En estas notas, damos un breve resumen de formas diferenciales y sus derivadas importantes. Essencialmente, estamos desarrolando una notación y estructura para extender el cálculo integral de $\mathbb{R}^3$ a dimensiones mas grandes. Las secciones relevante de Arnold son ch. 7 y sec. 18 (pg. 77).

Vectores tangentes, cotangentes

La etapa es una 'espacio suave de dimensión n', X (un variedad de dim. n). Podemos pensar de un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, determinado por las intersecciones de conjuntos niveles de varias funciones, p.ej. superficies en espacio como la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, o simplamente pensamos de $X = \mathbb{R}^n$.

Las *vectores tangentes* a un punto $x \in X$ son todos velocidades de curvas que pasan por x:

$$T_xX := \{\dot{\gamma}(0) \ t.q. \ \gamma(t) \in X, \gamma(0) = x\}.$$

Es un espacio vectorial. Los *vectores cotangentes* por x son elementos del espacio vectorial dual (vamos a pensar de ellos como impulsos):

$$T_x^*X := \{\text{aplicaciones lineales } \omega : T_xX \to \mathbb{R}\}.$$

Llamamos todos posiciones y velocidades, $TX := \cup T_xX$, el *haz tangente*, y todos posiciones y impulsos, $T_x^*X := \cup T_x^*X$, el *haz cotangente*.

Coordenadas: Recordar que para un espacio vectorial, V^n, con base $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ tenemos un base dual $v^1, ..., v^n$ de V^*. Interpretamos $v^j : V \to \mathbb{R}$ como proyección sobre el eje-$\vec{v}_j$: $v^j(x_1\vec{v}^1 + ...x_n\vec{v}^n) = x_j$.

Consideramos un parametrización (local): $\mathbb{R}^n \ni (x^1, ..., x^n) = x_c \leftrightarrow x \in X$ donde $x_c \in \mathbb{R}^n$ son las coordenadas de $x \in X$.

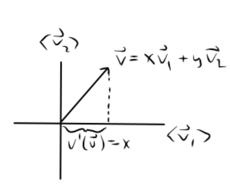
Tal parametrización determina *bases coordenadas* para los espacios tangentes: imagenes de las curvas $x_c + te_j$, donde $e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 0, 1)$ son curvas en X que pasan por x (ver figuras). Denotamos sus velocidades como $\partial_j|_x \in T_xX$ o $\frac{\partial}{\partial x^j}|_x$. Cuando el 'punto base' x es claro de contexto escribimos ∂_j.

El correspondiente base de T_x^*X dual a $\{\partial_j|_x\}$ escribimos como d_xx^j, o cuando el punto base es claro de contexto simplamente como dx^j.

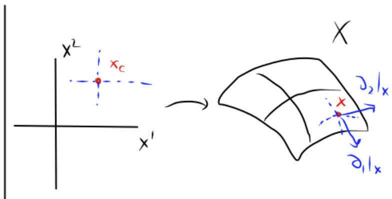
Diferenciales: Se puede comprender la notación dx^j en la siguiente manera. Observa que una función $f : X \to \mathbb{R}$ tiene su diferencial por un punto, $d_xf : T_xX \to \mathbb{R}$ que envia la velocidad $v = \dot{\gamma}(0) \in T_xX$ al numero $\frac{d}{dt}|_{t=0}f(\gamma(t))$ (pensar de regla de cadenas!). La diferencial es linear, es decir $d_xf \in T_x^*X$. Ahora, con la parametrización, asociamos a los parametrizados $x \in X$ puntos $x_c = (x^1(x), ..., x^n(x)) \in \mathbb{R}^n$, es decir cada componente $x^j(x)$ es un función (local) $x^j : X \to \mathbb{R}$. Las diferenciales $d_xx^j \in T_x^*X$ son precisamente el base dual a nuestro base coordenada $\partial_j|_x$ de T_xX (verificarlo!).

Del mismo modo, uno se puede definir la *diferencial* por un punto de una transformación (suave) $f : X \to Y$ entre dos variedades, que se denota comúnmente por $d_xf : T_xX \to T_{f(x)}Y$ o $f_{*x} = d_xf$.

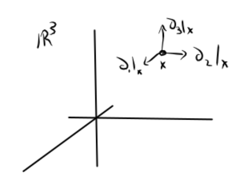
El ejemplo familiar tener en mente es $\mathbb{R}^3$ con coordenadas Cartesianas (x^1, x^2, x^3). Los bases coordenadas son el base estandard de $\mathbb{R}^3$, traslado al punto base apropriado: $\partial_j|_x = e_j$ 'basado por x' (ver figuras).



base dual como proyecciones



vectores tangentes desde una parametrización



en $\mathbb{R}^3$ el base coordenada es el estandard traslado paralelemente al punto de base.

Formas y derivadas

Una 1-forma es el analogo de un campo vectorial para vectores cotangentes, es decir una campo de vectores cotangentes, o un campo de impulsos:

$$\text{escogemos una } \omega_x \in T_x^*X \text{ para cada } x \in X \text{ en una manera 'suave'}.$$

En coordenadas, tenemos $\omega_x = a_1(x)d_xx^1 + ... + a_n(x)d_xx^n$, o $\omega = a_1dx^1 + ... + a_ndx^n$ donde $a_j : X \to \mathbb{R}$ son funciones suaves.

Una formas son 'integrandos sobre lineas', es decir, dado una curva (orientada), $\gamma \subset X$ y 1-forma ω:

$$\int_\gamma \omega := \int_{t_0}^{t_1} \omega_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))\ dt,$$

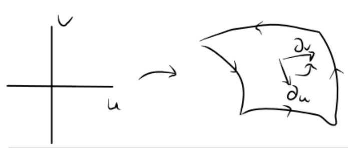
donde γ esta parametrizado de t_0 a t_1 por $\gamma(t)$. En $\mathbb{R}^3$ tales expreciones son exactamente las 'integrales sobre lineas' que uno encontre en cálculo vectorial (ver tabla 1). Observa que el integral no depende por la parametrización de la curva *excepto* cuando cambiamos la orientación, que cambia el signo.

Similarmente, k-formas son ciertos 'integrandos sobre (orientados) k-variedades' y se generalizan las integrales de superficies que conozcan en $\mathbb{R}^3$. Recordar que la *orientación* del superficie cambia efecta el signo de tales integrales, p.ej. integrales de flujo en $\mathbb{R}^3$ requiere escoger un normal al superficie, se evaluan por integración de ciertos areas con signo de 'paralelopípedos infinitesimales', es decir paralelopípedos formados por vectores tangentes (ver figuras).

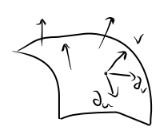
Producto de cuña: Uno puede pensar en este producto como una manera conveniente de escribir ciertos determinantes que dan 'sumas pesadas de k-areas orientadas de proyecciones' o equivilentamente que dan un base (y producto) sobre el espacio de aplicaciones multi-lineales y anti-simetricas.

En $\mathbb{R}^3$, con coordenadas Cartesianos x^1, x^2, x^3, calculamos volumenes orientadas de paralelopípedos con lados u, v, w por el producto triple: $(u, v, w) \mapsto (u \times v) \cdot w = det(u, v, w)$ donde el determinante consiste en poner las coordenadas de los vectores por las filas del matriz. Este aplicación es anti-simetrica y multi-lineal, se denota con cuñas por $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

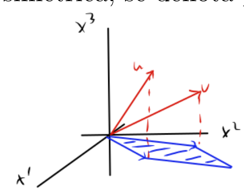
Todavia en $\mathbb{R}^3$, calculamos areas de proyecciones de paralelogramos tambien con determinantes. Por ejemplo, $(u, v) \mapsto e_3 \cdot (u \times v) = u_1v_2 - u_2v_1$, da el area orientado de la paralelogramo con lados u, v proyecionado al plano x^1x^2. Este aplicación es multi-lineal y anti-simetrica, se denota por $dx^1 \wedge dx^2$.



parametrización de una superficie relacione al orientación con el orden en que tomamos los vectores tangentes ∂_u, ∂_v.



integrales de flujo de v atras una superficie tienen integrandos : $v \cdot (\partial_u \times \partial_v)\ du\, dv$



area de u, v proyectada al plano x^1x^2 se calcula por : $u_1v_2 - u_2v_1 = e_3 \cdot (u \times v) =: dx^1 \wedge dx^2(u,v)$

En $V = \mathbb{R}^n$, escribimos $dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$ para el k-lineal y anti-simetrica funcional $\overbrace{V \times ... \times V}^{k-veces} \to \mathbb{R}$ que da el orientado k-area del paralelopipedo con lados $v_1, ..., v_k$ proyectado al k-plano $x^{i_1}...x^{i_k}$. Formulas para tales k-formas se expresan con determinantes, p.ej. $dx^1 \wedge ... \wedge dx^k(\vec v_1, ..., \vec v_k)$ es el determinante del matriz $k \times k$ con los primeros k coordenadas de $\vec v_j$ por la fila j del matriz. Productos de tales 'elementos básicos' es definida por yuxtapoisición: $(dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}) \wedge (dx^{j_i} \wedge ... \wedge dx^{j_\ell}) := dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_i} \wedge ... \wedge dx^{j_\ell}$, geometricamente el $k + l$-area orientado de proyecciones al plano $x^{i_1}...x^{i_k}x^{j_1}...x^{j_\ell}$.

Teorema: Las formas basicas $dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$ con $i_1 < ... < i_k$ son un base para el espacio vectorial de funcionales k-lineal y anti-simetrica. Uno se extiende el producto de cuña linealmente.

Por ejemplo, $(dx^1 \wedge dx^2 + 3dx^3 \wedge dx^4) \wedge dx^1 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^1 + 3dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^1 = 3dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4$. También notar que una k-lineal anti-simetrica funcional, geometricamente es una 'suma pesada de orientadas areas proyectadas', p.ej. $dx^1 \wedge dx^2 + 4dx^2 \wedge dx^3$ significa que sumamos el area del paralelogramo proyeccionada al plano x^1x^2 y 4 veces el area del paralelogramo proyeccionada al plano x^2x^3.

Bosquejamos la teorema para $k = 2$. Sea V^n un espacio vectorial y $B^2(V)$ el espacio vectorial de funcionales bilineales $V \times V \to \mathbb{R}$. Dado un base $\vec v_1, ..., \vec v_n$ de V con corespondiente base $v^1, ..., v^n$ de V^*, tenemos:

* las funcionales bilineales, $(u, v) \mapsto v^j(u)v^k(v)$, son un base de $B^2(V)$. Se denota por $v^j \otimes v^k$,
* la representación de $\beta \in B^2(V)$ en este base, $\beta = \sum_{j,k} \beta_{jk} v^j \otimes v^k$, tiene $\beta_{jk} = \beta(\vec{v}_j, \vec{v}_k)$,
* la representación matricial de $\beta \in B^2(V)$ se puede expresar con 'productos externos' $\sum_{j,k} \beta_{jk} e_j e_k^T$.

Ahora, consideramos las funcionales bilinear y anti-simetricas, $\bigwedge^2 V \subset B^2(V)$, tenemos:

* $\beta \in \bigwedge^2 V$, en el base arriba tiene $\beta_{jk} = -\beta_{kj}$, entonces $\beta = \sum_{j<k} \beta_{jk}(v^j \otimes v^k - v^k \otimes v^j)$,
* ponemos $v^j \wedge v^k := v^j \otimes v^k - v^k \otimes v^j \in \bigwedge^2 V$. La colección $\{v^j \wedge v^k : j < k\}$ es un base de $\bigwedge^2 V$,
* notar que $v^j \wedge v^k(\vec{u}, \vec{v}) = u_j v_k - u_k v_j$ es 'area orientada' de proyección al plano $\vec{v}_j, \vec{v}_k$.

El proceso arriba esta cerca de unas identifiaciones comunes de algebra lineal. Considera el espacio $B^2(V, W)$ de mapas bilineales $V \times W \to \mathbb{R}$. Para practicar con algebra lineal podrias pensar sobre las isomorfismos naturales de $B^2(V, W) = L(V, W^*) = L(W, V^*) = (V \otimes W)^* = V^* \otimes W^*$, donde p.ej. $L(V, W^*)$ denota mapas lineales $V \to W^*$, un tal aplicación natural es $A \in L(V, W^*) \mapsto \beta_A(v, w) := (Av)(w) \in B^2(V, W)$.

Regresando a formas, una 2-forma es un campo de anti-simetrica bilineal funcionales $\omega_x : T_x X \times T_x X \to \mathbb{R}$. En coordenadas, tenemos $\omega = a_{12} dx^1 \wedge dx^2 + \ldots$. Para integrarlo sobre una superficie (orientado) $\Sigma \subset X$:

$$\int_\Sigma \omega := \int_{v_0}^{v_1} \int_{u_0}^{u_1} \omega_{\varphi(u,v)}(\partial_u, \partial_v)\, du dv,$$

donde parametrizamos Σ por $\varphi : [u_0, u_1] \times [v_0, v_1] \to \Sigma, (u, v) \mapsto \varphi(u, v)$. El orden ∂_u, ∂_v captura la orientación de Σ (y induce un orientación sobre su frontera $\partial\Sigma$), ver figuras arriba.

General k-formas son campos de anti-simetrica k-lineal funcionales. Son 'integrandos sobre orientados k-variedades', expresado en coordenadas como $\omega = a_{12\ldots k} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k + \ldots$.

Tabla 1: diccionario para $\mathbb{R}^3$:

$\int_\gamma v \cdot d\vec{s} = \int v \cdot \dot{\gamma}\ dt$	$\omega^1 = v_1 dx^1 + v_2 dx^2 + v_3 dx^3 = \omega_v^1$	$\int_\gamma \omega^1$
$\int_\Sigma v \cdot d\vec{S} = \int v \cdot \hat{n}\ dA$	$\omega^2 = v_1 dx^2 \wedge dx^3 + v_2 dx^3 \wedge dx^1 + v_3 dx^1 \wedge dx^2 = \omega_v^2$	$\int_\Sigma \omega^2$
$\int_D \rho\ dV$	$\omega^3 = \rho\ dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \rho\ \omega_{vol}$	$\int_D \omega^3$

Derivada interior: Notar que en $\mathbb{R}^3$, identificamos los 3 componentes que aparecen en 1-formas y 2-formas como los de un campo vectorial v. En tabla 1, podemos escribir en terminos de producto interior y producto de cross:

$$\omega_v^1(u) = v \cdot u, \quad \omega_v^2(u, w) = v \cdot (u \times w), \quad \omega_{vol}(u, v, w) = (u \times v) \cdot w,$$

lo que conduce a las formulas familiares de cálculo vectorial en $\mathbb{R}^3$.

Observa que $\omega_v^2 = i_v \omega_{vol}$, donde la *derivada interior*, i_v, es en general definida como un operador tomando $k+1$-formas a k-formas por:

$$i_v \omega(v_1, \ldots, v_k) := \omega(v, v_1, \ldots, v_k). \tag{1}$$

Cambio de variables: El hecho de que integración de k-formas no depende de (misma orientada) parametrizaciones, sigue de la formula para *cambiando variables*: $\int_{\varphi(D)} \omega = \int_D \varphi^* \omega$, donde para una k-forma ω tomamos

$$(\varphi^* \omega)_x(v_1, \ldots, v_k) := \omega_{\varphi(x)}(\varphi_{*,x} v_1, \ldots, \varphi_{*,x} v_k). \tag{2}$$

En palabras, escribimos ω en el nuevo variable $y = \varphi(x)$ y evaluarlo en los nuevos vectores cambiados por regla de cadena: $v_j \to \varphi_{*,x} v_j$.

En practico, se hace cambios de variables en una manera sencilla por substitución. Por ejemplo, para cambiar la forma de area en el plano, $dx \wedge dy$, a coordenadas polares consiste en reemplazar $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

para que: $dx \wedge dy = d(r\cos\theta) \wedge d(r\sin\theta) = (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \wedge (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) = rdr \wedge d\theta$.

Derivada exterior: Este generaliza las derivadas 'grad, curl, div' de cálculo vectorial. Recordamos la definición de divergencia en $\mathbb{R}^3$. Para un campo vectorial, v, su divergencia $div(v)$ es la función:

$$div(v)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(P_\varepsilon)}{vol(P_\varepsilon)},$$

donde P_ε es el paralelopipedo (cubo) con lados εe_j basado por x (entonces $vol(P_\varepsilon) = \varepsilon^3$), y $F(P_\varepsilon) = \int_{\partial P_\varepsilon} \omega_v^2$ es el flujo de v atras ∂P_ε.

En general, la derivada exterior de una k-forma es una $k+1$-forma $d\omega$ definido por:

$$d\omega_x(\partial_{i_1}, ..., \partial_{i_{k+1}}) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(P_\varepsilon)}{\varepsilon^{k+1}},$$

donde $F(P_\varepsilon) = \int_{\partial P_\varepsilon} \omega$ es el 'flujo de ω' atras la frontera, ∂P_ε, de la coordenada $k+1$-paralelopipedo, P_ε, con lados $\varepsilon\partial_{i_1}, ..., \varepsilon\partial_{i_{k+1}}$.

Sigue de la arriba definición geometrical, una expresion en coordenadas, útil en computaciones:

$$d(a_{12...k}dx^1 \wedge ... \wedge dx^k + ...) = da_{12...k} \wedge dx^1 \wedge ... \wedge dx^k + ... \tag{3}$$

En este formula, usamos que las coeficientes, $a_{i_1...i_k}$ son funciones y diferenciales de funciones son 1-formas. En coordenadas $df = (\partial_{x^1} f)dx^1 + ... + (\partial_{x^n} f)dx^n$.

Por ejemplo: $d(xydy - ydx) = d(xy) \wedge dy - dy \wedge dx = (ydx + xdy) \wedge dy + dx \wedge dy = (y+1)dx \wedge dy$.

La formula principal para derivada exterior es:

Teorema (Stokes generalizada): $\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$.

Cuidado con signos: la frontera debe tener la orientación heredada de la orientación del dominio.

Tabla 2: mas diccionario en $\mathbb{R}^3$:

$df = \omega^1_{\nabla f} = \omega^1_{grad(f)}$
$d\omega^1_v = \omega^2_{\nabla\times v} = \omega^2_{curl(v)}$
$d\omega^2_v = (\nabla \cdot v)\ \omega_{vol} = div(v)\ \omega_{vol}$

Derivada de Lie: al final consideramos una derivada que mide el 'cambio de una forma bajo el flujo de un campo vectorial'.

Sea v un campo vectorial con flujo ϕ^t y ω una k-forma. Para medir el cambio de ω bajo v, dejamos $x \in X$ y $v_1, ..., v_k \in T_x X$. Medimos los valores de $\omega_x(v_1, ..., v_k)$ cuando mientras movemos x y v_j bajo el flujo de v:

$$f(t) = \omega_{\phi^t x}(\phi^t_{*x} v_1, ..., \phi^t_{*x} v_k) = (\phi^{t*}\omega)_x(v_1, ..., v_k) \in \mathbb{R}.$$

Definimos una k-forma por:

$$(\mathscr{L}_v \omega)_x(v_1, ..., v_k) := f'(0) \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

que llamamos la derivada de Lie de ω por v. En breve escribimos $\mathscr{L}_v\omega = \frac{d}{dt}\phi^{t*}\omega$, donde ϕ^t es el flujo de v.

Por ejemplo, la significación geometrical de $\mathscr{L}_v dx^1 \wedge dx^2 = 0$, esta que para $u_1, u_2 \in T_x X$ el area del paralelogramo con lados $\phi^t_* u_1, \phi^t_* u_2$ proyectado al plano x^1x^2 seria costante. O tambien, significa que para un superficie, Σ, el area de su proyección en el plano x^1x^2 queda costante bajo el flujo de v, es decir el mismo como el area proyectado al x^1x^2 plano de $\phi^t\Sigma$.

En forma integrada, tenemos un interpretación con cambio de variables: $\int_{\phi^t D} \omega = \int_D \phi^{t*}\omega$ implica

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \int_{\phi^t D} \omega = \int_D \mathscr{L}_v \omega.$$

Es decir, si se mueve una region bajo v, el cambio en un integral sobre estos regiones moviendo es egal a la integral de la derivada de Lie en el dirección v del integral.

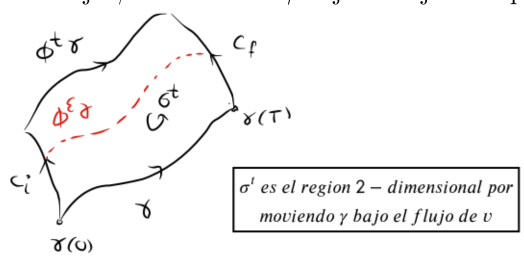
Fórmula mágica de Cartan (fórmula de homotopía)

Este formula útil reliciona las tres derivadas que hemos introducido:

$$\mathscr{L}_v = d i_v + i_v d. \tag{5}$$

Para un aplicación, derivamos que campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ con $div(v) = 0$ preservan volumen: $\frac{d}{dt}|_{t=0} vol(\phi^t D) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \int_{\phi^t D} \omega_{vol} = \int_D \mathscr{L}_v \omega_{vol} = \int_D d i_v \omega_{vol} + i_v d\omega_{vol} = \int_D d\omega_v^2 = \int_D div(v)\ \omega_{vol} = 0$. Entonces, $\frac{d}{dt} vol(\phi^t D) = 0$ para cualquier region D, y volumen queda constante bajo el flujo, ϕ^t, de v.

demonstración de eq. 5 (para 1-formas): Sea ω una 1-forma, γ una curva orientada y v un campo vectorial con flujo ϕ^t. Moviendo γ bajo el flujo de v produce 'una tira', que denotamos σ^t (ver figura).



La frontera de σ^t es $\partial\sigma^t = \gamma - \phi^t\gamma + c_f - c_i$, entonces:

$$(*) \qquad \int_{\sigma^t} d\omega = \int_{\partial\sigma^t} \omega = \int_\gamma \omega - \int_\gamma \phi^{t*}\omega + \int_{c_f - c_i} \omega.$$

Obtenemos la forma integral de eq. 5, por diferenciando $(*)$ con respeto a t por $t = 0$. Para hacer este, usamos la parametrización: $[0,T] \times [0,t] \to \sigma^t, (s,\varepsilon) \mapsto \phi^\epsilon\gamma(s)$. Calculamos $\partial_s \to \phi^\varepsilon_* \dot{\gamma}(s),\ \partial_\varepsilon \to v(\phi^\varepsilon\gamma(s))$.

Ahora, $\int_{\sigma^t} d\omega = \int_0^t \int_0^T d\omega_{\phi^\varepsilon\gamma(s)}(\partial_s, \partial_\varepsilon)\ ds d\varepsilon$, para que

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \int_{\sigma^t} d\omega = \int_0^T d\omega_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s), v(\gamma(s)))\ ds = -\int_\gamma i_v d\omega.$$

Proxima, $\int_{c_f} \omega = \int_0^t \omega_{\phi^\varepsilon\gamma(T)}(v(\phi^\varepsilon\gamma(T)))\ d\varepsilon$, para que $\frac{d}{dt}|_{t=0} \int_{c_f} \omega = \omega_{\gamma(T)}(v(\gamma(T)))$. De mismo modo, $\frac{d}{dt}|_{t=0} \int_{c_i} \omega = \omega_{\gamma(0)}(v(\gamma(0)))$. Juntos,

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \int_{c_f - c_i} \omega = i_v\omega|_{\gamma(0)}^{\gamma(T)} = \int_\gamma d i_v \omega.$$

Entonces, aplicando $\frac{d}{dt}|_{t=0}$ a $(*)$ da: $-\int_\gamma d i_v\omega = -\int_\gamma \mathscr{L}_v\omega + \int_\gamma d i_v\omega$, o

$$\int_\gamma \mathscr{L}_v \omega = \int_\gamma d i_v \omega + i_v d\omega.$$

Este queda cierto para cualquier curva γ, que implica eq. 5 (la misma idea funciona para k-formas). □

Referencias

Usando formas, es una notación eficiente para hacer computaciones. Hay un gran numero de 'identidades' como el formula de Cartan que vimos arriba que sirven en varias situaciones. Tales identidaes relacionan las 'operaciones fundamentales' que vimos en estas notas: la cuña, $\wedge$, 'retrasar' o cambio de coordenadas, φ^*, derivada interior, i_v, derivada exterior, d, y derivada de Lie, $\mathscr{L}_v$.

La usa de formas juega un papel mayor por ejemplo en geometría diferencial, física, topología, ... Ya mencionamos las secciones relevante de Arnold, pero también hay otras referencias concisas para familiarizarse con el uso de formas. Por ejemplo: do Carmo 'differential forms and applications', Weintraub 'differential forms: theory and practice', Bachman 'a geometric approach to differential forms', Darling 'differential forms and connections', ... Si tu mira algún de estos libros y encontra uno que te gusta, te beneficiará trabajar con los ejercicios y desarolla estas herramientas.

Terminamos con una tablita de unas identidades adicional a la de Cartan. En este tabla ω es una k-forma y η una ℓ-forma.

$\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge \omega$	$\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\eta$	$i_v(\omega \wedge \eta) = i_v\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge i_v\eta$
$d(d\omega) = 0$	$\varphi^*(d\omega) = d\varphi^*\omega$	$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$
$\mathscr{L}_v d\omega = d\mathscr{L}_v\omega$	$\mathscr{L}_v(\omega \wedge \eta) = \mathscr{L}_v\omega \wedge \eta + \omega \wedge \mathscr{L}_v\eta$	$\mathscr{L}_v(i_u\omega) = i_{[v,u]}\omega + i_u\mathscr{L}_v\omega$

En la última entrada de esta tabla tenemos los soportes de Lie, $[\cdot,\cdot]$. Dado dos campos vectoriales, su soporte $[v,u]$ es un otro campo vectorial. Es un caso de la derivada de Lie, en que este campo vectorial mide el 'cambio de u bajo el flujo de v', o lo que termina siendo la misma mide si los flujos de los campos u, v comutan. Se puede definir por: $[v,u] = \mathscr{L}_v u := \frac{d}{dt}|_{t=0}\phi_*^{-t}u$, donde ϕ^t es el flujo de v.