Órgãos de Máquinas
Engrenagens – Aula TP 1

Carlos M. C. G. Fernandes

1 Características geométricas

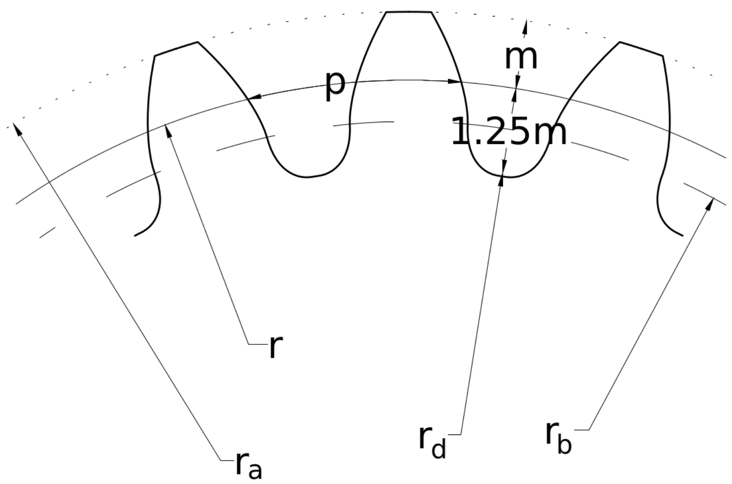

Figura 1: Nomenclatura de uma engrenagem de dentado reto normal.

A Tabela 1 apresenta a nomenclatura usada em engrenagens cilíndricas de dentado normal - ver Figura 1.

1.1 Passo

O perímetro do círculo primitivo é $2\pi r$. Atendendo à Figura 1 verifica-se a seguinte igualdade:

$$2\pi r = zp \tag{1}$$

Assim podemos definir o passo como:

$$p = \frac{2\pi r}{z} = \pi m \tag{2}$$

Tabela 1: Nomenclatura de uma engrenagem de dentes retos.

z	número de dentes
r	raio primitivo
r_a	raio de cabeça (ou addendum)
r_d	raio de pé (ou deddendum)
r_b	raio de base
m	módulo (normalizado)
α	ângulo de pressão
p	passo
$h_f = 1.25m^*$	altura de pé
$h_a = m^*$	altura de cabeça

*dentado com perfil de referência Tipo A (DIN 867) - existem outros de utilização corrente.

1.2 Raio primitivo

O cálculo do raio primitivo (de referência) requer apenas o conhecimento do número de dentes e do módulo da engrenagem - equação (3).

$$r = \frac{zp}{2\pi} = \frac{z\pi m}{2\pi} = \frac{zm}{2} \tag{3}$$

1.3 Raio de cabeça (ou addendum) e raio de pé (ou deddendum)

Para o presente exemplo (perfil de referência do Tipo A), o raio de cabeça é dado pela equação (4) e o raio de pé é dado pela equação (5). No caso de se utilizar outro perfil de referência, o valor de h_a e h_f deve ser modificado em conformidade.

$$r_a = r + h_a = r + m \tag{4}$$

$$r_d = r - h_f = r - 1.25m \tag{5}$$

1.4 Raio de base

O raio de base r_b depende apenas do número de dentes, do módulo e ângulo de pressão da ferramenta:

$$r_b = r\cos\alpha \tag{6}$$

1.5 Passo de base

O perímetro de base é $2\pi r_b$. Assim, a igualdade da equação (7) permite obter o passo de base através da equação (8).

$$2\pi r_b = z p_b \tag{7}$$

$$p_b = \frac{2\pi r_b}{z} = \frac{2\pi r \cos\alpha}{z} = \frac{2\pi \frac{zm}{2} \cos\alpha}{z} = \pi m \cos\alpha \tag{8}$$

1.6 Entre-eixo

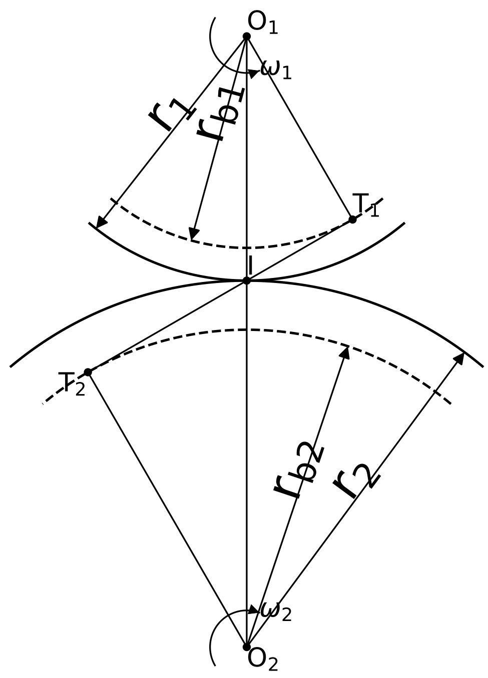

Figura 2: Raios primitivos e entre-eixo.

No caso de dentado normal (sem correção), o entre-eixo é obtido pela soma dos raios primitivos (ver Figura 2), equação (9).

$$a = r_1 + r_2 \tag{9}$$

2 Ângulo de incidência

A Figura 3 apresenta

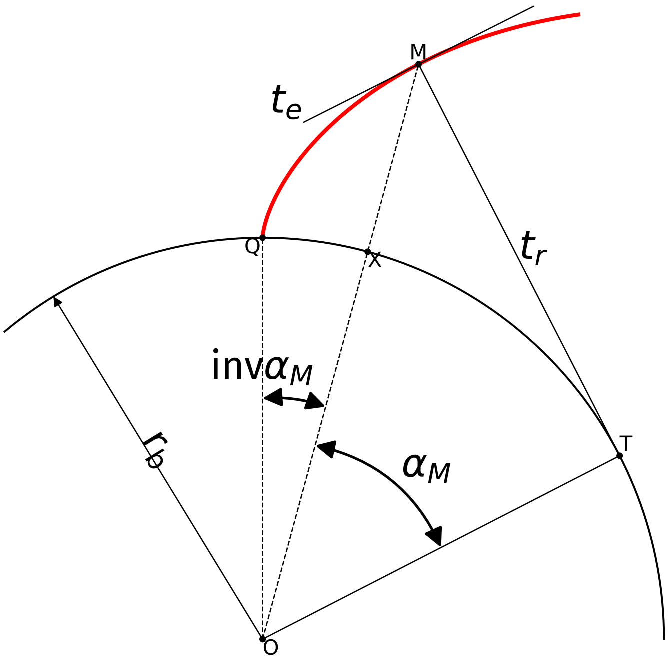

Figura 3: Evolvente de círculo, ângulo de incidência num ponto M, e função involuta.

Por construção, o comprimento do arco $\overset{\frown}{TQ}$ é igual ao segmento de reta $\overline{TM}$ - equação (10).

$$\overset{\frown}{TQ} = \overline{TM} \tag{10}$$

O comprimento do segmento de reta $\overline{TM}$ é conhecido para qualquer ângulo de incidência α_M, equação (11).

$$\overline{TM} = \overset{\frown}{TQ} = r_b \tan \alpha_M \tag{11}$$

O arco $\overset{\frown}{TQ}$ pode ser decomposto em dois arcos de interesse $\overset{\frown}{TX}$ e $\overset{\frown}{XQ}$, equação (12).

$$\overset{\frown}{TQ} = \overset{\frown}{TX} + \overset{\frown}{XQ} \tag{12}$$

Combinando a equações (11) e (12), obtemos a seguinte igualdade:

$$r_b \tan \alpha_M = r_b \alpha_M + \widehat{XQ} \tag{13}$$

Dividindo por r_b a equação (13):

$$\tan \alpha_M = \alpha_M + \measuredangle QOM \tag{14}$$

A função involuta tem a forma da equação (15).

$$\operatorname{inv} \alpha_M = \tan \alpha_M - \alpha_M \tag{15}$$

3 Espessura do dente

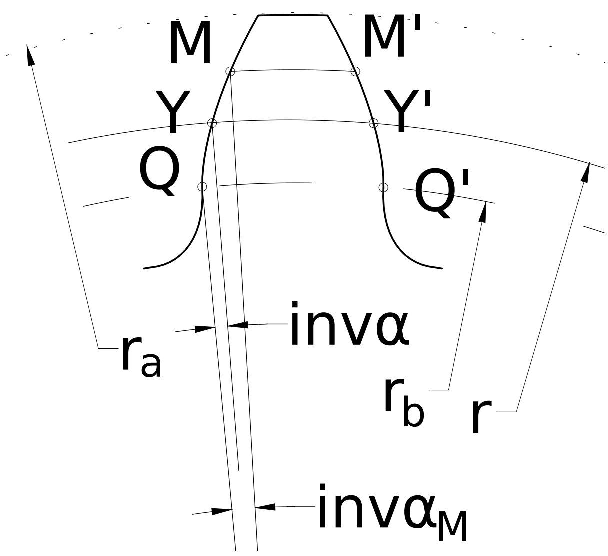

Figura 4: Espessura do dente num ponto M.

Para dentado normal (sem correcção), a espessura do dente sobre o círculo primitivo (r) é dado pela equação (17).

$$s = \widehat{YY'} = \frac{p}{2} = \frac{\pi m}{2} \tag{16}$$

Num outro ponto M, a espessura é:

$$
\begin{aligned}
s_M &= r_M \cdot \measuredangle MOM' = r_M \left(\tfrac{s}{r} - 2 \cdot \measuredangle YOM \right) \\
&= r_M \left[\tfrac{s}{r} - 2 \left(\measuredangle QOM - \measuredangle QOY \right) \right] \qquad (17) \\
&= r_M \left[\tfrac{s}{r} - 2 \left(\operatorname{inv} \alpha_M - \operatorname{inv} \alpha \right) \right]
\end{aligned}
$$

$$
s_M = r_M \left[\frac{s}{r} + 2 \left(\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_M \right) \right] \qquad (18)
$$

A espessura no pé de dente é um caso particular pois o ângulo de incidência α_M é nulo:

$$
s_b = r_b \left(\frac{s}{r} + 2 \operatorname{inv} \alpha \right) \qquad (19)
$$

4 Cota tangencial em k dentes

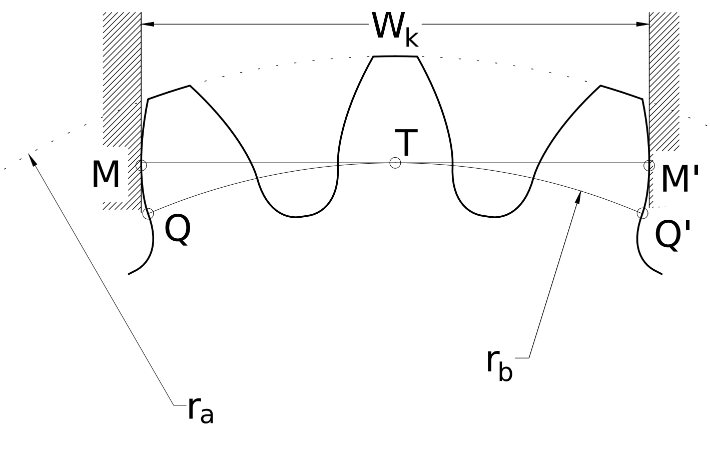

Figura 5: Cota tangencial sobre k dentes.

A cota tangencial sobre 3 dentes é dado pela equação (31):

$$
W_k = \overline{MM'} = \overset{\frown}{QQ'} \qquad (20)
$$

$$
W_k = 2 \underbrace{p_b}_{\substack{\text{passo} \\ \text{de} \\ \text{base}}} + \underbrace{s_b}_{\substack{\text{espessura} \\ \text{da} \\ \text{base do dente}}} \qquad (21)
$$

Para qualquer k:

$$W_k = \widehat{\mathrm{QQ'}} = (k-1)\,p_b + s_b \tag{22}$$

$$W_k = m\cos\alpha\left[(k-1)\,\pi + \frac{s}{m} + z\,\mathrm{inv}\,\alpha\right] \tag{23}$$

4.1 Escolha de k dentes

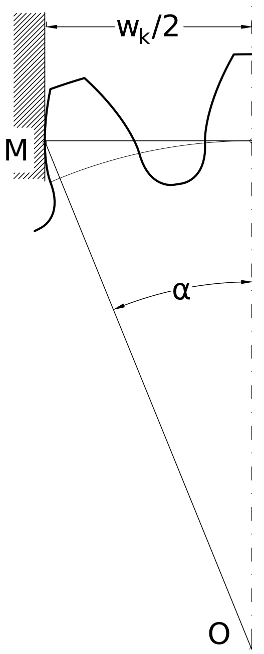

Figura 6: Cota tangencial sobre círculo primitivo.

$$\frac{W_k}{2} = \overline{OM}\sin\alpha \tag{24}$$

com $\overline{OM} = r = \frac{zm}{2}$

$$W_k = 2r\sin\alpha \tag{25}$$

Como visto anteriormente:

$$W_k = m\cos\alpha\left[(k-1)\,\pi + \frac{s}{m} + z\,\mathrm{inv}\,\alpha\right] \tag{26}$$

Igualando as duas expressões é:

$$2r \sin\alpha = m\cos\alpha \left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{s}{m} + z\,\mathrm{inv}\,\alpha\right] \tag{27}$$

Substituindo $r = \frac{zm}{2}$:

$$zm \sin\alpha = m\cos\alpha \left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{s}{m} + z\,\mathrm{inv}\,\alpha\right] \tag{28}$$

$$z(\tan\alpha - \mathrm{inv}\,\alpha) = \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi \tag{29}$$

$$k = \frac{z}{\pi}\alpha + \frac{1}{2} \tag{30}$$

$$k = 0.111z + 0.5 \tag{31}$$

escolher o inteiro mais próximo

5 Aplicação numérica

Exemplo de cálculo de características geométricas de uma engrenagem normal (sem correção de dentado), com os dados da Tabela 2.

Tabela 2: Dados da Engrenagem

z_1	20
z_2	41
m	2 mm
α	20°
b	20 mm

Calcule:

1. passo e passo de base
2. raio primitivo, raio de cabeça e raio de pé
3. raio de base
4. entre-eixo normal
5. escolha k e determine W_k