Tarea 1

Prepara 5 de los siguientes ejercicios para entregar.

1. El grupo de rotaciones, O_3, consiste en mapas lineales, $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que preservan el producto interior standard: $A\vec{u} \cdot A\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}$ para todos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Para $A \in O_3$, mostrar que: $AA^T = A^T A = I$. Deducir que: $\det A = \pm 1$.

   Denotamos el conjunto de rotaciones que preservan la orientación standard del espacio (las que tienen determinante 1) como: SO_3.

   (b) Deja que $t \in \mathbb{R} \mapsto A(t) \in SO_3$ sea una curva suave de rotaciones con $A(0) = I$. Mostrar que $\Omega := \frac{d}{dt}|_{t=0} A(t)$ es anti-simétrica: $\Omega^T = -\Omega$.

   El conjunto de todos los mapas lineales anti-simétricos es un espacio vectorial, que denotamos como: $\mathfrak{so}_3$.

   (c) Para $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$, considera el mapa lineal $\Omega_{\vec{\omega}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \vec{v} \mapsto \vec{\omega} \times \vec{v}$. Mostrar que $\Omega_{\vec{\omega}}$ es anti-simétrica. Entonces, tenemos un mapa $\mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}_3$ dado por $\vec{\omega} \mapsto \Omega_{\vec{\omega}}$. Mostrar que este mapa es un isomorfismo de espacios vectoriales.

   (d) Deja que $A(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sea un rotación por angulo ωt alrededor del eje $\hat{k} := (0, 0, 1)$. Verificar que:

   $$\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} A(t)A^{-1}(s) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=s} A^{-1}(s)A(t) = \Omega_{\vec{\omega}}$$

   donde $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$.

   (e) Considerar el marco giratorio: $A(t)\vec{y} = \vec{x}$, con $A(t)$ siendo la rotación de la parte (d). Calcular que:

   $$\dot{\vec{x}} = \vec{\omega} \times \vec{x} + A\dot{\vec{y}}, \quad \dot{\vec{y}} = -\vec{\omega} \times \vec{y} + A^{-1}\dot{\vec{x}}$$

   $$\ddot{\vec{x}} = 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) + A\ddot{\vec{y}}, \quad \ddot{\vec{y}} = -2\vec{\omega} \times \dot{\vec{y}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}) + A^{-1}\ddot{\vec{x}}.$$

2. (a) Considera una curva parametrizada en el espacio, dada en coordenadas Cartesianas por $(x(t), y(t), z(t))$. Calcular la velocidad y aceleración de esta curva en coordenadas esféricas: $x = \rho \sin\varphi \cos\theta, y = \rho \sin\varphi \sin\theta, z = \rho\cos\varphi$.

   (b) Calcular la magnitud de la velocidad al cuadrado, $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, en términos de las coordenadas esféricas, (ρ, φ, θ) y sus derivadas con respecto al tiempo, $(\dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{\theta})$.

3. Considera una partícula, $\vec{q}$, moviéndose sobre una esfera con radio R (es decir que $|\vec{q}(t)| = R$ todo el tiempo).

   (a) En cada momento, podemos dividir la aceleración en dos componentes: $\ddot{\vec{q}} = \ddot{\vec{q}}_{tan} + \ddot{\vec{q}}_{nor}$, donde el componente normal, $\ddot{\vec{q}}_{nor}$, es un múltiplo de $\vec{q}$, y el componente tangencial es tangente a la esfera. Muestra que: $\ddot{\vec{q}}_{nor} = -\frac{|\dot{\vec{q}}|^2}{R^2}\vec{q}$.

   (b) El movimiento de la partícula en la esfera es *libre* si el componente tangencial de su aceleración es cero. Muestra que el movimiento libre en la esfera sucede sobre un gran circulo.

   (c) Para un movimiento sobre la esfera con velocidad constante, la longitud del componente tangencial de su aceleración: $\kappa_{esf} := |\ddot{\vec{q}}_{tan}|$ es llamado la curvatura geodésica de la curva. Calcula la curvatura geodésica de una latitud de la esfera.

4. La altura, h, de una partícula cayendo ($\dot{h}(0) \leq 0$) sometida a la resistencia del aire puede ser modelada por la EDO: $\ddot{h} = -g + \frac{\gamma}{m}\dot{h}^2$, donde $g, \gamma, m > 0$ son constantes. Muestra que, cuando $t \to \infty$, tenemos $\dot{h}(t) \to -\sqrt{\frac{gm}{\gamma}}$.

5. La resistancia en un resorte puede ser modelada por la EDO:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x = 0,$$

donde $\gamma > 0$ es constante y x es el desplazamiento de equilibrio. Haz un boseto de algunas de las soluciones en el plano $(x, \dot{x})$ cuando:

(a) $0 < \gamma < 2$,

(b) $\gamma = 2$,

(c) $\gamma > 2$.

6. Considera unas partículas $\vec{q}_1, ..., \vec{q}_n \in \mathbb{R}^3$ con masas $m_1, ..., m_n$. Deja que $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ sea una rotación instantanea, es decir que genera una rotación alrededor del eje $\vec{\omega}$ con velocidad angular $|\vec{\omega}|$.

(a) Verificar que el momento angular debido a esta rotación instantanea es: $\vec{C} = \sum m_j \vec{q}_j \times (\vec{\omega} \times \vec{q}_j)$.

(b) Definimos $\mathbb{I} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \vec{\omega} \mapsto \sum m_j \vec{q}_j \times (\vec{\omega} \times \vec{q}_j)$. Checar que $\mathbb{I}$ es un mapa lineal y simétrico.

(c) Verificar que $\mathbb{I}\vec{\omega} \cdot \vec{\omega} = \sum m_j |\vec{\omega} \times \vec{q}|^2$.

(d) Expresa $\mathbb{I}$ en una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

7. (a) Considera N puntos $q_1, ..., q_N$ con masas $m_1, ..., m_N$. Definir $q_{cm} := \frac{m_1 q_1 + ... + m_N q_N}{m_1 + ... + m_N}$ por su centro de masa. Dada una partición, $I_1, ..., I_k$ de $\{1, ..., N\}$, deja que Q_j sea el centro de masa de los puntos de I_j y M_j la masa total de los puntos de I_j. Demuestra que

$$q_{cm} = Q_{cm} := \frac{M_1 Q_1 + ... + M_k Q_k}{M_1 + ... + M_k}.$$

(b) Muestra el teorema de Ceva (ver figuras): si A, B, C son vértices de un triángulo y A', B', C' son puntos en los segmentos BC, AC, AB resp. entonces las líneas AA', BB', CC' son concurrentes si y solo si tenemos:

$$\frac{|AB'|}{|B'C|}\frac{|CA'|}{|A'B|}\frac{|BC'|}{|C'A|} = 1.$$

8. (a) La evolvente de una curva planar es el conjunto de puntos trazados por el final de una cuerda con longitud fija que esta unida a la curva en un punto fijo. Muestra que la línea tangente a la evolvente en un punto es perpendicular a la cuerda en este punto (ver figuras).

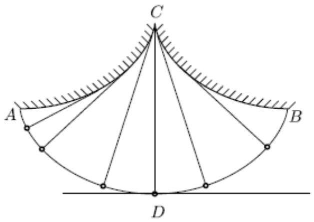
(b) La curva cicloide esta definida por la curva que traza un punto en un círculo cuando el círculo se rueda a lo largo de una línea. Calcular la longitud de un arco de la cicloide (un arco es cuando el círculo se rueda alrededor una vez). Determina la evolvente de una cicloide cuando una cuerda con la mitad de la longitud de un arco es adeherida a la 'cusp' de la cicloide (ver figuras).

9. (a) Considera dos resortes en parallelo (ver figuras) con costantes de resorte k_1, k_2. Escribe las ecuaciones de movimiento para una masa unida a los resortes.

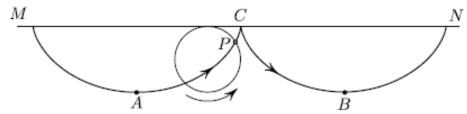
(b) Considera dos resortes en serie (ver figuras) con costantes de resorte k_1, k_2. Escribe las ecuaciones de movimiento para una masa unida al final del los resortes.

(c) Considera una cuenta que puede deslizarse libremente a lo largo de un alambre recto sujeto a la fuerza de un resorte no alineado con el alambre (ver figura). Deja que la longitud del resorte en equilibrio sea L_0. Determina las posiciones de reposo de la cuenta y su estabilidad (la respuesta dependerá de L_0 y D).

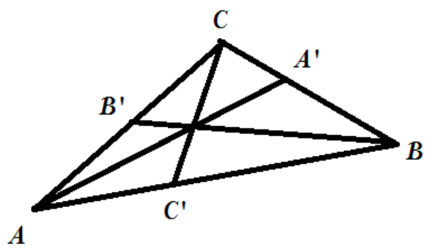
Figuras:



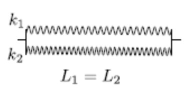
8a) La evolvente de una curva. La linea tangenta a la evolvente por D es perpendicular a la cuerda (CD).



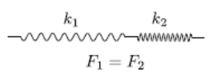
8b) La curva cicloide. Un arco del cicloide es la curva pasando por MAC. El 'cusp' es por el punto C.



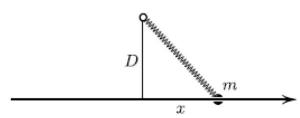
7b) Teorema de Ceva.



9a) resortes en parallelo



9b) resortes en serie



9c) Una cuenta restrigido a deslizar sobre una linea, sometido a fuerza por un resorte.