

TAREA 5/6

Prepara 6 de los siguientes ejercicios para entregar.

1. Para el grupo de Lie $G = SO_3$ de rotaciones, tenemos $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_3 = \mathbb{R}^3$ según la identificación con producto de cross. Para $g \in G$ una rotación, describir la transformación $Ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$.
2. Mostrar que $\frac{d}{dt}|_{t=0} \det(I + tA) = \text{tr}(A)$.
3. Usamos la notación en las notas sobre formas diferenciales, se puede usar para estos ejercicios cualquier de las identidades en estas notas.

Sea u, v, w campos vectoriales con divergencia cero en $D \subset \mathbb{R}^3$ y también tangente a la frontera ∂D .

(a) Verificar que $\int_D \omega_u^1 \wedge \omega_v^2 = \int_D (u \cdot v) \omega_{vol} =: \langle u, v \rangle$ y $d(i_u i_v \omega_{vol}) = i_{[u,v]} \omega_{vol} = \omega_{[u,v]}^2$.

(b) Mostrar: $\langle [u, v], w \rangle = \langle u \times \text{curl}(w), v \rangle$.

Sugerencia: usa $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta - \omega \wedge d\eta$ para 1-formas ω, η .

(c) Para α un función sobre D , mostrar: $\langle \text{grad}(\alpha), v \rangle = 0$.

estos ejercicios conduce a la ecuación de Euler para fluidos. Esencialmente, has calculado el operador que llamamos B en 'lecture 18': $B(v, v) = v \times \text{curl}(v) + \text{grad}(\alpha)$, donde el función α esta determinado por la condición de que $B(v, v)$ tiene divergencia cero.

4. (a) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ homogénea de grado α : $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$ cada $\lambda > 0$. Mostrar que $d_x f(x) = \nabla_x f \cdot x = \alpha f(x)$.

Considera el problema de n -cuerpos en el plano, con potencial Newtoniano: $U = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}$. Suponer que $q(t) = \lambda(t) q_o$ para $\lambda(t) \in \mathbb{C}$ es una solución con q_o una configuración fijada con centro de masa cero.

(b) Mostrar que $\nabla_{q_o} U = k \nabla_{q_o} I$ donde $I = \sum m_j |q_j|^2$ y k es algún constante. Además mostrar que $\lambda(t)$ satisface una ecuación de Kepler: $\ddot{\lambda} = -\mu \frac{\lambda}{|\lambda|^3}$ donde μ es algún constante.

5. Deja que V sea un espacio vectorial de dimension n , y $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma symplectica sobre V . Es decir: ω es bilineal, anti-simétrica y no-degenerado: $\omega(\vec{u}, \vec{v}) = 0, \forall \vec{v} \in V \Rightarrow \vec{u} = 0$.

(a) Mostrar que $\dim(V)$ es par, $n = 2k$.

(b) Mostrar que existe una base, $e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, f_2, \dots, f_k$ de V para que $\omega(e_j, f_j) = 1$ y todos los otros productos son cero.

6. El grupo symplectica (lineal), $\text{Sp}(2n)$, consiste de las aplicaciones lineales $A : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tal que $\omega(\vec{u}, \vec{v}) = \omega(A\vec{u}, A\vec{v})$ para todos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^{2n}$. Para $A \in \text{Sp}(2n)$, mostrar:

(a) $AJA^T = A^T JA = J$,

(b) $\det(A) = 1$ (considerar los autovalores de A).

7. Sea $\omega = dp_1 \wedge dq^1 + \dots + dp_n \wedge dq^n$ la forma symplectica estandar sobre \mathbb{R}^{2n} .

(a) Dado una transformación de 'base', $q \mapsto Q = Aq$, donde $A_{n \times n}$ es una mapa lineal $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, verificar que su 'levantamiento symplectica' a $(q, p) \mapsto (Q, P)$ donde $A^T P = p$ es una transformación symplectica de \mathbb{R}^{2n} .

(b) Para el problema de 3-cuerpos (q_1, q_2, q_3) , determinar el levantamiento symplectica de la transformación heliocéntrica: $Q_1 = q_1, Q_2 = q_2 - q_1, Q_3 = q_3 - q_1$. Dar la expresión para la Hamiltoniana en estas coordenadas heliocéntricas.

8. Usar el método de separación de variables para cambiar el oscilador armónico $H = \frac{p_x^2 + k^2 x^2}{2}$, $dp_x \wedge dx$ (donde $k > 0$ es un constante) a la forma $H(I)$, $dI \wedge d\theta$.

9. Dibuja la evolución de las gráficas $u(x, t)$ por varios valores de t donde u es una solución de las siguientes EDP con dadas condiciones iniciales:
- (a) $tu_t + xu_x = 0$, con condición inicial $u(x, 1) = x$. También con condición inicial $u(x, 1) = x^2$. ¿Que pasa con condiciones iniciales $u(x, 0) = f(x)$?
 - (b) $tu_t + xu_x = 1$, con condición inicial $u(x, 1) = x$
 - (c) $xu_t - tu_x = 0$, con condición inicial $u(x, 0) = x$. También con condición inicial $u(x, 0) = x^2$.
10. Sea $\gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ una parametrización por longitud del arco de una curva planar (entonces $|\gamma'(s)| = 1$). La normal unitario por $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ es $n(s) = i\gamma'(s) := (-y'(s), x'(s))$.
- (a) Mostrar que $\gamma''(s) = \kappa(s)n(s)$ para algún $\kappa(s) \in \mathbb{R}$. Llamamos κ la curvatura de γ . Verificar que $n'(s) = -\kappa(s)\gamma'(s)$.
 - (b) Considera una reparametrización por t de la curva planar: $\Gamma(t) = \gamma(s(t))$, donde $\mathbb{R} \ni t \mapsto s(t) \in \mathbb{R}$ da la reparametrización.
- Verificar que $\kappa = \frac{\ddot{\Gamma} \cdot i\dot{\Gamma}}{|\dot{\Gamma}|^3}$, donde los 'dots' son diferenciación por t : $\dot{\Gamma} = \frac{d\Gamma}{dt} = (\dot{x}, \dot{y})$ y $i\dot{\Gamma} := (-\dot{y}, \dot{x})$.
- (c) Determina la caustica de la parábola: $y = x^2$.
11. (a) El problema de 'estacionar' o 'aterrizaje suave' 1-dimensional consiste de considerar $\ddot{q} = u$, para $q \in \mathbb{R}$ y un control $u \in [-1, 1]$. Determina posibles controles óptimos, $u_*(t)$, para tomar una posición y velocidad inicial, $(q_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ al origen en tiempo minimal. Bosqueja tales trayectorias en el plano de posiciones y velocidades (q, v) .
- (b) Deteniendo un resorte: considerar $\ddot{q} = -q + u$ con $q \in \mathbb{R}$ y $u \in [-1, 1]$. Determina posibles controles óptimos, $u_*(t)$ para tomar una posición y velocidad inicial, $(q_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ al origen en tiempo minimal. Bosqueja tales trayectorias óptimas en el plano de posiciones y velocidades (q, v) .
- *Notar que en estos problemas, el control $u(t)$ no tiene que ser continuo – pueden ser, p.ej. continuo por partes o funciones escalones.*
12. Dar ejemplos de campos vectoriales en el plano y en la línea para que:
- (a) sus corchetes de Lie son cero
 - (b) sus corchetes de Lie no son cero.
13. Considere los primeros dígitos que parecen en los poderes de dos: $1, 2, 4, 8, 1, 3, \dots$. Determine las frecuencias en que dados dígitos parecen. Es decir determinar los límites:

$$p_m := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{\text{veces } 2^k \text{ tiene primer dígito } m \text{ para } 0 \leq k \leq n\}}{n}$$

para $m = 1, 2, \dots, 9$