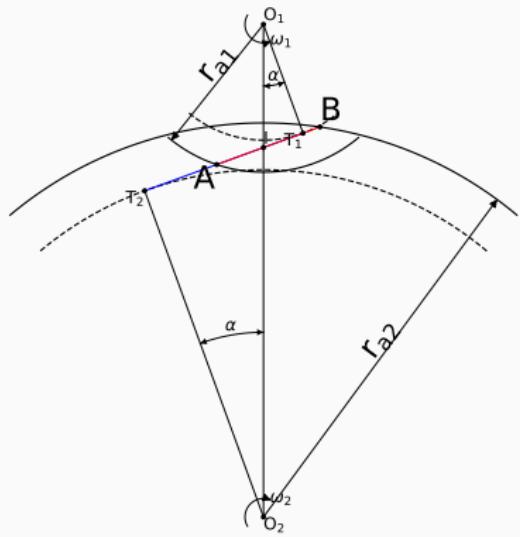


Figura 83: Engrenagem com interferência de engrenamento.

Quando um pinhão com z_1 engrena com uma roda z_2 e o ponto de início de engrenamento *A* ou fim de engrenamento *B* encontra-se fora da linha de ação T_1T_2 , existe engrenamento com interferência.

Número mínimo de dentes que engrenam sem interferência

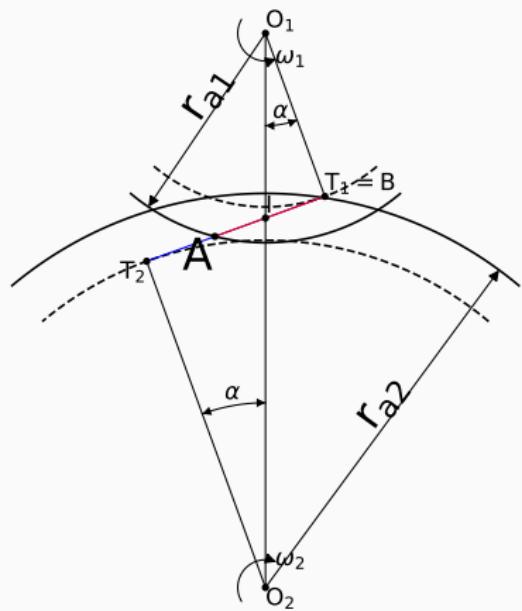


Figura 84: Engrenagem na condição limite de interferência de engrenamento.

$$\overline{T_1 T_2}^2 + \overline{O_2 T_2}^2 = r_{a2}^2$$

$$((r_1 + r_2) \cdot \sin \alpha)^2 + r_{b2}^2 = r_{a2}^2$$

$$z_1 = -z_2 + \sqrt{z_2^2 + \frac{4 \cdot (z_2 + 1)}{\sin^2 \alpha}}$$

Número mínimo de dentes z_1 em função de z_2

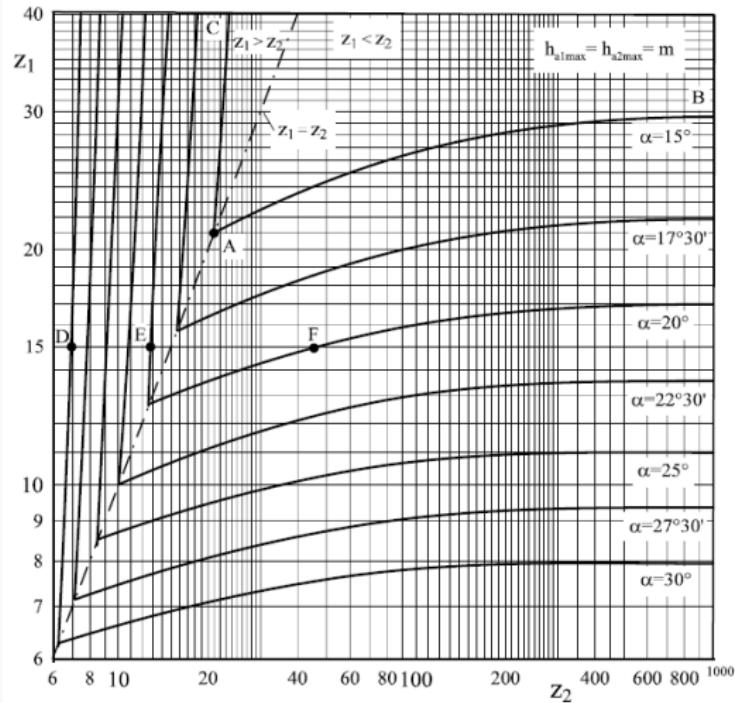


Figura 85: Número mínimo de dentes do pinhão z_1 em função do número de dentes da roda z_2 ($h_a = m$ e entre-eixo de corte) [6].

Aula 8

Sumário

1. Entre-eixo imposto e suas implicações	108
2. Métodos de cálculo das correções de dentado	109
3. Backlash e folga no pé do dente	114
4. Principais modificações de micro-geometria	116

Entre-eixo imposto e suas implicações

$$\begin{cases} a \cdot \cos \alpha = a' \cdot \cos \alpha' \\ \operatorname{inv} \alpha' = \operatorname{inv} \alpha + 2 \cdot \tan \alpha \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \end{cases}$$

Os seguintes métodos/normas apresentam soluções para o problema da escolha dos valores de x_1 e x_2 , quando $\sum x = x_1 + x_2$:

- Igualar fatores de Almen:
 - Henriot:
 - $z_1 + z_2 > 60, x_1 + x_2 = 0, a' = a$
 - $z_1 + z_2 < 60, x_1 + x_2 \neq 0, a' \neq a$
- Equilibrar diferentes critérios e obter engrenagens optimizadas para uma dada aplicação:
 - DIN 3992
 - ISO/TR 4467 / NF E 23-013
 - BSI – BS PD 6457

Método DIN 3992

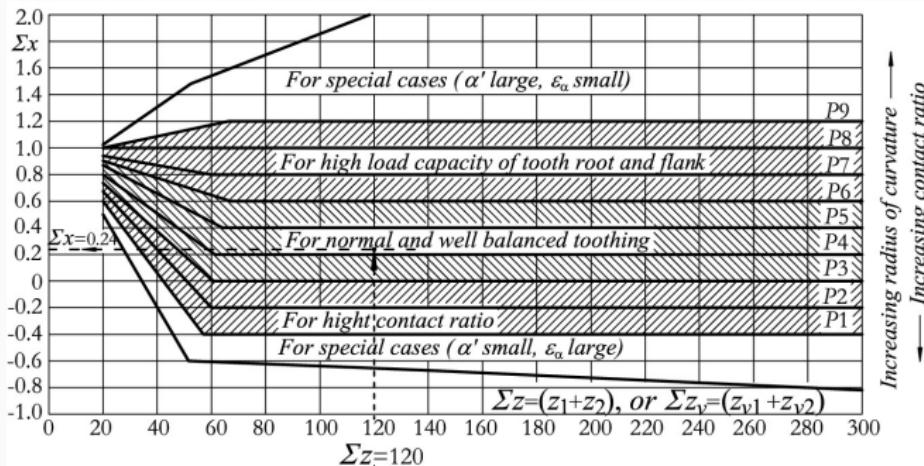


Figura 86: DIN 3992: diagrama para escolha da soma $x_1 + x_2$ para engrenagens redutoras.

1. Escolher a soma $z_1 + z_2$ nas abscissas;
2. Selecionar o critério de correção desejado:
 - Raio de curvatura: $P9 > P1$ – maior capacidade carga
 - Razão de condução: $P1 > P9$
3. Escolher $\sum x$ no eixo das ordenadas.

Método DIN 3992

Agora que é conhecido $z_1 + z_2$ e $x_1 + x_2$:

1. Escolher $\frac{z_1+z_2}{2}$ nas abscissas e $\frac{x_1+x_2}{2}$ nas ordenadas - encontrar ponto de intersecção;
2. Traçar uma linha paralela à linha "Li" mais próxima e que passa pelo ponto definido no ponto 1;
3. Escolher z_1 no eixo das abscissas e intersectar linha definida no ponto 2 - escolhido x_1 .

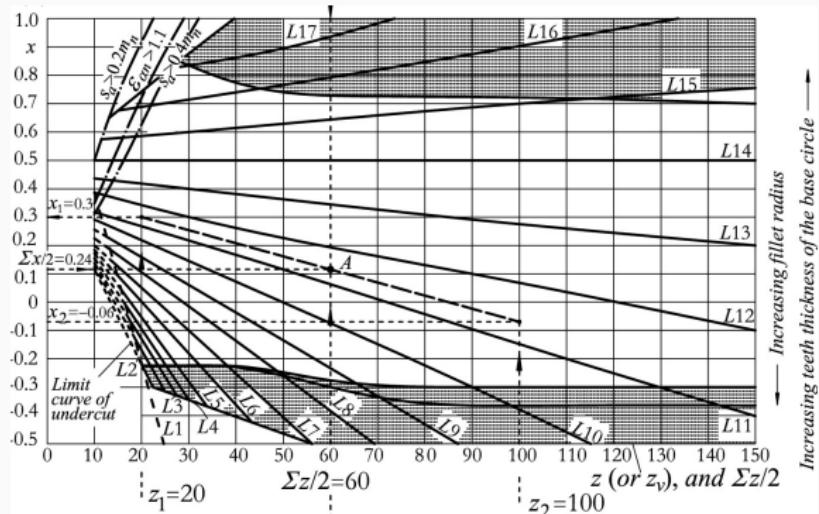


Figura 87: DIN 3992: diagrama para escolha da partição de x_1 e x_2 para engrenagens redutoras.

Conhecido z_1 e z_2 , podemos calcular a razão de multiplicação:

$$u = \frac{z_2}{z_1}$$

Utilizar a seguinte expressão para determinar os coeficientes x_1 e x_2 :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \cdot \frac{u-1}{u+1} + \frac{\sum x}{u+1} \\ x_2 = \sum x - x_1 \end{cases}$$

Se $u > 5$, usar $u = 5$.

A razão de transmissão é calculada como $i = \frac{\omega_{mandante}}{\omega_{mandada}} = \frac{z_{mandada}}{z_{mandante}}$

Para engrenagens redutoras, i.e. $i > 1$, usar

$$0.5 \leq \lambda \leq 0.75$$

Para engrenagens multiplicadoras, i.e. $i < 1$, usar

$0.0 \leq \lambda \leq 0.5$ – Henriot preconiza o uso de $\lambda = 0$ para obter engrenagens mais eficientes.

Método BSI – BS PD 6457

Conhecido z_1 e z_2 , podemos calcular a razão de multiplicação:

$$u = \frac{z_2}{z_1}$$

Utilizar a seguinte expressão para determinar os coeficientes x_1 e x_2 :

$$\begin{cases} x_1 = C \cdot \frac{u-1}{u} + \frac{\sum x}{u+1} \\ x_2 = \sum x - x_1 \end{cases}$$

Igualar flexão no pé do dente:

$$C = \frac{1}{2}$$

Igualar escorregamentos específicos:

$$C = \frac{1}{\sqrt{z_{v1}}}, \text{ com } z_{v1} = \frac{z_1}{\cos^3 \beta}, \text{ para engrenagens de dentado reto é}$$
$$z_{v1} = z_1$$

Exemplo de Aplicação

Exemplo:

$$z_1 = 20, z_2 = 41, \alpha = 20^\circ, m = 2 \text{ mm}$$

Engrenagem redutora com $u = \frac{z_2}{z_1} = |i| = 2.05$

$$z_1 + z_2 = 61$$

Consideremos para todos os métodos que não há variação de entre-eixo: $x_1 + x_2 = 0$

Parâmetro	Normal	Igualar gs	Âbaco Henriot	DIN 3992	ISO TR 4467	BSI BS PD 6457
Metodologia	-	$g_{s1B} = g_{s2A}$	Gráfico	Gráfico	$\lambda = 0.75$	$C = 0.5$
x_1	0	0.251	0.240	0.100	0.258	0.256
x_2	0	-0.251	-0.240	-0.100	-0.258	-0.256
g_{s1B}	4.270	1.989	2.053	3.092	1.949	1.961
g_{s2A}	1.487	1.989	1.965	1.678	2.004	1.999

De notar que, exceto o procedimento DIN 3992, todos os restantes métodos apresentam resultados similares quando se considera como critério equilibrar os escorregamentos específicos.

Backlash

As correções de dentado, tal como visto anteriormente, assumiam a inexistência de *backlash*.

Na prática, as engrenagens deverão ter *backlash* de forma a acomodar os seguintes efeitos:

- presença de erros de fabrico;
- expansão térmica;
- deformação do dentado sob carga;

- lubrificação.

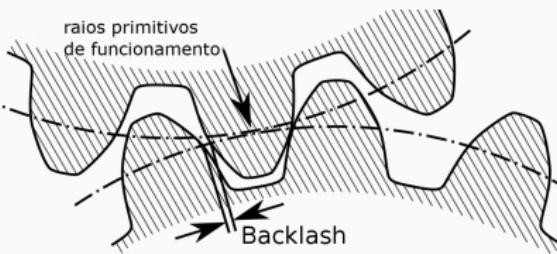


Figura 88: Backlash.

$$j_t = 2 \cdot \Delta a' \cdot \tan \alpha' \rightarrow \text{backlash radial}$$

$$a' - \Delta a' = m \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$$

Existe a necessidade de reajustar as correções de dentado x_1 e x_2 para incluir o *backlash*.

Folga no pé do dente

Folga entre a cabeça e o pé do dente (em inglês “tip clearance”) é representado por c_1 e c_2 para o pinhão e roda, respectivamente.

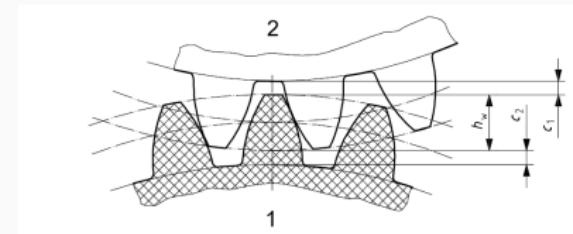


Figura 89: Folga no pé do dente (ISO 21771).

A introdução de correções de dentado alteram a folga entre o pé de dente e o raio de cabeça da roda conjugada.

De modo a garantir um valor adequado de folga, é aplicado o fator adimensional (k) de redução dos raios de cabeça:

$$k = \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \left(\frac{\operatorname{inv} \alpha'_t - \operatorname{inv} \alpha_t}{\tan \alpha} - \frac{1}{\cos \beta} \cdot \left(\frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha'_t} - 1 \right) \right)$$

O novo raio de cabeça será:

$$r'_a = r_a + m \cdot (x - k)$$

Principais modificações de micro-geometria

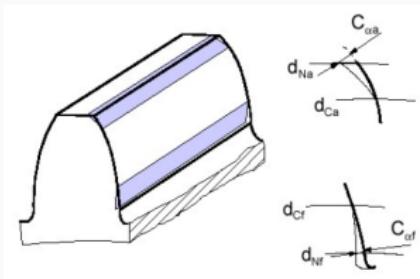


Figura 90: Tip and root relief

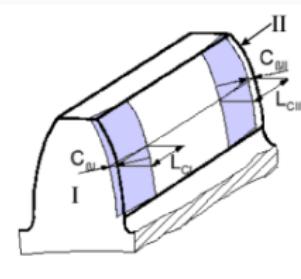


Figura 91: End relief

O alívio da cabeça (*tip relief*) e o alívio do pé do dente (*root relief*) são modificações intencionais do perfil do dente. Uma pequena quantidade de material é removido com a finalidade de suavizar o início do engrenamento [6]. O *end relief* evita o contacto nos bordos das rodas dentadas.

As modificações micro-geométricas do tipo *relief* podem ser: lineares, arcos, progressivas... (Ver ISO 21771)

Principais modificações de micro-geometria

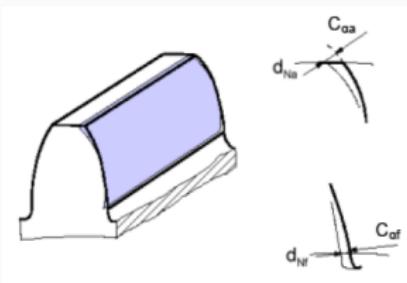


Figura 92: Profile crowning

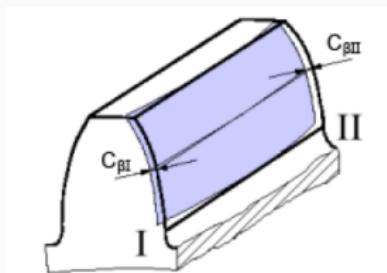


Figura 93: Lead crowning

Na prática, as engrenagens possuem desvios e erros de fabrico/montagem.

Para reduzir tanto quanto possível os efeitos destes desvios e erros, tipicamente usam-se modificações do perfil nas direção do perfil (*profile crowning*) e longitudinal (*lead crowning*) [6].

Existem outras modificações que permitem modificação do ângulo de pressão e hélice (helicoidais).

Aula 9

Sumário

1. A engrenagem helicoidal	119
2. Número virtual de dentes	128
3. Razão de condução de engrenagens helicoidais	129

Engrenagem helicoidal

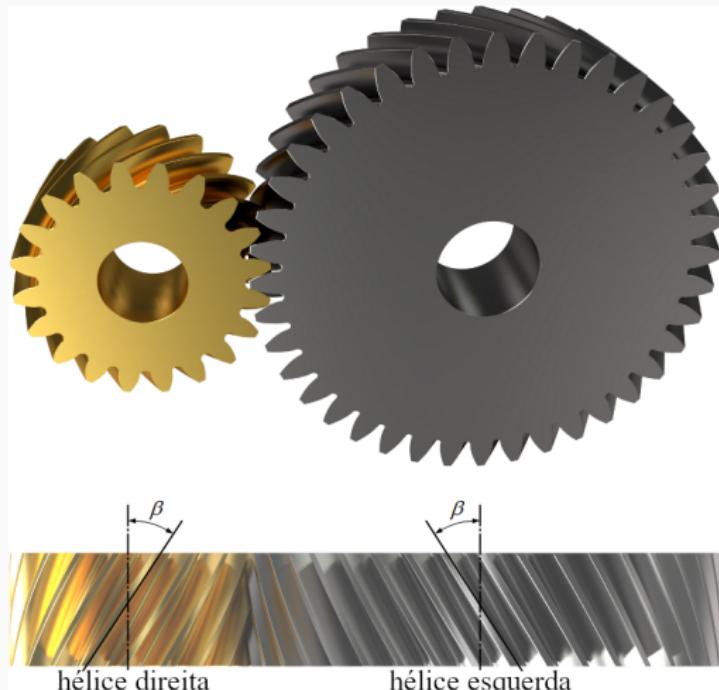


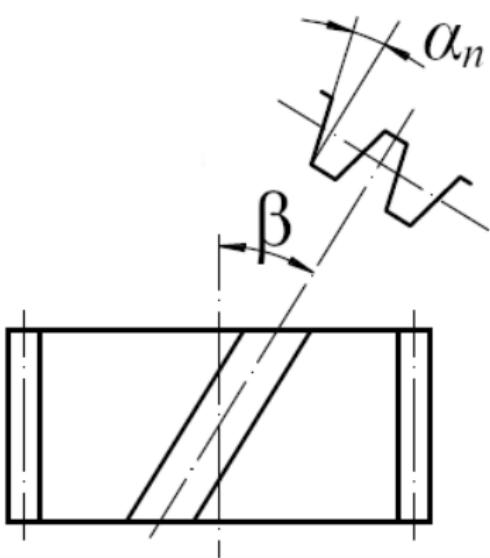
Figura 94: Engrenagem helicoidal e classificação da inclinação da hélice.

Ângulo de hélice

O ângulo de hélice é denominado por β , e pode ter inclinação à direita ou à esquerda. Os valores comuns do ângulo de hélice estão compreendidos entre 15 e 45°.

O uso de valores elevados de β introduz cargas axiais significativas.

Elementos geométricos no plano real



Elementos reais:
medem-se num plano
perpendicular ao dentado e
representam-se pelo índice n

α_n	ângulo de pressão real
m_n	módulo real
p_n	passo real
p_{bn}	passo de base real

$$p_n = \pi \cdot m_n$$

$$p_{bn} = p_n \cdot \cos \alpha_n$$

Figura 95: Ângulo de pressão sobre o plano real ou normal - perpendicular ao dentado [6].

Elementos geométricos no plano aparente

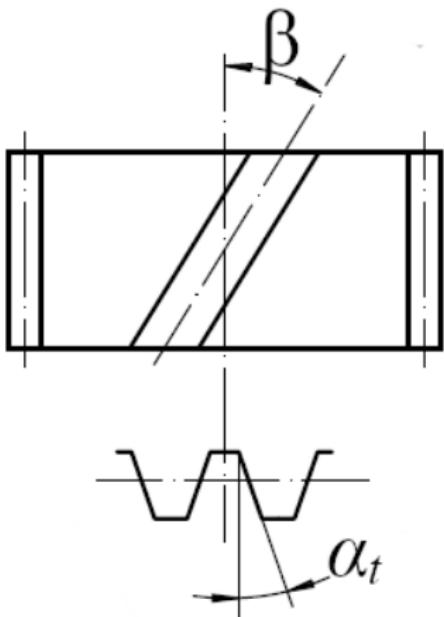
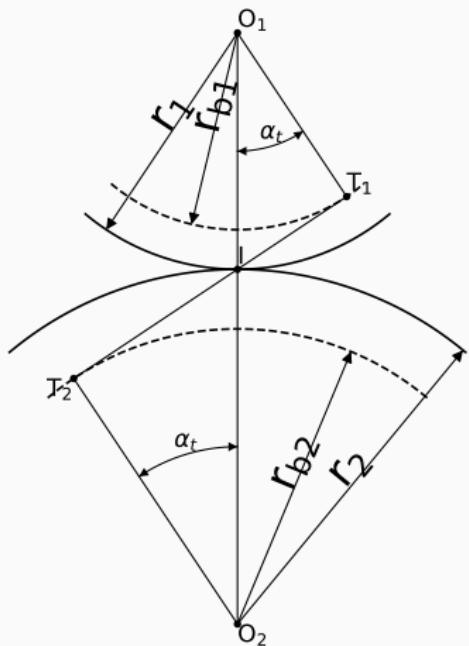


Figura 96: Ângulo de pressão sobre o plano aparente ou transversal - perpendicular ao eixo da roda dentada [6].

Elementos aparentes:
medem-se num plano
perpendicular aos eixos da
engrenagem e representam-se
pelo índice t

-
- | | |
|------------|----------------------------|
| α_t | ângulo de pressão aparente |
| m_t | módulo aparente |
| p_t | passo aparente |
| p_{bt} | passo de base aparente |
-

Plano aparente – raios de base, primitivo, cabeça e pé



Raio de base:

$$r_b = r \cdot \cos \alpha_t$$

Raio primitivo:

$$2 \cdot \pi \cdot r = z \cdot p_t$$

$$r = \frac{z \cdot p_t}{2\pi} = \frac{z \cdot m_t}{2}$$

Utilizando um perfil de referência tipo A (ISO 53)

Raio de cabeça:

$$r_a = r + m_n$$

Raio de pé:

$$r_d = r - 1.25 \cdot m_n$$

Figura 97: Plano aparente ou transversal - perpendicular ao eixo da roda dentada.

Hélice primitiva e hélice de base

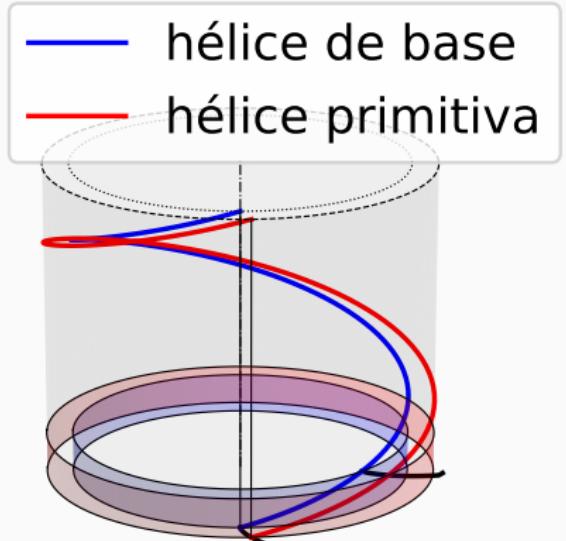


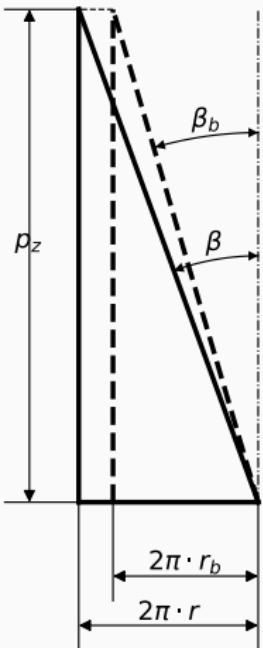
Figura 98: Hélice primitiva e hélice de base.

O ângulo de hélice β é avaliado sobre o círculo primitivo.

O ângulo de hélice de base β_b é avaliado sobre o círculo de base.

O passo de hélice p_z é igual para o círculo de base e para o círculo primitivo.

Relação entre ângulo de hélice primitiva e de base



Planificando o cilindro primitivo e o cilindro de base, podemos conhecer a relação do passo de hélice p_z , comum às duas hélices, com o perímetro dos dois cilindros:

$$p_z \cdot \tan \beta_b = 2 \cdot \pi \cdot r_b$$

$$p_z \cdot \tan \beta = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$p_z = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \cos \alpha_t}{\tan \beta_b} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{\tan \beta}$$

$$\frac{\cos \alpha_t}{\tan \beta_b} = \frac{1}{\tan \beta}$$

$$\boxed{\tan \beta \cdot \cos \alpha_t = \tan \beta_b}$$

Figura 99: Relação entre ângulos de hélice.

Passo real e aparente

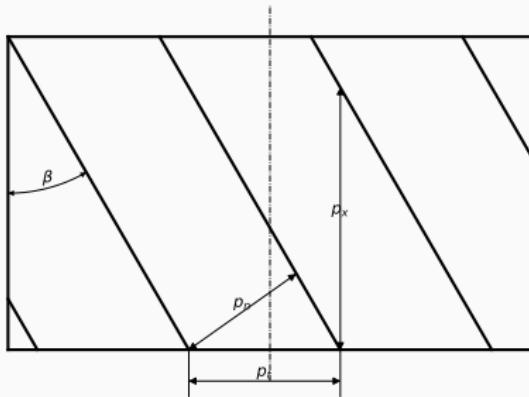


Figura 100: Passo real, aparente e axial sobre o círculo primitivo.

No plano real:

$$p_n = \pi \cdot m_n$$

$$p_t = \frac{p_n}{\cos \beta}$$

Mas:

$$p_t \neq p_n$$

$$m_t \cdot \cos \beta = m_n$$

$$p_t \cdot \cos \beta = p_n$$

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta}$$

Passo de base real e aparente

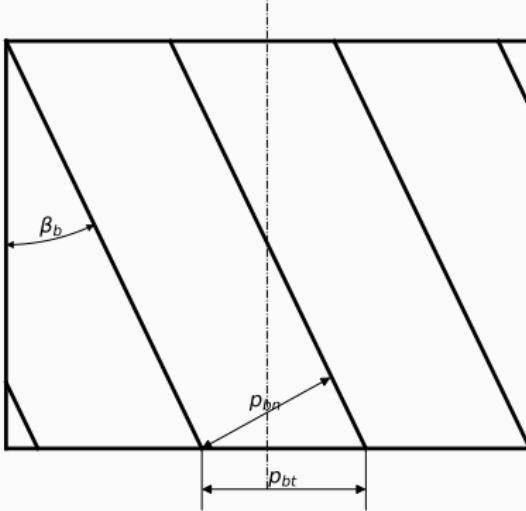


Figura 101: Passo de base real e aparente sobre o círculo de base.

No plano real:

$$p_n = \pi \cdot m_n$$

$$p_{bn} = p_n \cdot \cos \alpha_n$$

No plano aparente:

$$p_t = \frac{p_n}{\cos \beta}$$

$$p_{bt} = p_t \cdot \cos \alpha_t$$

Relação entre ângulo de pressão aparente e real

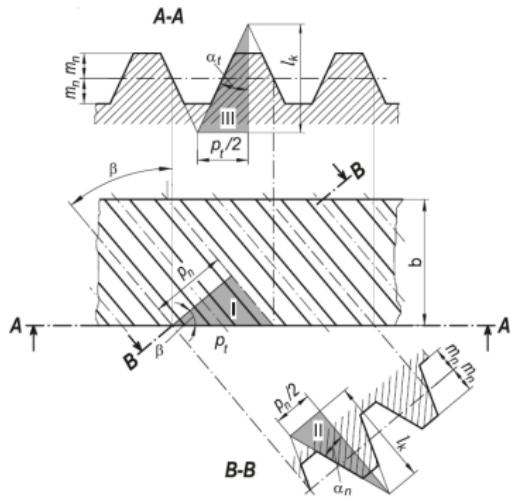


Figura 102: Corte A-A: plano aparente; corte B-B: plano real [7].

No plano real:

$$l_k = \frac{p_n/2}{\tan \alpha_n}$$

No plano aparente:

$$\tan \alpha_t = \frac{p_t/2}{l_k}$$

A altura l_k é comum aos dois planos, então:

$$\tan \alpha_t = \frac{p_t/2}{\frac{p_n/2}{\tan \alpha_n}}$$

A razão entre o passo aparente p_t e o passo real p_n é:

$$p_t = \frac{p_n}{\cos \beta}$$

Então:

$$\tan \alpha_t = \frac{\frac{p_n}{\cos \beta}}{\frac{p_n}{\tan \alpha_n}}$$

$$\boxed{\tan \alpha_t = \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta}}$$

Número virtual de dentes

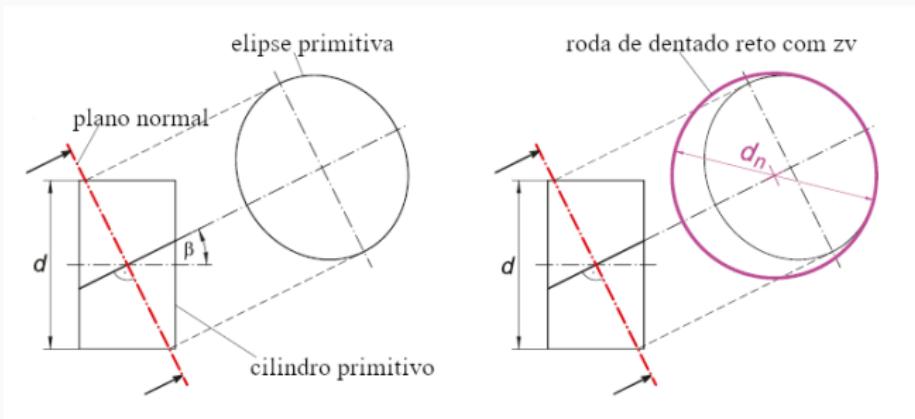


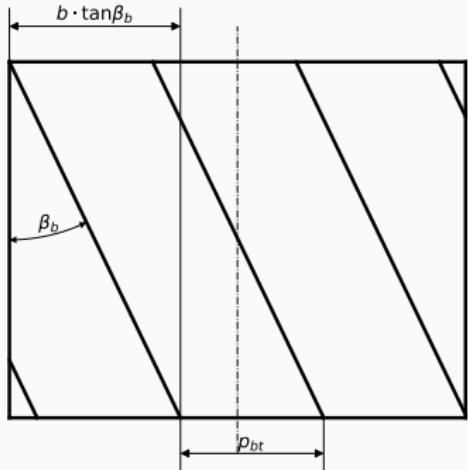
Figura 103: Número virtual de dentes [7].

$$d_n = \frac{2 \cdot r}{\cos^2 \beta} = z_v \cdot m_n, \text{ sendo } m_n = m_t \cdot \cos \beta \text{ e } \frac{2 \cdot r}{m_t} = z$$

$$z_v = \frac{z}{\cos^3 \beta}$$

Para determinação das correções de dentado nos ábacos previamente apresentados, deverá ser usado o número virtual de dentes.

Razão de condução de engrenagens helicoidais



A razão de condução de uma engrenagem helicoidal é determinada pela soma de duas componentes:

$$\epsilon = \epsilon_{\alpha_t} + \epsilon_{\beta}$$

$$\epsilon_{\alpha_t} = \frac{AB}{p_{bt}}$$

ϵ_{β} tem a denominação de razão de condução complementar

Figura 104: Razão de condução complementar.

$$\epsilon_{\beta} = \frac{b \cdot \tan \beta_b}{p_{bt}} = \frac{b \cdot \tan \beta}{p_t} = \frac{b \cdot \tan \beta}{\pi \cdot m_t}$$

Razão de condução complementar

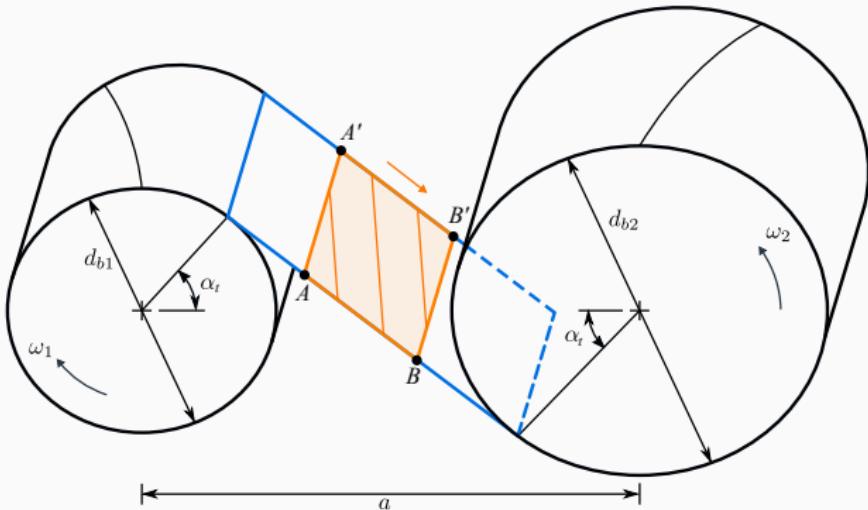


Figura 105: Razão de condução complementar.

$$\epsilon_\beta = \frac{b \cdot \tan \beta_b}{p_{bt}} = \frac{b \cdot \tan \beta}{p_t} = \frac{b \cdot \tan \beta}{\pi \cdot m_t}$$

Razão de condução complementar

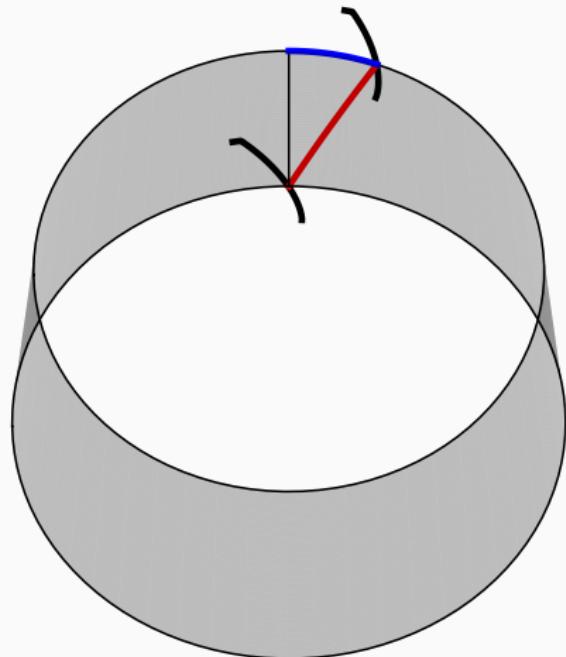


Figura 106: Razão de condução complementar.

$$\epsilon_{\beta} = \frac{\phi}{p_{bt}/r_b} = \frac{r \cdot \phi \cdot \frac{r_b}{r}}{p_{bt}}$$

$$\epsilon_{\beta} = \frac{b \cdot \tan \beta \cdot \cos \alpha_t}{p_t \cdot \cos \alpha_t} = \frac{b \cdot \tan \beta}{\pi \cdot m_t}$$

$$\boxed{\epsilon_{\beta} = \frac{b \cdot \tan \beta}{\pi m_t}}$$

Aula 10

Sumário

1. Introdução à capacidade de carga de engrenagens	133
2. Flexão no pé do dente	139
3. Pressão de contacto	141
4. A normalização no cálculo da capacidade de carga	144

Introdução à capacidade de carga de engrenagens

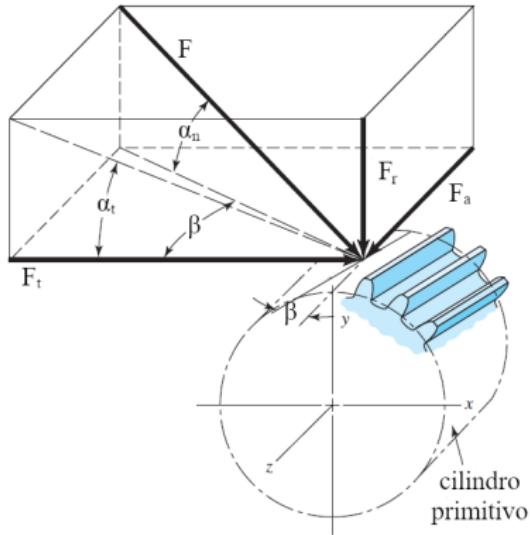


Figura 107: Forças que atuam sobre uma engrenagem helicoidal de hélice direita [8].

Análise de forças

Força tangencial (normalmente conhecida):

$$F_t = \frac{M_t}{r} = \frac{P}{v}$$

Força normal:

$$F_n = \frac{F_t}{\cos \alpha_t}$$

Força radial:

$$F_r = F_t \cdot \tan \alpha_t$$

Força axial (apenas helicoidais):

$$F_a = F_t \cdot \tan \beta$$

Força total:

$$F = \frac{F_t}{\cos \alpha_n \cdot \cos \beta}$$

Introdução à capacidade de carga de engrenagens

Na prática de engenharia, é necessário conhecer qual a potência ou binário que uma engrenagem transmite sem danificar o dentado [9].

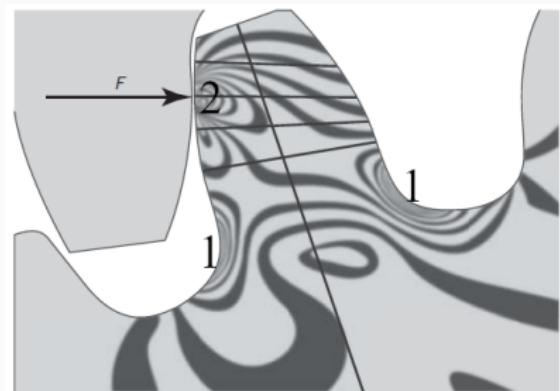


Figura 108: Padrão de tensões numa engrenagem de dentado reto obtido por foto-elasticidade [9].

Através da Figura 108 podemos verificar que as tensões máximas observam-se na zona de contacto e na zona do pé de dente onde o momento fletor é máximo.

Há então duas componentes que limitam a capacidade de carga de uma engrenagem:

1. flexão e fadiga no pé do dente
2. pressão de contacto

Introdução à capacidade de carga de engrenagens

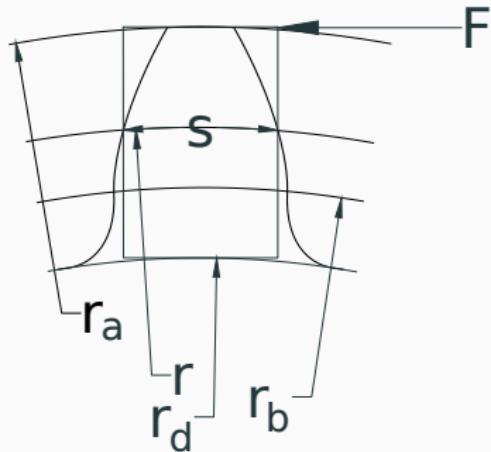


Figura 109: Modelo simplificado para a flexão no pé de dente.

Sendo b a largura da roda dentada, o dente é aproximado por uma viga de secção $s \times b$ e

altura h :

$$h = r_a - r_d = 2.25 \cdot m$$

A força tangencial é calculada a partir do momento torsor M_t :

$$F = F_t = \frac{M_t}{r}$$

O momento fletor no pé de dente de raio r_d é:

$$M_f = F_t \cdot h$$

$$y_{max} = \frac{s}{2}$$

$$I = \frac{b \cdot s^3}{12}$$

A tensão máxima, que ocorre no pé do dente (tração à direita, compressão à esquerda), é:

$$\sigma = \frac{M_f \cdot y_{max}}{I}$$

Introdução à capacidade de carga de engrenagens

Para uma roda dentada sem correção de dentado, $x = 0$, sabemos que $s = \frac{\pi \cdot m}{2}$

$$\sigma = \frac{F_t \cdot h \cdot \frac{s}{2}}{\frac{b \cdot s^3}{12}} = \frac{6 \cdot F_t \cdot h}{b \cdot s^2} = \frac{6 \cdot F_t \cdot 2.25 \cdot m}{b \cdot \left(\frac{\pi \cdot m}{2}\right)^2} = \frac{54 \cdot F_t}{\pi^2 \cdot b \cdot m} = \frac{5.471 \cdot F_t}{b \cdot m} \leq \sigma_{adm}$$

Se expressarmos a largura b em função do módulo $b = k \cdot m$, poderemos escrever uma equação para escolha do módulo m :

$$\frac{5.471 \cdot F_t}{k \cdot m^2} \leq \sigma_{adm} \Leftrightarrow m \geq \sqrt{\frac{5.471 \cdot F_t}{k \cdot \sigma_{adm}}}$$

Como é evidente, este modelo não é utilizado na prática corrente.

A Fórmula de Lewis

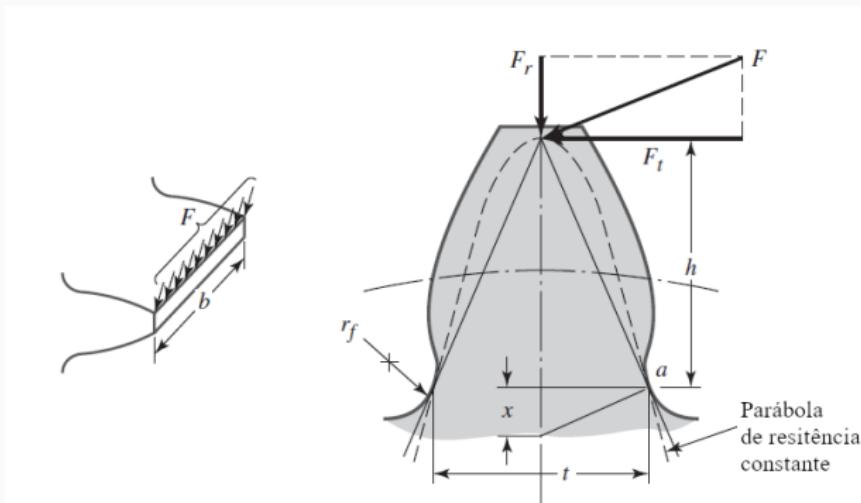


Figura 110: Modelo de Lewis para a flexão no pé de dente [9].

Considerações:

- inscrever uma parábola de igual resistência à flexão no dente;
- carregamento atua na cabeça do dente;
- toda a carga é suportada por apenas um par de dentes;
- não foi considerado o efeito de concentração de tensões.

A Fórmula de Lewis

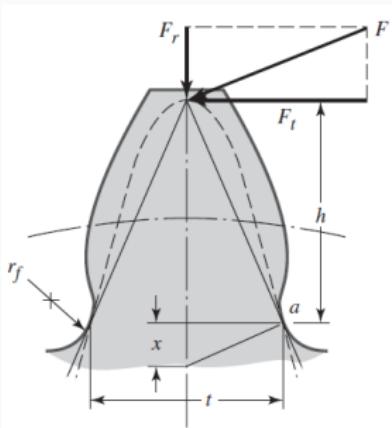


Figura 111: Modelo de Lewis para a flexão no pé de dente [9].

$$\sigma = \frac{F_t \cdot h \cdot \frac{t}{2}}{\frac{b \cdot t^3}{12}} = \frac{6 \cdot F_t \cdot h}{b \cdot t^2}$$

Por triângulos similares:

$$\frac{t/2}{x} = \frac{h}{t/2} \Leftrightarrow \frac{t^2}{h} = 4 \cdot x$$

Definindo $y = \frac{4 \cdot x}{6 \cdot \pi \cdot m}$ e $Y = \frac{1}{\pi \cdot y}$

Para $\alpha = 20^\circ$, $y = 0.154 - 0.912/z$ [10].

$$\sigma = \frac{6 \cdot F_t}{b \cdot 4 \cdot x} = \frac{F_t}{\pi \cdot b \cdot m \cdot y} = \frac{F_t}{b \cdot m} \cdot Y$$

Escrevendo a força tangencial como função do momento torsor $F_t = \frac{M_t}{r}$ e a largura como função do módulo $b = k \cdot m$:

$$\sigma = \frac{\frac{M_t}{\frac{z \cdot m}{2}}}{\pi \cdot k \cdot m \cdot m \cdot y} \leq \sigma_{adm}$$

$$m \geq \sqrt[3]{\frac{2 \cdot M_t}{\pi \cdot k \cdot z \cdot y \cdot \sigma_{adm}}}$$

Flexão no pé do dente

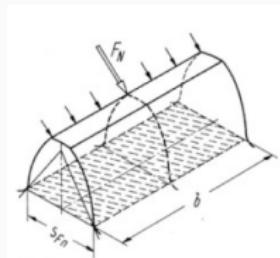
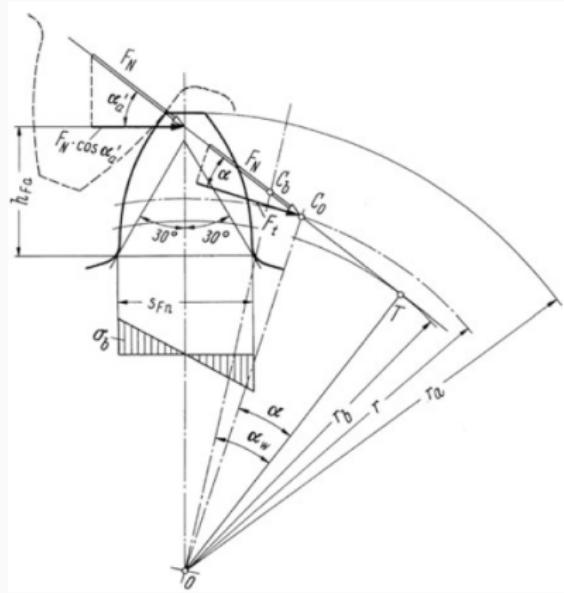


Figura 112: Definição ISO da secção resistente s_{Fn} [7].

$$\begin{aligned}\sigma_b &= \frac{(F_N \cdot \cos \alpha'_a \cdot h_{Fa}) \cdot (s_{Fn} / 2)}{\frac{b \cdot s_{Fn}^3}{12}} \\ &= \frac{6 \cdot F_t \cdot \cos \alpha'_a \cdot h_{Fa}}{b \cdot s_{Fn}^2}\end{aligned}$$

$$\sigma_b = \frac{F_t}{b \cdot m} \cdot \frac{6 \cdot \left(\frac{h_{Fa}}{m}\right) \cdot \cos \alpha'_a}{\left(\frac{s_{Fn}}{m}\right)^2 \cdot \cos \alpha} = \frac{F_t}{b \cdot m} \cdot Y_F$$

Força normal no caminho de engrenamento

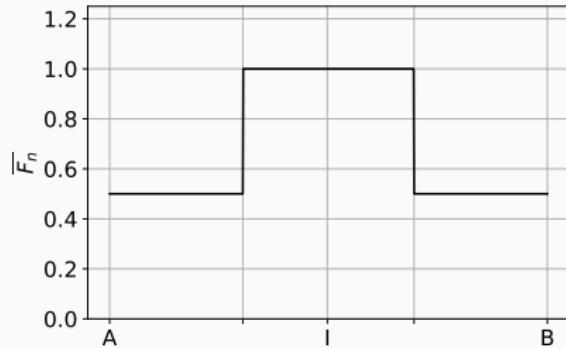


Figura 113: Partição de carga normal ao dente ao longo do caminho de engrenamento para uma engrenagem de dentado reto.

De notar que a carga aplicada no dente varia ao longo do caminho

de engrenamento. Até agora foi considerado que apenas um par de dentes se encontra em contacto, para determinação da tensão máxima. No entanto, quando o contacto se dá sobre a cabeça do dente, ponto A ou B, existe 2 pares de dentes em contacto. Então:

$$\sigma_b = \frac{F_t}{b \cdot m} \cdot Y_F \cdot Y_\epsilon$$

com $Y_\epsilon = \frac{1}{\epsilon_\alpha}$

Pressão de contacto

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{F_n \cdot E^*}{\pi \cdot b \cdot R}}$$

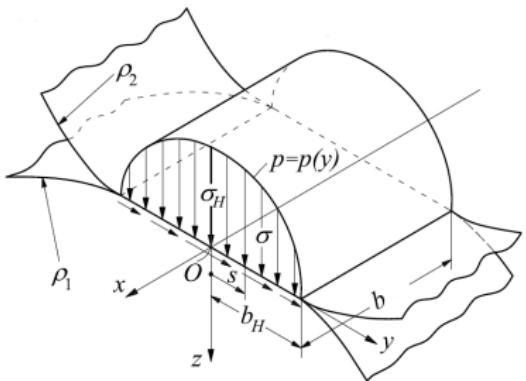


Figura 114: Pressão de contacto de Hertz [6].

Força normal:

$$F_n$$

Largura da roda dentada:

$$b$$

Módulo de Young equivalente:

$$\frac{1}{E^*} = \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)$$

Raio de contacto equivalente:

$$\frac{1}{R} = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

Para efeito do dimensionamento às avarias superficiais, a abordagem ISO 6336:2 considera a pressão de contacto no ponto primitivo.

Pressão de contacto no caminho de engrenamento

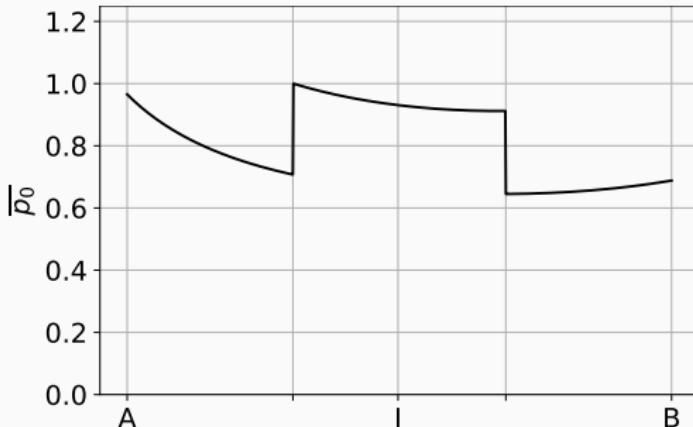


Figura 115: Evolução da pressão de contacto normalizada ao longo do caminho de engrenamento para uma engrenagem de dentado reto.

A pressão de contacto varia ao longo do caminho de engrenamento, porque:

- o raio de curvatura do pinhão e roda alteram-se tal que $T_1 T_2 = \rho_1 + \rho_2$ e por isso o raio equivalente também se altera;
- a carga normal ao dente varia, como visto na Figura 113.

Pressão de contacto sobre o círculo primitivo

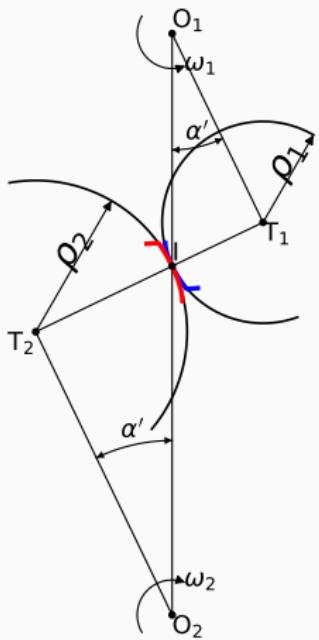


Figura 116: Raio dos círculos osculadores sobre o círculo primitivo.

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{F_n \cdot E^*}{\pi \cdot b \cdot R_l}}$$

Força normal sobre o primitivo de funcionamento (1 par de dentes em contacto): $F_n = \frac{F_t}{\cos \alpha'}$

Assumindo uma engrenagem de aço:

$$E_1 = E_2 = 210 \text{ GPa} \text{ e } \nu_1 = \nu_2 = 0.3$$

$$\frac{1}{E^*} = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)$$

$$E^* = 115.385 \times 10^9 \text{ Pa}$$

Raio de contacto equivalente:

$$\frac{1}{R_l} = \left(\frac{1}{r'_1 \cdot \sin \alpha'} + \frac{1}{r'_2 \cdot \sin \alpha'} \right)$$

$$R_l = \frac{r'_1 \cdot r'_2 \cdot \sin \alpha'}{r'_1 + r'_2}$$

$$\sigma_{H_l} = 191.646 \cdot \sqrt{\frac{F_n \cdot (r'_1 + r'_2)}{b \cdot r'_1 \cdot r'_2 \cdot \sin \alpha'}}$$

σ_{H_l} em MPa e r'_1 , r'_2 e b em mm.

A normalização no cálculo da capacidade de carga

As seguintes entidades têm apresentado sucessivas normas sobre a capacidade de carga de engrenagens: AFNOR (França), AGMA (EUA), BSI (Reino Unido), DIN (Alemanha), ISO (Internacional)...

As principais normas de cálculo da capacidade de carga de engrenagens:

- Alemanha
 - DIN 3990:1987 – “CALCULATION OF LOAD CAPACITY OF CYLINDRICAL GEARS”
- EUA
 - AGMA 2101-D04 – “Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth”
- Internacional
 - ISO 6336:1996; ISO 6336:2006; ISO 6336:2019 – “Calculation of load capacity of spur and helical gears”

Aula 11

Sumário

1. A norma ISO 6336	146
2. ISO 6336-1: Considerações Gerais	147
3. ISO 6336-2: Pressão de contacto	149
4. ISO 6336-3: Fadiga e flexão no pé do dente	151
5. Eficiência em caixas de engrenagens	154

A norma ISO 6336

Tabela 1: ISO 6336:2019 [11]

Calculation of load capacity of spur and helical gears	International Standard	Technical Specification	Technical Report
Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors	X		
Part 2: Calculation of surface durability (pitting)	X		
Part 3: Calculation of tooth bending strength	X		
Part 4: Calculation of tooth flank fracture load capacity		X	
Part 5: Strength and quality of materials	X		
Part 6: Calculation of service life under variable load	X		
Part 20: Calculation of scuffing load capacity (also applicable to bevel and hypoid gears) — Flash temperature method (replaces: ISO/TR 13989-1)		X	
Part 21: Calculation of scuffing load capacity (also applicable to bevel and hypoid gears) — Integral temperature method (replaces: ISO/TR 13989-2)		X	
Part 22: Calculation of micropitting load capacity (replaces: ISO/TR 15144-1)		X	
Part 30: Calculation examples for the application of ISO 6336 parts 1,2,3,5			X
Part 31: Calculation examples of micropitting load capacity (replaces: ISO/TR 15144-2)			X

ISO 6336-1: Considerações Gerais

A norma ISO 6336 aplica-se às seguintes situações [12, 13, 11]:

- ângulo de pressão entre 15 e 25 °;
- ângulo de hélice até 30 °;
- engrenagens de dentado reto ou helicoidal com razão de condução $1 < \epsilon_\alpha < 2.5$;

A norma ISO 6336 não se aplica às seguintes situações [12, 13, 11]:

- engrenagens de dentado reto ou helicoidal com razão de condução $\epsilon_\alpha < 1$;
- caso exista interferência entre a cabeça e o pé do dente;
- dentado pontiagudo;
- engrenagens sem “backlash”.

Estas normas são também desaconselhadas para aplicação em engrenagens não metálicas. Para engrenagens poliméricas, existem guias de cálculo específicos: VDI 2545 (1981) e VDI 2736 (2016).

ISO 6336-1: Considerações Gerais

Métodos de cálculo de acordo com a ISO 6336:1996:

- A - fatores derivados de modelação numérica (MEF) e experimentação (pouco usado);
- B - fatores derivados com boa precisão para a maioria das aplicações com base num modelo geométrico rigoroso;
- C - fatores aproximados por relações simplificadas, devendo sempre verificar-se as condições de aplicabilidade.

As edições ISO 6336:2006 e ISO 6336:2019 usam apenas os métodos A e B.

Para se ter acesso ao método C, útil para o cálculo da flexão e fadiga no pé do dente recorrendo a informação na forma de gráficos, devemos consultar a mais antiga edição da norma ISO 6336-3:1996.

ISO 6336-2 [14]: Pressão de contacto

Pressão de contacto nominal
("nominal contact stress at pitch point"):

$$\sigma_{Ho} = Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\epsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{F_t}{d_1 \cdot b} \cdot \frac{u+1}{u}}$$

Z_H	zone factor
Z_E	elasticity factor
Z_ϵ	contact ratio factor
Z_β	helix angle factor

Pressão de contacto
("contact stress"):

$$\sigma_H = Z_B \cdot \sigma_{Ho} \cdot \sqrt{K_A \cdot K_V \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}}$$

$$\sigma_H \leq \sigma_{HP}$$

Z_B	pinion single pair tooth contact factor
K_A	application factor
K_V	dynamic factor
$K_{H\beta}$	face load factor for contact stress
$K_{H\alpha}$	transverse load factor for contact stress

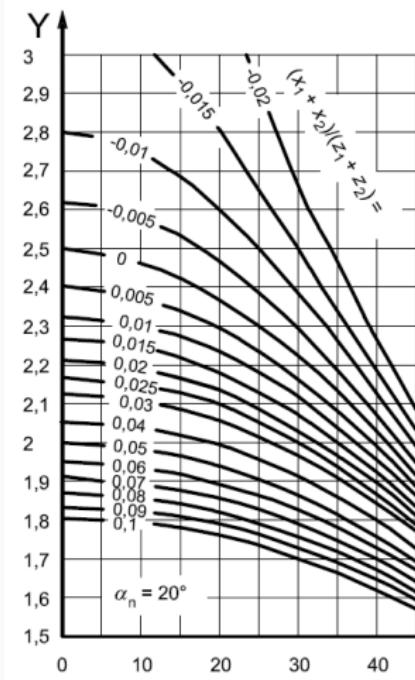


Figura 117: Zone factor $Z_H = Y$ para $\alpha = 20^\circ$, escolher nas abscissas ângulo de hélice β [14].

ISO 6336-2: Pressão de contacto

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{H_{lim}} \cdot Z_{NT}}{S_{H_{min}}} \cdot Z_L \cdot Z_V \cdot Z_R \cdot Z_W \cdot Z_X = \frac{\sigma_{HG}}{S_{H_{min}}}$$

σ_{HP}	permissible contact stress
$\sigma_{H_{lim}}$	allowable stress number from reference test gears (ISO 6336:5)
σ_{HG}	contact stress limit
Z_{NT}	life factor
Z_L	lubricant factor
Z_V	velocity factor
Z_R	roughness factor
Z_W	work hardening factor
Z_X	size factor
$S_{H_{min}} = 1$	minimum safety factor
S_H	safety factor

$$S_H = \frac{\sigma_{HG}}{\sigma_H} \geq S_{H_{min}}$$

ISO 6336-3:1996 [15] – Fadiga e flexão no pé do dente

Tensão nominal no pé do dente
("Nominal tooth root stress"):

$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_{Fa} \cdot Y_{Sa} \cdot Y_\epsilon \cdot Y_\beta$$

Método C que assume a carga aplicada na cabeça do dente.

Y_{Fa}	form factor
Y_{Sa}	stress correction factor
Y_ϵ	contact ratio factor
Y_β	helix angle factor

Tensão no pé do dente
("Tooth root stress"):

$$\sigma_F = \sigma_{F0} \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha} \leq \sigma_{FP}$$

K_A	application factor
K_V	dynamic factor
$K_{F\alpha}$	transverse load factor for tooth root stress
$K_{F\beta}$	face load factor for tooth root stress

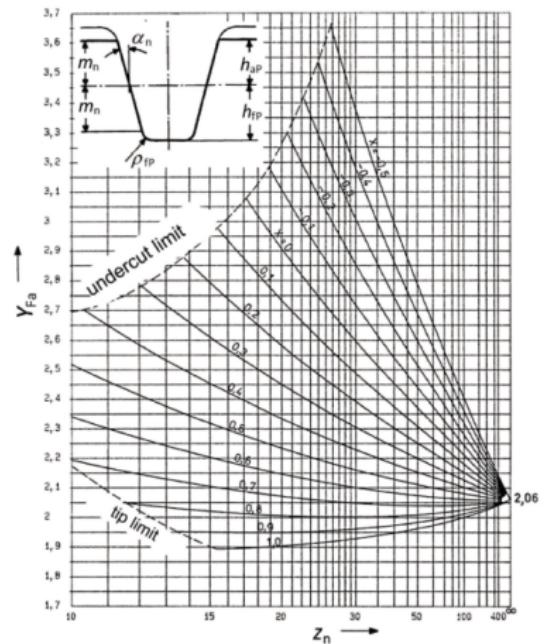


Figura 118: Fator de forma Y_{Fa} para $h_{fp} = 1.25 \cdot m$, $h_{ap} = m$, $\rho_{fp} = 0.25 \cdot m$ [15].

ISO 6336-3: Fadiga e flexão no pé do dente

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{F_{lim}} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{NT}}{S_{F_{min}}} \cdot Y_{\delta relT} \cdot Y_{RrelT} \cdot Y_X = \frac{\sigma_{FG}}{S_{F_{min}}}$$

σ_{FP}	permissible bending stress
$\sigma_{F_{lim}}$	nominal stress number from reference test gears (ISO 6336:5)
σ_{FG}	tooth-root stress limit
Y_{ST}	stress correction factor
Y_{NT}	life factor for tooth-root stress
$Y_{\delta relT}$	relative notch sensitivity factor
Y_{RrelT}	relative surface factor
Y_X	size factor
$S_{F_{min}} = 1.4$	minimum safety factor
S_F	safety factor

$$S_F = \frac{\sigma_{FG}}{\sigma_F} \geq S_{F_{min}}$$

ISO 6336: Resumo do procedimento de cálculo

1. Determinar a tensão nominal σ_{H_0} e σ_{F_0} – cálculo estático idealizado;
2. Determinar os factores de influência pela seguinte ordem:
 - fator da aplicação K_A ;
 - fator dinâmico K_V considerando $F_t \cdot K_A$;
 - fator de distribuição de carga longitudinal $K_{H\beta}$ ou $K_{F\beta}$ considerando $F_t \cdot K_A \cdot K_V$;
 - fator de distribuição de carga transversal $K_{H\alpha}$ ou $K_{F\alpha}$ considerando $F_t \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{H\beta}$ ou $F_t \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{F\beta}$;
3. Cálculo da tensão corrigida σ_H e σ_F : multiplicar a tensão nominal pelos fatores de influência;
4. Comparar a tensão corrigida σ_H e σ_F com a tensão limite σ_{HG} e σ_{FG} e calcular os fatores de segurança.

Eficiência em caixas de engrenagens

$$P_V = \frac{\text{perda de potência engrenangens}}{P_{VZ0} + P_{VZP}} + \frac{\text{rolamentos}}{P_{VL}} + \frac{\text{vedantes}}{P_{VD}}$$

independentes da carga dependentes da carga

Höhn et al. [16]

P_{VZ0}	P_{VZP}	P_{VL}	P_{VD}
			
Velocidade de rotação Geometria do cárter Viscosidade do lubrificante	Potência nominal Geometria da engrenagem Lubrificante	Potência nominal Geometria do rolamento Lubrificante	Velocidade de rotação Diâmetro do vedante Viscosidade do lubrificante

Eficiência em caixas de engrenagens

Perda de potência devido à carga numa engrenagem P_{VZP}
(Ohlendorf [17]):

$$P_{VZP} = P_{in} \cdot H_{VL} \cdot \mu_{mz}$$

P_{in} – potência nominal; H_{VL} – fator geométrico de perdas; μ_{mz} – coeficiente de atrito médio

$$u = \frac{z_2}{z_1}$$

$$H_{VL} = \frac{\pi \cdot (u+1)}{z_1 \cdot u \cdot \cos \beta_b} (1 - \epsilon_\alpha + \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)$$

$$\epsilon_\alpha = \frac{\bar{A}B}{p_{bt}}$$

$$\epsilon_1 = \frac{\bar{A}l}{p_{bt}}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\bar{I}B}{p_{bt}}$$

$$\mu_{mz} = 0.048 \cdot \left(\frac{F_{bt}}{b \cdot \sum v_{r_i} \cdot R_i} \right)^{0.2} \cdot \eta^{-0.05} \cdot R_a^{0.25} \cdot X_L$$

$$F_{bt} = \frac{M_t}{r_b}$$

força tangencial ao círculo de base [N]

$$b$$

largura da engrenagem [mm]

$$\sum v_{r_i} = v_{r_1} + v_{r_2}$$

soma da velocidade no ponto primitivo [m/s]

$$R_i = \left(\frac{1}{r'_1 \cdot \sin \alpha'} + \frac{1}{r'_2 \cdot \sin \alpha'} \right)^{-1}$$

raio equivalente no ponto primitivo [mm]

$$\eta$$

viscosidade dinâmica do lubrificante [mPa s]

$$R_a$$

rugosidade média das superfícies (valor típico 0.5) [μm]

$$X_L$$

parâmetro dependente do lubrificante [18]:

Mineral sem aditivos: $X_L = 1$

Mineral com aditivos: $X_L = 0.85$

Sintético com aditivos: $X_L = 0.65$

Referências

Referências i

- [1] DIN 3998-1: *Denominations on Gears and Gear Pairs: General Definitions.*
1976.
- [2] Flores, Paulo: *Projeto e Seleção de Componentes Mecânicos.*
Engbook, 2023.
- [3] Okorn, Ivan, Marko Nagode e Jernej Klemenc: *Operating performance of external non-involute spur and helical gears: A review.*
Strojnicki Vestnik/Journal of Mechanical Engineering,
67(5):256–271, 2021, ISSN 00392480.

Referências ii

- [4] Goldfarb, Veniamin, Evgenii Trubachev e Natalya Barmina: *Advanced Gear Engineering*, volume 51 de *Mechanisms and Machine Science*.
Springer International Publishing, 2018,
ISBN 978-3-319-60398-8.
- [5] Henriot, G.: *Traité théorique et pratique des engrenages*.
Dunod, 1961, ISBN 2.04.005836.2.
- [6] Vullo, Vincenzo: *Gears*, volume 10 de *Springer Series in Solid and Structural Mechanics*.
Springer International Publishing, Cham, 2020,
ISBN 978-3-030-38631-3.
- [7] Haberhauer, Horst: *Maschinenelemente*.
Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2018.

Referências iii

- [8] Budynas, Richard G. e J. Keith Nisbett: *Shigley's Mechanical Engineering Design.*
10^a edição, 2014, ISBN 978-0-07-339820-4.
- [9] Juvinal, Robert C. e Kurt M. Marshek: *Fundamentals of Machine Component Design.*
Wiley, 2017.
- [10] Castro, Paulo M. S. Tavares de e Sérgio M. O. Tavares:
Capacidade de carga das rodas dentadas.
Órgãos de Máquinas, DEMec, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2013.

Referências iv

- [11] ISO 6336-1:2019: *Calculation of load capacity of spur and helical gears - Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors.*
2019.
- [12] ISO 6336:1996: *Calculation of load capacity of spur and helical gears - Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors.*
1996.
- [13] ISO 6336:2006: *Calculation of load capacity of spur and helical gears - Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors.*
2006.

Referências v

- [14] ISO 6336-2:2006: *Calculation of load capacity of spur and helical gears. Part 2: Calculation of surface durability (pitting).* 2006.
- [15] ISO 6336-3:1996: *Calculation of load capacity of spur and helical gears. Part 3: Calculation of tooth bending strength.* 1996.
- [16] Höhn, B. R., Klaus Michaelis e T. Völlmer: *Thermal Rating of Gear Drives Balance Between Power Loss and Heat Dissipation.* AGMA Technical Paper, 96:12, 1996.
- [17] Ohlendorf, H: *Verlustleistung und Erwärmung von Stirnrädern.* Tese de Doutoramento, Dissertation TU München, 1958.

Referências vi

- [18] Fernandes, Carlos M.C.G., Pedro M.T. Marques, Ramiro C. Martins e Jorge H.O. Seabra: *Gearbox power loss. Part II: Friction losses in gears.*
Tribology International, 88:309–316, 2015.