Mecânica Quântica: Momento Angular Orbital

Prof. Dr. Cássio Sanguini Sergio

Departamento de Física, Universidade Federal de Roraima

Boa Vista, 19-23 de novembro de 2019

Conteúdo

1 Introdução

Há duas maneiras de se discutir o momento angular orbital na mecânica quântica (Thompson, 1994). Uma, usa a definição do momento angular clássico, a saber, o produto vetorial da posição da partícula pelo seu momento linear, logo, em seguida, faz-se a conversão dos elementos clássicos pelos operadores quânticos (posição e momento linear) — disso resulta no operador do momento angular orbital. A outra, utiliza as propriedades geométricas das rotações e, assim, deduz-se diretamente o operador do momento angular orbital, sem a necessidade de se lançar mão da definição clássica.

O objetivo deste artigo é deduzir o operador do momento angular orbital partindo da definição clássica do momento angular. Ademais, apresentar suas autofunções, seus autovalores e sua representação matrial.

2 O momento angular orbital

O momento angular orbital é representado por $\boldsymbol{L}$. Ele é definido pelo produto vetorial $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ (Herbert Goldstein, 2001). Conforme se vê na Figura 1, o momento angular orbital se relaciona com o ângulo α entre a posição $\boldsymbol{r}$ e o momento linear $\boldsymbol{p}$. Seu módulo é: $|\boldsymbol{L}| = rp\,\text{sen}\alpha$, e sua direção é perpendicular ao plano que contém os vetores $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{p}$. Já seu sentido é determinado pela regra da mão direita, fazendo $\boldsymbol{r}$ correr em direção à $\boldsymbol{p}$.

A natureza radial e angular do momento angular orbital favorece um sistema de coordenadas não-cartesiano, como o sistema esférico, de coordenadas radial r, polar θ e azimutal ϕ, sendo as faixas de valores: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$.

A Figura 1 mostra que o momento angular orbital clássico é o vetor $\boldsymbol{L} = (L_x, L_y, L_z)$. Na mecânica quântica, o momento angular orbital continua sendo um vetor, no sentido de possuir 3 componentes, todavia, o tratamento quântico utiliza operadores nos lugares dos elementos clássicos (Liboff, 2002). O vetor, então, é um vetor de operadores representado por $\hat{\boldsymbol{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$.

No sistema cartesiano, as componentes do momento angular orbital clássico podem ser determinadas pelo determinante:

$$\boldsymbol{L} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}. \tag{1}$$

O que resulta em:

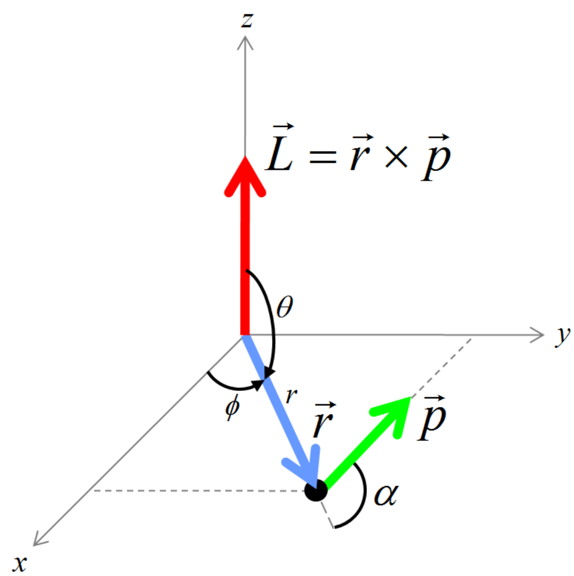

Figura 1: O momento angular orbital clássico.

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y; \\ L_y &= zp_x - xp_z; \\ L_z &= xp_y - yp_x. \end{aligned} \tag{2}$$

Na mecânica quântica, o operador do momento angular orbital deriva diretamente da estrutura do $\boldsymbol{L}$, fazendo a conversão dos elementos clássicos em operadores:

$$\begin{aligned} x &\to \hat{x} = x; \\ y &\to \hat{y} = y; \\ z &\to \hat{z} = z; \\ p_x &\to \hat{p}_x = -\imath\hbar\frac{\partial}{\partial x}; \\ p_y &\to \hat{p}_y = -\imath\hbar\frac{\partial}{\partial y}; \\ p_z &\to \hat{p}_z = -\imath\hbar\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \tag{3}$$

Substituindo (2) em (3), as componentes do operador $\hat{\boldsymbol{L}}$ se escrevem:

$$
\begin{aligned}
\hat{L}_x &= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = -\imath\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right);\\
\hat{L}_y &= \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = -\imath\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right);\\
\hat{L}_z &= \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -\imath\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Em (4) temos as componentes cartezianas do $\hat{\boldsymbol{L}}$ escritas em função das coordenadas cartezianas. Agora, em função das coordenadas esféricas, as componentes cartezianas do $\hat{\boldsymbol{L}}$ se escrevem:

$$
\begin{aligned}
\hat{L}_x &= \imath\hbar\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{cotg}\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right);\\
\hat{L}_y &= \imath\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{cotg}\theta\operatorname{sen}\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right);\\
\hat{L}_z &= -\imath\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Como vimos, o operador do $\boldsymbol{L} = (L_x, L_y, L_z)$ é o operador $\hat{\boldsymbol{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$, de componentes cartezianas (4) ou (5): Escrito na forma (5), não se atua na coordenada radial r, somente nas coordenadas angulares θ e ϕ.

O operador do momento angular orbital, ao quadrado, se escreve:

$$
\hat{\boldsymbol{L}}^2 = \hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2. \tag{6}
$$

Em função das coordenadas esféricas, a equação (6) tem a forma:

$$
\hat{\boldsymbol{L}}^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \operatorname{cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right). \tag{7}
$$

3 Autofunções e autovalores do momento angular orbital

A caracterização do momento angular clássico pode ser feita apontando os valores de suas 3 componentes, L_x, L_y e L_z (simultâneamente), o que leva a conhecer o valor do módulo ou magnitude L.

O tratamento quântico *não* caracteriza o momento angular por discriminar os valores das 3 componentes. Conforme esclarece (Liboff, 2002), *simultâneamente*, determina-se os valores do módulo e de apenas 1 componente do momento angular — geralmente, prefere-se especificar a componente z.

Vamos explicitar os valores de L^2 e L_z através das equações de autovalor dos operadores $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ e $\hat{L}_z$. As formas (5) e (7) não dependem da coordenada radial, por isso, as equações de autovalor geram autofunções que dependem somente das coordenadas angulares:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{L}}^2\, Y_{l,m} &= L^2\, Y_{l,m}; \\ \hat{L}_z\, Y_{l,m} &= L_z\, Y_{l,m}. \end{aligned} \tag{8}$$

Os autovalores L^2 e L_z possuem os seguintes valores:

$$\begin{aligned} L^2 &= l(l+1)\hbar^2; \\ L_z &= m\hbar. \end{aligned} \tag{9}$$

Apesar de $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ e $\hat{L}_z$ compartilharem as autofunções, os autovalores são bem diferentes: ver as equações (8) e (9).

As autofunções $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ são conhecidas como harmônicos esféricos. O número l é o número quântico orbital e o número m é o número quântico azimutal, ou número quântico magnético. Os valores do número quântico orbital são: $l = 0, 1, 2, 3, \cdots$. Para cada l, os valores do número quântico azimutal são: $m = l, (l-1), (l-2), \cdots, -l$. A Figura 2 torna explícito os harmônicos esféricos para $l = 0, 1, 2, 3$.

Dada uma partícula com momento angular orbital de magnitude $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ e componente z, $L_z = m\hbar$, a densidade de probabilidade da posição (θ, ϕ) é determinada pela relação:

$$|Y_{l,m}|^2 = Y^*_{l,m}(\theta, \phi)\, Y_{l,m}(\theta, \phi), \tag{10}$$

e a probabilidade de essa partícula estar entre (θ_1, θ_2) e (ϕ_1, ϕ_2) é determinada pela integral:

Quadro Harmônico Esférico

$$Y_{0,0} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$$

$$Y_{1,1} = -\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_{1,0} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos\theta$$

$$Y_{1,-1} = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\theta\, e^{-i\phi}$$

$$Y_{2,2} = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \operatorname{sen}^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_{2,1} = -\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_{2,0} = \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} \left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

$$Y_{2,-1} = \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, e^{-i\phi}$$

$$Y_{2,-2} = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \operatorname{sen}^2\theta\, e^{-2i\phi}$$

$$Y_{3,3} = -\left(\frac{35}{64\pi}\right)^{1/2} \operatorname{sen}^3\theta\, e^{3i\phi}$$

$$Y_{3,2} = \left(\frac{105}{32\pi}\right)^{1/2} \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_{3,1} = -\left(\frac{21}{64\pi}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\theta \left(5\cos^2\theta - 1\right) e^{i\phi}$$

$$Y_{3,0} = \left(\frac{7}{16\pi}\right)^{1/2} \left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)$$

$$Y_{3,-1} = \left(\frac{21}{64\pi}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\theta \left(5\cos^2\theta - 1\right) e^{-i\phi}$$

$$Y_{3,-2} = \left(\frac{105}{32\pi}\right)^{1/2} \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta\, e^{-2i\phi}$$

$$Y_{3,-3} = \left(\frac{35}{64\pi}\right)^{1/2} \operatorname{sen}^3\theta\, e^{-3i\phi}$$

Figura 2: Alguns harmônicos esféricos.

$$\mathrm{P}_{l,m} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left|Y_{l,m}\right|^2 \ \mathrm{d}\Omega. \tag{11}$$

Os harmônicos esféricos são funções normalizadas e ortogonais, pois:

$$\begin{aligned} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left|Y_{l,m}\right|^2 \ \mathrm{d}\Omega &= 1, \quad \text{se } \bar{l} = l \text{ e } \overline{m} = m; \\ &= 0, \quad \text{caso contrário.} \end{aligned} \tag{12}$$

Nota: $\mathrm{d}\Omega = \operatorname{sen}\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$.

Observando a Figura 2, conclui-se que a densidade de probabilidade não depende do ângulo ϕ. Por causa disso, pode-se fazer a representação gráfica da densidade de probabilidade anexando o valor de $|Y_{l,m}|^2$ a um raio $R(\theta)$. Daí, fazendo a varredura angular de θ, o raio $R(\theta)$ "desenha" pelo espaço, a densidade de probabilidade na forma de uma curva esfericamente simétrica. As Figuras 3, 4 e 5 apresentam as curvas das densidades de probabilidade geradas por esse método.

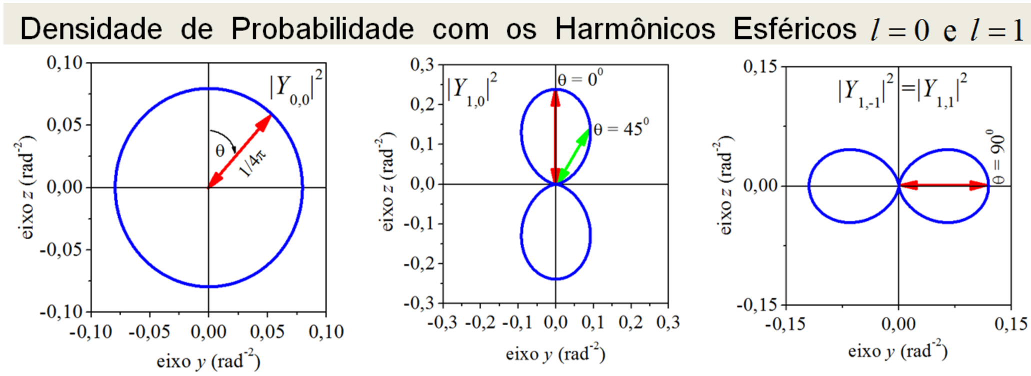

Figura 3: Densidade de probabilidade para l = 0 e l = 1.

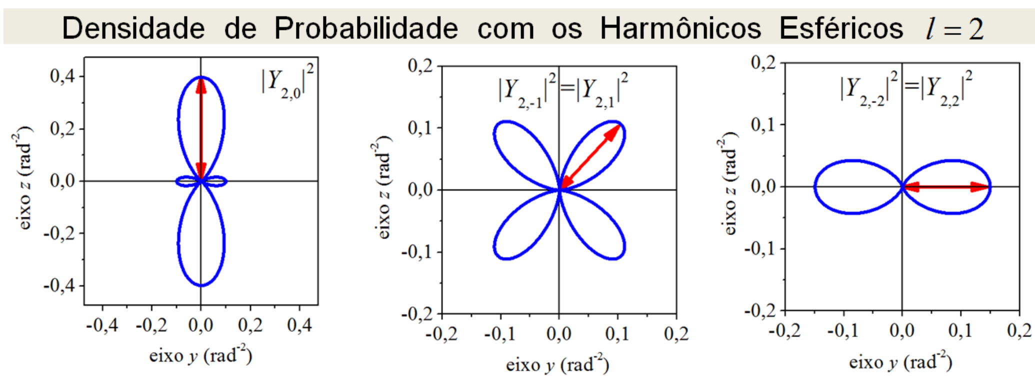

Figura 4: Densidade de probabilidade para l = 2.

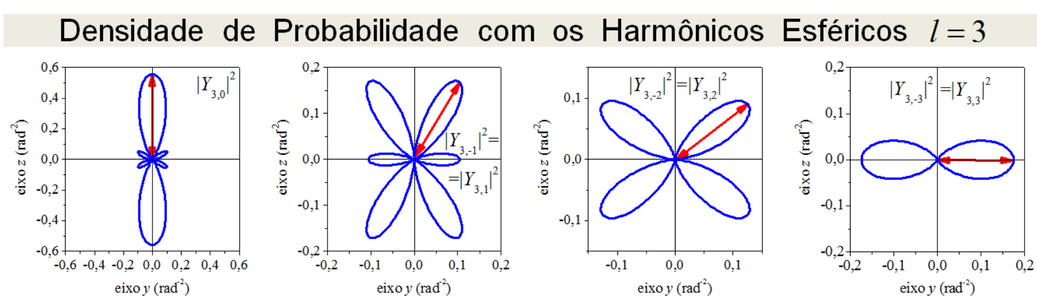

Figura 5: Densidade de probabilidade para l = 3.

Como foram construídos, os contornos das curvas indicam a magnitude da densidade de probabilidade na direção do ângulo polar θ, sendo que esse ângulo parte do eixo z. Para auxiliar a visualização, setas, indicando a magnitude da densidade, foram desenhadas em certas direções angulares. Visto que a densidade de probabilidade não depende do ângulo azimutal ϕ, as figuras devem ser rodadas sobre o eixo z para se visualizar as figuras das densidades tridimensionais. Como se vê, exceto para $l = 0$, que gera uma densidade constante, as demais densidades de probabilidade apresentam preferências angulares. Por exemplo, observando a Figura 3, a maior probabilidade de encontrar a partícula no estado $Y_{1,0}$ é em $\theta = 0^0$, todavia, se a partícula estiver no estado $Y_{1,1}$, a maior probabilidade de encontrá-la será em $\theta = 90^0$, pois, em $\theta = 0^0$, a probabilidade é zero.

4 Operadores compatíveis e incompatíveis

Neste capítulo, vamos analisar situações em que se manifesta momento angular orbital, nosso objetivo, é entender quando dois operadores são compatíveis e quando são incompatíveis.

Considere uma partícula orbitando livre em torno de um ponto central, como se estivesse sobre a superfície de uma esfera, executando "voltas e mais voltas". À rotação associa-se um momento angular orbital. Nós, então, montamos uma experiência para medir a magnitude do momento angular. Vamos supor que encontramos $L = \sqrt{12}\hbar$, correspondente ao número quântico orbital $l = 3$. Logo em seguida, montamos outra experiência para medir a componente z do momento angular orbital de magnitude $\sqrt{12}\hbar$. Quais seriam os possíveis resultados da nova experiência? A previsão quântica diz que poderíamos encontrar qualquer um dos seguintes valores:

$$
\begin{aligned}
L_z = &\ \ 3\hbar, \\
\text{ou} = &\ \ 2\hbar, \\
\text{ou} = &\ \ 1\hbar, \\
\text{ou} = &\ \ 0\hbar, \\
\text{ou} = & -1\hbar, \\
\text{ou} = & -2\hbar, \\
\text{ou} = & -3\hbar.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Os possíveis resultados (13) podem ser geometricamente representados por vetores de comprimento proporcional à $\sqrt{12}\hbar$, orientados de tal maneira que suas projeções no eixo z sejam proporcionais aos valores de L_z, conforme aparece na Figura 6.

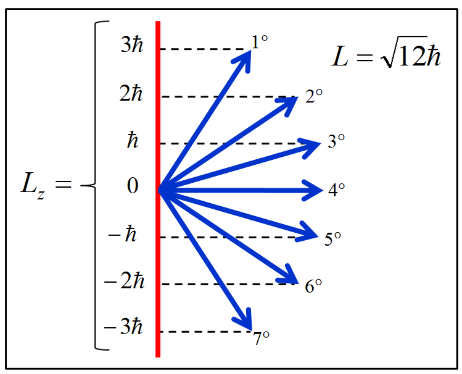

Figura 6: Ilustração de momentos angulares orbitais.

Após a primeira medição, discernimos qual a magnitude do momento angular, mas ainda não sabemos sua direção, pois há 7 possibilidades — ver novamente a Figura 6. Diz-se que $L = \sqrt{12}\hbar$ é 7 vezes degenerado, e conclui-se que está associado a uma superposição de 7 autoestados: $Y_{3,3}, Y_{3,2}, Y_{3,1}, Y_{3,0}, Y_{3,-1}, Y_{3,-2}, Y_{3,-3}$.

Vamos, então, supor que uma segunda medição resulte em $L_z = 2\hbar$, equivalente ao número quântico azimutal $m = 2$. Agora podemos discernir qual é a direção do momento angular orbital, pois somos induzidos a perceber de que se trata do segundo momento da Figura 6.

Concluímos, após os dois experimentos mentais, que a partícula estaria no estado $Y_{3,2}$, autoestado comum de $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ e $\hat{L}_z$. Concluímos, também, que a 1^a experiência, relacionada com $\hat{\boldsymbol{L}}^2$, somente revela o valor do módulo do momento angular orbital, e que a 2^a experiência, relacionada com $\hat{L}_z$, completa a caracterização desse momento, ajudando a distinguir qual é a sua orientação.

♦ E se mudássemos a ordem das experiências?

A Figura 7 ilustra a nova sequência: 1^a experiência relacionada com $\hat{L}_z$, 2^a experiência relacionada com $\hat{\boldsymbol{L}}^2$.

Ao fazer a medição da componente z do momento angular orbital, iríamos encontrar $L_z = 2\hbar$. Daí, perguntaríamos: Qual é o valor do módulo? A resposta estaria condicionada aos valores que satisfizessem a expressão $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$:

$$\begin{aligned} L &= 0, \\ \text{ou} &= \sqrt{2}\hbar, \\ \text{ou} &= \sqrt{6}\hbar, \\ \text{ou} &= \sqrt{12}\hbar, \\ \text{ou} &= \sqrt{20}\hbar, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{14}$$

Em seguida, faríamos a medição do módulo, por exemplo, com resultado $L = \sqrt{12}\hbar$. Por fim, saberíamos que a partícula se encontra no estado $Y_{3,2}$, representado pelo terceiro vetor da Figura 7.

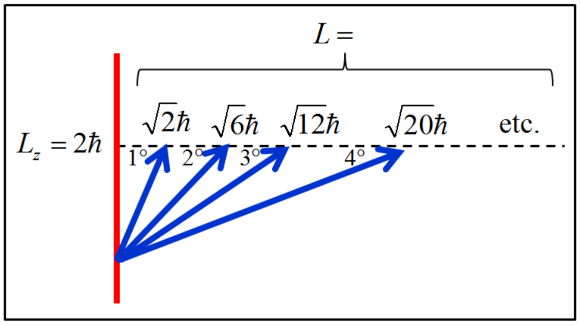

Figura 7: Ilustração de momentos angulares orbitais.

As experiências que acabamos de considerar, nos ajudam a entender que os operadores $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ e $\hat{L}_z$ possibilitam a montagem de experiências compatíveis (que podem coexistir), sendo o registro da experiência $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ complementar ao registro da experiência $\hat{L}_z$, e vice-versa. Dizemos, então, que os operadores $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ e $\hat{L}_z$ são **operadores compatíveis**.

Todavia, há situações em que as experiências são incompatíveis. Por exemplo, se montássemos experiências realcionadas com $\hat{L}_z$ e $\hat{L}_x$, chegaríamos à conclusão que a experiência $\hat{L}_x$ não completaria a informação da experiência $\hat{L}_z$. Isso porque o autoestado de $\hat{L}_x$ não é solução da equação de autoestado de $\hat{L}_z$. Nesse caso, dizemos que os operadores $\hat{L}_z$ e $\hat{L}_x$ são **operadores incompatíveis**.

Experiências compatíveis só ocorrem quando os operadores compartilham o mesmo conjunto de autoestados, como o par $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ e $\hat{L}_z$, que usa o conjunto $Y_{l,m}$ em comum. E, para saber se dois operadores, por exemplo, $\hat{A}$ e $\hat{B}$, são operadores compatíveis e têm autofunções em comum, usa-se uma ferramenta matemática chamada comutador:

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \tag{15}$$

Daí, diz-se que $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são operadores compatíveis e possuem autofunções em comum, se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ comutam entre si, ou seja, se:

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} \implies \left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0. \tag{16}$$

O teste do comutador mostra que as componentes do operador do momento angular não comutam entre si:

$$\begin{aligned} \left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] &= \imath\hbar\hat{L}_z; \\ \left[\hat{L}_y, \hat{L}_z\right] &= \imath\hbar\hat{L}_x; \\ \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] &= \imath\hbar\hat{L}_y. \end{aligned} \tag{17}$$

Por outro lado, $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ comuta com todas componentes do $\hat{\boldsymbol{L}}$:

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_x\right] &= 0; \\
\left[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_y\right] &= 0; \\
\left[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_z\right] &= 0.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Usando o critério (16) , pode-se afirmar que os operadores (17) são incompatíveis (não compartilham suas autofunções), já os operadores (18) são compatíveis e, por isso, compartilham suas autofunções: Segundo (8) , compartilham as autofunções harmônicos esféricos — ver a Figura 2.

Uma visão extendida de operações e propriedades de comutadores pode ser vista na Figura 8.

Quadro Comutador	Momento	M. Angular
	$[\hat{p}_x, \hat{p}_x] = 0$	$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z$
	$[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = 0$	$[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x$
	$[\hat{p}_x, \hat{p}_z] = 0$	$[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y$
Propriedades	$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$	$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0$
$[A, B] = -[B, A]$	$[\hat{x}, \hat{p}_y] = 0$	$[\hat{L}^2, \hat{L}_y] = 0$
$[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$	$[\hat{x}, \hat{p}_z] = 0$	$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$
$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$	$[\hat{y}, \hat{p}_x] = 0$	$[\hat{L}_z, \hat{x}] = i\hbar\hat{y}$
$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$	$[\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar$	$[\hat{L}_z, \hat{y}] = -i\hbar\hat{x}$
Posição	$[\hat{y}, \hat{p}_z] = 0$	$[\hat{L}_z, \hat{z}] = 0$
$[\hat{x}, \hat{x}] = 0$	$[\hat{z}, \hat{p}_x] = 0$	$[\hat{L}_z, \hat{p}_x] = i\hbar\hat{p}_y$
$[\hat{x}, \hat{y}] = 0$	$[\hat{z}, \hat{p}_y] = 0$	$[\hat{L}_z, \hat{p}_y] = -i\hbar\hat{p}_x$
$[\hat{x}, \hat{z}] = 0$	$[\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar$	$[\hat{L}_z, \hat{p}_z] = 0$

Figura 8: Operações e propriedades de comutadores.

5 O princípio de incerteza generalizado

O princípio de incerteza é de autoria de W. Heisenberg (Heisenberg, 1927). Uma formulação geral e aplicada em particular ao caso do momento angular foi publicada por H.P. Robertson (Robertson, 1929). A formulação generalizada se aplica a qualquer par de operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$, que possuem autovalores A e B:

$$\Delta A\,\Delta B\;\geqslant\;\frac{1}{2}\left|\left\langle \imath\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\rangle\right|. \tag{19}$$

A sequência matemática em (19) é: (1^o) fazer o comutador $[\cdots]$, (2^o) fazer o valor esperado $\langle\cdots\rangle$, e (3^o) fazer o módulo $|\cdots|$.

Vamos, então, desenvolver o princípio de incerteza generalizado utilizando os operadores $\hat{L}_x$ e $\hat{L}_y$, de autovalores L_x e L_y, respectivamente:

$$\Delta L_x\,\Delta L_y\;\geqslant\;\frac{1}{2}\left|\left\langle \imath\left[\hat{L}_x,\hat{L}_y\right]\right\rangle\right|. \tag{20}$$

Segundo (17), o (1^o) passo resulta em:

$$\imath\left[\hat{L}_x,\hat{L}_y\right]=-\hbar\hat{L}_z. \tag{21}$$

O (2^o) passo resulta em:

$$\left\langle \imath\left[\hat{L}_x,\hat{L}_y\right]\right\rangle=-\hbar\left\langle\hat{L}_z\right\rangle. \tag{22}$$

E o (3^o) passo resulta em:

$$\left|\left\langle \imath\left[\hat{L}_x,\hat{L}_y\right]\right\rangle\right|=\hbar\left|\left\langle\hat{L}_z\right\rangle\right|. \tag{23}$$

Levando o resultado (23) ao princípio (19), tem-se:

$$\Delta L_x\,\Delta L_y\;\geqslant\;\frac{1}{2}\hbar\left|\left\langle\hat{L}_z\right\rangle\right|. \tag{24}$$

A relação (24) exige que se determine o valor esperado do operador $\hat{L}_z$. Para isso, vamos supor uma partícula no autoestado $Y_{3,2}$, de número azimutal $m=2$. Por meio de (8): $\hat{L}_z\,Y_{3,2}=2\hbar\,Y_{3,2}$. Ademais, usando o fato dos harmônicos esféricos serem funções normalizadas e ortogonais (12):

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{L}_z \right\rangle &= \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} Y_{3,2}^{*}\, \hat{L}_z\, Y_{3,2}\ \mathrm{d}\Omega \\
&= 2\hbar \int\limits_{\theta}^{\pi} \int\limits_{\phi}^{2\pi} Y_{3,2}^{*}\, Y_{3,2}\ \mathrm{d}\Omega \\
&= 2\hbar.
\end{aligned} \tag{25}$$

Portanto, substituindo (25) em (24):

$$\Delta L_x\, \Delta L_y\ \geqslant\ \hbar^2. \tag{26}$$

No geral, supondo a partícula no autoestado $Y_{l,m}$, tem-se:

$$\left\langle \hat{L}_z \right\rangle = m\hbar; \tag{27}$$

o que implica em:

$$\Delta L_x\, \Delta L_y\ \geqslant\ \frac{1}{2} m\hbar^2. \tag{28}$$

Como se deve interpretar o resultado (28)? A partícula é preparada em $Y_{l,m}$: autoestado de $\hat{L}_z$, mas não de $\hat{L}_x$, nem de $\hat{L}_y$. Por isso, em uma medição de L_x, qualquer autovalor de $\hat{L}_x$ poderá fazer parte do registro. Em uma série de medições, o espectro dos resultados fica disperso, com desvio padrão ΔL_x. Analogamente, em medições de L_y, o espectro dos resultados também é disperso, com desvio padrão ΔL_y. O resultado (28) garante que o produto das dispersões parte de $\frac{1}{2} m\hbar^2$, não podendo ser menor.

A respeito dos autovalores dos operadores $\hat{L}_x$ e $\hat{L}_y$, entende-se que todas direções no espaço são fisicamente equivalentes, não há motivo para a quantização do eixo x ou y ser diferente da quantização do eixo z. Se o autovalor de $\hat{L}_z$ é o valor $L_z = m\hbar$, os autovalores de $\hat{L}_x$ e $\hat{L}_y$ serão os valores $L_x = m_x\hbar$ e $L_y = m_y\hbar$, sendo m_x e m_y inteiros dependentes do número quântico orbital: $m_x = l, (l-1), ..., -l$; e $m_y = l, (l-1), ..., -l$.

Em nossa mente, estamos trabalhando com uma partícula preparada no estado $Y_{3,2}$, caracterizada com $L = \sqrt{12}\hbar$ e, especificamente, possuindo componente z igual a $L_z = 2\hbar$. Uma experiência, montada para efetuar a medição da componente x dessa partícula, tem como possíveis resultados os autovalores de $\hat{L}_x$:

$$\begin{aligned} L_x = &\ \ 3\hbar, \\ \text{ou} = &\ \ 2\hbar, \\ \text{ou} = &\ \ 1\hbar, \\ \text{ou} = &\ \ 0\hbar, \\ \text{ou} = &-1\hbar, \\ \text{ou} = &-2\hbar, \\ \text{ou} = &-3\hbar. \end{aligned} \tag{29}$$

Em uma série de medições, de partículas no estado $Y_{3,2}$, o resultado médio será:

$$\left\langle \hat{L}_x \right\rangle = \frac{3\hbar + 2\hbar + 1\hbar + 0 - 1\hbar - 2\hbar - 3\hbar}{7} = 0. \tag{30}$$

Analogamente, se a experiência fosse montada para efetuar a medição da componente y:

$$\left\langle \hat{L}_y \right\rangle = \frac{3\hbar + 2\hbar + 1\hbar + 0 - 1\hbar - 2\hbar - 3\hbar}{7} = 0. \tag{31}$$

As médias (30) e (31) resultam em zero, mas, individualmente, as leituras das medições vão se distribuir em curvas estatísticas, tipo gaussiana, com grau de dispersão ΔL_x e ΔL_y e produto (28).

A respeito dos autoestados dos operadores $\hat{L}_x$ e $\hat{L}_y$, pode-se representá-los por $|l, m_x\rangle_x$ e $|l, m_y\rangle_y$, respectivamente. Então, antes de se iniciar a medição de L_x, o estado $Y_{3,2}$ está em uma superposição linear de $|l, m_x\rangle_x$, do tipo:

$$Y_{3,2} = \mathrm{C}_3^x|3,3\rangle_x + \mathrm{C}_2^x|3,2\rangle_x + \mathrm{C}_1^x|3,1\rangle_x + \mathrm{C}_0^x|3,0\rangle_x + \mathrm{C}_{-1}^x|3,-1\rangle_x + \mathrm{C}_{-2}^x|3,-2\rangle_x + \mathrm{C}_{-3}^x|3,-3\rangle_x. \tag{32}$$

Em (32), $|\mathrm{C}^x_{m_x}|^2$ é a probabilidade do estado $|3, m_x\rangle_x$ ser o estado final da experiência. Usando os coeficientes da superposição, o valor esperado se escreve:

$$\left\langle \hat{L}_x \right\rangle = |\mathrm{C}^x_3|^2(3\hbar)+|\mathrm{C}^x_2|^2(2\hbar)+|\mathrm{C}^x_1|^2(1\hbar)+|\mathrm{C}^x_0|^2(0)+|\mathrm{C}^x_{-1}|^2(-1\hbar)+|\mathrm{C}^x_{-2}|^2(-2\hbar)+|\mathrm{C}^x_{-3}|^2(-3\hbar) = 0. \tag{33}$$

Nota: A equação (30) é um caso especial da equação (33), quando se considera igualdade de probabilidades, ou seja, $|\mathrm{C}^x_{m_x}|^2 = \frac{1}{7}$.

Analogamente, se a experiência fosse montada para efetuar a medição da componente y do momento angular orbital, de partículas preparadas no estado $Y_{3,2}$, teríamos:

$$Y_{3,2} = \mathrm{C}^y_3|3,3\rangle_y+\mathrm{C}^y_2|3,2\rangle_y+\mathrm{C}^y_1|3,1\rangle_y+\mathrm{C}^y_0|3,0\rangle_y+\mathrm{C}^y_{-1}|3,-1\rangle_y+\mathrm{C}^y_{-2}|3,-2\rangle_y+\mathrm{C}^y_{-3}|3,-3\rangle_y. \tag{34}$$

E o valor esperado seria:

$$\left\langle \hat{L}_y \right\rangle = |\mathrm{C}^y_3|^2(3\hbar)+|\mathrm{C}^y_2|^2(2\hbar)+|\mathrm{C}^y_1|^2(1\hbar)+|\mathrm{C}^y_0|^2(0)+|\mathrm{C}^y_{-1}|^2(-1\hbar)+|\mathrm{C}^y_{-2}|^2(-2\hbar)+|\mathrm{C}^y_{-3}|^2(-3\hbar) = 0. \tag{35}$$

6 O operador de levantamento e de abaixamento

Agora vamos desenvolver ferramentas matemáticas que nos ajudarão a resolver o que está faltando em (36):

$$\begin{aligned} \hat{L}_x\, Y_{l,m} &= ? \\ \hat{L}_y\, Y_{l,m} &= ? \\ \hat{L}_z\, Y_{l,m} &= m\hbar\, Y_{l,m}. \end{aligned} \tag{36}$$

Respectivamente, o operador de levantamento e o operador de abaixamento são definidos como:

$$\begin{aligned}\hat{L}_+\, Y_{l,m} &= C_+\, Y_{l,m+1};\\ \hat{L}_-\, Y_{l,m} &= C_-\, Y_{l,m-1};\end{aligned} \tag{37}$$

onde:

$$\begin{aligned}C_+ &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)};\\ C_- &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}.\end{aligned} \tag{38}$$

Os nomes são apropriados, pois o operador $\hat{L}_+$ levanta o estado $Y_{l,m}$ para o estado $Y_{l,m+1}$, enquanto que o operador $\hat{L}_-$ abaixa o estado $Y_{l,m}$ para o estado $Y_{l,m-1}$. Por exemplo:

$$\begin{aligned}\hat{L}_+\, Y_{1,1} &= 0;\\ \hat{L}_+\, Y_{1,0} &= \hbar\sqrt{2}\; Y_{1,1};\\ \hat{L}_+\, Y_{1,-1} &= \hbar\sqrt{2}\; Y_{1,0}.\end{aligned} \tag{39}$$

Outro exemplo:

$$\begin{aligned}\hat{L}_-\, Y_{1,1} &= \hbar\sqrt{2}\; Y_{1,0};\\ \hat{L}_-\, Y_{1,0} &= \hbar\sqrt{2}\; Y_{1,-1};\\ \hat{L}_-\, Y_{1,-1} &= 0.\end{aligned} \tag{40}$$

Os operadores $\hat{L}_+$ e $\hat{L}_-$ definem os operadores $\hat{L}_x$ e $\hat{L}_y$, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= \frac{1}{2}\left(\hat{L}_+ + \hat{L}_-\right);\\ \hat{L}_y &= \frac{1}{2\imath}\left(\hat{L}_+ - \hat{L}_-\right).\end{aligned} \tag{41}$$

Podemos, então, completar (36):

$$\begin{aligned}\hat{L}_x\, Y_{l,m} &= \frac{1}{2}\left(C_+\, Y_{l,m+1} + C_-\, Y_{l,m-1}\right);\\ \hat{L}_y\, Y_{l,m} &= \frac{1}{2\imath}\left(C_+\, Y_{l,m+1} - C_-\, Y_{l,m-1}\right);\\ \hat{L}_z\, Y_{l,m} &= m\hbar\, Y_{l,m}.\end{aligned} \tag{42}$$

Buscando a expressão do desvio padrão da componente x do momento angular orbital, tem-se que determinar:

$$\Delta L_x = \sqrt{\left\langle \hat{L}_x^2 \right\rangle - \left\langle \hat{L}_x \right\rangle^2}. \tag{43}$$

Primeiro passo, determinar o valor esperado da componente x do operador do momento angular orbital, usando o fato dos harmônicos esféricos serem funções ortogonais (12):

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{L}_x \right\rangle &= \int_\theta^\pi \int_\phi^{2\pi} Y_{l,m}^* \, \hat{L}_x \, Y_{l,m} \, \mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{1}{2} \int_\theta^\pi \int_\phi^{2\pi} Y_{l,m}^* \, \hat{L}_+ \, Y_{l,m} \, \mathrm{d}\Omega + \frac{1}{2} \int_\theta^\pi \int_\phi^{2\pi} Y_{l,m}^* \, \hat{L}_- \, Y_{l,m} \, \mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{1}{2} C_+ \int_\theta^\pi \int_\phi^{2\pi} Y_{l,m}^* \, Y_{l,m+1} \, \mathrm{d}\Omega + \frac{1}{2} C_- \int_\theta^\pi \int_\phi^{2\pi} Y_{l,m}^* \, Y_{l,m-1} \, \mathrm{d}\Omega \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{44}$$

Nota: O resultado geral (44) confirma o resultado específico (30).

Segundo passo, determinar o quadrado das componentes x e y do operador do momento angular orbital:

$$\begin{aligned}
\hat{L}_x^2 &= \frac{1}{2} \left(\hat{L}_+ + \hat{L}_- \right) \frac{1}{2} \left(\hat{L}_+ + \hat{L}_- \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\hat{L}_+^2 + \hat{L}_+ \hat{L}_- + \hat{L}_- \hat{L}_+ + \hat{L}_-^2 \right).
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
\hat{L}_y^2 &= \frac{1}{2\imath} \left(\hat{L}_+ - \hat{L}_- \right) \frac{1}{2} \left(\hat{L}_+ - \hat{L}_- \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(-\hat{L}_+^2 + \hat{L}_+ \hat{L}_- + \hat{L}_- \hat{L}_+ - \hat{L}_-^2 \right).
\end{aligned} \tag{46}$$

Ao somar (45) e (46), lembrando que $\hat{\boldsymbol{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$, escreve-se:

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2 - \hat{L}_z^2 = \frac{1}{2} \left(\hat{L}_+ \hat{L}_- + \hat{L}_- \hat{L}_+ \right). \tag{47}$$

Terceiro passo, usando (45), determinar o valor esperado do quadrado da componentes x do operador do momento angular orbital:

$$\left\langle \hat{L}_x^2 \right\rangle = \frac{1}{4}\int\limits_{\theta}^{\pi}\int\limits_{\phi}^{2\pi} Y_{l,m}^{*}\left(\hat{L}_+^2 + \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_-^2\right) Y_{l,m}\ \mathrm{d}\Omega. \tag{48}$$

(1^o) termo de (48):

$$\int\limits_{\theta}^{\pi}\int\limits_{\phi}^{2\pi} Y_{l,m}^{*}\left(\hat{L}_+^2\right) Y_{l,m}\ \mathrm{d}\Omega \propto \int\limits_{\theta}^{\pi}\int\limits_{\phi}^{2\pi} Y_{l,m}^{*} Y_{l,m+2}\ \mathrm{d}\Omega = 0. \tag{49}$$

(4^o) termo de (48):

$$\int\limits_{\theta}^{\pi}\int\limits_{\phi}^{2\pi} Y_{l,m}^{*}\left(\hat{L}_-^2\right) Y_{l,m}\ \mathrm{d}\Omega \propto \int\limits_{\theta}^{\pi}\int\limits_{\phi}^{2\pi} Y_{l,m}^{*} Y_{l,m-2}\ \mathrm{d}\Omega = 0. \tag{50}$$

Substituindo (47), (49) e (50) em (48):

$$\left\langle \hat{L}_x^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\int\limits_{\theta}^{\pi}\int\limits_{\phi}^{2\pi} Y_{l,m}^{*}\left(\hat{\boldsymbol{L}}^2 - \hat{L}_z^2\right) Y_{l,m}\ \mathrm{d}\Omega. \tag{51}$$

(1^o) termo de (51):

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\theta}^{\pi}\int\limits_{\phi}^{2\pi} Y_{l,m}^{*}\left(\hat{\boldsymbol{L}}^2\right) Y_{l,m}\ \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2} l(l+1)\hbar^2 \int\limits_{\theta}^{\pi}\int\limits_{\phi}^{2\pi} Y_{l,m}^{*} Y_{l,m}\ \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2} l(l+1)\hbar^2. \tag{52}$$

(2^o) termo de (51):

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\theta}^{\pi}\int\limits_{\phi}^{2\pi} Y_{l,m}^{*}\left(\hat{L}_z^2\right) Y_{l,m}\ \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2} m^2\hbar^2 \int\limits_{\theta}^{\pi}\int\limits_{\phi}^{2\pi} Y_{l,m}^{*} Y_{l,m}\ \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2} m^2\hbar^2. \tag{53}$$

Levando (52) e (53) à expressão (51):

$$\left\langle \hat{L}_x^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\left[l(l+1) - m^2\right]\hbar^2. \tag{54}$$

Por fim, substituindo (44) e (54) na definição (43), tem-se a expressão do desvio padrão:

$$\Delta L_x = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}\left[l(l+1) - m^2\right]}. \tag{55}$$

Analogamente:

$$\Delta L_y = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}\left[l(l+1) - m^2\right]}. \tag{56}$$

E o produto resultaria em:

$$\Delta L_x \Delta L_y = \frac{\hbar^2}{2}\left[l(l+1) - m^2\right]. \tag{57}$$

Vamos voltar ao exemplo da partícula no autoestado $Y_{3,2}$. Substituindo $l = 3$ e $m = 2$ na equação (57), encontramos $\Delta L_x \Delta L_x = 4\hbar^2$. Este valor está de acordo com o resultado do princípio de incerteza, o qual prediz um produto maior que $\hbar^2$: ver a equação (26).

7 A representação matricial do momento angular orbital

Revisão 1: Os harmônicos esféricos são funções normalizadas e ortogonais:

$$\begin{aligned} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} Y^*_{l',m'}\, Y_{l,m}\; \mathrm{d}\Omega &= 1 \quad [\text{ se } \; l' = l \; \text{ e } \; m' = m \;] \\ &= 0 \quad [\text{ caso contrário }] \end{aligned} \tag{58}$$

Revisão 2: Os operadores componente z e quadrado do operador do momento angular orbital são definidos como:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{L}}^2\, Y_{l,m} &= l(l+1)\hbar^2\, Y_{l,m}; \\ \hat{L}_z\, Y_{l,m} &= m\hbar\, Y_{l,m}. \end{aligned} \tag{59}$$

Revisão 3: Os operadores de levantamento e de abaixamento são definidos como:

$$\begin{aligned} \hat{L}_+ \, Y_{l,m} &= C_+ \, Y_{l,m+1}; \\ \hat{L}_- \, Y_{l,m} &= C_- \, Y_{l,m-1}; \end{aligned} \tag{60}$$

onde:

$$\begin{aligned} C_+ &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}; \\ C_- &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}. \end{aligned} \tag{61}$$

Revisão 4: Os operadores (60) são usados na definição dos operadores:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= \frac{1}{2}\left(\hat{L}_+ + \hat{L}_-\right); \\ \hat{L}_y &= \frac{1}{2\imath}\left(\hat{L}_+ - \hat{L}_-\right). \end{aligned} \tag{62}$$

Com as revisões em mente, vamos determinar os elementos de matrizes do momento angular orbital, primeiro para o caso geral l, em seguida, para o caso específico $l = 1$.

♦ COMPONENTES DE MATRIZES

Componentes do operador quadrado do operador do momento angular orbital:

$$\begin{aligned} \left[\boldsymbol{L}^2\right]_{m',m} &= \int_\theta^\pi \int_\phi^{2\pi} Y^*_{l',m'} \left(\hat{\boldsymbol{L}}^2\right) Y_{l,m} \, \mathrm{d}\Omega \\ &= l(l+1)\hbar^2 \int_\theta^\pi \int_\phi^{2\pi} Y^*_{l',m'} Y_{l,m} \, \mathrm{d}\Omega \\ &= l(l+1)\hbar^2 \qquad [\text{ se } \; l' = l \; \text{ e } \; m' = m \;] \\ &= 0 \qquad\qquad\quad [\text{ caso contrário }] \end{aligned} \tag{63}$$

Componentes do operador da componente z do operador do momento angular orbital:

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{L}_z\right]_{m',m} &= \int\limits_{\theta}^{\pi}\int\limits_{\phi}^{2\pi} Y^*_{l',m'}\left(\hat{L}_z\right)Y_{l,m}\ \mathrm{d}\Omega \\
&= m\hbar\int\limits_{\theta}^{\pi}\int\limits_{\phi}^{2\pi} Y^*_{l',m'}Y_{l,m}\ \mathrm{d}\Omega \\
&= m\hbar \qquad [\text{ se }\ l'=l\ \text{ e }\ m'=m\ ] \\
&= 0 \qquad [\text{ caso contrário }]
\end{aligned}
\tag{64}
$$

Componentes do operador de levantamento:

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{L}_+\right]_{m',m} &= \int\limits_{\theta}^{\pi}\int\limits_{\phi}^{2\pi} Y^*_{l',m'}\left(\hat{L}_+\right)Y_{l,m}\ \mathrm{d}\Omega \\
&= C_+\int\limits_{\theta}^{\pi}\int\limits_{\phi}^{2\pi} Y^*_{l',m'}Y_{l,m+1}\ \mathrm{d}\Omega \\
&= C_+ \qquad [\text{ se }\ l'=l\ \text{ e }\ m'=m+1\ ] \\
&= 0 \qquad [\text{ caso contrário }]
\end{aligned}
\tag{65}
$$

Componentes do operador de abaixamento:

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{L}_-\right]_{m',m} &= \int\limits_{\theta}^{\pi}\int\limits_{\phi}^{2\pi} Y^*_{l',m'}\left(\hat{L}_-\right)Y_{l,m}\ \mathrm{d}\Omega \\
&= C_-\int\limits_{\theta}^{\pi}\int\limits_{\phi}^{2\pi} Y^*_{l',m'}Y_{l,m-1}\ \mathrm{d}\Omega \\
&= C_- \qquad [\text{ se }\ l'=l\ \text{ e }\ m'=m-1\ ] \\
&= 0 \qquad [\text{ caso contrário }]
\end{aligned}
\tag{66}
$$

♦ **EXEMPLO**

Representação matricial do operador quadrado do operador do momento angular orbital, para $l = 1$:

$$
\boldsymbol{L}^2 = \begin{array}{c c}
m \rightarrow & \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} & \begin{bmatrix} 2\hbar^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar^2 \end{bmatrix} \\
\uparrow m' &
\end{array} \tag{67}
$$

$$
\boldsymbol{L}^2 = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hbar^2. \tag{68}
$$

Representação matricial do operador da componente z do operador do momento angular orbital, para $l = 1$:

$$
\hat{L}_z = \begin{array}{c c}
m \rightarrow & \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} & \begin{bmatrix} \hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar \end{bmatrix} \\
\uparrow m' &
\end{array} \tag{69}
$$

$$
\hat{L}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \hbar. \tag{70}
$$

Representação matricial do operador de levantamento, para $l = 1$:

$$
\hat{L}_+ = \begin{array}{c c}
m \rightarrow & \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\uparrow m' &
\end{array} \tag{71}
$$

$$
\hat{L}_+ = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hbar. \tag{72}
$$

Representação matricial do operador de abaixamento, para $l = 1$:

$$\hat{L}_- = \begin{array}{cc} m \rightarrow & \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \uparrow m' \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \hbar\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{73}$$

$$\hat{L}_- = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hbar. \tag{74}$$

Por meio da definição (60), representação matricial do operador da componente x do operador do momento angular orbital, para $l = 1$:

$$\hat{L}_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hbar. \tag{75}$$

Por meio da definição (60), representação matricial do operador da componente y do operador do momento angular orbital, para $l = 1$,

$$\hat{L}_y = \frac{\sqrt{2}}{2i} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \hbar. \tag{76}$$

Referências

Heisenberg, W. (1927). *Uber den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik.* Zeitschrift fur Physik, Volume 43, Pages 172-198.

Herbert Goldstein, Charles P. Poole, J. L. S. (2001). *Classical Mechanics.* Addison Wesley, ISBN 978-0201657029, 3rd edition.

Liboff, R. (2002). *Introductory Quantum Mechanics.* Addison Wesley, ISBN 978-0805387148, 4th edition.

Robertson, H. (1929). *The Uncertainty Principle.* Physical Review, Volume 34 (1), Pages 163-164.

Thompson, W. J. (1994). *Angular Momentum: An Illustrated Guide to Rotational Symmetries for Physical Systems.* Wiley-VCH, ISBN 978-0471552642, 1st edition.