Mecânica Quântica <– Relação de Comutação do Momento Angular Geométrico

Prof. Dr. Cássio Sanguini Sergio

Departamento de Física, Universidade Federal de Roraima

Boa Vista, 04 de dezembro de 2019

Conteúdo

Há duas maneiras de se discutir o momento angular orbital na mecânica quântica (Thompson, 1994). Uma, usa a definição do momento angular orbital clássico, a saber, o produto vetorial da posição da partícula pelo seu momento linear, em seguida, faz-se a conversão dos elementos clássicos pelos operadores da posição e do momento linear, fazendo surgir o operador do momento angular orbital — neste ponto, geralmente demonstra-se que as componentes deste operador não comutam entre si. A outra, utiliza as propriedades geométricas das rotações e, assim, deduz-se diretamente o operador do momento angular orbital, sem a necessidade de se lançar mão da definição clássica. Por ser um processo exclusivamente geométrico, pode-se chamar o momento angular resultante desse processo de momento angular geométrico: um momento angular genuinamente *angular* — uma função pura de ângulos e derivadas de ângulos, quando escrito em coordenadas esféricas, por exemplo. Por fim, faz-se a conexão do momento angular orbital da geometria com o momento angular orbital da mecânica quântica, acrescentando a constante de Planck ao momento angular orbital geométrico.

O objetivo deste artigo é deduzir as relações de comutação entre as componentes do operador do momento angular utilizando apenas argumentos geométricos: as matrizes de rotação e os operadores de rotação. Isso justifica o título. Na linguagem de programação R, a simbologia $x \leftarrow y$ significa que a variável x recebe o conteúdo da variável y. É o que se quer dizer com a simbologia do título: A teoria da mecânica quântica recebe um conteúdo da teoria da geometria rotacional: a relação de comutação do momento angular geométrico, desenvolvida com argumentos geométricos.

1 Matriz de rotação para rotação em torno do eixo principal x:

$$R(\varepsilon_x, \hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon_x & -\sin\varepsilon_x \\ 0 & \sin\varepsilon_x & \cos\varepsilon_x \end{bmatrix} \tag{1}$$

2 Matriz de rotação para rotação em torno do eixo principal y:

$$R(\varepsilon_y, \hat{\mathbf{y}}) = \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_y & 0 & \sin\varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varepsilon_y & 0 & \cos\varepsilon_y \end{bmatrix} \tag{2}$$

3 Matriz de rotação para rotação em torno do eixo principal z:

$$R(\varepsilon_z, \hat{\mathbf{z}}) = \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_z & -\sin\varepsilon_z & 0 \\ \sin\varepsilon_z & \cos\varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

4 Rotações sucessivas através dos eixos x e y:

$$
\begin{aligned}
R(\varepsilon_x,\hat{\mathbf{x}})\ R(\varepsilon_y,\hat{\mathbf{y}}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon_x & -\sin\varepsilon_x \\ 0 & \sin\varepsilon_x & \cos\varepsilon_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_y & 0 & \sin\varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varepsilon_y & 0 & \cos\varepsilon_y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_y & 0 & \sin\varepsilon_y \\ \sin\varepsilon_x\sin\varepsilon_y & \cos\varepsilon_x & -\sin\varepsilon_x\cos\varepsilon_y \\ -\cos\varepsilon_x\sin\varepsilon_y & \sin\varepsilon_x & \cos\varepsilon_x\cos\varepsilon_y \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4}
$$

5 Rotações sucessivas através dos eixos y e x:

$$
\begin{aligned}
R(\varepsilon_y,\hat{\mathbf{y}})\ R(\varepsilon_x,\hat{\mathbf{x}}) &= \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_y & 0 & \sin\varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varepsilon_y & 0 & \cos\varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon_x & -\sin\varepsilon_x \\ 0 & \sin\varepsilon_x & \cos\varepsilon_x \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_y & \sin\varepsilon_y\sin\varepsilon_x & \sin\varepsilon_y\cos\varepsilon_x \\ 0 & \cos\varepsilon_x & -\sin\varepsilon_x \\ -\sin\varepsilon_y & \cos\varepsilon_y\sin\varepsilon_x & \cos\varepsilon_y\cos\varepsilon_x \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5}
$$

6 Equação (4) menos equação (5):

$$
\begin{gathered}
R(\varepsilon_x,\hat{\mathbf{x}})\ R(\varepsilon_y,\hat{\mathbf{y}}) - R(\varepsilon_y,\hat{\mathbf{y}})\ R(\varepsilon_x,\hat{\mathbf{x}}) = \\
\begin{bmatrix} 0 & -\sin\varepsilon_y\sin\varepsilon_x & \sin\varepsilon_y - \sin\varepsilon_y\cos\varepsilon_x \\ \sin\varepsilon_x\sin\varepsilon_y & 0 & -\sin\varepsilon_x\cos\varepsilon_y + \sin\varepsilon_x \\ -\cos\varepsilon_x\sin\varepsilon_y + \sin\varepsilon_y & \sin\varepsilon_x - \cos\varepsilon_y\sin\varepsilon_x & 0 \end{bmatrix}
\end{gathered} \tag{6}
$$

7 Considerando rotações infinitesimais, aproximação $\sin\theta \approx \theta$ e $\cos\theta \approx 1$ na equação (6):

$$
\begin{gathered}
R(\varepsilon_x,\hat{\mathbf{x}})\ R(\varepsilon_y,\hat{\mathbf{y}}) - R(\varepsilon_y,\hat{\mathbf{y}})\ R(\varepsilon_x,\hat{\mathbf{x}}) = \\
\begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_y\varepsilon_x & \varepsilon_y - \varepsilon_y \\ \varepsilon_x\varepsilon_y & 0 & -\varepsilon_x + \varepsilon_x \\ -\varepsilon_y + \varepsilon_y & \varepsilon_x - \varepsilon_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_x\varepsilon_y & 0 \\ \varepsilon_x\varepsilon_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{gathered} \tag{7}
$$

8 Considerando rotações infinitesimais, aproximação $\sin\theta \approx \theta$ e $\cos\theta \approx 1$ na equação (3):

$$R(\varepsilon_z = \varepsilon_x\varepsilon_y, \hat{\mathbf{z}}) = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_x\varepsilon_y & 0 \\ \varepsilon_x\varepsilon_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

9 Subtraindo a equação (8) pela matriz unidade (identidade):

$$R(\varepsilon_x\varepsilon_y, \hat{\mathbf{z}}) - \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_x\varepsilon_y & 0 \\ \varepsilon_x\varepsilon_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

10 Ao comparar as equações (7) e (9), conclui-se:

$$R(\varepsilon_x, \hat{\mathbf{x}})\ R(\varepsilon_y, \hat{\mathbf{y}}) - R(\varepsilon_y, \hat{\mathbf{y}})\ R(\varepsilon_x, \hat{\mathbf{x}}) = R(\varepsilon_x\varepsilon_y, \hat{\mathbf{z}}) - \mathbf{1} \tag{10}$$

11 Reescrevendo (10) em termos dos operadores da rotação:

$$U(\varepsilon_x, \hat{\mathbf{x}})\ U(\varepsilon_y, \hat{\mathbf{y}}) - U(\varepsilon_y, \hat{\mathbf{y}})\ U(\varepsilon_x, \hat{\mathbf{x}}) = U(\varepsilon_x\varepsilon_y, \hat{\mathbf{z}}) - \mathbf{1} \tag{11}$$

12 Os operadores da rotação são exponenciais de operadores do momento angular geométrico:

$$\begin{aligned} U(\varepsilon_x, \hat{\mathbf{x}}) = e^{-i\varepsilon_x J_x} &\approx \mathbf{1} - i\varepsilon_x J_x + \dots \\ U(\varepsilon_y, \hat{\mathbf{y}}) = e^{-i\varepsilon_y J_y} &\approx \mathbf{1} - i\varepsilon_y J_y + \dots \\ U(\varepsilon_x\varepsilon_y, \hat{\mathbf{z}}) = e^{-i\varepsilon_x\varepsilon_y J_z} &\approx \mathbf{1} - i\varepsilon_x\varepsilon_y J_z + \dots \end{aligned} \tag{12}$$

13 Considerando rotações infinitesimais, substituição da 1^a ordem de (12) em (11):

$$-\varepsilon_x\varepsilon_y J_x J_y + \varepsilon_y\varepsilon_x J_y J_x = -i\varepsilon_x\varepsilon_y J_z \tag{13}$$

14 Enfim, obtém-se a relação de comutação entre as componentes do operador do momento angular:

$$\boxed{J_x J_y - J_y J_x = iJ_z} \tag{14}$$

15 Procedendo de maneira similar, pode-se fazer a substituição cíclica dos rótulos dos eixos, o que resulta em:

$$\boxed{J_y J_z - J_z J_y = iJ_x} \tag{15}$$

$$\boxed{J_z J_x - J_x J_z = iJ_y} \tag{16}$$

16 A conexão com a mecânica quântica:

A conexão entre o operador do momento angular geométrico e o operador do momento angular quântico (q) se dá por meio da constante de Planck reduzida: $J_{qx} = \hbar J_x$, $J_{qy} = \hbar J_y$ e $J_{qz} = \hbar J_z$. Nesse sentido, as comutações (14), (15) e (16) se tornam:

$$\boxed{J_{qx} J_{qy} - J_{qy} J_{qx} = i\hbar J_{qz}} \tag{17}$$

$$\boxed{J_{qy}J_{qz} - J_{qz}J_{qy} = i\hbar J_{qx}} \tag{18}$$

$$\boxed{J_{qz}J_{qx} - J_{qx}J_{qz} = i\hbar J_{qy}} \tag{19}$$

Referências

Thompson, W. J. (1994). *Angular Momentum: An Illustrated Guide to Rotational Symmetries for Physical Systems.* Wiley-VCH, ISBN 978-0471552642, 1st edition.