



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
IEE2683 – LABORATORIO DE CONTROL AUTOMÁTICO

## Experiencia 4: Control Óptimo

2 Sesiones

---

### 1. Introducción

Los sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas representan un gran número de sistemas reales encontrados en todas las áreas de la ingeniería. La presencia de múltiples entradas y múltiples salidas, generalmente acopladas entre ellas, dificultan la labor de control, por lo que se hace necesario estudiar el diseño de controladores avanzados para poder controlar dichos sistemas. Un esquema que facilita el diseño y el análisis de los sistemas es la representación en variables de estado.

Esta experiencia es una introducción al diseño de controladores en el espacio de los estados usando técnicas de control óptimo para sistemas MIMO (multiple-input, multiple-output). El primer paso en el diseño de controladores en el espacio de los estados es la implementación de un estimador de estados. El filtro de Kalman es el estimador de estado óptimo para un sistema lineal corrupto por ruido de medición del tipo Gaussiano. Esta experiencia contempla el diseño e implementación de un filtro de Kalman para estimar los estados y, posteriormente, el diseño e implementación de un controlador óptimo del tipo *state-feedback* (realimentación de los estados).

La experiencia se desarrollará utilizando el sistema Twin Rotor (Figura 1) como ejemplo de sistema MIMO. El sistema consta de una hélice de elevación y una hélice de cola que permiten generar las fuerzas de empuje para orientar el Twin Rotor. La orientación del Twin rotor se mide empleando encoders montados sobre los ejes de giro del Twin Rotor, los cuales entregan voltajes proporcionales a los ángulos de elevación y orientación,  $\phi$ ,  $\theta$ , respectivamente.

### 2. Marco Teórico

Un sistema MIMO es un sistema (Figura 2) que posee múltiples entradas (*Multiple Inputs*) y múltiples salidas (*Multiple Outputs*). En términos generales, un sistema MIMO se puede expresar mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \omega) \\ \mathbf{y} &= g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \omega) + \nu\end{aligned}\tag{1}$$

donde  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  es un vector columna con las  $m$  entradas del sistema e  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$  es un vector con las  $p$  salidas. El vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  corresponde a los estados del sistema, que representan aquellas variables internas que describen el comportamiento del sistema. El sistema está descrito por la función



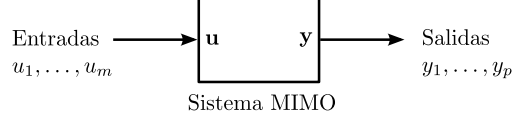


Figura 2: Sistema con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO)

Si el punto de operación del sistema es  $\mathbf{x}_0$ , se puede definir un sistema lineal en torno a este punto como

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \\ \omega = \omega_0}} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \\ \omega = \omega_0}} \Delta \mathbf{u} + \left. \frac{\partial F}{\partial \omega} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \\ \omega = \omega_0}} \Delta \omega \quad (2)$$

donde  $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}$  y  $\frac{\partial F}{\partial \omega}$  son matrices jacobianas que se deben evaluar en el punto de operación. Asimismo la expresión para la medición se puede linealizar y obtener

$$\Delta \mathbf{y} = \left. \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \\ \omega = \omega_0}} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial G}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \\ \omega = \omega_0}} \Delta \mathbf{u} + \left. \frac{\partial G}{\partial \omega} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \\ \omega = \omega_0}} \Delta \omega + \Delta \nu \quad (3)$$

donde las matrices jacobianas se deben evaluar en el punto de operación. Cada una de las matrices jacobianas se asumirán constantes y las ecuaciones (2) y (3) quedan de la forma

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{G} \Delta \omega \\ \Delta \mathbf{y} &= \mathbf{C} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{H} \Delta \omega + \Delta \nu \end{aligned} \quad (4)$$

Para efectos de modelación y de análisis, se asume que las perturbaciones  $\omega$  y el ruido en el sensor  $\nu$  poseen distribuciones normales con media cero

$$\begin{aligned} \omega &\sim N(0, \mathbf{W}) \\ \nu &\sim N(0, \mathbf{V}), \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  y  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son las matrices de covarianza simétricas y positivas definidas. La matriz  $\mathbf{V}$  generalmente es diagonal y se puede componer a partir de los especificaciones de precisión entregadas por el fabricante del sensor. Por otro lado  $\mathbf{W}$  depende del origen de las perturbaciones y se debe escoger tal que represente adecuadamente el comportamiento de estas. Considerando que el modelo descrito en 4 es una aproximación del modelo real, los términos  $\omega$  y  $\nu$  representan, además de las perturbaciones y ruidos, los residuos de la aproximación.

En cuanto a estabilidad, para que el sistema sea estable es necesario que todos los polos se encuentren en el semiplano negativo del espacio de Laplace. Si representamos las variables del sistema en el espacio de Laplace  $\Delta \mathbf{x}$ ,  $\Delta \mathbf{y}$  y  $\Delta \mathbf{u}$  como  $\mathbf{X}(s)$ ,  $\mathbf{Y}(s)$  y  $\mathbf{U}(s)$  respectivamente, además de ruido,

perturbaciones y condiciones iniciales nulas, las ecuaciones del sistema (4) quedan representadas mediante

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \end{aligned} \quad (5)$$

despejando  $\mathbf{X}(s)$  se obtiene

$$\mathbf{X}(s) = (\mathbf{I}s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

donde  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de identidad. Luego la salida del sistema esta dada por

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(\mathbf{I}s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{U}(s) \quad (6)$$

Para que el sistema sea estable, es necesario que los polos de  $[\mathbf{C}(\mathbf{I}s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]$  residan en el semiplano negativo. Mediante simple inspección se puede determinar que el denominador común de la función de transferencia estará determinado por  $(\mathbf{I}s - \mathbf{A})^{-1}$ , específicamente por

$$q(s) = |\mathbf{I}s - \mathbf{A}| \quad (7)$$

donde  $q(s)$  es la ecuación característica de (6). Para que el sistema descrito en (6) sea estable es necesario que las raíces de  $q(s) = 0$  tengan parte real negativa, o equivalentemente que los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tengan parte real negativa.

## 2.1. Estimación de Estados

En un sistema no todos los estados son observables. La variable de salida  $\mathbf{y}$  no siempre esta relacionada con todos los estados sino con un subconjunto de ellos. Para retroalimentar adecuadamente un sistema MIMO, es necesario conocer o estimar el vector de estados completo <sup>1</sup>.

Una forma intuitiva de estimar los estados del sistema descrito en (1) es simular las ecuaciones dinámicas del sistema en paralelo considerando que las perturbaciones son nulas, como se ilustra en la figura 3. Los resultados de esta estrategia de estimación en general son malos, debido a que en la simulación hay muchas fuentes de error, entre ellos la carencia de perturbaciones medibles (se asumen nulas), incertidumbre respecto al modelo y los parámetros del modelo e incerteza respecto a las condiciones iniciales de la simulación.

Para verificar si los estados estimados son correctos, es necesario calcular la medición que generarían los sensores para ese estado en particular y compararlas con el valor real. La medición estimada se calcula evaluando la función  $g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \omega)$  en el estado estimado, cuando no existen perturbaciones y no hay ruido en el sensor, es decir

$$\hat{\mathbf{y}} = g(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, 0) \quad (8)$$

---

<sup>1</sup>Los esquemas de control que utilizan un estimador de estado y realizan el control retroalimentando el vector de estado, se conocen como controladores *state feedback*. Por otra parte, los esquemas de control que retroalimentan directamente el vector de salidas  $\mathbf{y}$  se conocen como controladores *output injection* o *output feedback*

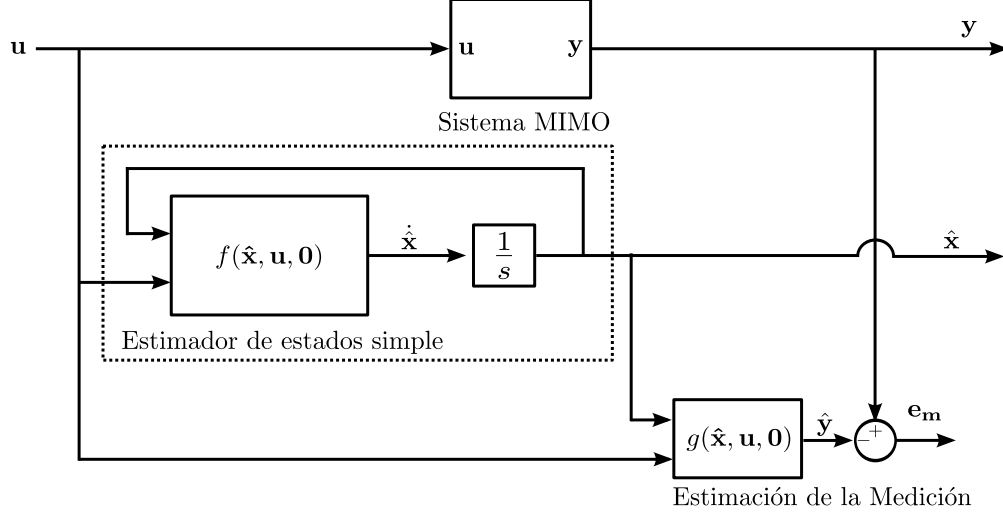


Figura 3: Sistema MIMO con un estimador de estados simple.

Posteriormente se define el error en la medición como

$$\mathbf{e}_m = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \quad (9)$$

Cuando el error en la medición tiende a ser cero, podemos asegurar que el estimador de estado es adecuado. En el caso del estimador de estados simple, esta condición prácticamente nunca se cumple en aplicaciones reales.

Considerando que no es apropiado estimar estados mediante la simulación del sistema en paralelo, es necesario utilizar técnicas que consideren las variables medidas y consideren además las distintas fuentes de incertidumbre (perturbaciones, ruido en los sensores y estados iniciales). En 1963 D. Luenberger planteó la posibilidad de retroalimentar el error en la medición en el proceso de estimación del estado y simultáneamente R. Kalman introdujo una metodología para considerar las distintas incertidumbres en la estimación. En esta, la factibilidad de estimar los estados de un sistema recae principalmente en la relación entre las variables medidas y los estados internos, relación que se puede caracterizar mediante la observabilidad de un sistema.

Un sistema es completamente observable si existe un tiempo finito  $T$  tal que el estado inicial  $\mathbf{x}_0$  pueda ser estimado mediante las observaciones  $\mathbf{y}(t)$  y las variables manipuladas  $\mathbf{u}(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ . Para que el sistema descrito en (4) sea observable, es necesario que se cumpla la condición

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

El estimador de Luenberger consiste en sumar el error en la medición a las ecuaciones de estado.

Para el sistema descrito en (4) se puede plantear un estimador de Luenberger mediante

$$\begin{aligned}\dot{\Delta\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{L}\mathbf{e}_m \\ \Delta\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{L}(\Delta\mathbf{y} - \Delta\hat{\mathbf{y}}) \\ \Delta\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{L}(\Delta\mathbf{y} - \mathbf{C}\Delta\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{D}\Delta\mathbf{u})\end{aligned}\quad (10)$$

donde  $\Delta\hat{\mathbf{x}}$  es el estado estimado. La Figura 4 ilustra un diagrama de bloques del proceso de estimación de estados. El funcionamiento del estimador es similar al estimador simple, pero corrigiendo el modelo de acuerdo al error en la medición.

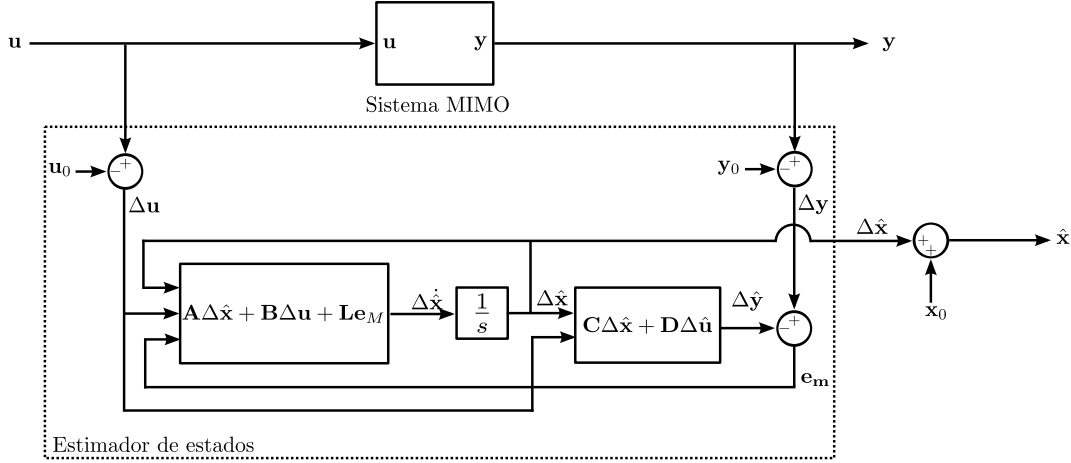


Figura 4: Sistema MIMO con un estimador de Luenberger.

El error en la estimación (distinto al error medido) es

$$\mathbf{e}(t) = \Delta\mathbf{x} - \Delta\hat{\mathbf{x}}$$

Para que el observador estime adecuadamente los estados del sistema es necesario que  $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esta condición se puede verificar observando el comportamiento de  $\dot{\mathbf{e}}(t)$ :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}(t) &= \Delta\dot{\mathbf{x}} - \Delta\dot{\hat{\mathbf{x}}} \\ &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u} - \mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}} - \Delta\mathbf{u} - \mathbf{L}(\Delta\mathbf{y} - \mathbf{C}\Delta\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{D}\Delta\mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e}(t)\end{aligned}\quad (11)$$

Es posible asegurar que el error de estimador converge a cero cuando los valores propios de la matriz  $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$  tienen parte real negativa.

El estimador de Kalman está diseñado tal que se minimice la covarianza  $\mathbf{P}$  del error de estimación, donde

$$\mathbf{P} = \mathbb{E} [(\Delta\mathbf{x} - \Delta\hat{\mathbf{x}})(\Delta\mathbf{x} - \Delta\hat{\mathbf{x}})^T] \quad (12)$$

El estimador resultante de la optimización es

$$\mathbf{L}(t) = (\mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T + \mathbf{G}\mathbf{W}\mathbf{H}^T)(\mathbf{V} + \mathbf{H}\mathbf{W}\mathbf{H}^T)^{-1} \quad (13)$$

donde  $P(t)$  es la matriz de covarianza del error de estimación y se obtiene resolviendo la ecuación diferencial de Ricatti

$$\frac{d}{dt}P(t) = \mathbf{A}P(t) + P(t)\mathbf{A}^T - (P(t)\mathbf{C}^T + \mathbf{G}\mathbf{W}\mathbf{H}^T)(\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^T)^{-1}(\mathbf{C}P(t) + \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T) + \mathbf{G}\mathbf{W}\mathbf{G}^T \quad (14)$$

En régimen permanente el estimador converge a un valor determinado por la ecuación algebraica de Ricatti

$$\mathbf{A}P(t) + P(t)\mathbf{A}^T - (P(t)\mathbf{C}^T + \mathbf{G}\mathbf{W}\mathbf{H}^T)(\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^T)^{-1}(\mathbf{C}P(t) + \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T) + \mathbf{G}\mathbf{W}\mathbf{G}^T = 0 \quad (15)$$

En Matlab, la matriz  $\mathbf{P}$  se puede obtener utilizando la función `care`

$$[\mathbf{P}, \mathbf{L}, \mathbf{G}] = \text{care}(\mathbf{A}', \mathbf{C}', \mathbf{Q}\mathbf{Q}', \mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}', \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{H}', \text{eye}(2))$$

análogamente se puede obtener  $\mathbf{L}$  en forma directa utilizando la función `kalman`

$$[\text{kest}, \mathbf{L}, \mathbf{P}] = \text{kalman}(\text{ss}(\mathbf{A}, [\mathbf{B} \ \mathbf{G}], \mathbf{C}, [\mathbf{D} \ \mathbf{H}]), \mathbf{W}, \mathbf{V}, 0)$$

## 2.2. Control mediante variables de estado

Un sistema es completamente controlable si existe un control  $\mathbf{u}(t)$  que puede transferir desde cualquier estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  a cualquier otro estado deseado  $\mathbf{x}(t)$  en un tiempo finito,  $t_0 \leq t \leq T$ . Para el sistema descrito en (4) sea controlable, es necesario que se cumpla la condición

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = n$$

El control mediante variables de estado considera que se conocen todos los estados  $\mathbf{x}(t)$  del sistema. De esta forma es posible construir un controlador del tipo

$$\Delta\mathbf{u} = -\mathbf{K}\Delta\mathbf{x} \quad (16)$$

La Figura 5 muestra un diagrama de bloques del controlador de la ecuación (19), considerando un estimador de estados.

Si el sistema es no lineal, entonces es necesario considerar el punto de operación en el estado y en la variable manipulada. La variable manipulada se puede expresar mediante

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 - \mathbf{K}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0) \quad (17)$$

El objetivo de la retroalimentación mediante estados es modificar el comportamiento del sistema, tal que este sea estable y tal que este converja a un valor final (set-point) predeterminado. Reemplazando el controlador  $\Delta\mathbf{u} = -\mathbf{K}\Delta\mathbf{x}$  en la ecuación del sistema (4) y obviando las perturbaciones, se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta u \\ &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\Delta\mathbf{x} \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\Delta\mathbf{x} \end{aligned} \quad (18)$$

$$= \mathbf{H}\Delta\mathbf{x} \quad (19)$$

Para que el sistema retroalimentado sea estable, es necesario que los valores propios de  $\mathbf{H}$  tengan parte real negativa.

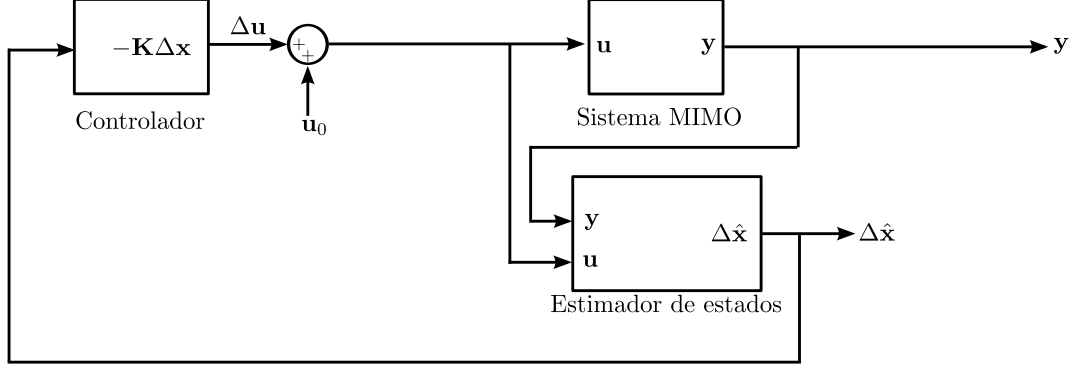


Figura 5: Sistema MIMO controlado con *state feedback*.

### 2.2.1. LQR

Un LQR (*Linear Quadratic Regulator*) es un tipo de controlador donde el valor de  $\mathbf{K}$  se puede escoger tal que se minimice el tiempo que demora el sistema en converger o que se minimice el uso de las variables manipuladas (que pueden tener un costo). Esto se logra minimizando la función objetivo

$$J = \int_0^{t_f} (\Delta \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}) dt \quad (20)$$

sujeto a la restricción  $\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}$ . La solución a este problema de optimización esta dada por:

$$\mathbf{K}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) \quad (21)$$

donde  $\mathbf{P}(t)$  se obtiene resolviendo la ecuación diferencial de Ricatti

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A} - \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{Q} = 0 \quad (22)$$

Si  $t_f \rightarrow \infty$  en la función objetivo (20), se asume que  $P$  constante y se obtiene resolviendo la ecuación algebraica de Ricatti

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (23)$$

En Matlab, las matrices  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{P}$  se obtienen utilizando la función LQR mediante la sintaxis

$$[\mathbf{K}, \mathbf{P}, \mathbf{E}] = \text{lqr}(\text{sys}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}), \mathbf{Q}, \mathbf{R}, 0)$$

Es importante destacar que este tipo de retroalimentación de estado no considera una referencia en el control, sino que asume que el sistema tiene que estabilizarse en torno al punto de operación actual.



### 2.3. Simulación de Sistemas Dinámicos en Simulink

Simulink es un entorno de programación visual que permite simular modelos dinámicos de sistemas cuya fenomenología se pueden representar matemáticamente. Antes de utilizar el software, es necesario encontrar el modelo matemático del sistema y formularlo para que se pueda implementar en un simulador. Como ejemplo, en esta sección, se utilizará el modelo de un péndulo simple para representar un sistema no lineal. Las ecuaciones del péndulo son

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \sin(\theta) = u$$

donde  $\theta$  es el ángulo del péndulo respecto a la horizontal y  $u$  es la variable manipulada, que representa una fuerza externa que se aplica sobre el sistema.

Para efectos de simulación, es necesario representar el sistema mediante variables de estado. Mediante inspección se puede determinar que las variables de estado del sistema son  $\mathbf{x} = [\theta, \dot{\theta}]^T$  y las ecuaciones de estado del sistema son:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u) \quad (24)$$

$$= \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) + u \end{bmatrix} \quad (25)$$

Para simular este sistema es necesario implementar la función  $f(\mathbf{x}, u)$  en Matlab en un archivo de extensión “.m” de la siguiente forma:

```
function dx = f(x,u)
dx = [x(2);-sin(x(1))+u];
```

En Simulink es posible construir visualmente un diagrama de bloques para la simulación del sistema. Para simular el sistema se puede utilizar el diagrama de bloques de la Figura 6, donde el bloque *Matlab FCN* llama a la función declarada anteriormente mediante la sintaxis  $f([u(1);u(2)],u(3))$ . Las condiciones iniciales del sistema se definen como vector columna en el bloque *Integrator* en el cuadro de texto *Initial Condition*. Las condiciones iniciales del integrador no son necesariamente iguales al punto de operación del sistema ( $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{x}_0$ ).

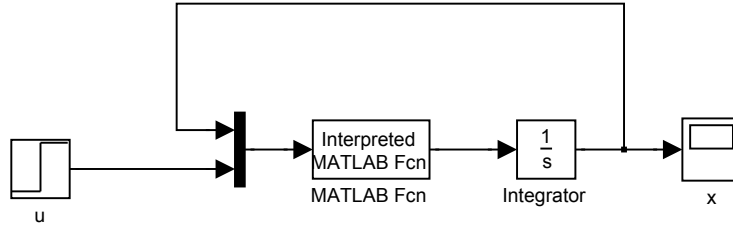


Figura 6: Diagrama de Bloques en Simulink

En distintas aplicaciones es necesario obtener y simular un modelo lineal del sistema, como por ejemplo para construir un observador o un controlador. La linealización del sistema esta dada por

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} &= A\Delta \mathbf{x} + B\Delta u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos(\theta_0) & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u \end{aligned} \quad (26)$$

con  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  y  $\Delta u = u - u_0$  donde  $\mathbf{x}_0 = [\theta_0, \dot{\theta}_0]^T$ . Si en el sistema se observa la posición y velocidad, las matrices  $C$  y  $D$  estan dadas por

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = 1$$

En Simulink, un sistema lineal se representa mediante el bloque *State Space*, como se ilustra en la Figura 7. Los parámetros  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y las condiciones iniciales del sistema se configuran en las opciones del bloque. Para que la simulación sea acorde con el punto de operación, es necesario ajustar los valores de entrada y de salida como se indica en la figura. Es importante destacar no hay que integrar y retroalimentar la salida de este bloque, como se hace con el modelo no lineal, ya que se hace internamente.

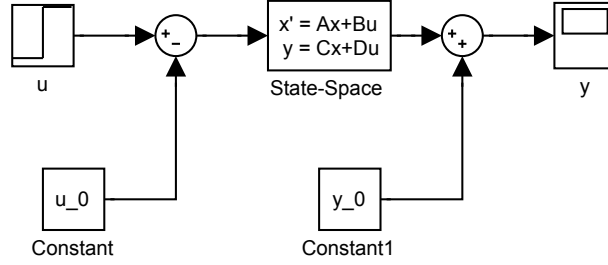


Figura 7: Sistema lineal en Simulink

## 2.4. Modelo del Sistema Twin Rotor

La Figura 8 muestra un diagrama simplificado del sistema estudiado, donde se ilustran las distintas masas, dimensiones y fuerzas externas del sistema.

Las fuerzas de propulsión o empuje de los rotores son de la forma

$$F_\phi(\omega_\phi) = K_\phi \text{sign}(\omega_\phi) \omega_\phi^2 \quad (27)$$

$$F_\theta(\omega_\theta) = K_\theta \text{sign}(\omega_\theta) \omega_\theta^2 \quad (28)$$

donde  $\omega_\phi$  y  $\omega_\theta$  son la velocidad angular del rotor propulsor del motor principal y de cola respectivamente. Cada rotor propulsor cumple las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y de equilibrio eléctrico para un motor de corriente continua.

$$J_{m,\phi} \frac{d\omega_\phi}{dt} = G_\phi i_\phi - B_\phi \omega_\phi \quad (29)$$

$$J_{m,\theta} \frac{d\omega_\theta}{dt} = G_\theta i_\theta - B_\theta \omega_\theta \quad (30)$$

$$v_{a,\phi} = L_{a,\phi} \frac{di_{a,\phi}}{dt} + R_{a,\phi} i_{a,\phi} + G_\phi \omega_\phi \quad (31)$$

$$v_{a,\theta} = L_{a,\theta} \frac{di_{a,\theta}}{dt} + R_{a,\theta} i_{a,\theta} + G_\theta \omega_\theta \quad (32)$$

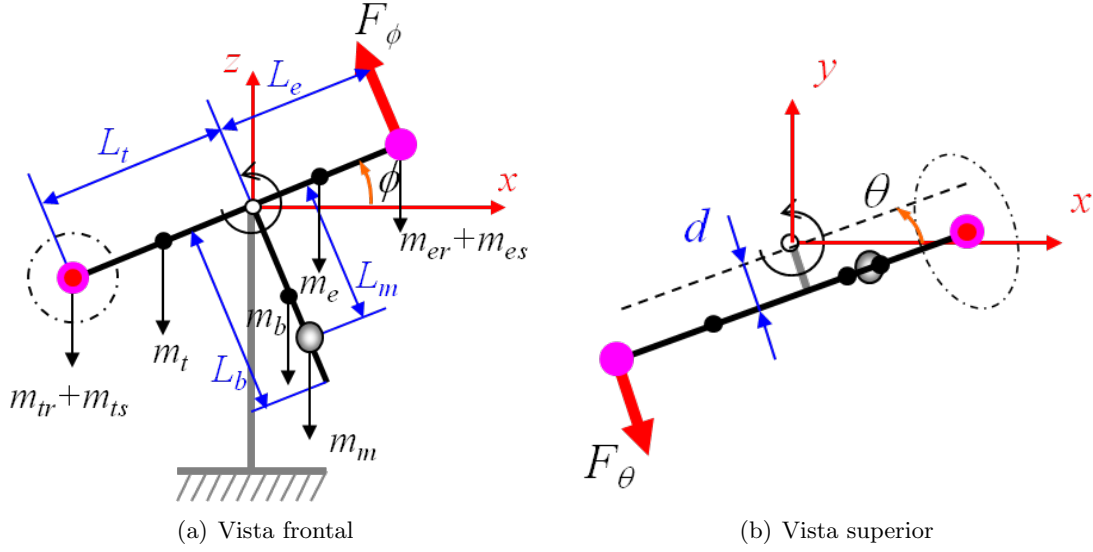


Figura 8: Diagramas simplificados del Twin Rotor

Los parámetros mecánicos y eléctricos de los motores están descritos en el Anexo de este documento.

Para la derivación de las ecuaciones de movimiento del sistema completo se puede utilizar principios de equilibrio de fuerzas y torques según las ecuaciones de Euler o emplear el Principio de Lagrange en base a las energías cinéticas y potenciales. Es importante notar que la barra que une a los rotores tiene un offset (o desplazamiento)  $d$  con respecto al eje vertical, lo cual permite que los momentos interactuen entre los dos ejes de rotación.

#### 2.4.1. Ecuaciones de Euler

Las ecuaciones de Euler para un cuerpo cualquiera respecto a un punto de rotación arbitrario son:

$$\sum \mathbf{T} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) \quad (33)$$

donde  $\mathbf{I}$  es el tensor de inercia del sistema dado por

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Las velocidades angulares en cada eje son  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$  y las aceleraciones angulares  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = [\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z]^T$ . Las ecuaciones escalares asociadas a (33) son

$$\begin{aligned} \sum T_x &= I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z - I_{xy}(\dot{\omega}_y - \omega_z\omega_x) - I_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) - I_{zx}(\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y) \\ \sum T_y &= I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x - I_{yz}(\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y) - I_{zx}(\omega_z^2 - \omega_x^2) - I_{xy}(\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z) \\ \sum T_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y - I_{zx}(\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z) - I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) - I_{yz}(\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x) \end{aligned} \quad (35)$$

En el caso del Twin Rotor  $\omega_x = 0$ ,  $\omega_y = \dot{\phi}$ ,  $\omega_z = \dot{\theta}$  y las aceleraciones angulares son

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\phi}\dot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}$$

por lo tanto las ecuaciones se reducen a:

$$\sum T_x = -I_{xx}\dot{\phi}\dot{\theta} - (I_{yy} - I_{zz})\dot{\phi}\dot{\theta} - I_{xy}\ddot{\phi} - I_{yz}(\dot{\phi}^2 - \dot{\theta}^2) - I_{zx}\ddot{\theta} \quad (36)$$

$$\sum T_y = I_{yy}\ddot{\phi} - I_{yz}\ddot{\theta} - I_{zx}\dot{\theta}^2 \quad (37)$$

$$\sum T_z = I_{zz}\ddot{\theta} + 2I_{zx}\dot{\phi}\dot{\theta} + I_{xy}\dot{\phi}^2 - I_{yz}\ddot{\phi} \quad (38)$$

Considerando que no hay rotación en el eje  $x$ , la ecuación 36 puede ser omitida de la modelación y de las simulaciones, ya que se encuentra en equilibrio estático. Para completar el modelo, es necesario encontrar los distintos componentes de la matriz  $\mathbf{I}$ .

Para encontrar los tensores de inercia del sistema es necesario definir sus dimensiones y masas. Para reducir la cantidad de operaciones a realizar, se agruparan todos los parámetros del sistema en vectores. Con ello, el vector de masas del sistema es:

$$\mathbf{M} = [m_{tr} \ m_{ts} \ m_t \ m_b \ m_m \ m_e \ m_{er} \ m_{es}]^T \quad (39)$$

Las posiciones relativas del centro de masa de cada cuerpo respecto al punto de rotación, utilizando el sistema de referencia definido en la Figura 8, son

$$\mathbf{P}_r = \begin{bmatrix} -L_t & -L_t & -\frac{L_t}{2} & 0 & 0 & \frac{L_e}{2} & L_e & L_e \\ -d & -d & -d & -d & -d & -d & -d & -d \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{L_b}{2} & -L_m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Las posiciones absolutas del centro de masas de cada cuerpo son

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\phi \mathbf{P}_r \quad (41)$$

donde

$$\mathbf{R}_\phi = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}, \mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los momentos de inercia principales de cada elemento (relativos a su propio centro de gravedad) son

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{xx}' &= [0 \ m_{ts}r_{ts}^2/2 \ 0 \ m_bL_b^2/12 \ 0 \ 0 \ 0 \ m_{es}r_{es}^2/2]^T \\ \mathbf{I}_{yy}' &= [0 \ m_{ts}r_{ts}^2 \ m_tL_t^2/12 \ m_bL_b^2/12 \ 0 \ m_eL_e^2/12 \ 0 \ m_{es}r_{es}^2/2]^T \\ \mathbf{I}_{yy}' &= [0 \ m_{ts}r_{ts}^2/2 \ m_tL_t^2/12 \ 0 \ 0 \ m_eL_e^2/12 \ 0 \ m_{es}r_{es}^2]^T \end{aligned}$$

Los momentos de inercia secundarios  $\mathbf{I}_{xy}'$ ,  $\mathbf{I}_{yx}'$  y  $\mathbf{I}_{zx}'$  son cero para cada una de las masas. Luego los momentos de inercia totales (sistema completo) respecto al punto de rotación son:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_{i=1}^8 (I'_{xx,i} + M_i(P_{y,i}^2 + P_{z,i}^2)) \\ I_{yy} &= \sum_{i=1}^8 (I'_{yy,i} + M_i(P_{x,i}^2 + P_{z,i}^2)) \\ I_{zz} &= \sum_{i=1}^8 (I'_{zz,i} + M_i(P_{x,i}^2 + P_{y,i}^2)) \end{aligned}$$

Posteriormente, los momentos secundarios son:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \sum_{i=1}^8 (M_i(P_{x,i}P_{y,i})) \\ I_{yz} &= \sum_{i=1}^8 (M_i(P_{y,i}P_{z,i})) \\ I_{zx} &= \sum_{i=1}^8 (M_i(P_{z,i}P_{x,i})) \end{aligned}$$

Los momentos externos están dados por las fuerzas de gravedad, roce viscoso y las fuerzas de propulsión, particularmente:

$$\sum T_y = T_g(\phi) - \varsigma_\phi \dot{\phi} + L_e K_\phi \text{sign}(\omega_\phi) \omega_\phi^2 \quad (42)$$

$$\sum T_z = -\varsigma_\theta \dot{\theta} - dK_\phi \text{sign}(\omega_\phi) \omega_\phi^2 \sin(\phi) + L_t K_\theta \text{sign}(\omega_\theta) \omega_\theta^2 \quad (43)$$

donde el Torque por gravedad  $T_g$  se puede calcular mediante

$$\begin{aligned} T_g(\phi) &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} (R_\phi P_r) M g \\ &= (m_t/2 + m_{tr} + m_{ts}) g L_t \cos(\phi) - (m_e/2 + m_{er} + m_{es}) g L_e \cos(\phi) - (m_b/2 + m_m) g L_b \sin(\phi) \end{aligned} \quad (44)$$

Agrupando todas la expresiones, es posible escribir las ecuaciones dinámicas del sistema como

$$\mathbf{J}(\phi) \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_c(\phi) \begin{bmatrix} \dot{\phi}^2 \\ \dot{\theta}^2 \\ \dot{\phi}\dot{\theta} \end{bmatrix} + \mathbf{M}_g(\phi) - \varsigma \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \mathbf{M}_p(\phi, \omega_\phi, \omega_\theta) \quad (45)$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(\phi) &= \begin{bmatrix} I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \\
\mathbf{T}_c(\phi) &= \begin{bmatrix} 0 & -I_{zx} & 0 \\ I_{xy} & 0 & 2I_{zx} \end{bmatrix} \\
\mathbf{M}_g(\phi) &= \begin{bmatrix} T_g(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \\
\varsigma &= \begin{bmatrix} \varsigma_\phi & 0 \\ 0 & \varsigma_\theta \end{bmatrix} \\
\mathbf{M}_p(\phi, \omega_\phi, \omega_\theta) &= \begin{bmatrix} L_e K_\phi \text{sign}(\omega_\phi) \omega_\phi^2 \\ -dK_\phi \text{sign}(\omega_\phi) \omega_\phi^2 \sin(\phi) + L_t K_\theta \text{sign}(\omega_\theta) \omega_\theta^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para efectos de simulación, se debe invertir la matriz  $J(\phi)$  e implementar la ecuación (45) de la forma

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1}(\phi) \left( \mathbf{T}_c(\phi) \begin{bmatrix} \dot{\phi}^2 \\ \dot{\theta}^2 \\ \dot{\phi}\dot{\theta} \end{bmatrix} + \mathbf{M}_g(\phi) - \varsigma \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \mathbf{M}_p(\phi, \omega_\phi, \omega_\theta) \right) \quad (46)$$

#### 2.4.2. Ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange para un sistema con grados de libertad  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, M$  se definen mediante:

$$\sum M_{ext,j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (47)$$

donde  $L$  es la diferencia de energía cinética y potencial. En el caso del Twin Rotor  $q_1 = \phi$  y  $q_2 = \theta$ .

La energía potencial total del sistema se calcula mediante:

$$E_p = \mathbf{P}_z g \mathbf{M} \quad (48)$$

donde  $P_z$  es un vector fila que contiene la altura de cada elemento del sistema. Luego, la energía cinética del sistema se calcula mediante:

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \left( M_i v_i^2 + I'_{yy,i} \dot{\phi} + I'_{zz,i} \dot{\theta} \right) \quad (49)$$

Donde  $v_i$  es la magnitud de la velocidad del centro de gravedad de cada elemento del sistema. Notar que  $I'_{xx}$  no influye en el sistema ya que no hay movimiento en ese eje.

También es posible calcular la energía cinética utilizando el tensor de inercia absoluto, pero sin incorporar la energía cinética del centro de gravedad de cada elemento.

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2} \omega^T \mathbf{I}(\phi) \omega \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \dot{\phi} & \dot{\theta} \end{bmatrix} \mathbf{I}_0(\phi) \begin{bmatrix} 0 & \dot{\phi} & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T \quad (50)
\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{I}(\phi)$  es el tensor de inercia del sistema completo respecto al punto de rotación.

Posteriormente se calcula  $L$  mediante

$$L = E_c - E_p \quad (51)$$

Las derivadas parciales de  $L$  respecto a los ángulos son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \phi} &= (m_t/2 + m_{tr} + m_{ts})gL_t \cos(\phi) - (m_e/2 + m_{er} + m_{es})gL_e \cos(\phi) - (m_b/2 + m_m)gL_b \sin(\phi) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2}(L_b^2 m_b/4 - L_e^2 m_e/4 - L_e^2 m_{er} - L_e^2 m_{es} + L_b^2 m_m - L_t^2 m_t/4 - L_t^2 m_{tr} - L_t^2 m_{ts})\dot{\theta}^2 \sin(2\phi) + \dots \\ &\dots + (L_e m_{es} + L_e m_{er} + L_e m_e/2 - L_t m_t/2 - L_t m_{tr} - L_t m_{ts})d\dot{\phi}\dot{\theta} \cos(\phi) + \dots \\ &\dots + (L_b m_b/2 + L_b m_m)d\dot{\phi}\dot{\theta} \sin(\phi) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

Agrupando términos, se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \phi} &= T_g(\phi) - I_{zx}\dot{\theta}^2 - I_{xy}\dot{\phi}\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

Las derivadas parciales de  $L$  respecto a las velocidades angulares son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= \dot{\phi} m_{es} r_{es}^2/2 + \dot{\phi} m_{ts} r_{ts}^2 + L_b^2 \dot{\phi} m_b/3 + L_e^2 \dot{\phi} m_e/3 + L_e^2 \dot{\phi} m_{er} + L_e^2 \dot{\phi} m_{es} + L_b^2 \dot{\phi} m_m + \dots \\ &\dots + L_t^2 \dot{\phi} m_t/3 + L_t^2 \dot{\phi} m_{tr} + L_t^2 \dot{\phi} m_{ts} - L_b d\dot{\theta} m_b \cos(\phi)/2 - L_b d\dot{\theta} m_m \cos(\phi) + \dots \\ &\dots + L_e d\dot{\theta} m_e \sin(\phi)/2 + L_e d\dot{\theta} m_{er} \sin(\phi) + L_e d\dot{\theta} m_{es} \sin(\phi) - L_t d\dot{\theta} m_t \sin(\phi)/2 + \dots \\ &\dots - L_t d\dot{\theta} m_{tr} \sin(\phi) - L_t d\dot{\theta} m_{ts} \sin(\phi) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \dot{\theta} m_{es} r_{es}^2 + \dot{\theta} m_{ts} r_{ts}^2/2 + L_b^2 \dot{\theta} m_b/4 + L_e^2 \dot{\theta} m_e/12 + L_b^2 \dot{\theta} m_m + L_t^2 \dot{\theta} m_t/12 + \dots \\ &\dots + d^2 \dot{\theta} m_b + d^2 \dot{\theta} m_e + d^2 \dot{\theta} m_{er} + d^2 \dot{\theta} m_{es} + d^2 \dot{\theta} m_m + d^2 \dot{\theta} m_t + d^2 \dot{\theta} m_{tr} + d^2 \dot{\theta} m_{ts} + \dots \\ &\dots - L_b^2 \dot{\theta} m_b \cos(\phi)^2/4 + L_e^2 \dot{\theta} m_e \cos(\phi)^2/4 + L_e^2 \dot{\theta} m_{er} \cos(\phi)^2 + L_e^2 \dot{\theta} m_{es} \cos(\phi)^2 + \dots \\ &\dots - L_b^2 \dot{\theta} m_m \cos(\phi)^2 + L_t^2 \dot{\theta} m_t \cos(\phi)^2/4 + L_t^2 \dot{\theta} m_{tr} \cos(\phi)^2 + L_t^2 \dot{\theta} m_{ts} \cos(\phi)^2 + \dots \\ &\dots - L_b d\dot{\phi} m_b \cos(\phi)/2 - L_b d\dot{\phi} m_m \cos(\phi) + L_e d\dot{\phi} m_e \sin(\phi)/2 + L_e d\dot{\phi} m_{er} \sin(\phi) + \dots \\ &\dots + L_e d\dot{\phi} m_{es} \sin(\phi) - L_t d\dot{\phi} m_t \sin(\phi)/2 - L_t d\dot{\phi} m_{tr} \sin(\phi) - L_t d\dot{\phi} m_{ts} \sin(\phi) \end{aligned}$$

Las derivadas respecto al tiempo de las expresiones anteriores son

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= (m_{es}r_{es}^2/2 + m_{ts}r_{ts}^2 + L_b^2m_b/3 + L_e^2m_e/3 + L_e^2m_{er} + \dots \\
&\quad \dots + L_e^2m_{es} + L_b^2m_m + L_t^2m_t/3 + L_t^2m_{tr} + L_t^2m_{ts})d\dot{\phi} + \dots \\
&\quad \dots + (m_e/2 + m_{er} + m_{es})L_e d \sin \phi \ddot{\theta} - (m_t/2 + m_{tr} + m_{ts})L_t d \sin \phi \ddot{\theta} + \dots \\
&\quad \dots - (m_b/2 + m_m)L_b d \cos \phi \ddot{\theta} + \dots \\
&\quad \dots + (L_e m_e/2 + L_e m_{er} + L_e m_{es})d \cos \phi \dot{\phi} \dot{\theta} - (L_t m_t/2 + L_t m_{tr} + L_t m_{ts})d \cos \phi \dot{\phi} \dot{\theta} + \dots \\
&\quad \dots + (L_b m_b + L_b m_m)d \sin \phi \dot{\phi} \dot{\theta} \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= (m_{es}r_{es}^2 + m_{ts}r_{ts}^2/2 + L_b^2m_b/4 + L_e^2m_e/12 + L_b^2m_m + L_t^2m_t/12)\ddot{\theta} + \dots \\
&\quad \dots + (m_b + m_e + m_{er} + m_{es} + m_m + m_t + m_{tr} + m_{ts})d^2\ddot{\theta} + \dots \\
&\quad \dots + (-L_b^2m_b/4 + L_e^2m_e/4 + L_e^2m_{er} + L_e^2m_{es} - L_b^2m_m + L_t^2m_t + L_t^2m_{tr} + L_t^2m_{ts})\ddot{\theta} \cos \phi^2 + \dots \\
&\quad \dots + (L_e m_e/2 + L_e m_{er} + L_e m_{es} - L_t m_t/2 - L_t m_{tr} - L_t m_{ts} - L_b m_b/2 - L_b m_m)d \cos \phi \dot{\phi}^2 + \dots \\
&\quad \dots + (L_b m_b/2 + L_b m_m + L_e d m_e/2 + L_e m_{er} + L_e m_{es} - L_t m_t/2 - L_t m_{tr} - L_t m_{ts})d \sin \phi \dot{\phi}^2 + \dots \\
&\quad \dots + (L_b^2m_b/2 - L_e^2m_e/2 - 2L_e^2m_{er} - 2L_e^2m_{es} + 2L_b^2m_m + \dots \\
&\quad \dots - L_t^2m_t/2 - 2L_t^2m_{tr} - 2L_t^2m_{ts}) \cos \phi \sin \phi \dot{\phi} \dot{\theta}
\end{aligned}$$

Agrupando términos se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= I_{yy}\ddot{\phi} - I_{yz}\ddot{\theta} - I_{xy}\dot{\theta}\dot{\phi} \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= -I_{yz}\ddot{\phi} + I_{zz}\ddot{\theta} - I_{xy}\dot{\phi}^2 - 2I_{zx}\dot{\phi}\dot{\theta}
\end{aligned}$$

Finalmente las ecuaciones de Lagrange (47) se reducen a

$$\begin{aligned}
\sum M_{ext,\phi} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} \\
&= I_{yy}\ddot{\phi} - I_{yz}\ddot{\theta} - I_{xy}\dot{\theta}\dot{\phi} - (T_g(\phi) - I_{zx}\dot{\theta}^2 - I_{xy}\dot{\phi}\dot{\theta}) \\
&= I_{yy}\ddot{\phi} - I_{yz}\ddot{\theta} - T_g(\phi) + I_{zx}\dot{\theta}^2 \\
\sum M_{ext,\theta} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} \\
&= -I_{yz}\ddot{\phi} + I_{zz}\ddot{\theta} - I_{xy}\dot{\phi}^2 - 2I_{zx}\dot{\phi}\dot{\theta}
\end{aligned}$$

Agrupando todas la expresiones, es posible escribir las ecuaciones como

$$\begin{bmatrix} \sum M_{ext,\phi} \\ \sum M_{ext,\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -I_{zx} & 0 \\ I_{xy} & 0 & 2I_{zx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}^2 \\ \dot{\theta}^2 \\ \dot{\phi}\dot{\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_g(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

Lo cual se puede reescribir como



$$\mathbf{J}(\phi) \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_c(\phi) \begin{bmatrix} \dot{\phi}^2 \\ \dot{\theta}^2 \\ \dot{\phi}\dot{\theta} \end{bmatrix} + \mathbf{M}_g(\phi) + \begin{bmatrix} \sum M_{ext,\phi} \\ \sum M_{ext,\theta} \end{bmatrix} \quad (53)$$

donde las matrices  $\mathbf{J}(\phi)$ ,  $\mathbf{T}_c(\phi)$  y  $\mathbf{M}_g(\phi)$  son las mismas que en el modelo obtenido mediante las ecuaciones de Euler.

### 3. Desarrollo de la Experiencia

#### 3.1. Conceptos

Investigue y defina los siguientes conceptos:

1. Sistema lineal estabilizable.
2. Sistema lineal detectable.
3. Descomposición de Kalman.
4. Principio de separación para sistemas lineales.
5. Margen de ganancia y margen de fase de controladores LQR.
6. *loop-transfer-recovery* para controladores LQG.

#### 3.2. Simulación de sistemas MIMO

1. Definiendo el vector de estados como  $\mathbf{x} = \left[ \phi \quad \frac{d\phi}{dt} \quad \theta \quad \frac{d\theta}{dt} \quad \omega_\phi \quad \omega_\theta \quad i_\phi \quad i_\theta \right]^T$ , reescriba las 6 ecuaciones diferenciales encontradas anteriormente de la forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

donde  $\dot{\mathbf{x}} = \left[ \frac{d\phi}{dt} \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} \quad \frac{d\theta}{dt} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \frac{d\omega_\phi}{dt} \quad \frac{d\omega_\theta}{dt} \quad \frac{di_\phi}{dt} \quad \frac{di_\theta}{dt} \right]^T$  y  $\mathbf{u} = \left[ v_\theta \quad v_\phi \right]^T$ . Para lograr esta formulación es necesario agregar dos ecuaciones para completar el vector de estado

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= x(2) \\ \frac{d\theta}{dt} &= x(4) \end{aligned}$$

2. Implemente en Simulink el modelo del sistema empleando las ecuaciones dinámicas no-lineales obtenidas en el punto anterior, siguiendo la siguiente topología:

**Recomendación:** Implemente el sistema empleando parámetros (variables de Matlab) en vez de ingresar los valores numéricos directamente en Simulink. Ejemplo: si necesita calcular  $f(x) = ax + b$ , con  $a = 2$ ,  $b = 1$ , cree un archivo de donde puedan ser leídos los valores “ $a = 2$ ”

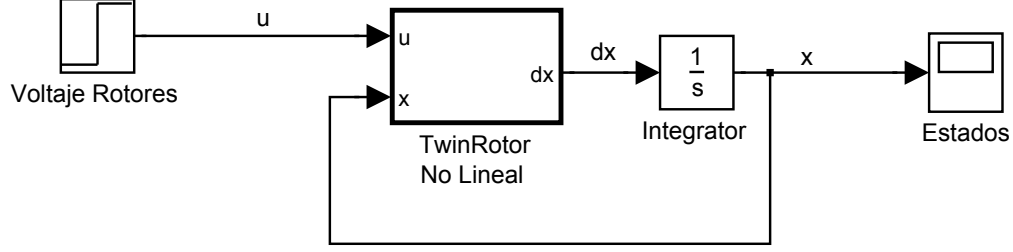


Figura 9: Diagrama para la simulación en lazo abierto

“ $b = 1$ ”, en vez de simplemente escribir una función que retorne  $2x + 1$ , Esto será útil para ajustar las constantes del modelo.

Aplique escalones a los voltajes de cada rotor en forma independiente y para condiciones iniciales nulas y no nulas (particularmente cuando  $\phi(0) \neq 0$ ). ¿Qué comportamiento del sistema observa? Si este no es el esperado, corrija el modelo.

- Encuentre el punto de operación  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{u}_0$  para  $\phi_0$  y  $\theta_0$ . Recuerde que el punto de operación se encuentra resolviendo  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0$ .
- Linealice el modelo obtenido en el punto 4 y obtenga su representación en el espacio de estado, es decir encuentre las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  tal que:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}$$

Realice la linealización de las expresiones simbólicas, es decir no reemplace las constantes por sus valores. Se recomienda utilizar las funciones `diff` o `jacobian` de MATLAB para evitar errores humanos.

- Considerando que se miden solo los ángulos  $\phi$  y  $\theta$ , determine la observabilidad y controlabilidad del sistema. ¿Qué concluye? Repita el mismo procedimiento cambiando el punto de operación en posición y velocidad ¿Qué se observa ahora? Itere hasta encontrar mejores indicadores de observabilidad y controlabilidad en el sistema.
- Repita el punto 2 ahora empleando el modelo lineal del punto anterior. Recuerde que la linealización se realiza en torno a un punto de operación y que el modelo lineal resultante opera en torno al origen. Compare el modelo original con el lineal ¿Qué observa?
- Obtenga un controlador LQR para distintos valores de  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  en el funcional de costo. Utilice la función de MATLAB `[K,S,E]=lqr(A,B,Q,R,0)`. La función retorna un controlador del tipo  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ , pero para un modelo linealizado en torno a un punto de operación. Por lo tanto al implementar el controlador hay que “bajar”  $\mathbf{x}$  desde su punto de operación y posteriormente “levantar” la variable manipulada, es decir

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{u}_0$$

Simule el proceso en lazo cerrado considerando los distintos valores de  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  y seleccione un conjunto de valores que permitan lograr una respuesta estable y rápida. Suponga que el

sistema se encuentra inicialmente desplazado de su posición de equilibrio, particularmente cuando  $\phi(0) \neq 0$ . Para cada simulación obtenga el índice de desempeño  $J$ . Discuta el efecto de  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  en sus resultados.

- En el sistema real sólo se tiene acceso a la medición de los ángulos, por lo tanto es necesario implementar un estimador de estado. Utilice la función **KALMAN** de Matlab para construir un observador de estado para estimar el valor de  $\mathbf{x}$ . Asuma que las perturbaciones en el estado sólo afectan las ecuaciones de torque y los valores de  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}$  son:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 8.6 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 3.0 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1.3 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0 & 1.7 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Implemente el estimador en Simulink siguiendo el modelo de la Figura 5. Verifique la eficacia del estimador comparando en un mismo *Scope* los estados estimados con los reales.

Verifique la robustez del estimador agregando perturbaciones en el estado y en la medición y compare las variables estimadas con las reales. Modele las perturbaciones mediante ruido blanco de media cero y baja varianza. Modifique las matrices  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}$  si la respuesta del estimador no es la apropiada.

¿Cómo afectan los valores de  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}$  en el índice de desempeño?

- Simule el sistema realimentado usando un controlador LQG, es decir, un controlador LQR utilizando los estados estimados en lugar de los reales. Compare los índices de desempeño para cada caso. Repita las simulaciones, pero modificando los valores de  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}$  ( $\pm 50\%$ ,  $100\%$ ,  $200\%$ ).

### 3.3. Control Twin Rotor

- Conecte el Twin Rotor a Simulink y realice pruebas en escalón. Registre las variables medidas y compárelas con las obtenidas en las simulaciones. Diseñe una metodología para estimar los parámetros del sistema a partir de los experimentos realizados. A partir de esta metodología, estime al menos la constante de empuje  $K_\phi$ .
- Programe y sintonice en Simulink el filtro de Kalman de tiempo continuo diseñado en la etapa de simulaciones.
- Pruebe el observador para una razón  $V/W$  inferior en un  $50\%$  a la usada anteriormente y luego para una razón  $100\%$  superior a ésta. ¿Qué observa? Pruebe ambos observadores de estado y determine qué observador utilizará para las pruebas siguientes.
- Programe el controlador LQG obtenido en la etapa de simulaciones y evalúe su desempeño en el sistema real, ajustando las matrices  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  para obtener un comportamiento estable y rápido.
- Pruebe el controlador para una razón  $Q/R$  inferior en un  $50\%$  a la usada anteriormente y luego para una razón  $100\%$  superior a ésta. ¿Qué observa?

6. Registre algunas pruebas de respuesta a cambios en la referencia del sistema completo (planta - observador - controlador). Compare estos resultados con aquellos obtenidos en simulaciones.
7. Discuta el efecto de las matrices  $Q$ ,  $R$ ,  $W$  y  $V$  en la dinámica del sistema realimentado.
8. **Bonus + 0.5 puntos** Indique si existe una fuerza en el sistema real que no está siendo incorporada en el modelo y elabore una expresión para incorporarla.

## 4. Informe Final

Presente y analice ordenadamente los resultados obtenidos en la experiencia (incluya gráficos, videos, etc.), comparando además las diferencias entre el sistema real y el modelo simulado. Indique si existen diferencias y comente a que se deben. No olvide incluir las respuestas a la sección de conceptos y preguntas explícitas que se hacen en la guía. Además, adjunte a su informe el (los) modelo(s) Simulink como anexo.

**Nota:** En el informe se evaluarán aspectos como calidad de los resultados, capacidad de análisis y presentación. El informe debe demostrar el desarrollo completo de la experiencia mediante resultados en gráficos y/o tablas, si estos no están se asumirá que esa sección de la experiencia no se realizó. En cuanto a presentación, procure pulcritud en los gráficos y evite presentar directamente los “pantallazos” de los *Scopes*.

## 5. Evaluación

Debe realizar una demostración al profesor y los ayudantes del sistema operando con el controlador LQG, correctamente sintonizado, en torno a la referencia  $\phi = 0$  rad y  $\theta = 0$  rad. La nota de la experiencia se distribuye como:

- Demostración: 25 %.
- Informe: 65 %.
- Preguntas realizadas durante la demostración: 10 %.

## 6. Apéndice: Parámetros del sistema

### 6.1. Motores

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidad
Momento de inercia del Eje	$J_m$	$1.272 \cdot 10^{-4}$	$kg \cdot m^2$
Inductancia de las Armaduras	$L_a$	0.86	$mH$
Resistencia de las Armaduras	$R_a$	8.0	$\Omega$
Constante de torque de los Motores	$G$	0.0202	$Nm/A$
Constante de roce viscoso del Motor de elevación	$B_\theta$	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$Nm \cdot s/rad$
Constante de roce viscoso del Motor de rotación	$B_\phi$	$4.5 \cdot 10^{-5}$	$Nm \cdot s/rad$

### 6.2. Twin Rotor

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidad
Masa del rotor de elevación (incluyendo el motor)	$m_{er}$	0.228	$Kg$
Masa de la barra del rotor de elevación	$m_e$	0.0145	$Kg$
Masa del rotor de cola (incluyendo el motor)	$m_{tr}$	0.206	$Kg$
Masa de la barra del rotor de cola	$m_t$	0.0155	$Kg$
Masa del contrapeso	$m_m$	0.068	$Kg$
Masa de la barra del contrapeso	$m_b$	0.022	$Kg$
Masa del marco de elevación	$m_{es}$	0.255	$Kg$
Masa del marco de cola	$m_{ts}$	0.165	$Kg$
Longitud de la barra del rotor de elevación	$L_e$	0.24	$m$
Longitud de la barra del rotor de cola	$L_t$	0.25	$m$
Longitud de la barra de contrapeso	$L_b$	0.26	$m$
Distancia entre el contrapeso y la articulación	$L_m$	0.26	$m$
Radio del marco de elevación	$r_{es}$	0.155	$m$
Radio del marco de cola	$r_{ts}$	0.1	$m$
Distancia de offset entre eje principal y eje de rotación	$d$	0.05	$m$
Aceleración de gravedad	$g$	9.81	$m/s^2$
Constante de roce dinámico del eje de elevación	$\varsigma_\phi$	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$N \cdot m \cdot /rad$
Constante de roce dinámico del eje de orientación	$\varsigma_\theta$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$N \cdot m \cdot /rad$
Constante de la fuerza de empuje del rotor de elevación	$K_\phi$	$6.08 \cdot 10^{-5}$	$N \cdot s^2$
Constante de la fuerza de empuje del rotor de cola	$K_\theta$	$3.6 \cdot 10^{-5}$	$N \cdot s^2$

## Referencias

- [1] R.C. Hibbeler, Engineering Mechanics, Dynamics, Prentice Hall, 12 edition.
- [2] R. Bishop, R. Dorf, Sistemas de Control Moderno, Prentice Hall, 11 edición.