O Operador Tensorial Irredutível de Racah

Prof. Dr. Cássio Sanguini Sergio

Departamento de Física, Universidade Federal de Roraima

Boa Vista, 05 de janeiro de 2020

Conteúdo

1 Introdução

Certo dia nosso professor nos ensinou o que é o ESCALAR: Um "objeto" que tem as propriedades dos números reais. Passados alguns anos, outro professor nos falou sobre o VETOR: Um "objeto" que se caracteriza pelas propriedades de módulo, direção e sentido. Prosseguindo nos estudos, mais um professor nos mostrou o OPERADOR VETORIAL: Um "objeto" caracterizado pelas propriedades de uma tríade de operadores. Em um dia notável, o professor Giulio Racah nos apresentou o OPERADOR TENSORIAL IRREDUTÍVEL: Um "objeto" que se caracteriza pelas... Falaremos mais à frente sobre o assunto, mas podemos ver sua definição em: Racah, G., *Theory of Complex Spectra. I*, Physical Review, **61**, p.186 (1942) (Racah, 1942a); Racah, G., *Theory of Complex Spectra. II*, Physical Review, **62**, p.438 (1942) (Racah, 1942b).

Este artigo tem como objetivo apresentar a definição de Racah para o operador tensorial irredutível e demonstrar que o operador vetorial do momento angular (escrito pelas componentes esféricas) é um operador tensorial irredutível de grau 1.

2 A notação adotada

A notação utilizada é a mesma do livro (L. C. Biedenharn, 1984).

As componentes cartezianas do momento angular (J_x, J_y, J_z) são escritas como (J_1, J_2, J_3), quer dizer, escreve-se o momento angular como:

$$\mathbf{J} = J_1\hat{e}_1 + J_2\hat{e}_2 + J_3\hat{e}_3. \tag{1}$$

As componentes esféricas do momento angular (J_{+1}, J_0, J_{-1}) são escritas em função das componentes cartezianas:

$$\begin{aligned} J_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(J_1 + iJ_2\right), \\ J_0 &= J_3, \\ J_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(J_1 - iJ_2\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Os operadores escada (J_+, J_-) são escritos em função dos operadores (J_1, J_2):

$$\begin{aligned} J_+ &= J_1 + iJ_2, \\ J_- &= J_1 - iJ_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Nota 1: Na língua inglesa, os operadores (3) são chamados de *ladder operators* (operadores escada); também são conhecidos como *raising and lowering operators* (operadores de elevação e de abaixamento).

Nota 2: Inspecionando (2) e (3), escreve-se as componentes esféricas em termos dos operadores escadas:

$$
\begin{aligned}
J_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} J_{+}, \\
J_0 &= J_3, \\
J_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} J_{-}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

3 A definição de Racah

Racah definiu que um "objeto" é um operador tensorial irredutível quando as componentes desse "objeto" satisfazem as regras (Racah, 1942b):

$$
\begin{aligned}
\left[J_{+},\ T^{J}_{M}\right] &= \sqrt{(J-M)(J+M+1)}\ T^{J}_{M+1}, \\
\left[J_{-},\ T^{J}_{M}\right] &= \sqrt{(J+M)(J-M+1)}\ T^{J}_{M-1}, \\
\left[J_{3},\ T^{J}_{M}\right] &= M\ T^{J}_{M}.
\end{aligned}
$$

Em (5), T^J_M são as componentes do operador tensorial irredutível $\mathbf{T}^J$. O grau, ou a ordem de $\mathbf{T}^J$ é J. Sendo $M = J, J-1, \ldots, -J$, o operador tensorial é formado por $(2J+1)$ componentes: T^J_J, T^J_{J-1}, $\ldots$, T^J_{-J}. De fato, um operador tensorial irredutível de grau J é um conjunto de $(2J+1)$ operadores T^J_M.

4 Operador vetorial como operador tensorial

Vamos demonstrar que o operador vetorial do momento angular (escrito pelas componentes esféricas) é um operador tensorial irredutível de grau 1. Para isso, vamos resolver os lados esquerdo e direito de (5) e verificar se há igualdade.

Resolução para J_+:

$$
\begin{aligned}
[J_+,\ J_0] &= \sqrt{(1-0)(1+0+1)}\ J^1_{0+1} \\
[(J_1 + iJ_2),\ J_3] &= \sqrt{2}\ J^1_{+1} \\
[J_1,\ J_3] + i\,[J_2,\ J_3] &= \\
-iJ_2 + i(iJ_1) &= \\
-(J_1 + iJ_2) &= \\
\sqrt{2}\ J_{+1} &= \blacksquare
\end{aligned}
$$

Resolução para J_-:

$$
\begin{aligned}
[J_-,\ J_0] &= \sqrt{(1+0)(1-0+1)}\ J^1_{0-1} \\
[(J_1 - iJ_2),\ J_3] &= \sqrt{2}\ J^1_{-1} \\
[J_1,\ J_3] - i\,[J_2,\ J_3] &= \\
-iJ_2 - i(iJ_1) &= \\
(J_1 - iJ_2) &= \\
\sqrt{2}\ J_{-1} &= \blacksquare
\end{aligned}
$$

Resolução para J_3:

$$
\begin{aligned}
[J_3,\ J_0] &= 0 \cdot J^1_0 \\
[J_3,\ J_3] &= \\
0 &= \blacksquare
\end{aligned}
$$

Nota 1: As relações de comutação das componentes Cartesianas do operador do momento angular são:

$$\boxed{[J_1, J_2] = iJ_3} \tag{5}$$

$$\boxed{[J_3, J_1] = iJ_2} \tag{6}$$

$$\boxed{[J_2, J_3] = iJ_1} \tag{7}$$

Nota 2: O símbolo ■ significa DEMONSTRADO.

5 Conclusão

Por obedecerem as regras de Racah (5), as componentes esféricas do operador vetorial do momento angular $\mathbf{J}$ (J_{+1}, J_0, J_{-1}) são as componentes do operador tensorial irredutível $\mathbf{J}^1$ $(J^1_{+1}, J^1_0, J^1_{-1})$.

Referências

L. C. Biedenharn, J. D. L. (1984). *Angular Momentum in Quantum Physics.* Cambridge University Press , ISBN 978-0511759888, 1st edition.

Racah, G. (1942a). *Theory of Complex Spectra. I.* Physical Review, Volume 61, Pages 186-197.

Racah, G. (1942b). *Theory of Complex Spectra. II.* Physical Review, Volume 62, Pages 438-462.