

Mecânica Quântica <– Relação de Comutação do Momento Angular Geométrico

Prof. Dr. Cássio Sanguini Sergio

Departamento de Física, Universidade Federal de Roraima

Boa Vista, 04 de dezembro de 2019

Conteúdo

Introdução	2
1 Matriz de rotação para rotação em torno do eixo principal x :	3
2 Matriz de rotação para rotação em torno do eixo principal y :	3
3 Matriz de rotação para rotação em torno do eixo principal z :	3
4 Rotações sucessivas através dos eixos x e y :	4
5 Rotações sucessivas através dos eixos y e x :	4
6 Equação (4) menos equação (5):	4
7 Considerando rotações infinitesimais, aproximação $\sin \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1$ na equação (6):	4
8 Considerando rotações infinitesimais, aproximação $\sin \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1$ na equação (3):	5
9 Subtraindo a equação (8) pela matriz unidade (identidade):	5

10 Ao comparar as equações (7) e (9), conclui-se:	5
11 Reescrevendo (10) em termos dos operadores da rotação:	5
12 Os operadores da rotação são exponenciais de operadores do momento angular geométrico:	5
13 Considerando rotações infinitesimais, substituição da 1 ^a ordem de (12) em (11):	6
14 Enfim, obtém-se a relação de comutação entre as componentes do operador do momento angular:	6
15 Procedendo de maneira similar, pode-se fazer a substituição cíclica dos rótulos dos eixos, o que resulta em:	6
16 A conexão com a mecânica quântica:	6

Introdução

Há duas maneiras de se discutir o momento angular orbital na mecânica quântica (Thompson, 1994). Uma, usa a definição do momento angular orbital clássico, a saber, o produto vetorial da posição da partícula pelo seu momento linear, em seguida, faz-se a conversão dos elementos clássicos pelos operadores da posição e do momento linear, fazendo surgir o operador do momento angular orbital — neste ponto, geralmente demonstra-se que as componentes deste operador não comutam entre si. A outra, utiliza as propriedades geométricas das rotações e, assim, deduz-se diretamente o operador do momento angular orbital, sem a necessidade de se lançar mão da definição clássica. Por ser um processo exclusivamente geométrico, pode-se chamar o momento angular resultante desse processo de momento angular geométrico: um momento angular genuinamente *angular* — uma função pura de ângulos e derivadas de ângulos, quando escrito em coordenadas esféricas, por exemplo. Por fim, faz-se a conexão do momento angular orbital da geometria com o momento angular orbital da mecânica quântica, acrescentando a constante de Planck ao momento angular orbital geométrico.

O objetivo deste artigo é deduzir as relações de comutação entre as componentes do operador do momento angular utilizando apenas argumentos geométricos: as matrizes de rotação e os operadores de rotação. Isso justifica o título. Na linguagem de programação R, a simbologia $x \leftarrow y$ significa que a variável x recebe o conteúdo da variável y . É o que se quer dizer com a simbologia do título: A teoria da mecânica quântica recebe um conteúdo da teoria da geometria rotacional: a relação de comutação do momento angular geométrico, desenvolvida com argumentos geométricos.

1 Matriz de rotação para rotação em torno do eixo principal x :

$$R(\varepsilon_x, \hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon_x & -\sin \varepsilon_x \\ 0 & \sin \varepsilon_x & \cos \varepsilon_x \end{bmatrix} \quad (1)$$

2 Matriz de rotação para rotação em torno do eixo principal y :

$$R(\varepsilon_y, \hat{\mathbf{y}}) = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_y & 0 & \sin \varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varepsilon_y & 0 & \cos \varepsilon_y \end{bmatrix} \quad (2)$$

3 Matriz de rotação para rotação em torno do eixo principal z :

$$R(\varepsilon_z, \hat{\mathbf{z}}) = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_z & -\sin \varepsilon_z & 0 \\ \sin \varepsilon_z & \cos \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

4 Rotações sucessivas através dos eixos x e y :

$$\begin{aligned}
 R(\varepsilon_x, \hat{\mathbf{x}}) R(\varepsilon_y, \hat{\mathbf{y}}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon_x & -\sin \varepsilon_x \\ 0 & \sin \varepsilon_x & \cos \varepsilon_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_y & 0 & \sin \varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varepsilon_y & 0 & \cos \varepsilon_y \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_y & 0 & \sin \varepsilon_y \\ \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_y & \cos \varepsilon_x & -\sin \varepsilon_x \cos \varepsilon_y \\ -\cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_y & \sin \varepsilon_x & \cos \varepsilon_x \cos \varepsilon_y \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4}$$

5 Rotações sucessivas através dos eixos y e x :

$$\begin{aligned}
 R(\varepsilon_y, \hat{\mathbf{y}}) R(\varepsilon_x, \hat{\mathbf{x}}) &= \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_y & 0 & \sin \varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varepsilon_y & 0 & \cos \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon_x & -\sin \varepsilon_x \\ 0 & \sin \varepsilon_x & \cos \varepsilon_x \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_y & \sin \varepsilon_y \sin \varepsilon_x & \sin \varepsilon_y \cos \varepsilon_x \\ 0 & \cos \varepsilon_x & -\sin \varepsilon_x \\ -\sin \varepsilon_y & \cos \varepsilon_y \sin \varepsilon_x & \cos \varepsilon_y \cos \varepsilon_x \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5}$$

6 Equação (4) menos equação (5):

$$\begin{aligned}
 R(\varepsilon_x, \hat{\mathbf{x}}) R(\varepsilon_y, \hat{\mathbf{y}}) - R(\varepsilon_y, \hat{\mathbf{y}}) R(\varepsilon_x, \hat{\mathbf{x}}) &= \\
 \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varepsilon_y \sin \varepsilon_x & \sin \varepsilon_y - \sin \varepsilon_y \cos \varepsilon_x \\ \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_y & 0 & -\sin \varepsilon_x \cos \varepsilon_y + \sin \varepsilon_x \\ -\cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_y + \sin \varepsilon_y & \sin \varepsilon_x - \cos \varepsilon_y \sin \varepsilon_x & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6}$$

7 Considerando rotações infinitesimais, aproximação $\sin \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1$ na equação (6):

$$\begin{aligned}
 R(\varepsilon_x, \hat{\mathbf{x}}) R(\varepsilon_y, \hat{\mathbf{y}}) - R(\varepsilon_y, \hat{\mathbf{y}}) R(\varepsilon_x, \hat{\mathbf{x}}) &= \\
 \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_y \varepsilon_x & \varepsilon_y - \varepsilon_y \\ \varepsilon_x \varepsilon_y & 0 & -\varepsilon_x + \varepsilon_x \\ -\varepsilon_y + \varepsilon_y & \varepsilon_x - \varepsilon_x & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_x \varepsilon_y & 0 \\ \varepsilon_x \varepsilon_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7}$$

8 Considerando rotações infinitesimais, aproximação $\sin \theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1$ na equação (3):

$$R(\varepsilon_z = \varepsilon_x \varepsilon_y, \hat{\mathbf{z}}) = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_x \varepsilon_y & 0 \\ \varepsilon_x \varepsilon_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

9 Subtraindo a equação (8) pela matriz unidade (identidade):

$$R(\varepsilon_x \varepsilon_y, \hat{\mathbf{z}}) - \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_x \varepsilon_y & 0 \\ \varepsilon_x \varepsilon_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

10 Ao comparar as equações (7) e (9), conclui-se:

$$R(\varepsilon_x, \hat{\mathbf{x}}) R(\varepsilon_y, \hat{\mathbf{y}}) - R(\varepsilon_y, \hat{\mathbf{y}}) R(\varepsilon_x, \hat{\mathbf{x}}) = R(\varepsilon_x \varepsilon_y, \hat{\mathbf{z}}) - \mathbf{1} \quad (10)$$

11 Reescrevendo (10) em termos dos operadores da rotação:

$$U(\varepsilon_x, \hat{\mathbf{x}}) U(\varepsilon_y, \hat{\mathbf{y}}) - U(\varepsilon_y, \hat{\mathbf{y}}) U(\varepsilon_x, \hat{\mathbf{x}}) = U(\varepsilon_x \varepsilon_y, \hat{\mathbf{z}}) - \mathbf{1} \quad (11)$$

12 Os operadores da rotação são exponenciais de operadores do momento angular geométrico:

$$\begin{aligned} U(\varepsilon_x, \hat{\mathbf{x}}) &= e^{-i\varepsilon_x J_x} \approx \mathbf{1} - i\varepsilon_x J_x + \dots \\ U(\varepsilon_y, \hat{\mathbf{y}}) &= e^{-i\varepsilon_y J_y} \approx \mathbf{1} - i\varepsilon_y J_y + \dots \\ U(\varepsilon_x \varepsilon_y, \hat{\mathbf{z}}) &= e^{-i\varepsilon_x \varepsilon_y J_z} \approx \mathbf{1} - i\varepsilon_x \varepsilon_y J_z + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

13 Considerando rotações infinitesimais, substituição da 1ª ordem de (12) em (11):

$$-\varepsilon_x \varepsilon_y J_x J_y + \varepsilon_y \varepsilon_x J_y J_x = -i \varepsilon_x \varepsilon_y J_z \quad (13)$$

14 Enfim, obtém-se a relação de comutação entre as componentes do operador do momento angular:

$$J_x J_y - J_y J_x = i J_z \quad (14)$$

15 Procedendo de maneira similar, pode-se fazer a substituição cíclica dos rótulos dos eixos, o que resulta em:

$$J_y J_z - J_z J_y = i J_x \quad (15)$$

$$J_z J_x - J_x J_z = i J_y \quad (16)$$

16 A conexão com a mecânica quântica:

A conexão entre o operador do momento angular geométrico e o operador do momento angular quântico (q) se dá por meio da constante de Planck reduzida: $J_{qx} = \hbar J_x$, $J_{qy} = \hbar J_y$ e $J_{qz} = \hbar J_z$. Nesse sentido, as comutações (14), (15) e (16) se tornam:

$$J_{qx} J_{qy} - J_{qy} J_{qx} = i \hbar J_{qz} \quad (17)$$

$$J_{qy}J_{qz} - J_{qz}J_{qy} = i\hbar J_{qx} \quad (18)$$

$$J_{qz}J_{qx} - J_{qx}J_{qz} = i\hbar J_{qy} \quad (19)$$

Referências

Thompson, W. J. (1994). *Angular Momentum: An Illustrated Guide to Rotational Symmetries for Physical Systems*. Wiley-VCH, ISBN 978-0471552642, 1st edition.