

O Operador Tensorial Irredutível de Racah

Prof. Dr. Cássio Sanguini Sergio

Departamento de Física, Universidade Federal de Roraima

Boa Vista, 05 de janeiro de 2020

Conteúdo

1	Introdução	1
2	A notação adotada	2
3	A definição de Racah	3
4	Operador vetorial como operador tensorial	3

1 Introdução

Certo dia nosso professor nos ensinou o que é o ESCALAR: Um “objeto” que tem as propriedades dos números reais. Passados alguns anos, outro professor nos falou sobre o VETOR: Um “objeto” que se caracteriza pelas propriedades de módulo, direção e sentido. Prosseguindo nos estudos, mais um professor nos mostrou o OPERADOR VETORIAL: Um “objeto” caracterizado pelas propriedades de uma tríade de operadores. Em um dia notável, o professor Giulio Racah nos apresentou o OPERADOR TENSORIAL IRREDUTÍVEL: Um “objeto” que se caracteriza pelas... Falaremos mais à frente sobre o assunto, mas podemos ver sua definição em: Racah, G., *Theory of Complex Spectra. I*, Physical Review, **61**, p.186 (1942)

(Racah, 1942a); Racah, G., *Theory of Complex Spectra. II*, Physical Review, **62**, p.438 (1942) (Racah, 1942b).

Este artigo tem como objetivo apresentar a definição de Racah para o operador tensorial irredutível e demonstrar que o operador vetorial do momento angular (escrito pelas componentes esféricas) é um operador tensorial irredutível de grau 1.

2 A notação adotada

A notação utilizada é a mesma do livro (L. C. Biedenharn, 1984).

As componentes cartesianas do momento angular (J_x, J_y, J_z) são escritas como (J_1, J_2, J_3) , quer dizer, escreve-se o momento angular como:

$$\mathbf{J} = J_1 \hat{e}_1 + J_2 \hat{e}_2 + J_3 \hat{e}_3. \quad (1)$$

As componentes esféricas do momento angular (J_{+1}, J_0, J_{-1}) são escritas em função das componentes cartesianas:

$$\begin{aligned} J_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (J_1 + iJ_2), \\ J_0 &= J_3, \\ J_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (J_1 - iJ_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Os operadores escada (J_+, J_-) são escritos em função dos operadores (J_1, J_2) :

$$\begin{aligned} J_+ &= J_1 + iJ_2, \\ J_- &= J_1 - iJ_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Nota 1: Na língua inglesa, os operadores (3) são chamados de *ladder operators* (operadores escada); também são conhecidos como *raising and lowering operators* (operadores de elevação e de abaixamento).

Nota 2: Inspeccionando (2) e (3), escreve-se as componentes esféricas em termos dos operadores escadas:

$$\begin{aligned}
J_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}J_+, \\
J_0 &= J_3, \\
J_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}J_-.
\end{aligned} \tag{4}$$

3 A definição de Racah

Racah definiu que um “objeto” é um operador tensorial irredutível quando as componentes desse “objeto” satisfazem as regras (Racah, 1942b):

$$\begin{aligned}
[J_+, T_M^J] &= \sqrt{(J-M)(J+M+1)} T_{M+1}^J, \\
[J_-, T_M^J] &= \sqrt{(J+M)(J-M+1)} T_{M-1}^J, \\
[J_3, T_M^J] &= M T_M^J.
\end{aligned}$$

Em (5), T_M^J são as componentes do operador tensorial irredutível \mathbf{T}^J . O grau, ou a ordem de \mathbf{T}^J é J . Sendo $M = J, J-1, \dots, -J$, o operador tensorial é formado por $(2J+1)$ componentes: $T_J^J, T_{J-1}^J, \dots, T_{-J}^J$. De fato, um operador tensorial irredutível de grau J é um conjunto de $(2J+1)$ operadores T_M^J .

4 Operador vetorial como operador tensorial

Vamos demonstrar que o operador vetorial do momento angular (escrito pelas componentes esféricas) é um operador tensorial irredutível de grau 1. Para isso, vamos resolver os lados esquerdo e direito de (5) e verificar se há igualdade.

Resolução para J_+ :

$$\begin{aligned}
[J_+, J_0] &= \sqrt{(1-0)(1+0+1)} J_{0+1}^1 \\
[(J_1 + iJ_2), J_3] &= \sqrt{2} J_{+1}^1 \\
[J_1, J_3] + i[J_2, J_3] &= \\
-iJ_2 + i(iJ_1) &= \\
-(J_1 + iJ_2) &= \\
\sqrt{2} J_{+1} &= \blacksquare
\end{aligned}$$

Resolução para J_- :

$$\begin{aligned}
[J_-, J_0] &= \sqrt{(1+0)(1-0+1)} J_{0-1}^1 \\
[(J_1 - iJ_2), J_3] &= \sqrt{2} J_{-1}^1 \\
[J_1, J_3] - i[J_2, J_3] &= \\
-iJ_2 - i(iJ_1) &= \\
(J_1 - iJ_2) &= \\
\sqrt{2} J_{-1} &= \blacksquare
\end{aligned}$$

Resolução para J_3 :

$$\begin{aligned}
[J_3, J_0] &= 0 \cdot J_0^1 \\
[J_3, J_3] &= \\
0 &= \blacksquare
\end{aligned}$$

Nota 1: As relações de comutação das componentes Cartesianas do operador do momento angular são:

$$[J_1, J_2] = iJ_3 \quad (5)$$

$$[J_3, J_1] = iJ_2 \quad (6)$$

$$[J_2, J_3] = iJ_1 \quad (7)$$

Nota 2: O símbolo ■ significa DEMONSTRADO.

Conclusão: Por obedecerem as regras de Racah (5), as componentes esféricas do operador vetorial do momento angular \mathbf{J} (J_{+1}, J_0, J_{-1}) são as componentes do operador tensorial irredutível \mathbf{J}^1 ($J_{+1}^1, J_0^1, J_{-1}^1$).

Referências

- L. C. Biedenharn, J. D. L. (1984). *Angular Momentum in Quantum Physics*. Cambridge University Press , ISBN 978-0511759888, 1st edition.
- Racah, G. (1942a). *Theory of Complex Spectra. I*, volume 61.
- Racah, G. (1942b). *Theory of Complex Spectra. II*, volume 62.