

Órgãos de Máquinas

Engrenagens – Aula TP 6

Carlos M. C. G. Fernandes

1 Engrenagem helicoidal normal

Exemplo de cálculo de características geométricas de uma engrenagem helicoidal normal com os dados da Tabela 1. Assuma um perfil de referência do tipo A com $h_a = m$ e $h_f = 1.25 \cdot m$

Tabela 1: Dados da Engrenagem

| | |
|----------|------------|
| z_1 | 20 |
| z_2 | 41 |
| m | 2 mm |
| α | 20° |
| β | 30° |
| b | 20 mm |

Calcule:

1. ângulo de pressão aparente, módulo aparente, passo aparente e passo de base aparente
2. raio primitivo, raio de base, raio de cabeça e raio de pé
3. entre-eixo normal
4. razão de condução transversal, complementar e total
5. escolha k e determine W_k

1.1 Ângulo de pressão aparente, módulo aparente, passo aparente e passo de base aparente

O ângulo de pressão aparente relaciona-se com o ângulo de pressão real através da equação (1).

$$\tan \alpha_n = \tan \alpha_t \cdot \cos \beta \quad (1)$$

O módulo aparente relaciona-se com o módulo real através da equação (2).

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta} \quad (2)$$

O passo aparente é então calculado como:

$$p_t = \pi \cdot m_t \quad (3)$$

O passo de base aparente é dado pela equação (4).

$$p_{bt} = p_t \cdot \cos \alpha_t \quad (4)$$

1.2 Raio primitivo, raio de base, raio de cabeça (ou addendum) e raio de pé (ou dedendum)

O cálculo do raio primitivo (de referência) requer apenas o conhecimento do número de dentes e do módulo aparente da engrenagem - equação (5).

$$r = \frac{z \cdot p_t}{2\pi} = \frac{z \cdot \pi \cdot m_t}{2\pi} = \frac{z \cdot m_t}{2} = \frac{z \cdot m_n}{2 \cdot \cos \beta} \quad (5)$$

Conhecido o raio primitivo, podemos calcular o raio de base utilizando a equação (6).

$$r_b = r \cdot \cos \alpha_t \quad (6)$$

Para o presente exemplo (perfil de referência do Tipo A), o raio de cabeça é dado pela equação (7) e o raio de pé é dado pela equação (8).

$$r_a = r + h_a = r + m \quad (7)$$

$$r_d = r - h_f = r - 1.25 \cdot m \quad (8)$$

1.3 Entre-eixo normal

O entre-eixo normal é calculado pela soma dos raios primitivos de referência ou corte, equação (9).

$$a = r_1 + r_2 \quad (9)$$

1.4 Razão de condução transversal, complementar e total

A razão de condução transversal pode ser calculada com a equação (10).

$$\epsilon_{\alpha_t} = \frac{\overline{AB}}{p_{bt}} \quad (10)$$

A razão de condução complementar devido à existência do ângulo de hélice pode ser calculada com a equação (11).

$$\epsilon_{\beta} = \frac{b \cdot \tan \beta_b}{p_{bt}} = \frac{b \cdot \tan \beta}{p_t} \quad (11)$$

A razão de condução total é a soma da razão de condução transversal e da razão de condução complementar, equação (12).

$$\epsilon_{\gamma} = \epsilon_{\alpha_t} + \epsilon_{\beta} \quad (12)$$

1.5 Escolha de k e cálculo de W_k

No plano aparente, Figura 1a, a cota tangencial sobre k dentes é dada pela equação (13), tal como no caso de uma engrenagem de dentado reto.

$$W_{tk} = m_t \cdot \cos \alpha_t \cdot \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) \cdot \pi + z \cdot \text{inv } \alpha_t \right] \quad (13)$$

A cota tangencial sobre k dentes medida no plano real W_{nk} tal como materializada na prática para uma engrenagem helicoidal, Figura 1b, é dada pela equação (14).

$$W_{nk} = W_{tk} \cdot \cos \beta_b \quad (14)$$

Assim podemos escrever o valor de W_{nk} como:

$$W_{nk} = m_t \cdot \cos \alpha_t \cdot \cos \beta_b \cdot \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) \cdot \pi + z \cdot \text{inv } \alpha_t \right] \quad (15)$$

Já foi visto a relação entre o ângulo de pressão aparente e o ângulo de pressão real:

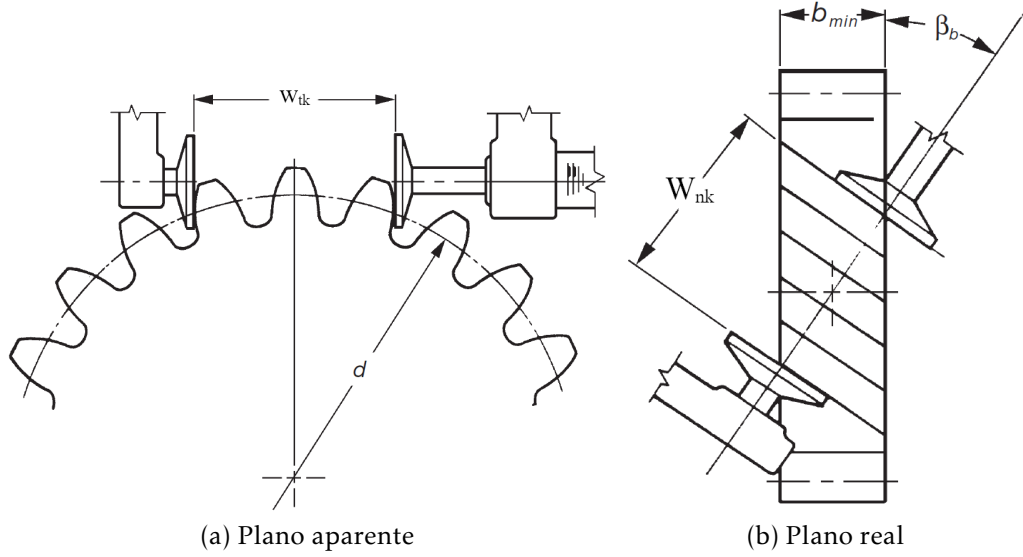


Figura 1: Cota tangencial sobre k dentes.

$$\cos \alpha_t \cdot \cos \beta_b = \cos \alpha_n \cdot \cos \beta \quad (16)$$

Assim, a cota tangencial W_{nk} pode ser expressa em função do ângulo de hélice β e o ângulo de pressão real α_n :

$$W_{nk} = m_t \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha_n \cdot \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) \cdot \pi + z \cdot \text{inv } \alpha_t \right] \quad (17)$$

Recordando que $m_n = m_t \cdot \cos \beta$, obtemos uma expressão geral para o valor de W_{nk} :

$$W_{nk} = m_n \cdot \cos \alpha_n \cdot \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) \cdot \pi + z \cdot \text{inv } \alpha_t \right] \quad (18)$$

Na equação (18), precisamos de definir o valor de k a utilizar. Assumindo que a cota tangencial se mede sobre o círculo primitivo o seu valor aproximado é dado pela equação (19).

$$W_{nk} \approx \frac{2 \cdot r \cdot \sin \alpha_t}{\cos \beta_b} \quad (19)$$

Igualando a equação (18) com a equação (19), podemos descobrir o valor de k . Ver as equações (20), (21), (22), (23).

$$m_n \cdot \cos \alpha_n \cdot \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) \cdot \pi + z \cdot \text{inv } \alpha_t \right] = \frac{2 \cdot r \cdot \sin \alpha_t}{\cos \beta_b} \quad (20)$$

$$\left(k - \frac{1}{2} \right) \cdot \pi + z \cdot \text{inv } \alpha_t = \frac{2 \cdot r \cdot \sin \alpha_t}{\cos \beta_b \cdot m_n \cdot \cos \alpha_n} \quad (21)$$

$$\left(k - \frac{1}{2} \right) \cdot \pi = \frac{2 \cdot r \cdot \sin \alpha_t}{\cos \beta_b \cdot m_n \cdot \cos \alpha_n} - z \cdot \text{inv } \alpha_t \quad (22)$$

$$k - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot r \cdot \sin \alpha_t}{\pi \cdot \cos \beta_b \cdot m_n \cdot \cos \alpha_n} - \frac{z \cdot \text{inv } \alpha_t}{\pi} \quad (23)$$

O valor de k pode então ser determinado pela equação (24) e deverá ser escolhido o valor inteiro mais próximo.

$$k = \frac{2 \cdot r \cdot \sin \alpha_t}{\pi \cdot \cos \beta_b \cdot m_n \cdot \cos \alpha_n} - \frac{z \cdot \text{inv } \alpha_t}{\pi} + \frac{1}{2} \quad (24)$$

A medição só é possível caso se verifique a seguinte condição:

$$b_{min} > W_{nk} \cdot \sin \beta_b \quad (25)$$

1.6 Resultados

Os resultados numéricos das alíneas anteriores estão resumidos na Tabela 2. O ângulo de pressão aparente é $\alpha_t = 22.796^\circ$

Tabela 2: Valores Calculados (mm)

| | | |
|-----------------------|---------|---------|
| p_t | 7.255 | |
| p_{bt} | 6.689 | |
| r | 23.094 | 47.343 |
| r_a | 25.094 | 49.343 |
| r_d | 20.594 | 44.843 |
| r_b | 21.290 | 43.645 |
| a | 70.437 | |
| \overline{AB} | 9.0105 | |
| ϵ_{α_t} | 1.347 | |
| ϵ_β | 1.592 | |
| ϵ_γ | 2.939 | |
| k | 4 | 7 |
| W_{nk} | 21.5074 | 40.1048 |

2 Determinar correção que iguala os escorregamentos específicos máximos

2.1 Método Analítico

Para $z_{v_1} + z_{v_2} > 60$, a soma das correções é $x_1 + x_2 = 0$, logo o entre-eixo mantém-se igual ao de corte.

Para se verificar a igualdade da equação (26), torna-se necessário introduzir o fator adimensional x multiplicado pelo módulo m na equação (28), que afetará os raios de cabeça do pinhão e roda.

$$g_{s2_{max}} = g_{s1_{max}} \quad (26)$$

$$\left| 1 - \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\sqrt{r_{a2}'^2 - r_{b2}^2}}{a \cdot \sin \alpha_t - \sqrt{r_{a2}'^2 - r_{b2}^2}} \right| = \left| \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\sqrt{r_{a1}'^2 - r_{b1}^2}}{a \cdot \sin \alpha_t - \sqrt{r_{a1}'^2 - r_{b1}^2}} - 1 \right| \quad (27)$$

$$\left| 1 - \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\sqrt{(r_{a2} - x \cdot m)^2 - r_{b2}^2}}{a \cdot \sin \alpha_t - \sqrt{(r_{a2} - x \cdot m)^2 - r_{b2}^2}} \right| = \left| \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\sqrt{(r_{a1} + x \cdot m)^2 - r_{b1}^2}}{a \cdot \sin \alpha_t - \sqrt{(r_{a1} + x \cdot m)^2 - r_{b1}^2}} - 1 \right| \quad (28)$$

Substituindo os valores da Tabela 2 na equação (28), obtemos a equação (29) e um valor de $x = 0.1805$.

$$\left| 1 - \frac{20}{41} \cdot \frac{\sqrt{(49.343 - x \cdot 2)^2 - 43.645^2}}{70.437 \cdot \sin(22.796^\circ) - \sqrt{(49.343 - x \cdot 2)^2 - 43.645^2}} \right| = \left| \frac{41}{20} \cdot \frac{\sqrt{(25.094 + x \cdot 2)^2 - 21.290^2}}{70.437 \cdot \sin(22.796^\circ) - \sqrt{(25.094 + x \cdot 2)^2 - 21.290^2}} - 1 \right| \quad (29)$$

2.2 Método Gráfico

Através do ábaco da Figura 2 é possível determinar os valores das correções de dentado. Deverá ser utilizado o número virtual de dentes z_v no lugar do número real de dentes z , ver equação (30).

$$z_v = \frac{z}{\cos^3 \beta} \quad (30)$$

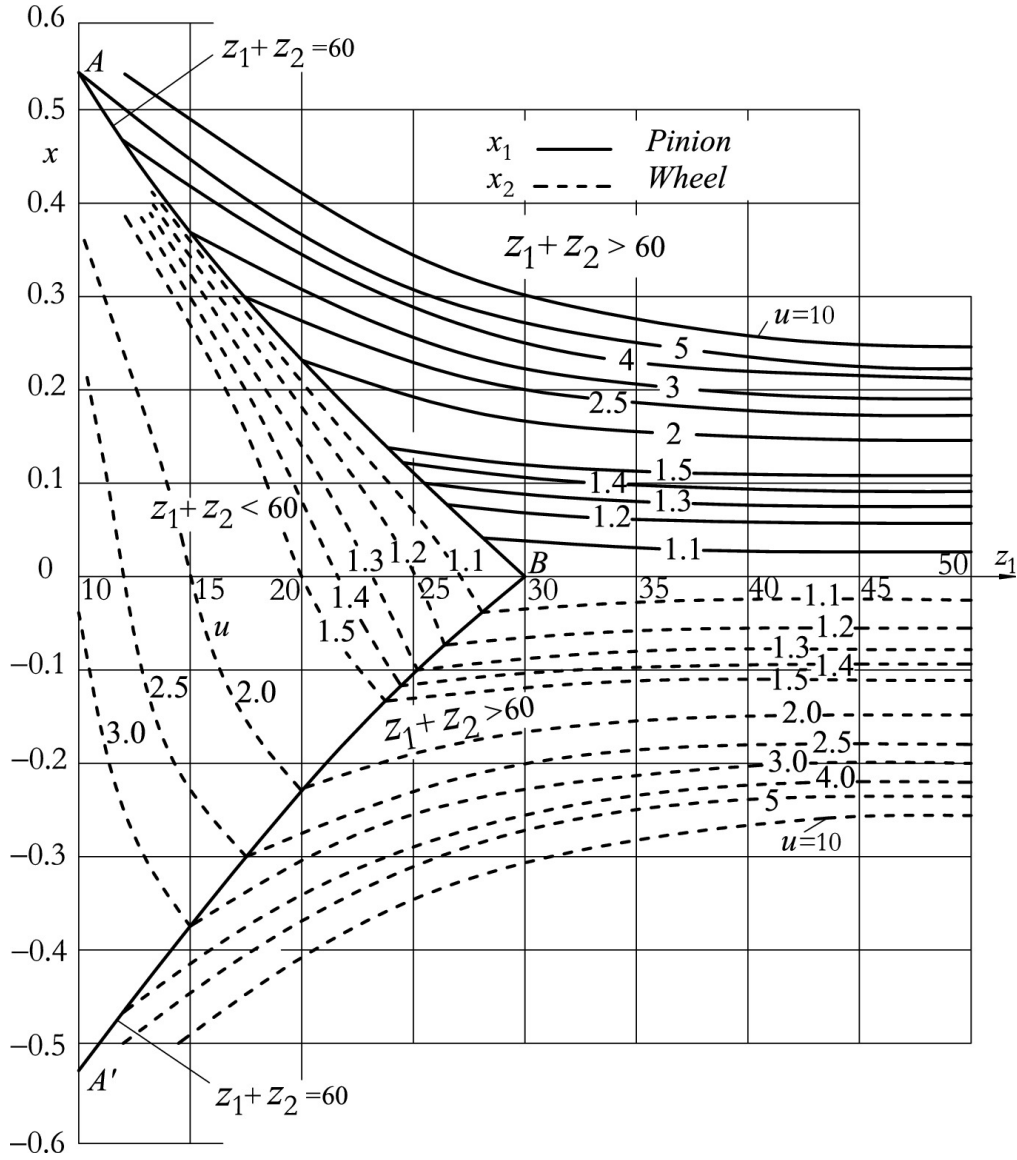


Figura 2: Ábaco de Henriot para escolha das correções x_1 e x_2 [1].

Para $z_{v1} + z_{v2} > 60$, a soma das correções é $x_1 + x_2 = 0$, logo o entre-eixo mantém-se igual ao de corte. Devemos então implementar o seguinte procedimento para determinação de x_1 e x_2 :

1. Escolher $z_{v1} = \frac{z_1}{\cos^3 \beta}$ nas abcissas;

2. Interceptar z_{v_1} com a razão de transmissão $u = \frac{z_2}{z_1}$ (à direita de ABA')
– neste caso $u = \frac{41}{20} = 2.05$;
3. Escolher x_1 nas ordenadas;
4. $x_2 = -x_1$

Podemos verificar que o método gráfico não é tão preciso como o método descrito na secção 2.1. No entanto é adequado e útil do ponto de vista prático.

Referências

- [1] Vullo, Vincenzo: *Gears*, volume 10 de *Springer Series in Solid and Structural Mechanics*. Springer International Publishing, Cham, 2020, ISBN 978-3-030-38631-3.