# Órgãos de Máquinas
# Dimensionamento à Fadiga – Aula TP 1

Carlos M. C. G. Fernandes

## 1 Exemplo de cálculo de fadiga uniaxial [1]

Fazer a verificação à fadiga do veio representado na Figura 1, de aço maquinado ($E = 210\,\text{GPa}$) com uma tensão de rotura $\sigma_r = 670\,\text{MPa}$, tensão de cedência $\sigma_{ced} = 410\,\text{MPa}$ e dureza Brinell $HBN = 210$. O veio está animado de uma velocidade angular $\omega$ e é simplesmente apoiado nas extremidades através de rolamentos e sujeito a uma carga constante de $F = 10\,000\,\text{N}$ a meio vão. Considere uma concordância $r = 0.1 \cdot d_2$

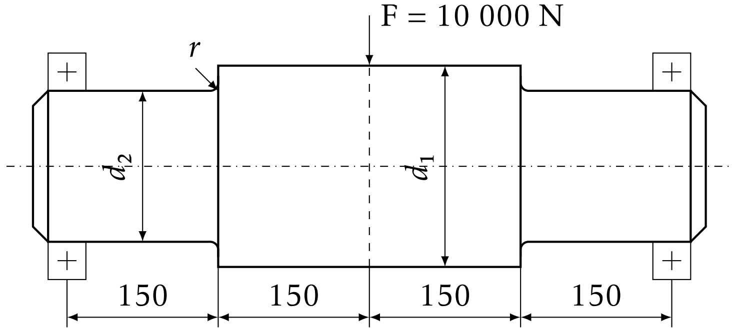



Figura 1: Veio rotativo sujeito à flexão.

Pretende-se o dimensionamento estático impondo:

1. 1 mm de flecha máxima
2. $d_2 = \frac{3}{4} \cdot d_1$

### 1.1 Dimensionamento estático

#### 1.1.1 Reações nos apoios

O diagrama de corpo livre do veio está apresentado na Figura 2.

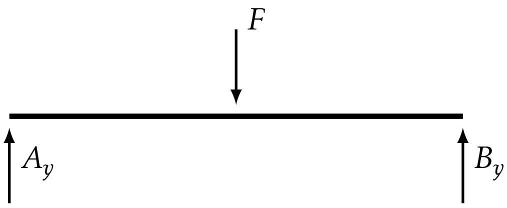


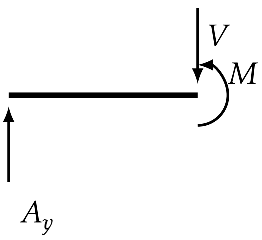

Figura 2: Diagrama de corpo livre do veio

O equilíbrio estático do veio está descrito pelo sistema de equações (1).

$$
\begin{cases}
\sum F_y = 0 \Leftrightarrow A_y + B_y - F = 0 \Leftrightarrow A_y = \frac{F}{2} \\
\\
\sum M_A = 0 \Leftrightarrow 600 \times B_y - 300 \times F = 0 \Leftrightarrow B_y = \frac{F}{2}
\end{cases} \tag{1}
$$

### 1.1.2 Diagrama do momento fletor

Para o tramo do veio compreendido entre $0 \leq x < 300$ o momento fletor pode ser calculado como definido na Figura 3. Consideramos a origem do sistema de eixos no rolamento esquerdo.

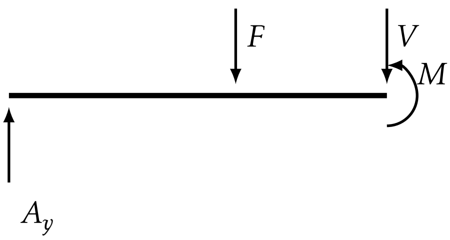



$$M(x) - A_y \cdot x = 0$$

$$M(x) = \frac{F}{2} \cdot x$$

Figura 3: Troço do veio entre $0 \leq x < 300$.

Para o tramo do veio compreendido entre $300 \leq x \leq 600$ o momento fletor pode ser calculado como definido na Figura 4.




$$M(x) - A_y \cdot x + F \cdot (x - 300) = 0$$

$$M(x) = -\frac{F}{2} \cdot x + 300 \times F$$

Figura 4: Troço do veio entre $300 \leq x \leq 600$.

O diagrama do momento fletor que atua no veio está representado na Figura 5.

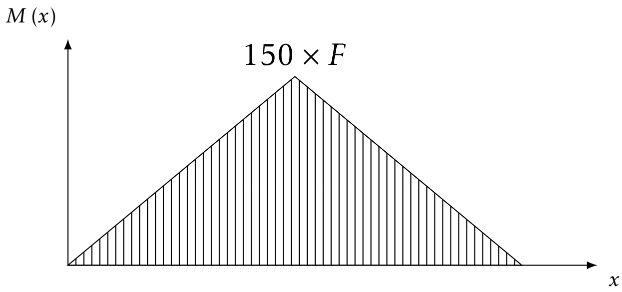



Figura 5: Diagrama de momento fletor do veio.

#### 1.1.3 2º momento de área

o segundo momento de área para uma seção cilindrica é dado pela equação (2).

$$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \tag{2}$$

#### 1.1.4 Flecha máxima

A flecha máxima não deverá exceder o valor de $\delta_{max} \leq 1$ mm.

Uma forma expedita de determinar a flecha, neste caso seria recorrendo ao Teorema de Castigliano.

**Teorema de Castigliano 1** *A derivada da energia de deformação em ordem à solicitação é igual ao deslocamento do ponto de aplicação da força, na sua direção.*

Precisamos então de conhecer a energia de deformação elástica do veio. Para vigas sujeitas à flexão, a derivada da energia de deformação em ordem ao comprimento da viga será dado pela equação (3).

$$\mathrm{d}U = \frac{M^2 \, \mathrm{d}x}{2 \cdot E \cdot I} \tag{3}$$

Para o caso em estudo, a energia de deformação será obtida pela integração da equação (3) em cada tramo do veio, tal como definido na equação (4).

$$U = 2\int_0^{150} \frac{M^2}{2 \cdot E \cdot I_2}\,\mathrm{d}x + 2\int_{150}^{300} \frac{M^2}{2 \cdot E \cdot I_1}\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

Substituindo agora o valor do momento fletor em cada tramo, obtemos:

$$U = 2\int_0^{150} \frac{\left(\frac{F}{2}x\right)^2}{2 \cdot E \cdot I_2}\,\mathrm{d}x + 2\int_{150}^{300} \frac{\left(\frac{F}{2}x\right)^2}{2 \cdot E \cdot I_1}\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

E após integrar, o resultado é dado pela equação (6).

$$U = \frac{2}{2 \cdot E \cdot I_2}\frac{F^2}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{150} + \frac{2}{2 \cdot E \cdot I_1}\frac{F^2}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{150}^{300} \tag{6}$$

Como já foi visto, agora deveremos derivar a energia elástica de deformação em ordem à carga aplicada para obter o deslocamento do ponto de aplicação da força, na sua direção, que neste caso coincide com o ponto de flecha máxima – equação (7).

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_2}F\left(\frac{150^3}{3}\right) + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_1}F\left(\frac{300^3 - 150^3}{3}\right) \tag{7}$$

Relembrar que a flecha máxima imposta será $\delta_{max} = 1\,\mathrm{mm}$. Ver equações (8) a (13).

$$\frac{1}{2 \cdot E \cdot \left(\frac{\pi \cdot {d_2}^4}{64}\right)}F\left(\frac{150^3}{3}\right) + \frac{1}{2 \cdot E \cdot \left(\frac{\pi \cdot {d_1}^4}{64}\right)}F\left(\frac{300^3 - 150^3}{3}\right) = 1 \tag{8}$$

$$\frac{1}{2 \cdot E \cdot \left(\frac{\pi \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot d_1\right)^4}{64}\right)}F\left(\frac{150^3}{3}\right) + \frac{1}{2 \cdot E \cdot \left(\frac{\pi \cdot {d_1}^4}{64}\right)}F\left(\frac{300^3 - 150^3}{3}\right) = 1 \tag{9}$$

$$\frac{32 \times F}{3 \times E} \times \left(\frac{4^4 \times 150^3}{3^4 \times \pi \times {d_1}^4} + \frac{300^3 - 150^3}{\pi \times {d_1}^4}\right) \tag{10}$$

$$\frac{32 \times F}{3 \times E} \times \left(\frac{4^4 \times 150^3 + 3^4 \times 300^3 - 3^4 \times 150^3}{3^4 \times \pi \times {d_1}^4}\right) = 1 \tag{11}$$

$${d_1}^4 = \frac{32 \times F}{3 \times E} \times \frac{4^4 \times 150^3 + 3^4 \times 300^3 - 3^4 \times 150^3}{3^4 \times \pi} \tag{12}$$

$$d_1 = \sqrt[4]{\frac{32 \times 10000}{3 \times 210000} \times \frac{4^4 \times 150^3 + 3^4 \times 300^3 - 3^4 \times 150^3}{3^4 \times \pi}} \tag{13}$$

O diâmetro do veio no tramo mais espesso será:

$$d_1 = 48.525 \approx 49\,\text{mm} \tag{14}$$

Obtemos finalmente as dimensões de ambos os tramos do veio arredondando à unidade.

$$\begin{cases} d_1 = 49\,\text{mm} \\ d_2 = 37\,\text{mm} \end{cases} \tag{15}$$

## 1.2 Verificação à Fadiga

### 1.2.1 Seções críticas

Para $x = 150\,\text{mm}$:

$$M\,(150) = 150 \times \frac{F}{2} = 750\,000\,\text{N}\,\text{mm} = 750\,\text{N}\,\text{m} \tag{16}$$

$$\sigma = \frac{M \cdot \frac{d_2}{2}}{I_2} = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot {d_2}^3} = \frac{32 \cdot 750000}{\pi \cdot 37^3} = 150.82\,\text{MPa} \tag{17}$$

Para $x = 300\,\text{mm}$:

$$M\,(300) = 300 \times \frac{F}{2} = 1\,500\,000\,\text{N}\,\text{mm} = 1500\,\text{N}\,\text{m} \tag{18}$$

$$\sigma = \frac{M \cdot \frac{d_1}{2}}{I_1} = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot {d_1}^3} = \frac{32 \cdot 1500000}{\pi \cdot 49^3} = 129.87\,\text{MPa} \tag{19}$$

Os resultados permitem verificar que a seção crítica é a mudança de seção de $d_2$ para $d_1$, agravado do facto de haver concentração de tensões.

### 1.2.2 Características da solicitação de fadiga

Tensão média:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\text{máx}} + \sigma_{\text{min}}}{2} = \frac{\sigma - \sigma}{2} = 0 \tag{20}$$

Amplitude de Tensão:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{min}}}{2} = \frac{\sigma - (-\sigma)}{2} = \sigma \tag{21}$$

## 1.3 Fator de concentração de tensões

Pela consulta da Figura 6, podemos determinar o valor do fator de concentração de tensões $K_t \approx 1.7$, para $r/d = 0.1$ e $D/d \approx 1.3$.

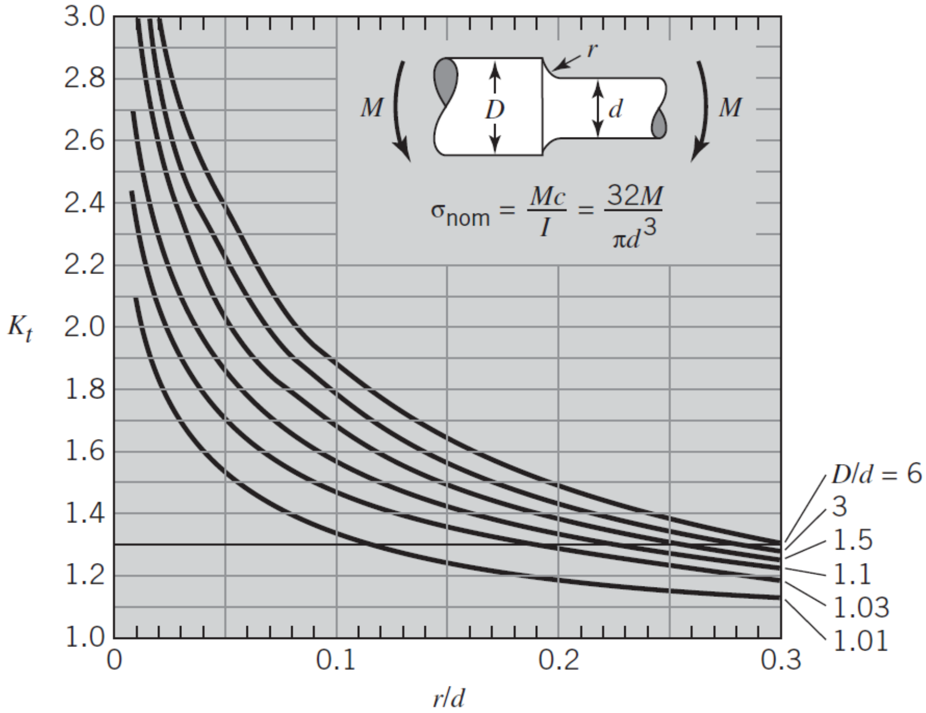



Figura 6: Fator de concentração de tensões para veios sujeitos a flexão [2].

O fator concentração de tensões "prático" ou de "fadiga" é então calculado pela equação (22).

$$K_f = 1 + q \cdot (K_t - 1) \tag{22}$$

Para este caso, o índice de sensibilidade ao entalhe $q \approx 1$, tal como indicado na Figura 7 para um aço temperado e revenido que tem uma dureza Brinell $HBN > 200$. Deste modo o fator prático de concentração de tensões é $K_f = 1.7$.

### 1.3.1 Tensão limite de fadiga

Para aços com tensão de rotura $\sigma_R < 1400\,\text{MPa}$, a tensão limite de fadiga será $\sigma_{f0} = 0.5 \cdot \sigma_R$. Para o presente aço, será $\sigma_{f0} = 0.5 \times 670 = 335\,\text{MPa}$

$$\sigma_{f0}^c = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot \sigma_{f0} \tag{23}$$

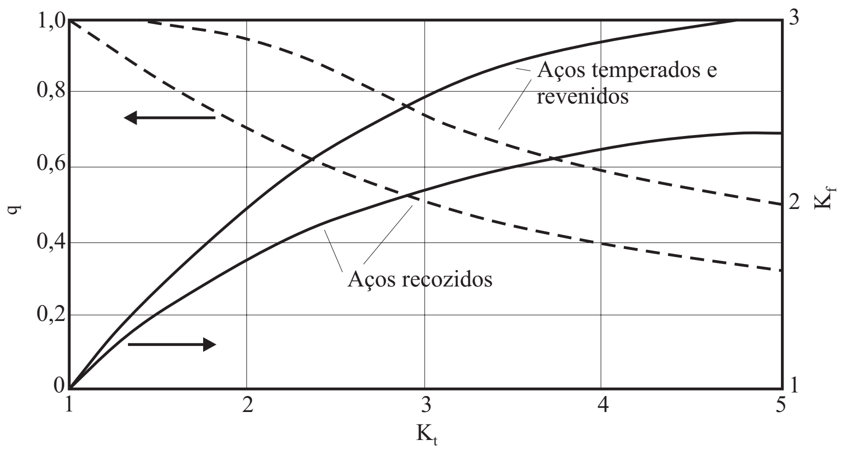



Figura 7: Índice de sensibilidade ao entalhe (aço temperado e revenido, $HBN > 200$) [1].

Para um diâmetro compreendido entre $2.79 \leq d < 51$ mm, a equação (24) permite determinar o fator para o efeito do tamanho. Alternativamente poderia ser determinado de forma gráfica em [1, 3].

$$C_2 = 1.24 \cdot d^{-0.107} = 1.24 \times 37^{-0.107} = 0.843 \tag{24}$$

Para aço maquinado a equação (25) permite determinar o fator para o efeito do acabamento superficial. Os coeficientes podem ser consultados na Tabela 1 Alternativamente poderia ser determinado de forma gráfica em [1, 3].

$$C_3 = a \cdot {\sigma_R}^b = 4.51 \times 670^{-0.265} = 0.804 \tag{25}$$

Tabela 1: Coeficientes a considerar para cálculo do efeito do acabamento superficial [3].

| Tipo | a / MPa | b |
|---|---|---|
| Retificado | 1.58 | -0.085 |
| Maquinado | 4.51 | -0.265 |
| Laminado | 57.7 | -0.718 |
| Forjado | 272 | -0.995 |

Os valores dos coeficientes de correção da tensão limite de fadiga para o caso em estudo estão definidos na Tabela 2. Neste caso não foram considerados outros fatores, pelo que $C_4 = 1$.

Tabela 2: Coeficientes de correção da tensão limite de fadiga.

| Fator | Efeito | Valor |
|---|---|---|
| $C_1$ | tipo de carga | 1 |
| $C_2$ | tamanho | 0.842 |
| $C_3$ | acabamento | 0.804 |
| $C_4$ | outros | 1 |

Neste caso teríamos uma tensão limite de fadiga corrigida $\sigma_{f0}^c = 1 \times 0.842 \times 0.804 \times 1 \times 335 = 226.78\,\text{MPa}$

### 1.3.2 Critério de Soderberg

O critério de Soderberg é dado pela equação (26).

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{f0}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{ced}} = 1 \tag{26}$$

Em situações práticas deveremos corrigir a tensão limite de fadiga, aplicar o fator de concentração de tensões de fadiga à solicitação cíclica e considerar um coeficiente de segurança:

$$\frac{K_f \cdot \sigma_a}{\sigma_{f0}^c} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{ced}} = \frac{1}{C.S} \tag{27}$$

No caso em análise, a tensão média $\sigma_m = 0$, então vem que:

$$\frac{1.7 \times 150.82}{226.78} + \frac{0}{410} = \frac{1}{C.S} \Leftrightarrow C.S = 0.884 \tag{28}$$

### 1.3.3 Aumentar coeficiente de segurança

Possíveis soluções para aumentar o coeficiente de segurança para valores recomendados (C.S =2):

- reduzir a carga;
- aumentar os diâmetros;
- aumentar o raio da concordância;
- usar outro material.

## 2 Vida Finita

O tratamento que se segue, aplica-se diretamente, apenas no caso de estarmos perante uma solicitação cíclica “alternada pura”.

### 2.1 Curva SN simplificada

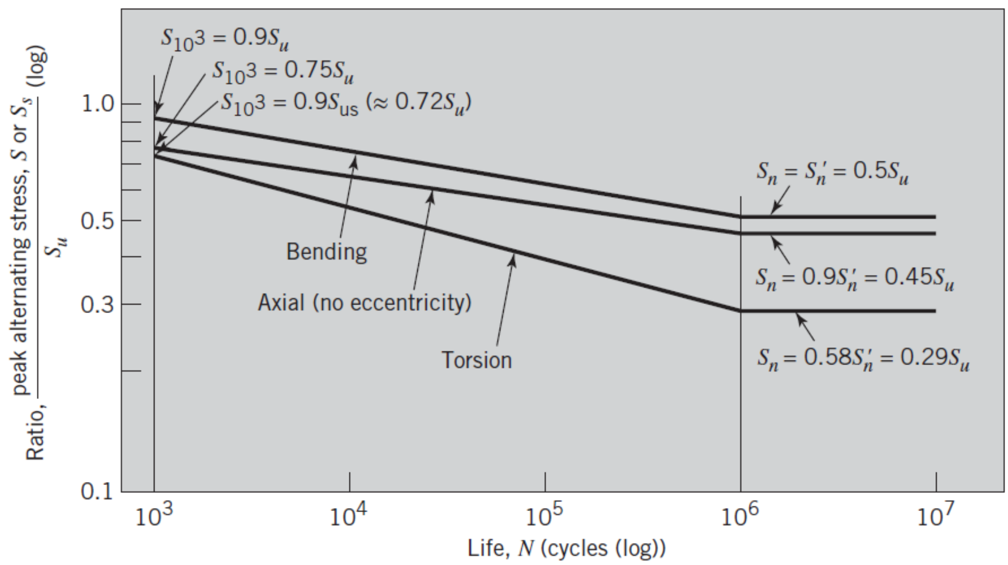



Figura 8: Curvas SN generalizadas para provetes de aço polido de 0.3 polegadas de diâmetro (com base em tensões elásticas calculadas, ignorando deformação plástica) [2].

Podemos assim definir os pontos característicos da surva SN para cada um dos casos de interesse: flexão, tração e torção, tal como resumido na Tabela 3.

Tabela 3: Pontos característicos das curvas SN

| Nº de ciclos | $\frac{\sigma}{\sigma_R}$ – Flexão | $\frac{\sigma}{\sigma_R}$ – Tração | $\frac{\tau}{\sigma_R}$ – Torção |
|---|---|---|---|
| $10^3$ | 0.9 | 0.9 | 0.74 $(0.9 \times 0.82)$ |
| $10^6$ | 0.5 | 0.43 | 0.29 $\left(0.5 \times \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ |

A curva SN, quando representada num gráfico com eixos log – log, pode ser aproximada a uma reta cuja a equação geral é $y = m \cdot x + b$.

Para o caso particular de se pretender determinar a equação da curva SN simplificada para o caso de flexão, consideremos os dois pares de pontos de interesse $\left(\log(10^3), \log(0.9)\right)$ e $\left(\log(10^6), \log(0.5)\right)$ no sistema de equações (29).

$$\begin{cases} \log(0.9) = m \cdot \log(10^3) + b \Leftrightarrow b = \log(0.9) - m \cdot \log(10^3) \\ \log(0.5) = m \cdot \log(10^6) + b \Leftrightarrow \log(0.5) = m \cdot \log(10^6) + \log(0.9) - m \cdot \log 10^3 \end{cases} \tag{29}$$

Deste modo fica conhecido o declive da reta:

$$m = \frac{\log\left(\frac{0.5}{0.9}\right)}{\log\left(\frac{10^6}{10^3}\right)} = -0.085091 \tag{30}$$

Façamos o ponto de interseção com o eixo das ordenadas como sendo $b = \log(a)$, vem que:

$$\log\left(\frac{\sigma}{\sigma_R}\right) = m \cdot \log\left(10^N\right) + \log(a) \tag{31}$$

Agrupando os logaritmos à direita, a equação fica:

$$\log\left(\frac{\sigma}{\sigma_R}\right) = \log\left(a \cdot 10^{m \cdot N}\right) \tag{32}$$

Podemos simplificar o logaritmo em ambos os lados da equação (32) e obter a seguinte equação (33) onde o declive é já conhecido:

$$\frac{\sigma}{\sigma_R} = a \cdot 10^{m \cdot N} = a \cdot 10^{-0.085091 \cdot N} \tag{33}$$

Para $N = 3$, é conhecido o valor de $\frac{\sigma}{\sigma_R} = 0.9$ e assim fica conhecido o valor de $a$ na equação (34).

$$0.9 = a \cdot 10^{-0.085091 \cdot 3} \Leftrightarrow a = 1.62 \tag{34}$$

Para o caso de flexão a equação da curva SN simplificada seria:

$$\frac{\sigma}{\sigma_R} = 1.62 \cdot 10^{-0.085091 \cdot N} \tag{35}$$

Para tração:

$$\frac{\sigma}{\sigma_R} = 1.88 \cdot 10^{-0.106935 \cdot N} \tag{36}$$

Para torção:

$$\frac{\tau}{\sigma_R} = 1.94 \cdot 10^{-0.137554 \cdot N} \tag{37}$$

## 2.2 Lei de Miner

Ver exercício nº 18 resolvido na página 48 da sebenta [1].

# Referências


[1] Castro, Paulo M S Tavares De: *Dimensionamento à fadiga*. Órgãos de Máquinas, DEMec, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2017.

[2] Juvinall, Robert C. e Kurt M. Marshek: *FUNDAMENTALS OF MACHINE COMPONENT DESIGN*. Wiley, 2017.

[3] Budynas, Richard G.: *Shigley's mechanical engineering design*. McGraw-Hill, 2014, ISBN 9789339221638.