Mecânica Quântica: Operações em Matrizes

Prof. Dr. Cássio Sanguini Sergio

Departamento de Física, Universidade Federal de Roraima

Boa Vista, 01-02 de dezembro de 2019

Conteúdo

O artigo é breve, mas prático — trata-se de uma revisão sobre algumas operações em matrizes. Acompanha a nomenclatura de (Thompson, 1994): A operação é nomeada em inglês e traduzida para o português. A inspeção visual nas linhas e colunas das matrizes é suficiente para se endender o fundamento das operações. O assunto tem relevância na Mecânica Quântica, em especial, na representação matricial de operadores. Por exemplo, um operador unitário é descrito por uma matriz unitária que tem como característica deixar inalterado o produto escalar, algo apreciado na descrição das rotações. Outro exemplo, as grandezas físicas que podem ser medidas, observadas, são representadas por operadores Hermitianos, retratadas por matrizes Hermitianas. Uma matriz Hermitiana tem como principal característica fornecer autovalores *reais* e autovetores *ortogonais*, algo fundamental para se descrever os observáveis.

⧫ Dada a matriz P:

$$P = \begin{bmatrix} a+i & b+i & c+i \\ x+i & y+i & z+i \\ \alpha+i & \beta+i & \gamma+i \end{bmatrix}$$

(Transpose) – A sua matriz transposta é:

$$\widetilde{P} = \begin{bmatrix} a+i & x+i & \alpha+i \\ b+i & y+i & \beta+i \\ c+i & z+i & \gamma+i \end{bmatrix} \tag{1}$$

(Complex Conjugate) – E a sua matriz conjugada complexa é:

$$P^* = \begin{bmatrix} a-i & b-i & c-i \\ x-i & y-i & z-i \\ \alpha-i & \beta-i & \gamma-i \end{bmatrix} \tag{2}$$

(Hermitian Conjugate) – E a sua matriz conjugada Hermitiana é:

$$P^{\dagger} = \begin{bmatrix} a-i & x-i & \alpha-i \\ b-i & y-i & \beta-i \\ c-i & z-i & \gamma-i \end{bmatrix} = \widetilde{P^*} \tag{3}$$

♦ Dada a matriz H e sua conjugada complexa:

$$H = \begin{bmatrix} \alpha & a+i & b-i \\ a-i & \beta & c+i \\ b+i & c-i & \gamma \end{bmatrix}$$

$$H^* = \begin{bmatrix} \alpha & a-i & b+i \\ a+i & \beta & c-i \\ b-i & c+i & \gamma \end{bmatrix}$$

(Hermitian) – É matriz Hermitiana se:

$$H^{\dagger} = \begin{bmatrix} \alpha & a+i & b-i \\ a-i & \beta & c+i \\ b+i & c-i & \gamma \end{bmatrix} = H \tag{4}$$

Característica: A diagonal é real e, fora da diagonal, há pares de complexo conjugado.

Nota: Uma matriz Hermitiana, de elementos reais, é chamada de matriz simétrica real.

⧫ Dada a matriz U e sua conjugada Hermitiana:

$$U = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U^\dagger = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Inverse) – É matriz inversa se:

$$UU^{-1} = I, \text{ ou seja,}$$
$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$
$$\Longrightarrow U^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Unitary) – E é matriz unitária se:

$$U^\dagger = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U^{-1} \tag{6}$$

Multiplicando (6) por U, e usando (5), também é matriz unitária se $UU^\dagger = I$.

Nota 1: U é unitária, mas não é Hermitiana: $U^\dagger \neq U$.

Nota 2: Dependendo da matriz pode ocorrer dela:

- Ser Hermitiana e ser unitária;
- Ser Hermitiana e não ser unitária;

- Não ser Hermitiana e ser unitária;
- Não ser Hermitiana e não ser unitária.

Nota 3: Uma matriz unitária, de elementos reais, é chamada de matriz ortogonal (suas colunas são vetores ortogonais).

Referências

Thompson, W. J. (1994). *Angular Momentum: An Illustrated Guide to Rotational Symmetries for Physical Systems.* Wiley-VCH, ISBN 978-0471552642, 1st edition.