$x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$

$$\dot{x} = X_H = -J\nabla_x H$$
$$dH = -i_{X_H}\omega$$
$$\omega = dp_1 \wedge dq^1 + \ldots + dp_n \wedge dq^n$$

$$\dot{q} = \partial_p H$$
$$\dot{p} = -\partial_q H$$

Cambias de coordenadas

Para $y = \phi(x)$ nuevos coordenadas sobre $\mathbb{R}^{2n}$

tenemos :

$$\dot{y} = d_x\phi\,\dot{x}$$
$$\widehat{H}(y) = H(\phi^{-1}(y))$$

$y = \begin{pmatrix} Q(q,p) \\ P(q,p) \end{pmatrix}$

$d_x H = d_y\hat{H}\cdot d_x\phi$

$\nabla_x H\cdot u = \nabla_y\hat{H}\circ d_x\phi u \quad \forall u$

$X \xrightarrow{\phi} Y$, $H: X \to \mathbb{R}$, $\hat{H}: Y\to\mathbb{R}$, $\hat{H} = H\circ\phi^{-1}$

$\hat{H}\circ\phi = H$

$$\Rightarrow \nabla_x H = (d_x\phi)^T\nabla_y\widehat{H}$$

$\dot{x} = -J\nabla_x H$

Pon $A = d_x\phi$, entonces las ecuaciones de movimiento son :

$$\dot{y} = A\dot{x} = -AJA^T\nabla_y\widehat{H}$$

$\dot{Q} = \partial_P\hat{H}$

$\dot{P} = -\partial_Q\hat{H}$

$\dot{y} = -J\nabla_y\hat{H}$

Si $AJA^T = J$ las ecuaciones de movimiento tienen la misma forma!

Llamamos la aplicacion ϕ un transformacion simplectica o canonica.

$\omega(u,v) = u\cdot Jv$
$= u\cdot AJA^Tv$
$= \omega(A^Tu, A^Tv)$

$[AJA^T = J \Rightarrow A^TJA = J]$

Equivalentamente, ϕ es simplectica si $\phi^*\omega = \omega$:

$$\omega(\vec{u},\vec{v}) = \omega(A\vec{u}, A\vec{v}) \quad \text{cada } \vec{u}, \vec{v}.$$

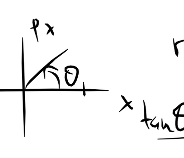
$dP\wedge dQ = dP_1\wedge dQ^1 + \ldots + dP_n\wedge dQ^n = dp_1\wedge dq^1 + \ldots + dp_n\wedge dq^n$

Ejemplo :

para el planar problema de Hooke,

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2}{2}$$
$$\omega = dp_x\wedge dx + dp_y\wedge dy$$

$\begin{pmatrix} \ddot{x} = -x \\ \ddot{y} = -y \end{pmatrix}$



$r_1^2 = p_x^2 + x^2$

$\tan\theta_1 = \frac{p_x}{x}$

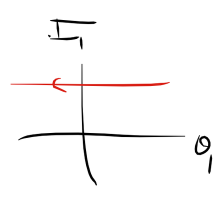
$dx\wedge dp_x = r_1\,dr_1\wedge d\theta_1 = dI_1\wedge d\theta_1$

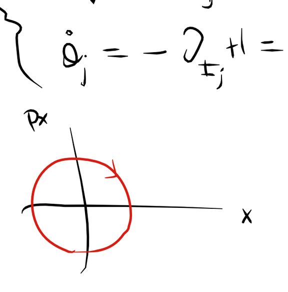
$I_1 = \frac{r_1^2}{2}$

$H = I_1 + I_2$

$d\theta_1\wedge dI_1 + d\theta_2\wedge dI_2$

$\begin{cases} \dot{I}_j = \partial_{\theta_j}H = 0 & I(t) = I_0 \\ \dot{\theta}_j = -\partial_{I_j}H = -1 & \theta(t) = \theta_0 - t \end{cases}$





$\mathbb{R}^{2n}$ $d\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = d\beta$
Poincaré lemma

Una manera de generar transformaciones simplecticas

Observa que $dP\wedge dQ = dp\wedge dq$ sigue desde :

$$d(p\cdot dq - P\cdot dQ) = 0$$

o, porque $d^2 = 0$, so existe un función $S(q,Q)$ para que

$$p\cdot dq - P\cdot dQ = dS$$

$p_1dq^1 + \ldots + p_ndq^n = p\cdot dq$

$d(d\alpha) = 0$

$dS = \partial_q S\cdot dq + \partial_Q S\cdot dQ$

para que este genera una transformación simplectica, consideramos :

$$p = \partial_q S(q,Q) \quad y \quad P = -\partial_Q S(q,Q).$$

Si el segundo es invertible en q (p.ej. si $\partial_q\partial_Q S$ es invertible) determina :

$$q(Q,P)$$

y ahora por substitución en el primero, tenemos

$$p(Q,P) = \partial_q S(q(Q,P), Q).$$

~~$p\cdot dq + Q\cdot dP = dS$~~

* hay variaciones a este esquema, puedes usar 'otros tipos de funciones generadores : $S(q,P)$, $S(p,Q)$, $S(p,P)$.

ejemplo : $S(q,Q) = q_1Q_1 + \ldots + q_nQ_n - \frac{Q_1^2 + \ldots + Q_n^2}{2}$

genera $q_j = Q_j - P_j$, $p_j = Q_j$.

$p_j = \partial_{q_j}S = Q_j$

$P_j = -q_j + Q_j$

$dp\wedge dq = dQ_j\wedge(dQ_j - dP_j) = dP\wedge dQ$

Método de Jacobi (seperación de variables)

Considera una sistema mecánica $H(q,p)$.

Buscamos un cambio de variable para que las ecuaciónes de mov. tienen una forma 'sencilla'.

$\dot{Q} = \partial_P\hat{H} = 0$

$\dot{P} = -\partial_Q\hat{H} = \alpha(Q)$

$\begin{cases} Q(t) = Q_0 \\ P(t) = P_0 + \alpha_0\cdot t \end{cases}$

$\begin{cases} \text{time dep} \\ H\text{-}J \end{cases}$

Tratamos de hacer tal cambio desde un función generador $S(q,Q)$ para que (recuerda $p = \partial_q S$)

$$H(q, \partial_q S(q,Q)) = \widehat{H}(Q)$$

solo depende de Q.

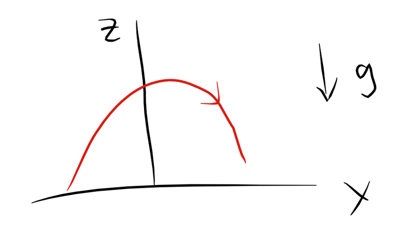
* 1840's Jacobi *
2-center problem
pg. 261 Arnold
fixed attractors

En unos casos especiales, se puede resolver este EDP de Hamilton − Jacobi por seperación de variables. Es decir, con una S de la forma :

$$S(q,Q) = S_1(q_1,Q) + \ldots + S_n(q_n,Q)$$

y con suerte, este hipotesis sobre la forma da S decopla $H - J$ en n EDO's para S_j a resolver.

ejemplo : $H = \frac{p_x^2 + p_z^2}{2m} + mgz$



$S = S_1(x) + S_2(z)$

$cst. = \underbrace{\frac{S_1'(x)^2}{2m}}_{cst.} + \underbrace{\frac{S_2'(z)^2}{2m} + mgz}_{Q_2}$

$\frac{(S_1')^2}{2m} = Q_1$

$S_1(x) = x\sqrt{2mQ_1}$

$P_1 = -\frac{xm}{\sqrt{2mQ_1}} = -t + k_1$

$x = c_1 + tc_2$

Con $S = x\sqrt{2mQ_1} - \frac{(2mQ_2 - 2m^2gz)^{\frac{3}{2}}}{3m^2g}$

Tenemos $H = Q_1 + Q_2$

Entonces $P_1 = -t + k_1$, $P_2 = -t + k_2$
y
$P_j = -\partial_{Q_j}S$ conduce a

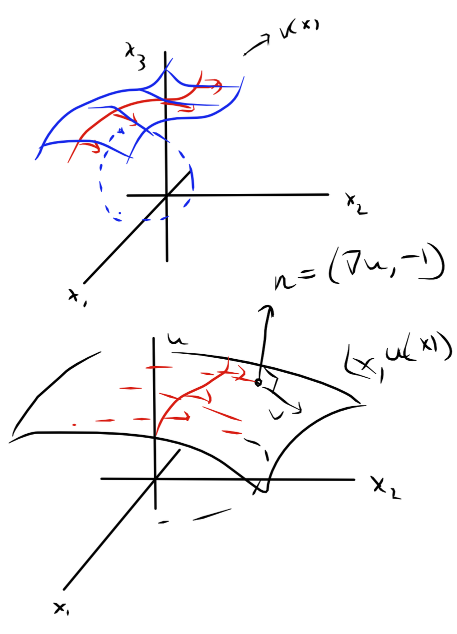
$x = c_1 + tc_2$, $z = a_1 + a_2t - \frac{g}{2}t^2$ (como esperamos)

Método de caracteristicas

puede convertir una EDP de primer orden a una sistema EDO de primer orden.

1. resolver $a_1(x)\partial_{x_1}u + \ldots + a_n(x)\partial_{x_n}u = 0$

es equivalente a buscar integrales del campo vectorial
$v = (a_1,\ldots,a_n)$
$\dot{x}_1 = a_1, \ldots, \dot{x}_n = a_n$



* llamamos las curvas integrales de v las 'caractaristicas'.
se puede construir soluciones (locales) por reuiniendo caracteristicas. *

$v\cdot n = a_1\partial_1 u + \ldots + a_n\partial_n u - f$

2. $a_1(x,u)\,\partial_{x_1}u + \ldots + a_n(x,u)\,\partial_{x_n}u = f(x,u)$

el campo $v = (a_1,\ldots,a_n, f)$
sobre $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$
es tangente a las gráficas $(x, u(x))$ de soluciones.

$\dot{x}_i = a_i$; $\dot{u} = f$

3. en general, $F(x, u, \nabla u) = 0$,

Consideramos $J^1 = \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \ni (x,y,p)$ (el espacio de 1 − chorros)

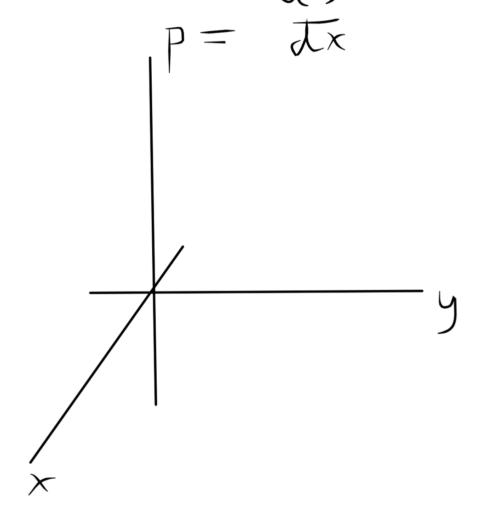
* $F(x,y,p) = 0$ define una hiper superficie $\Sigma\subset J^1$

* buscamos una función $u : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ cuyo 'ascensor' $(x, u(x), \nabla_x u)\subset J^1$ queda en Σ

* cada ascensor de un función es tangente a los 'planos de contacto' :
$\alpha = dy - p\cdot dx = 0$

* contrues un campo de lineas (dirreciones de caracteristicas) sobre Σ por :
−intersecarse el plano tangente a Σ con el plano contacto para obtener $\pi\subset T\Sigma$
−tomas el complemento ortogonal a π con respeto a $d\alpha|_{T\Sigma}$

$p = \frac{dy}{dx}$



El campo vectorial sobre $\Sigma\subset J^1$ que da estas caracteristicas tiene expresión :

$$\dot{x} = F_p\ ,\ \ \dot{y} = p\cdot F_p\ ,\ \ \dot{p} = -(F_x + pF_y)$$

* para edp de primer orden que no depende de u, $F(x,p) = 0$, las caracteristicas para x,p son las ecuaciones de Hamilton :
$\dot{x} = F_p$, $\dot{p} = -F_x$.

Es dicer, si una función
$S : Q\to\mathbb{R}$
satisface la ecuación de Hamilton − Jacobi (tiempo independiente)

$$H(q, d_qS) = E = cst.$$

Entonces la gráfica

$$(q, d_qS)\subset T^*Q$$

es invariante por el flujo de X_H.

Haz cotangente

para $q\in Q$, tenemos el espacio vectorial :

$$T_qQ = \{\ \dot{\gamma}(0)\ :\ \gamma(0) = q, \gamma(t)\in Q\ \}$$
y su dual
$$T_q^*Q = \{\omega : T_qQ\to\mathbb{R}, \text{lineal}\}$$

escribimos $T^*Q = \cup\, T_q^*Q$, para el 'haz cotangente'.

vimos que para un problema mecánica general :
$L(q,v)$

las ecuaciones de movimiento son los de Hamilton para
$H(q,p) = p\cdot q - L$
con $p\in T^*Q$

La forma simplectica sobre T^*Q, se puede definir en una manera 'natural'.

Primero, definimos una 1 − forma

$$\lambda_{(q,p)}(\xi) = p(d\pi\xi)$$

y despues

$\omega = d\lambda$ para nuestro 2 − forma simplectica.

en coordenadas $(q_1,\ldots,q_n)$ para Q, tenemos coordenadas
en TQ por $v = v^1\partial_{q_1} + \ldots + v^n\partial_{q_n}$
y el base dual da coordenadas
en T^*Q por $p = p_1\,dq_1 + \ldots + p_ndq_n$.

En estas coordenadas, $\lambda = p_1dq_1 + \ldots + p_n\,dq_n$.

Las ecuaciones de Hamilton escribimos consisamente como :

$$dH = -i_{X_H}\omega \quad (\dot{x} = X_H)$$