Órgãos de Máquinas
Tribologia – Aula TP 3

Carlos M. C. G. Fernandes

1 Exercício

Considere a chumaceira axial hidrostática da Figura 1 alimentada com um lubrificante com a viscosidade η. Considere que $h_a >> h$ e que a pressão no alvéolo é p_a.

Para esta chumaceira calcule:

1. A pressão no interior da chumaceira
2. A capacidade de carga da chumaceira, W
3. O caudal de alimentação
4. As dimensões do capilar de alimentação (l_c e r_c), admitindo que a queda de pressão no capilar é $\Delta P = p_s - p_a = p_a$.

Nota: o caudal num capilar é determinado de acordo com a expressão

$$Q_c = \frac{\pi \cdot r_c^4}{8 \cdot \eta \cdot l_c} \cdot \Delta P$$

1.1 Equação de Reynolds em coordenadas cilíndricas

Atendendo à geometria da chumaceira, devemos utilizar a equação de Reynolds em coordenadas cilíndicas:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho r h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\rho h^3}{\eta r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)=6r\rho(U_1-U_2)\frac{\partial h}{\partial r}+6\rho(V_2-V_1)\frac{\partial h}{\partial \theta}+\\ 6rh\frac{\partial}{\partial r}(\rho(U_1+U_2))+6h\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho(V_2+V_1))+12\rho r(W_1-W_2)+12h\frac{\partial \rho}{\partial t}\end{gathered} \tag{1}$$

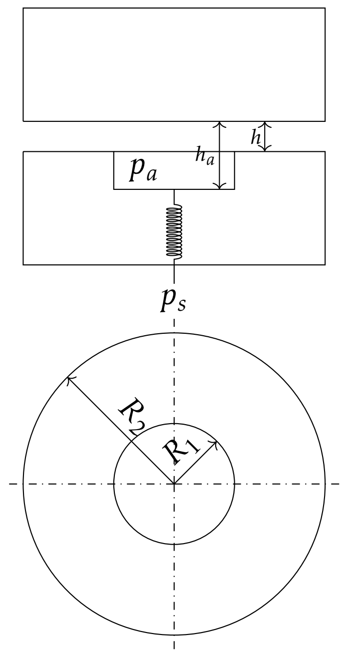

Figura 1: Chumaceira axial hidrostática.

1.2 Simplificações da equação de Reynolds

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho r h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \cancelto{a}{\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\rho h^3}{\eta r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)} &= \cancelto{b}{6r\rho(U_1 - U_2)\frac{\partial h}{\partial r}} + \cancelto{b}{6\rho(V_2 - V_1)\frac{\partial h}{\partial \theta}} + \\
&\cancelto{b}{6rh\frac{\partial}{\partial r}(\rho(U_1 + U_2))} + \cancelto{b}{6h\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho(V_2 + V_1))} + \cancelto{b}{12\rho r(W_1 - W_2)} + \cancelto{c}{12h\frac{\partial \rho}{\partial t}}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

a) pressão constante segundo θ;

b) superfícies imóveis: $U_1 = U_2 = V_1 = V_2 = W_1 = W_2 = 0$;

c) fluido incompressível: ρ constante;

Após simplificação, a equação de Reynolds fica:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho r h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial r}\right) = 0 \tag{3}$$

Sendo ρ, h e η independentes de r, vem:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) = 0 \tag{4}$$

1.3 Campo de pressão

Como pretendemos conhecer o campo de pressões segundo r, integramos ambos os lados da equação (4) e obtemos a equação (5), com C_1 como constante de integração.

$$r\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = C_1 \tag{5}$$

Integrando a equação (5) obtemos o campo de pressão em função do raio r da chumaceira:

$$p(r) = C_1 \ln(r) + C_2 \tag{6}$$

Para $r = R_2$ a pressão é $p = 0$ e $r = R_1$ a pressão é $p = p_a$:

$$\begin{cases} 0 = C_1 \ln(R_2) + C_2 \\ p_a = C_1 \ln(R_1) + C_2 \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} C_2 = -C_1 \ln(R_2) \\ p_a = C_1 \ln(R_1) - C_1 \ln(R_2) \end{cases} \tag{8}$$

As constantes de integração são:

$$\begin{cases} C_2 = -\frac{p_a \ln(R_2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \\ C_1 = \frac{p_a}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \end{cases} \tag{9}$$

Substituindo as constantes de integração na equação (6), ficamos com:

$$p(r) = \frac{p_a}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \ln(r) - \frac{p_a \ln(R_2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \tag{10}$$

Agrupando os termos:

$$p(r) = p_a \frac{\ln(r) - \ln(R_2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \tag{11}$$

A equação que representa o campo de pressão segundo r é dado pela equação (12).

$$\boxed{p(r) = p_a \frac{\ln\left(\frac{r}{R_2}\right)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}} \tag{12}$$

A derivada da pressão em ordem a r é:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \frac{p_a}{r \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}} \tag{13}$$

1.4 Capacidade de carga

Para se conhecer a capacidade de carga da chumaceira hidrostática é necessário integrar o campo de pressão na superfície de contacto. Uma vez que o campo de pressão obtido previamente é função de r, vem que:

$$W_1 = \int p(r)\,\mathrm{d}S = \int\int p(r)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{14}$$

$$W_1 = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} p(r)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{15}$$

$$W_1 = 2\pi\int_{R_1}^{R_2} r\frac{p_a}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}\ln(r) - r\frac{p_a\ln(R_2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}\,\mathrm{d}r \tag{16}$$

$$W_1 = 2\pi\frac{p_a}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}\left[\frac{r^2}{2}\ln(r) - \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\ln(R_2)\right]_{R_1}^{R_2} \tag{17}$$

$$W_1 = 2\pi\frac{p_a}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}\left(\frac{R_2^2}{2}\ln(R_2) - \frac{R_1^2}{2}\ln(R_1) - \frac{R_2^2 - R_1^2}{4} - \frac{R_2^2}{2}\ln(R_2) + \frac{R_1^2}{2}\ln(R_2)\right) \tag{18}$$

$$W_1 = \pi\frac{p_a}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}\left(R_2^2\ln(R_2) - R_1^2\ln(R_1) - \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} - R_2^2\ln(R_2) + R_1^2\ln(R_2)\right) \tag{19}$$

$$W_1 = \pi\frac{p_a}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}\left(-R_1^2\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{R_2^2 - R_1^2}{2}\right) \tag{20}$$

$$W_2 = \pi R_1^2 p_a \tag{21}$$

$$W = W_1 + W_2 \tag{22}$$

$$W = \pi \frac{p_a}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \left(-R_1^2 \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{R_2^2 - R_1^2}{2}\right) + \pi R_1^2 p_a \tag{23}$$

$$W = \frac{\pi p_a \left(R_2^2 - R_1^2\right)}{2\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \tag{24}$$

1.5 Campo de velocidade

Como visto previamente, o campo de velocidades é dado pela equação (25).

$$u = \frac{z^2}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial r} + C_1 \frac{z}{\eta} + C_2 \tag{25}$$

Como condições fronteira, temos que para $z = 0$ e para $z = h$ a velocidade do fluido é nula, $u = 0$. Assim obtemos as constantes de integração C_1 e C_2:

$$0 = \frac{0^2}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial r} + C_1 \frac{0}{\eta} + C_2 \longleftrightarrow C_2 = 0 \tag{26}$$

$$0 = \frac{h^2}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial r} + C_1 \frac{h}{\eta} + 0 \longleftrightarrow C_1 = -\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{27}$$

Conhecidas as constantes de integração, o campo de velocidades é:

$$u = \frac{z^2}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial r}\frac{z}{\eta} \tag{28}$$

$$u = \frac{z^2 - zh}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{29}$$

$$\boxed{u = \frac{z^2 - zh}{2\eta}\frac{p_a}{r\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}} \tag{30}$$

1.6 Caudal

Para determinar o caudal segundo temos de integrar o campo de velocidades

$$Q = \int u \, \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \int_0^h u r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\theta \tag{31}$$

$$Q = 2\pi \int_0^h \frac{z^2 - zh}{2\eta} \frac{p_a}{r \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} r \, \mathrm{d}z = 2\pi \frac{p_a}{2\eta \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \int_0^h z^2 - zh \, \mathrm{d}z \tag{32}$$

$$Q = 2\pi \int_0^h \frac{z^2 - zh}{2\eta} \frac{p_a}{r \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} r \, \mathrm{d}z = 2\pi \frac{p_a}{2\eta \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^2 h}{2}\right]_0^h \tag{33}$$

$$Q = -\pi \frac{p_a}{\eta \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \frac{h^3}{6} \tag{34}$$

1.7 Dimensões do capilar

O caudal no capilar é dado por:

$$Q_c = \frac{\pi r_c^4}{8\eta l_c} \Delta P \tag{35}$$

Se assumirmos que $\beta = 0.5$ então $p_s = 2 \cdot p_a$.

Igualando o caudal da chumaceira ao caudal do capilar, vem:

$$-\cancel{\pi} \frac{\cancel{p_a}}{\cancel{\eta} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \frac{h^3}{6} = \frac{\cancel{\pi} r_c^4}{8 \cancel{\eta} l_c} \cancel{p_a} \tag{36}$$

$$\frac{r_c^4}{l_c} = \frac{8h^3}{6 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \tag{37}$$