

A Série de Taylor e a Teoria do Momento Angular

Prof. Dr. Cássio Sanguini Sergio

Departamento de Física, Universidade Federal de Roraima

Boa Vista, 16 de novembro de 2019

Conteúdo

1	Introdução	2
2	A notação adotada	3
3	Os vetores de trabalho	4
4	A expansão em série de Taylor	5
5	A expansão em uma única dimensão	6
6	O momento angular orbital por geometria	7
6.1	Figuras complementares	11
7	O momento angular de um campo de vetores	13
7.1	O momento angular orbital de um campo de vetores	17
8	Procedimento alternativo para se determinar o momento angular de um campo de vetores	18
9	Conclusão	22

1 Introdução

A expansão em série de Taylor no espaço tridimensional é construída pelos vetores de partida \vec{r} , de estudo \vec{R} , e de alcance $\vec{a} = \vec{R} - \vec{r}$ (George B. Arfken, 2007). A aplicação desta ferramenta matemática se dá quando se deseja determinar uma função na posição de estudo \vec{R} , aproximando a função em 1ª ordem de expansão, ou 2ª, ou 3ª, ou quantas ordens for necessário. Por exemplo, o modelo vibracional harmônico aproxima a função de energia potencial por uma função parabólica, de 2ª ordem. Já o modelo vibracional anarmônico, aproxima a energia potencial por uma função de 3ª ordem. Outra situação que necessita de certa expansão em 1ª ordem, é o caso das rotações infinitesimais, em especial, das rotações infinitesimais para se deduzir as componentes do operador do momento angular orbital.

Há duas maneiras de se discutir o momento angular orbital na mecânica quântica (Thompson, 1994). Uma, usa a definição do momento angular orbital clássico, a saber, o produto vetorial da posição da partícula pelo seu momento linear, em seguida, faz-se a conversão dos elementos clássicos pelos operadores da posição e do momento linear, fazendo surgir o operador do momento angular orbital — neste ponto, geralmente demonstra-se que as componentes deste operador não comutam entre si. A outra, utiliza as propriedades geométricas das rotações e, assim, deduz-se diretamente o operador do momento angular orbital, sem a necessidade de se lançar mão da definição clássica. Por ser um processo exclusivamente geométrico, pode-se chamar o momento angular resultante desse processo de momento angular geométrico: um momento angular genuinamente *angular* — uma função pura de ângulos e derivadas de ângulos, quando escrito em coordenadas esféricas, por exemplo. Por fim, faz-se a conexão do momento angular orbital da geometria com o momento angular orbital da mecânica quântica, acrescentando a constante de Planck ao momento angular orbital geométrico.

Neste artigo, vamos deduzir o operador do momento angular associado a uma função espacial e a um campo de vetores, apenas utilizando argumentos geométricos em conjunto com a técnica da expansão em série de Taylor.

2 A notação adotada

Notação (1):

O sistema de coordenadas (x, y, z) será representado por (x_1, x_2, x_3) . (1)

Notação (2):

Os vetores unitários $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ serão representados por $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$. (2)

Notação (3):

Usaremos o vetor de alcance $\vec{a} = a_1\hat{x}_1 + a_2\hat{x}_2 + a_3\hat{x}_3$. (3)

Notação (4):

Também usaremos o operador $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1}\hat{x}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\hat{x}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\hat{x}_3$. (4)

Notação (5):

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (5)$$

Notação (6):

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) = \sum_{\mu} a_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}. \quad (6)$$

Notação (7):

$$\sum_{\mu} = \sum_{\mu=1}^3 \quad (7)$$

Notação (8):

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^2 &= (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \\
&= \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right). \tag{8}
\end{aligned}$$

Notação (9):

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^2 &= a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} a_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \\
&\quad + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} a_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \\
&\quad + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3} a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3} a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3} a_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \tag{9}
\end{aligned}$$

Notação (10):

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^2 &= a_1 a_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} + a_1 a_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + a_1 a_3 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \\
&\quad + a_2 a_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} + a_2 a_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} + a_2 a_3 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \\
&\quad + a_3 a_1 \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} + a_3 a_2 \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} + a_3 a_3 \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_3}. \tag{10}
\end{aligned}$$

Notação (11):

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^2 = \sum_{\mu, \nu} a_\mu a_\nu \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}. \tag{11}$$

Notação (12):

$$\sum_{\mu, \nu} = \sum_{\mu=1}^3 \sum_{\nu=1}^3 \tag{12}$$

3 Os vetores de trabalho

Os vetores utilizados para se escrever uma função em série de Taylor são ilustrados na Figura 1. Escolhemos a seguinte notação para eles:

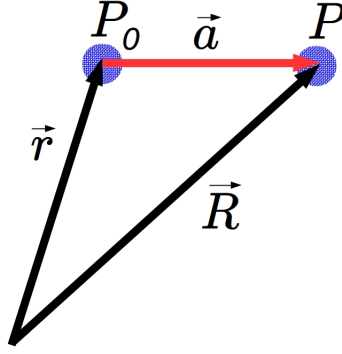


Figura 1: O vetor de alcance é: $\vec{a} = \vec{R} - \vec{r}$.

O vetor de estudo é: $\vec{R} = X_1\hat{x}_1 + X_2\hat{x}_2 + X_3\hat{x}_3$ [Ponto P];

O vetor de partida é: $\vec{r} = x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 + x_3\hat{x}_3$ [Ponto P_0];

E o vetor de alcance é: $\vec{a} = (X_1 - x_1)\hat{x}_1 + (X_2 - x_2)\hat{x}_2 + (X_3 - x_3)\hat{x}_3$.

4 A expansão em série de Taylor

A função na posição de partida possui três variáveis independentes:

$$V(\vec{r}) = V(x_1, x_2, x_3). \quad (13)$$

A função na posição de estudo também vai possuir três variáveis independentes, que precisam ser determinadas:

$$V(\vec{R}) = V(X_1, X_2, X_3). \quad (14)$$

A função na posição de estudo, a ser determinada pela função na posição de partida, será determinada por uma expansão em série de Taylor da função na posição de partida. Será uma expansão em torno de \vec{r} , com alcance \vec{a} , escrita na forma:

$$V(\vec{R}) = V(\vec{r}) + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) V(\vec{r}) + \frac{1}{2!} (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^2 V(\vec{r}) + \dots \quad (15)$$

Nota: Em torno de \vec{r} significa dizer que a expansão vai ocorrer ao redor do ponto P_0 da Figura 1.

Termo 1 da expansão:

$$V(\vec{r}) = V \Big|_{P_0} \quad (16)$$

Termo 2 da expansão:

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) V(\vec{r}) = \sum_{\mu} a_{\mu} \frac{\partial V}{\partial x_{\mu}} \Big|_{P_0} \quad (17)$$

Termo 3 da expansão:

$$\frac{1}{2!} (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^2 V(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} a_{\mu} a_{\nu} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} \Big|_{P_0} \quad (18)$$

Notação compacta da expansão em série de Taylor (15) (George B. Arfken, 2007):

$$V(\vec{R}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^n V(\vec{r}). \quad (19)$$

5 A expansão em uma única dimensão

Redução do sistema de coordenadas:

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, 0, 0) = (x, 0, 0) \quad (20)$$

Redução dos vetores de trabalho:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= (X_1, X_2, X_3) \rightarrow \vec{R} = (X_1, 0, 0) = (x, 0, 0) \\ \vec{r} &= (x_1, x_2, x_3) \rightarrow \vec{r} = (x_1, 0, 0) = (x_0, 0, 0) \\ \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \rightarrow \vec{a} = (a_1, 0, 0) = (x - x_0, 0, 0) \end{aligned} \quad (21)$$

Redução da equação (17):

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) V(\vec{r}) = a_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} \Big|_{P_0} \quad (22)$$

Redução da equação (18):

$$\frac{1}{2!} (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^2 V(\vec{r}) = \frac{1}{2} a_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} \Big|_{P_0} \quad (23)$$

Então, a expansão em torno do $\vec{r} = (x_0, 0, 0)$, com alcance $\vec{a} = (x - x_0, 0, 0)$, é:

$$V(x) = V(x_0) + (x - x_0) \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x_0} + \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_{x_0} + \dots \quad (24)$$

Agora, a expansão em torno do $\vec{r} = (0, 0, 0)$, quer dizer, em torno da origem, com alcance $\vec{a} = (x, 0, 0)$, é:

$$V(x) = V(0) + x \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_0 + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_0 + \dots \quad (25)$$

6 O momento angular orbital por geometria

Considere uma rotação infinitesimal de um vetor no espaço, no sentido horário, de ângulo $\delta = -\varepsilon_z$, e em torno do eixo principal z . Considere que os vetores de partida e de estudo que aparecem na Figura 1 (\vec{r}, \vec{R}) representem o início e o fim dessa rotação. Nesse caso, suas componentes estarão relacionadas através da matriz de rotação $R(\delta, \hat{\mathbf{z}})$, da seguinte maneira:

$$\vec{R} = R(-\varepsilon_z, \hat{\mathbf{z}}) \vec{r}. \quad (26)$$

Em termos matriciais:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\varepsilon_z) & -\sin(-\varepsilon_z) & 0 \\ \sin(-\varepsilon_z) & \cos(-\varepsilon_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Como as rotações são infinitesimais, pode-se usar as aproximações $\sin \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1$ na equação (27):

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & 0 \\ -\varepsilon_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

A solução da equação (28) é:

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 + \varepsilon_z x_2 \\ X_2 &= -\varepsilon_z x_1 + x_2 \\ X_3 &= x_3 \end{aligned} \quad (29)$$

Isto posto, monta-se o vetor rodado:

$$\vec{R} = (x_1 + \varepsilon_z x_2)\hat{x}_1 + (-\varepsilon_z x_1 + x_2)\hat{x}_2 + x_3\hat{x}_3. \quad (30)$$

De antemão, sabe-se o vetor de partida:

$$\vec{r} = x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 + x_3\hat{x}_3. \quad (31)$$

Então, subtraindo (30) de (31), determina-se o vetor de alcance:

$$\vec{a} = (\varepsilon_z x_2)\hat{x}_1 + (-\varepsilon_z x_1)\hat{x}_2 + (0)\hat{x}_3. \quad (32)$$

Ao substituir as componentes do vetor de alcance na equação (5), obtém-se:

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) = (\varepsilon_z x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (-\varepsilon_z x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} + (0) \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (33)$$

Conhecendo a técnica da expansão em série de Taylor (15), um vetor de estado (o mesmo que uma função de onda que descreve um sistema quântico), na posição do vetor rodado, é assim escrito tendo em conta apenas a 1^a ordem da expansão:

$$\Psi(\vec{R}) = \Psi(\vec{r}) + \varepsilon_z \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \Psi(\vec{r}) + \dots \quad (34)$$

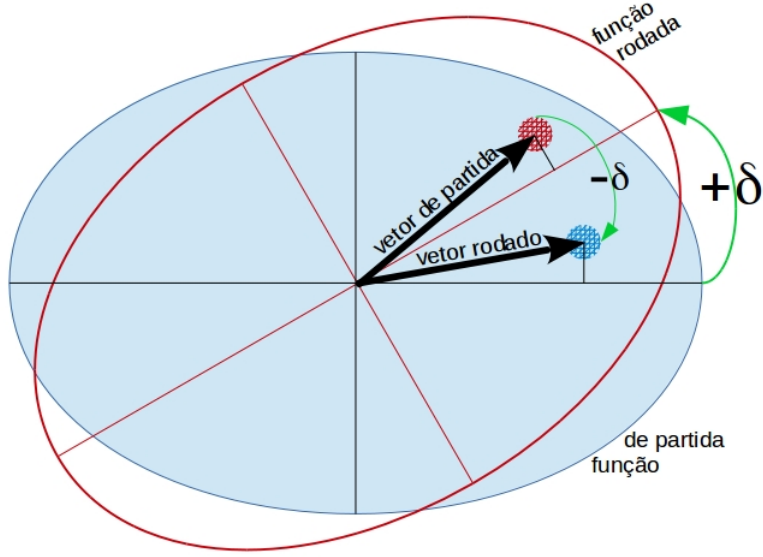


Figura 2: Ilustração do processo de rotação de uma função espacial. Na região hachurada, o valor da função rodada, computado na posição do vetor de partida, é igual ao valor da função de partida, computado na posição do vetor rodado.

Enfatizando, na (34) temos o vetor de estado (na posição do vetor rodado) escrito em função do vetor de estado (na posição do vetor de partida).

Além de vetores, a matriz de rotação realiza rotações de funções. Um conceito geométrico rotacional estabelece que a rotação de funções também pode ser realizada pelo operador rotacional U .

Nota: U , de unitário, por se tratar de um operador representado por uma matriz unitária (matriz que preserva a norma da operação).

O operador rotacional pode ser escrito como exponencial do operador do momento angular geométrico (Thompson, 1994). No caso em questão, como se deseja uma rotação em torno do eixo z , se escreve em função da componente z do operador do momento angular orbital:

$$U(\varepsilon_z, \hat{\mathbf{z}}) = e^{-i\varepsilon_z L_z}. \quad (35)$$

O operador de rotação aplicado na função de onda original (de partida) gera a função de onda rodada:

$$\Psi_{\text{rod}}(\vec{r}) = U(\varepsilon_z, \hat{\mathbf{z}}) \Psi(\vec{r}). \quad (36)$$

Aqui vamos recordar como se expande uma exponencial:

$$e^P = P^0 + \frac{P^1}{1!} + \frac{P^2}{2!} + \frac{P^3}{3!} + \dots \quad (37)$$

Utilizando (37) em (35), obtém-se:

$$U(\varepsilon_z, \hat{\mathbf{z}}) = 1 - i\varepsilon_z L_z - \frac{\varepsilon_z^2 L_z^2}{2} + \dots \quad (38)$$

Então, em aproximação de 1ª ordem, a equação (36) se torna:

$$\Psi_{\text{rod}}(\vec{r}) = (1 - i\varepsilon_z L_z) \Psi(\vec{r}). \quad (39)$$

Acompanhe a Figura 2: O valor da função de onda rodada, computado na posição do vetor de partida, é igual ao valor da função de onda de partida, computado na posição do vetor rodado no sentido contrário (Thompson, 1994):

$$\Psi_{\text{rod}}(\vec{r}) = \Psi(\vec{R}) \xrightarrow{\text{Eq. (34)}} \Psi_{\text{rod}}(\vec{r}) = \Psi(\vec{r}) + \varepsilon_z \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \Psi(\vec{r}) + \dots \quad (40)$$

Agora, igualando as equações (39) e (40), obtém-se:

$$\begin{aligned} (1 - i\varepsilon_z L_z) \Psi(\vec{r}) &= \Psi(\vec{r}) + \varepsilon_z \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \Psi(\vec{r}) \\ \implies -iL_z &= \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Logo, a componente z do operador do momento angular orbital geométrico é expressa como:

$$L_z = -i \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right). \quad (42)$$

O procedimento é cíclico, quer dizer, pode-se fazer a substituição cíclica dos rótulos dos eixos para se determinar as outras componentes:

$$L_x = -i \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \quad (43)$$

$$L_y = -i \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \right). \quad (44)$$

Ao representar o sistema de coordenadas Carteziano na forma tradicional, as componentes do operador do momento angular orbital geométrico são expressas como:

$$L_z = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$L_x = -i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$L_y = -i \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

6.1 Figuras complementares

A Figura 2 foi construída com as funções sobrepostas (de partida e rodada). Uma visão alternativa é apresentada na Figura 3, onde as funções são afastadas. A função rodada pelo ângulo ε , função $f_\varepsilon(x, y)$, é gerada pela aplicação do operador de rotação na função original, operação $U(\varepsilon, z)f(x, y)$, e o resultado dessa operação, é igual à função original na posição rodada pelo ângulo $(-\varepsilon)$, função $f(x_{-\varepsilon}, y_{-\varepsilon})$. A análise do processo é feita com os eixos cartesianos fixos.

Uma ilustração tem caráter didático. As ilustrações 2 e 3 ilustram o processo de rotação de uma função espacial genérica: uma função qualquer que é função exclusiva das coordenadas (xyz) . Uma ilustração com caráter realístico-didático, pode ser construída com uma função matemática que tenha conexão com a realidade.

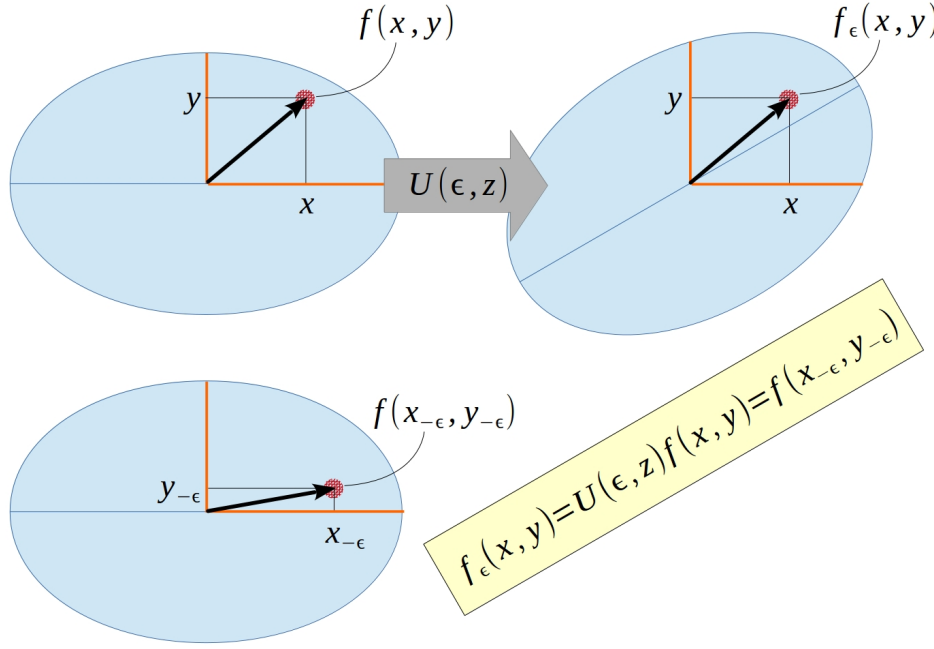


Figura 3: Ilustração do processo de rotação de uma função espacial genérica.

A Figura 4 é construída com o módulo ao quadrado do harmônico esférico $Y_{10}(\theta\phi)$, o que tem a ver com a probabilidade de se encontrar uma partícula com momento angular $l = 1$ e projeção $m = 0$, na posição angular θ — ao fazer o módulo ao quadrado, cancela-se a dependência da posição angular ϕ . Utilizou-se a técnica da plotagem polar: Os valores de uma função $f(\phi)$ são anexados a um raio R , ou seja, faz-se $R = f(\phi)$. No eixo x , são anexados os valores de $R\cos(\phi)$, e no eixo y , os valores de $R\sin(\phi)$. Ao fazer a varredura do ângulo ϕ , o raio desenha a curva de f pelo espaço. Para descrever a função rodada, o ângulo ϵ foi acrescentado à expressão do harmônico esférico, resultando na densidade de probabilidade (45).

$$|Y_{10}|^2 = \frac{3}{4\pi} \cos^2(\phi - \epsilon). \quad (45)$$

A ilustração realístico-didático 4 reforça o entendimento que a função rodada, na posição de partida, $f_\epsilon(\vec{r})$, é igual à função de partícula, na posição rodada no sentido contrário, $f(\vec{r}_{-\epsilon})$. — Argumento explorado no passo (40).

Até este momento, deduzimos o operador que descreve rotações infinitesimais de

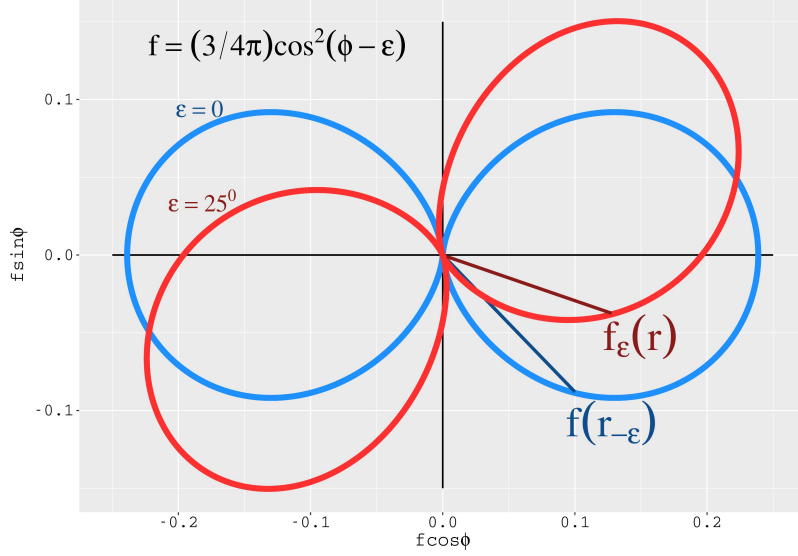


Figura 4: Rotação da densidade de probabilidade decorrente do harmônico esférico_10.

funções espaciais: o operador do momento angular orbital. É oportuno expandir a pesquisa para saber qual é o operador que se associa a um campo de vetores em rotação infinitesimal.

7 O momento angular de um campo de vetores

A Figura 5 vai nos auxiliar na busca do operador que se associa a um campo de vetores em rotação infinitesimal. Um campo vetorial é formado por vetores do tipo $\mathbf{f}(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$ — correndo os valores de (x, y, z) . Como se vê, o vetor $\mathbf{f}(x_{-\varepsilon}, y_{-\varepsilon}, z_{-\varepsilon})$ é rodado em torno do eixo z — é rodado pela matriz de rotação $R_z(\varepsilon)$ — e, após a rotação, se transforma em um novo vetor: no vetor rodado $\mathbf{f}_\varepsilon(x, y, z)$. Em termos matemáticos:

$$R_z(\varepsilon)\mathbf{f}(x_{-\varepsilon}, y_{-\varepsilon}, z_{-\varepsilon}) = \mathbf{f}_\varepsilon(x, y, z). \quad (46)$$

A matriz que causa a rotação é definida em (27). Para rotações infinitesimais, pode-se usar $\sin \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1$. Nesse caso, a matriz de rotação pode ser escrita como:

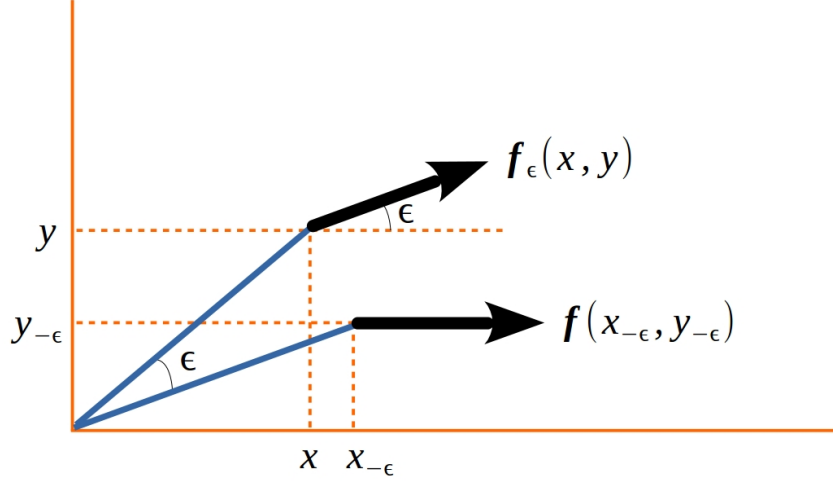


Figura 5: Ilustração do processo de rotação de um campo vetorial.

$$R_z(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{1} + \varepsilon \mathbf{M}_z. \quad (47)$$

O vetor $\mathbf{r}_{-\varepsilon} = (x_{-\varepsilon}, y_{-\varepsilon}, z_{-\varepsilon})$ também pode ser pensado como o resultado de uma rotação: da rotação do vetor $\mathbf{r} = (x, y, z)$ pelo ângulo $(-\varepsilon)$:

$$\begin{bmatrix} x_{-\varepsilon} \\ y_{-\varepsilon} \\ z_{-\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \varepsilon y \\ y - \varepsilon x \\ z \end{bmatrix}. \quad (48)$$

O resultado (48) mostra que $\mathbf{f}(x_{-\varepsilon}, y_{-\varepsilon}, z_{-\varepsilon})$ pode ser expandido em série de Taylor. Levando em conta apenas a 1ª ordem da expansão, tem-se:

$$\mathbf{f}(x_{-\varepsilon}, y_{-\varepsilon}, z_{-\varepsilon}) = \mathbf{f}(x + \varepsilon y, y - \varepsilon x, z) = \mathbf{f}(x, y, z) + \varepsilon \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbf{f}(x, y, z). \quad (49)$$

No ponto (x, y, z) , o operador da rotação aplicado no vetor \mathbf{f} gera o vetor rodado:

$$\mathbf{f}_\varepsilon(x, y, z) = (\mathbf{1} - i\varepsilon \mathbf{J}_z) \mathbf{f}(x, y, z). \quad (50)$$

Utilizando os resultados (47), (49) e (50), reescreve-se a equação (46):

$$(\mathbf{1} + \varepsilon \mathbf{M}_z) \left(\mathbf{f}(x, y, z) + \varepsilon \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbf{f}(x, y, z) \right) = (\mathbf{1} - i\varepsilon \mathbf{J}_z) \mathbf{f}(x, y, z). \quad (51)$$

As próximas passagens tem como objetivo manipular (51) para se extrair a expressão da componente z do momento angular do campo de vetores.

Ao fazer a multiplicação do lado esquerdo da (51), despreza-se o termo que aparece ε^2 :

$$\mathbf{1} \mathbf{f}(x, y, z) + \mathbf{1} \varepsilon \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbf{f}(x, y, z) + \varepsilon \mathbf{M}_z \mathbf{f}(x, y, z) = (\mathbf{1} - i\varepsilon \mathbf{J}_z) \mathbf{f}(x, y, z). \quad (52)$$

Cancela-se \mathbf{f} da (52):

$$\mathbf{1} + \mathbf{1} \varepsilon \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \varepsilon \mathbf{M}_z = \mathbf{1} - i\varepsilon \mathbf{J}_z. \quad (53)$$

Subtrai-se $\mathbf{1}$ em ambos os lados da (53):

$$\mathbf{1} \varepsilon \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \varepsilon \mathbf{M}_z = -i\varepsilon \mathbf{J}_z. \quad (54)$$

Cancela-se a ângulo ε da (54):

$$\mathbf{1} \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \mathbf{M}_z = -i \mathbf{J}_z. \quad (55)$$

Inverte-se o parênteses da (55):

$$-\mathbf{1} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) + \mathbf{M}_z = -i \mathbf{J}_z. \quad (56)$$

Multiplica-se ambos os lados da (56) por i :

$$\mathbf{J}_z = -i \mathbf{1} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) + i \mathbf{M}_z. \quad (57)$$

Agora, defini-se o a componente z do operador da rotação *intrínseca* do campo de vetores – a componente z do **operador de spin**:

$$\mathbf{S}_z \equiv i\mathbf{M}_z = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Enfim, substituindo (58) em (57), tem-se a expressão da componente z do momento angular do campo de vetores:

$$\mathbf{J}_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{1} + \mathbf{S}_z. \quad (59)$$

Ou, em termos matriciais:

$$\mathbf{J}_z = \begin{bmatrix} -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (60)$$

Por meio de (60), escreve-se o operador que causa a rotação em um vetor do campo:

$$\mathbf{U}_z(\varepsilon) = \mathbf{1} - i\varepsilon\mathbf{J}_z = \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \varepsilon\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{bmatrix}. \quad (61)$$

Então, o resultado da aplicação de (60) em um vetor do campo é:

$$\mathbf{f}_\varepsilon = (\mathbf{1} - i\varepsilon\mathbf{J}_z)\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x - \varepsilon\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)f_x - \varepsilon f_y \\ f_y - \varepsilon\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)f_y + \varepsilon f_x \\ f_z - \varepsilon\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)f_z \end{bmatrix}. \quad (62)$$

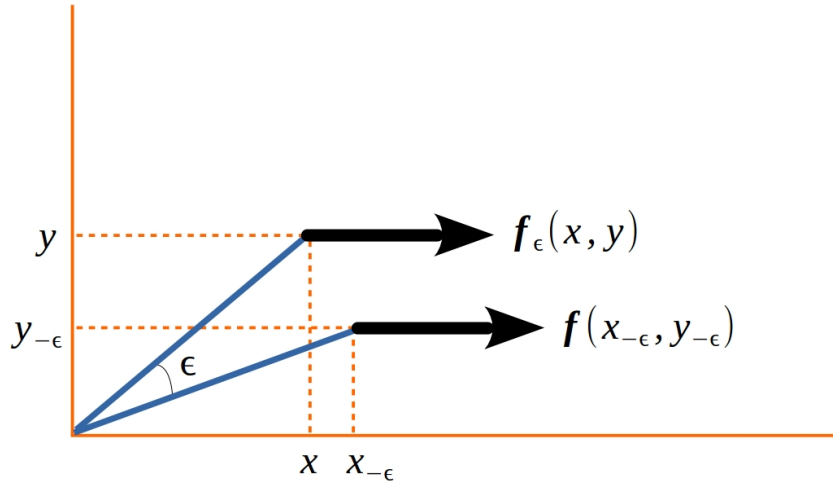


Figura 6: Ilustração do processo de rotação de um campo vetorial sem o efeito do spin.

7.1 O momento angular orbital de um campo de vetores

A Figura 6 mostra a rotação do vetor $\mathbf{f}(x_{-\varepsilon}, y_{-\varepsilon}, z_{-\varepsilon})$, em torno do eixo z , mas sem levar em conta o efeito do spin. Nesse caso,

$$\mathbf{f}(x_{-\varepsilon}, y_{-\varepsilon}, z_{-\varepsilon}) = \mathbf{f}_{\varepsilon}(x, y, z). \quad (63)$$

Eliminando $(\mathbf{1} + \varepsilon \mathbf{M}_z)$ da equação (51), a dedução conduz à expressão da componente z do momento angular orbital do campo de vetores:

$$\mathbf{L}_z = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{1}. \quad (64)$$

Ou, em termos matriciais:

$$\mathbf{L}_z = \begin{bmatrix} -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) & 0 & 0 \\ 0 & -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) & 0 \\ 0 & 0 & -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Por meio de (65), escreve-se o operador que causa a rotação-sem-spin em um vetor do campo:

$$\mathbf{U}_z(\varepsilon) = \mathbf{1} - i\varepsilon \mathbf{L}_z = \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{bmatrix}. \quad (66)$$

Então, o resultado da aplicação de (65) em um vetor do campo é:

$$\mathbf{f}_\varepsilon = (\mathbf{1} - i\varepsilon \mathbf{L}_z) \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x - \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_x \\ f_y - \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_y \\ f_z - \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_z \end{bmatrix}. \quad (67)$$

A comparação das equações (67) e (62) mostra que o efeito do spin é misturar as componentes do vetor de partida ao formar o vetor rodado. O efeito do operador-orbital é transformar as componentes do vetor de partida em novas componentes para o vetor rodado, mas mantendo a ordem: a nova componente f_x do vetor rodado (67) só possui transformação de componente f_x do vetor de partida. Mas, quando o operador-spin passa a atuar, a nova componente f_x do vetor rodado (62) também passa a sofrer transformação da componente f_y do vetor de partida, o que leva à transformação com mistura de componentes.

E que também leva ao jogo de palavras: — Com spin, com mistura; sem spin, sem mistura.

8 Procedimento alternativo para se determinar o momento angular de um campo de vetores

Rotação do vetor posição (em torno do eixo z , pelo ângulo infinitesimal ε):

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_\varepsilon &= R_z(\varepsilon)\mathbf{r} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x - \varepsilon y \\ y + \varepsilon x \\ z \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{68}$$

Rotação do campo de vetores:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_\varepsilon(\mathbf{r}_\varepsilon) &= R_z(\varepsilon)\mathbf{f}(\mathbf{r}) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x(\mathbf{r}) \\ f_y(\mathbf{r}) \\ f_z(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f_x(\mathbf{r}) - \varepsilon f_y(\mathbf{r}) \\ f_y(\mathbf{r}) + \varepsilon f_x(\mathbf{r}) \\ f_z(\mathbf{r}) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{69}$$

Agora, rotação do campo de vetores por meio do operador de rotação:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_\varepsilon(\mathbf{r}_\varepsilon) &= (\mathbf{1} - i\varepsilon\mathbf{J}_z)\mathbf{f}(\mathbf{r}_\varepsilon) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - i\varepsilon \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_4 & J_5 & J_6 \\ J_7 & J_8 & J_9 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} f_x(\mathbf{r}_\varepsilon) \\ f_y(\mathbf{r}_\varepsilon) \\ f_z(\mathbf{r}_\varepsilon) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 - i\varepsilon J_1 & -i\varepsilon J_2 & -i\varepsilon J_3 \\ -i\varepsilon J_4 & 1 - i\varepsilon J_5 & -i\varepsilon J_6 \\ -i\varepsilon J_7 & -i\varepsilon J_8 & 1 - i\varepsilon J_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x(\mathbf{r}_\varepsilon) \\ f_y(\mathbf{r}_\varepsilon) \\ f_z(\mathbf{r}_\varepsilon) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{70}$$

Expansão em série de Taylor (1ª ordem):

$$\begin{aligned}
f_x(\mathbf{r}_\varepsilon) &= f_x(x - \varepsilon y, y + \varepsilon x, z) = f_x(\mathbf{r}) + \left(-\varepsilon y \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon x \frac{\partial}{\partial y} \right) f_x(\mathbf{r}) \\
f_y(\mathbf{r}_\varepsilon) &= f_y(x - \varepsilon y, y + \varepsilon x, z) = f_y(\mathbf{r}) + \left(-\varepsilon y \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon x \frac{\partial}{\partial y} \right) f_y(\mathbf{r}) \\
f_z(\mathbf{r}_\varepsilon) &= f_z(x - \varepsilon y, y + \varepsilon x, z) = f_z(\mathbf{r}) + \left(-\varepsilon y \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon x \frac{\partial}{\partial y} \right) f_z(\mathbf{r})
\end{aligned} \tag{71}$$

MULTIPLICAÇÃO DA MATRIZ (70) DESPREZANDO O TERMO ε^2 :

- Estrutura da 1^a linha:

$$\begin{aligned}
(1 - i\varepsilon J_1) \left[f_x(\mathbf{r}) + \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_x(\mathbf{r}) \right] &= f_x(\mathbf{r}) + \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_x(\mathbf{r}) - i\varepsilon J_1 f_x(\mathbf{r}) \\
(-i\varepsilon J_2) \left[f_y(\mathbf{r}) + \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_y(\mathbf{r}) \right] &= -i\varepsilon J_2 f_y(\mathbf{r}) \\
(-i\varepsilon J_3) \left[f_z(\mathbf{r}) + \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_z(\mathbf{r}) \right] &= -i\varepsilon J_3 f_z(\mathbf{r})
\end{aligned} \tag{72}$$

- Estrutura da 2^a linha:

$$\begin{aligned}
(-i\varepsilon J_4) \left[f_x(\mathbf{r}) + \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_x(\mathbf{r}) \right] &= -i\varepsilon J_4 f_x(\mathbf{r}) \\
(1 - i\varepsilon J_5) \left[f_y(\mathbf{r}) + \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_y(\mathbf{r}) \right] &= f_y(\mathbf{r}) + \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_y(\mathbf{r}) - i\varepsilon J_5 f_y(\mathbf{r}) \\
(-i\varepsilon J_6) \left[f_z(\mathbf{r}) + \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_z(\mathbf{r}) \right] &= -i\varepsilon J_6 f_z(\mathbf{r})
\end{aligned} \tag{73}$$

- Estrutura da 3^a linha:

$$\begin{aligned}
(-i\varepsilon J_7) \left[f_x(\mathbf{r}) + \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_x(\mathbf{r}) \right] &= -i\varepsilon J_7 f_x(\mathbf{r}) \\
(-i\varepsilon J_8) \left[f_y(\mathbf{r}) + \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_y(\mathbf{r}) \right] &= -i\varepsilon J_8 f_y(\mathbf{r}) \\
(1 - i\varepsilon J_9) \left[f_z(\mathbf{r}) + \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_z(\mathbf{r}) \right] &= f_z(\mathbf{r}) + \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_z(\mathbf{r}) - i\varepsilon J_9 f_z(\mathbf{r})
\end{aligned} \tag{74}$$

Igualando a 1^a linha da matriz (69) com a 1^a linha da matriz (70):

$$f_x(\mathbf{r}) - \varepsilon f_y(\mathbf{r}) = f_x(\mathbf{r}) + \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_x(\mathbf{r}) - i\varepsilon J_1 f_x(\mathbf{r}) - i\varepsilon J_2 f_y(\mathbf{r}) - i\varepsilon J_3 f_z(\mathbf{r}) \tag{75}$$

Igualando a 2^a linha da matriz (69) com a 2^a linha da matriz (70):

$$f_y(\mathbf{r}) + \varepsilon f_x(\mathbf{r}) = -i\varepsilon J_4 f_x(\mathbf{r}) + f_y(\mathbf{r}) + \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_y(\mathbf{r}) - i\varepsilon J_5 f_y(\mathbf{r}) - i\varepsilon J_6 f_z(\mathbf{r}) \tag{76}$$

Igualando a 3^a linha da matriz (69) com a 3^a linha da matriz (70):

$$f_z(\mathbf{r}) = -i\varepsilon J_7 f_x(\mathbf{r}) - i\varepsilon J_8 f_y(\mathbf{r}) + f_z(\mathbf{r}) + \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f_z(\mathbf{r}) - i\varepsilon J_9 f_z(\mathbf{r}) \tag{77}$$

Conclusões das equações (75), (76) e (77):

$$\begin{aligned}
J_1 &= -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \\
J_2 &= -i \\
J_3 &= 0 \\
J_4 &= i \\
J_5 &= -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \\
J_6 &= 0 \\
J_7 &= 0 \\
J_8 &= 0 \\
J_9 &= -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{78}$$

Logo, a componente z do momento angular de um campo de vetores é:

$$\mathbf{J}_z = \begin{bmatrix} -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) & -i & 0 \\ i & -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) & 0 \\ 0 & 0 & -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \tag{79}$$

9 Conclusão

A técnica de expandir uma função em uma série de Taylor é uma ferramenta matemática importante para o progresso da teoria física, em especial, para o desenvolvimento da teoria do momento angular. Por meio dessa técnica, pode-se deduzir o momento angular orbital apenas utilizando argumentos geométricos e o momento angular de um campo de vetores, ademais, nos faz entender que o operador que se associa a uma função espacial em rotação infinitesimal, é o operador do momento angular orbital, e o operador que se associa a um campo de vetores em rotação infinitesimal, é o operador do momento angular total, que inclui o operador do spin.

Referências

- George B. Arfken, H. J. W. (2007). *Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física (Tradução de: Mathematical Methods for Physicists, 6th ed, tradução de Arlete Simille Marques)*. Campus/Elsevier, ISBN 978-8535220506, 1st edition.
- Thompson, W. J. (1994). *Angular Momentum: An Illustrated Guide to Rotational Symmetries for Physical Systems*. Wiley-VCH, ISBN 978-0471552642, 1st edition.