En estas notas, damos un breve resumen de formas diferenciales y unas propiedades importantes. Esencialmente, estamos desarrollamos una notación y estructura para extender el cálculo integral de $\mathbb{R}^3$ a dimensiones superiores. Las secciones relevantes de Arnold son cap. 7 y sec. 18 (pg. 77).

Vectores tangentes, cotangentes

Pensamos en un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, determinado por las intersecciones de conjuntos de nivel de varias funciones, p.ej. superficies en el espacio como la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, o simplemente pensamos en $X = \mathbb{R}^n$.

Las *vectores tangentes* en un punto $x \in X$ son vectores velocidades de curvas que pasan por x:

$$T_xX := \{\dot{\gamma}(0) \ t.q. \ \gamma : I \to X, \gamma(0) = x\}.$$

Forman un espacio vectorial. Los *vectores cotangentes* en x son elementos del espacio vectorial dual (vamos a pensar de ellos como 'momentos' o 'impulsos'):

$$T_x^*X := \{\text{aplicaciones lineales } \omega : T_xX \to \mathbb{R}\}.$$

Denotamos a todas las posiciones y velocidades el *haz tangente*, $TX := \cup T_xX$, y a todas las posiciones e impulsos el *haz cotangente*, $T^*X := \cup T_x^*X$.

Coordenadas: Recordar que para un espacio vectorial, V^n, con base $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ tenemos una base dual $v^1, ..., v^n$ de V^*. Interpretamos a $v^j : V \to \mathbb{R}$ como proyección sobre el eje-$\vec{v}_j$: $v^j(x_1\vec{v}^1 + ... + x_n\vec{v}^n) = x_j$.

Consideramos un parametrización (local): $\mathbb{R}^n \ni (x^1, ..., x^n) = x_c \leftrightarrow x \in X$ donde $x_c \in \mathbb{R}^n$ son las coordenadas de $x \in X$.

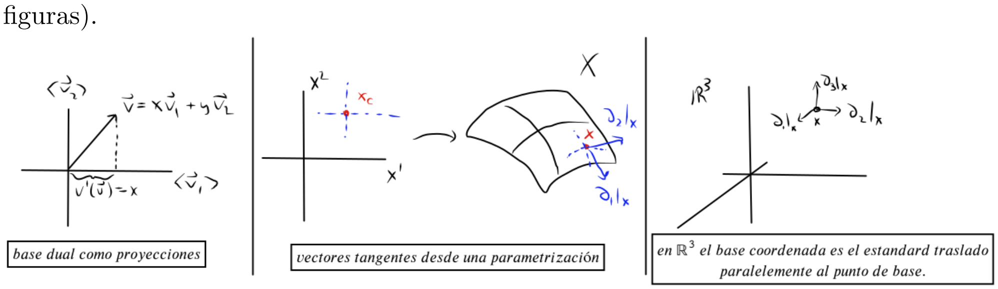
Tal parametrización determina *bases coordenadas* para los espacios tangentes: imágenes de las curvas $x_c + te_j$, donde $e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 0, 1)$ son curvas en X que pasan por x (ver figuras). Denotamos sus velocidades como $\partial_j|_x \in T_xX$ o $\frac{\partial}{\partial x^j}|_x$. Cuando el 'punto base' x es claro del contexto escribimos ∂_j.

La correspondiente base de T_x^*X dual a $\{\partial_j|_x\}$ la escribimos como d_xx^j, o cuando el punto base es claro del contexto simplemente como dx^j.

Diferenciales: Se puede comprender la notación dx^j de la siguiente manera. Observemos que una función $f : X \to \mathbb{R}$ tiene su diferencial en un punto, $d_xf : T_xX \to \mathbb{R}$ que envía el vector velocidad $v = \dot{\gamma}(0) \in T_xX$ al número $\frac{d}{dt}|_{t=0}f(\gamma(t))$ (pensar en la regla de la cadena!). La diferencial es linear, es decir $d_xf \in T_x^*X$. Ahora, con la parametrización, asociamos a los puntos $x \in X$ puntos $x_c = (x^1(x), ..., x^n(x)) \in \mathbb{R}^n$, es decir, cada componente $x^j(x)$ es un función (local) $x^j : X \to \mathbb{R}$. Las diferenciales $d_xx^j \in T_x^*X$ son precisamente la base dual de nuestra base coordenada $\partial_j|_x$ de T_xX (verificarlo!).

Del mismo modo, se puede definir la *diferencial* en un punto de una transformación (diferenciable) $f : X \to Y$ entre dos variedades, que se denota comúnmente por $d_xf : T_xX \to T_{f(x)}Y$ ó $f_{*x} = d_xf$.

El ejemplo familiar que hay que tener en mente es $\mathbb{R}^3$ con coordenadas Cartesianas (x^1, x^2, x^3). Las bases coordenadas son la base estandard de $\mathbb{R}^3$, trasladada al punto base apropriado: $\partial_j|_x = e_j$ 'basado en x' (ver figuras).



base dual como proyecciones

vectores tangentes desde una parametrización

en $\mathbb{R}^3$ el base coordenada es el estandard traslado paralelemente al punto de base.

Formas y derivadas

Una 1-forma es el análogo de un campo vectorial para vectores cotangentes, es decir, un campo de vectores cotangentes, o un campo de momentos:

$$\text{escogemos } \omega_x \in T_x^*X \text{ para cada } x \in X \text{ en una manera 'diferenciable'}.$$

En coordenadas tenemos $\omega_x = a_1(x)d_x x^1 + ... + a_n(x)d_x x^n$, ó $\omega = a_1 dx^1 + ... + a_n dx^n$ donde $a_j : X \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables.

Una 1-forma se puede integrar a lo largo de una curva, es decir, dado una curva (orientada), $\gamma \subset X$ y una 1-forma ω, definimos:

$$\int_\gamma \omega := \int_{t_0}^{t_1} \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))\ dt,$$

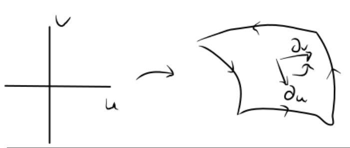
donde γ está parametrizada de t_0 a t_1 por $\gamma(t)$. En $\mathbb{R}^3$ tales expresiones son exactamente las 'integrales de linea' que uno encuentra en cálculo vectorial (ver tabla 1). Observemos que la integral no depende de la parametrización de la curva, *excepto* cuando cambiamos la orientación, que cambia el signo.

Similarmente, k-formas van a ser ciertos 'integrandos sobre k-variedades (orientadas)' y se generalizan las integrales de superficies que conozemos en $\mathbb{R}^3$. Recordar que si la *orientación* de la superficie cambia afecta el signo de tales integrales, p.ej. integrales de flujo en $\mathbb{R}^3$ requieren escoger una normal a la superficie, se evalúan por integración de ciertas áreas con signo de 'paralelepípedos infinitesimales', es decir, paralelepípedos formados por vectores tangentes (ver figuras).

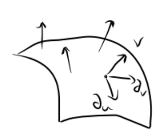
Producto cuña: Se puede pensar en este producto como una manera conveniente de escribir ciertos determinantes que dan 'sumas pesadas de k-áreas orientadas de proyecciones' o equivalentemente que dan una base (y producto) sobre el espacio de aplicaciones multi-lineales y anti-simétricos.

En $\mathbb{R}^3$, con coordenadas Cartesianos x^1, x^2, x^3, calculamos volúmenes orientados de paralelepípedos con lados u, v, w por el producto triple: $(u, v, w) \mapsto (u \times v) \cdot w = det(u, v, w)$ donde el determinante consiste en poner las coordenadas de los vectores por las filas del matriz. Esta aplicación es anti-simétrico y multi-lineal y se denota con cuñas por $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

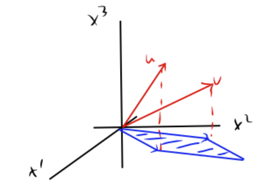
En $\mathbb{R}^3$, calculamos áreas de proyecciones de paralelogramos también con determinantes. Por ejemplo, $(u, v) \mapsto e_3 \cdot (u \times v) = u_1 v_2 - u_2 v_1$, da el área orientada del paralelogramo con lados u, v proyectado al plano $x^1 x^2$. Esta aplicación es multi-lineal y anti-simétrico y se denota por $dx^1 \wedge dx^2$.



parametrización de una superficie relacione al orientación con el orden en que tomamos los vectores tangentes ∂_u, ∂_v.



integrales de flujo de v atras una superficie tienen integrandos : $v \cdot (\partial_u \times \partial_v)\ du\ dv$



area de u, v proyectada al plano x^1x^2 se calcula por : $u_1v_2 - u_2v_1 = e_3 \cdot (u \times v) =: dx^1 \wedge dx^2(u,v)$

En $V = \mathbb{R}^n$, escribimos $dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$ para el funcional k-lineal y anti-simétrico $\overbrace{V \times ... \times V}^{k-veces} \to \mathbb{R}$ que da la k-área orientado del paralelepípedo con lados $v_1, ..., v_k$ proyectado al k-plano $x^{i_1}...x^{i_k}$. Fórmulas para tales k-formas se expresan con determinantes, p.ej. $dx^1 \wedge ... \wedge dx^k(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k)$ es el determinante de la matriz $k \times k$ con las primeros k coordenadas de $\vec{v}_j$ por la fila j del matriz. Productos de tales 'elementos básicos' se definea por yuxtapoisición: $(dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}) \wedge (dx^{j_i} \wedge ... \wedge dx^{j_\ell}) := dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_i} \wedge ... \wedge dx^{j_\ell}$, geométricamente el $k + l$-área orientada de proyecciones al plano $x^{i_1}...x^{i_k}x^{j_1}...x^{j_\ell}$.

Teorema: Las formas básicas $dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$ con $i_1 < ... < i_k$ son una base para el espacio vectorial de funcionales k-lineal y anti-simétricos. El producto de cuña se extiende por linealidad.

Por ejemplo, $(dx^1 \wedge dx^2 + 3dx^3 \wedge dx^4) \wedge dx^1 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^1 + 3dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^1 = 3dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4$. También notar que un funcional k-lineal anti-simétrico , geométricamente es una 'suma pesada de áreas orientadas proyectadas', p.ej. $dx^1 \wedge dx^2 + 4dx^2 \wedge dx^3$ significa que sumamos el área del paralelogramo proyectada al plano x^1x^2 y 4 veces el área del paralelogramo proyectada al plano x^2x^3.

Bosquejamos el teorema para $k = 2$. Sea V^n un espacio vectorial y $B^2(V)$ el espacio vectorial de funciones bilineales $V \times V \to \mathbb{R}$. Dado una base $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ de V con corespondiente base $v^1, ..., v^n$ de V^*, tenemos:

* las funcionales bilineales, $(u, v) \mapsto v^j(u)v^k(v)$, son una base de $B^2(V)$. Se denota por $v^j \otimes v^k$,
* la representación de $\beta \in B^2(V)$ en esta base, $\beta = \sum_{j,k} \beta_{jk} v^j \otimes v^k$, tiene $\beta_{jk} = \beta(\vec{v}_j, \vec{v}_k)$,
* la representación matricial de $\beta \in B^2(V)$ se puede expresar con 'productos externos' $\sum_{j,k} \beta_{jk} e_j e_k^T$.

Ahora, consideramos las funcionales bilinear y anti-simétricos, $\bigwedge^2 V \subset B^2(V)$, tenemos:

* $\beta \in \bigwedge^2 V$, en la base arriba tiene $\beta_{jk} = -\beta_{kj}$, entonces $\beta = \sum_{j<k} \beta_{jk}(v^j \otimes v^k - v^k \otimes v^j)$,
* ponemos $v^j \wedge v^k := v^j \otimes v^k - v^k \otimes v^j \in \bigwedge^2 V$. La colección $\{v^j \wedge v^k : j < k\}$ es una base de $\bigwedge^2 V$,
* notar que $v^j \wedge v^k(\vec{u}, \vec{v}) = u_j v_k - u_k v_j$ es 'área orientada' de proyección al plano $\vec{v}_j, \vec{v}_k$.

El proceso arriba esta cerca de unas identifiaciones comunes de algebra lineal. Considera el espacio $B^2(V, W)$ de mapas bilineales $V \times W \to \mathbb{R}$. Para practicar con algebra lineal podrias pensar sobre las isomorfismos naturales de $B^2(V, W) = L(V, W^*) = L(W, V^*) = (V \otimes W)^* = V^* \otimes W^*$, donde p.ej. $L(V, W^*)$ denota mapas lineales $V \to W^*$, un tal aplicación natural es $A \in L(V, W^*) \mapsto \beta_A(v, w) := (Av)(w) \in B^2(V, W)$.

Regresando a formas, una 2-forma es un campo de anti-simétrico bilineal funcionales $\omega_x : T_xX \times T_xX \to \mathbb{R}$. En coordenadas, tenemos $\omega = a_{12} dx^1 \wedge dx^2 + ...$ Para integrarlo sobre una superficie (orientado) $\Sigma \subset X$:

$$\int_\Sigma \omega := \int_{v_0}^{v_1} \int_{u_0}^{u_1} \omega_{\varphi(u,v)}(\partial_u, \partial_v) \; dudv,$$

donde parametrizamos Σ por $\varphi : [u_0, u_1] \times [v_0, v_1] \to \Sigma, (u, v) \mapsto \varphi(u, v)$. El orden ∂_u, ∂_v captura la orientación de Σ (y induce un orientación sobre su frontera $\partial\Sigma$), ver figuras arriba.

General k-formas son campos de anti-simétrico k-lineal funcionales. Son 'integrandos sobre orientados k-variedades', expresado en coordenadas como $\omega = a_{12...k} dx^1 \wedge ... \wedge dx^k + ...$

Tabla 1: diccionario para $\mathbb{R}^3$:

$\int_\gamma v \cdot d\vec{s} = \int v \cdot \dot{\gamma} \; dt$	$\omega^1 = v_1 dx^1 + v_2 dx^2 + v_3 dx^3 = \omega_v^1$	$\int_\gamma \omega^1$
$\int_\Sigma v \cdot d\vec{S} = \int v \cdot \hat{n} \; dA$	$\omega^2 = v_1 dx^2 \wedge dx^3 + v_2 dx^3 \wedge dx^1 + v_3 dx^1 \wedge dx^2 = \omega_v^2$	$\int_\Sigma \omega^2$
$\int_D \rho \; dV$	$\omega^3 = \rho \; dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \rho \; \omega_{vol}$	$\int_D \omega^3$

Derivada interior: Notar que en $\mathbb{R}^3$, identificamos los 3 componentes que aparecen en 1-formas y 2-formas como los de un campo vectorial v. En tabla 1, podemos escribir en terminos de producto interior y producto de cross:

$$\omega_v^1(u) = v \cdot u, \quad \omega_v^2(u, w) = v \cdot (u \times w), \quad \omega_{vol}(u, v, w) = (u \times v) \cdot w,$$

lo que conduce a las formulas familiares de cálculo vectorial en $\mathbb{R}^3$.

Observemos que $\omega_v^2 = i_v \omega_{vol}$, donde la *derivada interior*, i_v, es en general definida como un operador tomando $k+1$-formas a k-formas por:

$$i_v \omega(v_1, ..., v_k) := \omega(v, v_1, ..., v_k). \tag{1}$$

Cambio de variables: El hecho de que integración de k-formas no depende de (misma orientada) parametrizaciones, sigue de la formula para *cambiando variables*: $\int_{\varphi(D)} \omega = \int_D \varphi^* \omega$, donde para una k-forma ω tomamos

$$(\varphi^* \omega)_x(v_1, ..., v_k) := \omega_{\varphi(x)}(\varphi_{*,x} v_1, ..., \varphi_{*,x} v_k). \tag{2}$$

En palabras, escribimos ω en el nuevo variable $y = \varphi(x)$ y evaluarlo en los nuevos vectores cambiados por regla de cadena: $v_j \to \varphi_{*,x} v_j$.

En practico, se hace cambios de variables en una manera sencilla por substitución. Por ejemplo, para cambiar la forma de área en el plano, $dx \wedge dy$, a coordenadas polares consiste en reemplazar $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ para que: $dx \wedge dy = d(r\cos\theta) \wedge d(r\sin\theta) = (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \wedge (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) = r dr \wedge d\theta$.

Derivada exterior: Este generaliza las derivadas 'grad, curl, div' de cálculo vectorial. Recordamos la definición de divergencia en $\mathbb{R}^3$. Para un campo vectorial, v, su divergencia $div(v)$ es la función:

$$div(v)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(P_\varepsilon)}{vol(P_\varepsilon)},$$

donde P_ε es el paralelepípedo (cubo) con lados εe_j basado por x (entonces $vol(P_\varepsilon) = \varepsilon^3$), y $F(P_\varepsilon) = \int_{\partial P_\varepsilon} \omega_v^2$ es el flujo de v atras ∂P_ε.

En general, la derivada exterior de una k-forma es una $k+1$-forma $d\omega$ definido por:

$$d\omega_x(\partial_{i_1}, ..., \partial_{i_{k+1}}) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(P_\varepsilon)}{\varepsilon^{k+1}},$$

donde $F(P_\varepsilon) = \int_{\partial P_\varepsilon} \omega$ es el 'flujo de ω' atras la frontera, ∂P_ε, de la coordenada $k+1$-paralelepípedo, P_ε, con lados $\varepsilon\partial_{i_1}, ..., \varepsilon\partial_{i_{k+1}}$.

Sigue de la arriba definición geometrical, una expresion en coordenadas, útil en computaciones:

$$d(a_{12...k} dx^1 \wedge ... \wedge dx^k + ...) = da_{12...k} \wedge dx^1 \wedge ... \wedge dx^k + ... \tag{3}$$

En este formula, usamos que las coeficientes, $a_{i_1...i_k}$ son funciones y diferenciales de funciones son 1-formas. En coordenadas $df = (\partial_{x^1} f)dx^1 + ... + (\partial_{x^n} f)dx^n$.

Por ejemplo: $d(xydy - ydx) = d(xy) \wedge dy - dy \wedge dx = (ydx + xdy) \wedge dy + dx \wedge dy = (y+1)dx \wedge dy$.

La formula principal para derivada exterior es:

Teorema (Stokes generalizada): $\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$.

Cuidado con signos: la frontera debe tener la orientación heredada de la orientación del dominio.

Tabla 2: mas diccionario en $\mathbb{R}^3$:

$df = \omega^1_{\nabla f} = \omega^1_{grad(f)}$
$d\omega^1_v = \omega^2_{\nabla \times v} = \omega^2_{curl(v)}$
$d\omega^2_v = (\nabla \cdot v)\ \omega_{vol} = div(v)\ \omega_{vol}$

Derivada de Lie: al final consideramos una derivada que mide el 'cambio de una forma bajo el flujo de un campo vectorial'.

Sea v un campo vectorial con flujo ϕ^t y ω una k-forma. Para medir el cambio de ω bajo v, dejamos $x \in X$ y $v_1, ..., v_k \in T_x X$. Medimos los valores de $\omega_x(v_1, ..., v_k)$ cuando mientras movemos x y v_j bajo el flujo de v:

$$f(t) = \omega_{\phi^t x}(\phi^t_{*x} v_1, ..., \phi^t_{*x} v_k) = (\phi^{t*}\omega)_x(v_1, ..., v_k) \in \mathbb{R}.$$

Definimos una k-forma por:

$$(\mathscr{L}_v \omega)_x(v_1, ..., v_k) := f'(0) \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

que llamamos la derivada de Lie de ω por v. En breve escribimos $\mathscr{L}_v \omega = \frac{d}{dt}\phi^{t*}\omega$, donde ϕ^t es el flujo de v.

Por ejemplo, la significación geometrical de $\mathscr{L}_v dx^1 \wedge dx^2 = 0$, esta que para $u_1, u_2 \in T_x X$ el área del paralelogramo con lados $\phi^t_* u_1, \phi^t_* u_2$ proyectado al plano $x^1 x^2$ seria costante. O tambien, significa que para un superficie, Σ, el área de su proyección en el plano x^1x^2 queda costante bajo el flujo de v, es decir el mismo como el área proyectado al x^1x^2 plano de $\phi^t\Sigma$.

En forma integrada, tenemos un interpretación con cambio de variables: $\int_{\phi^t D}\omega = \int_D \phi^{t*}\omega$ implica

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\int_{\phi^t D}\omega = \int_D \mathscr{L}_v\omega.$$

Es decir, si se mueve una region bajo v, el cambio en un integral sobre estos regiones moviendo es egal a la integral de la derivada de Lie en el dirección v del integral.

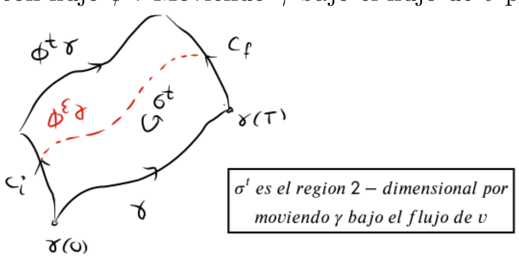
Fórmula mágica de Cartan (fórmula de homotopía)

Este formula útil reliciona las tres derivadas que hemos introducido:

$$\mathscr{L}_v = di_v + i_v d. \tag{5}$$

Para un aplicación, derivamos que campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ con $div(v) = 0$ preservan volúmen: $\frac{d}{dt}|_{t=0}vol(\phi^t D) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\int_{\phi^t D}\omega_{vol} = \int_D \mathscr{L}_v\omega_{vol} = \int_D di_v\omega_{vol} + i_v d\omega_{vol} = \int_D d\omega_v^2 = \int_D div(v)\ \omega_{vol} = 0.$ Entonces, $\frac{d}{dt}vol(\phi^t D) = 0$ para cualquier region D, y volúmen queda constante bajo el flujo, ϕ^t, de v.

demonstración de eq. 5 (para 1-formas): Sea ω una 1-forma, γ una curva orientada y v un campo vectorial con flujo ϕ^t. Moviendo γ bajo el flujo de v produce 'una tira', que denotamos σ^t (ver figura).



La frontera de σ^t es $\partial\sigma^t = \gamma - \phi^t\gamma + c_f - c_i$, entonces:

$$(*) \qquad \int_{\sigma^t} d\omega = \int_{\partial\sigma^t}\omega = \int_\gamma \omega - \int_\gamma \phi^{t*}\omega + \int_{c_f - c_i}\omega.$$

Obtenemos la forma integral de eq. 5, por diferenciando $(*)$ con respeto a t por $t = 0$. Para hacer este, usamos la parametrización: $[0,T]\times[0,t] \to \sigma^t, (s,\varepsilon) \mapsto \phi^\epsilon\gamma(s)$. Calculamos $\partial_s \to \phi^\varepsilon_*\dot\gamma(s),\ \partial_\varepsilon \to v(\phi^\varepsilon\gamma(s))$.

Ahora, $\int_{\sigma^t} d\omega = \int_0^t\int_0^T d\omega_{\phi^\varepsilon\gamma(s)}(\partial_s,\partial_\varepsilon)\ dsd\varepsilon$, para que

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\int_{\sigma^t} d\omega = \int_0^T d\omega_{\gamma(s)}(\dot\gamma(s), v(\gamma(s)))\ ds = -\int_\gamma i_v d\omega.$$

Proxima, $\int_{c_f}\omega = \int_0^t \omega_{\phi^\varepsilon\gamma(T)}(v(\phi^\varepsilon\gamma(T)))\ d\varepsilon$, para que $\frac{d}{dt}|_{t=0}\int_{c_f}\omega = \omega_{\gamma(T)}(v(\gamma(T)))$. De mismo modo, $\frac{d}{dt}|_{t=0}\int_{c_i}\omega = \omega_{\gamma(0)}(v(\gamma(0)))$. Juntos,

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\int_{c_f - c_i}\omega = i_v\omega|_{\gamma(0)}^{\gamma(T)} = \int_\gamma di_v\omega.$$

Entonces, aplicando $\frac{d}{dt}|_{t=0}$ a $(*)$ da: $-\int_\gamma di_v\omega = -\int_\gamma \mathscr{L}_v\omega + \int_\gamma di_v\omega$, o

$$\int_\gamma \mathscr{L}_v\omega = \int_\gamma di_v\omega + i_v d\omega.$$

Este queda cierto para cualquier curva γ, que implica eq. 5 (la misma idea funciona para k-formas). $\square$

Referencias

Usando formas, es una notación eficiente para hacer computaciones. Hay un gran numero de 'identidades' como el formula de Cartan que vimos arriba que sirven en varias situaciones. Tales identidaes relacionan las 'operaciones fundamentales' que vimos en estas notas: la cuña, $\wedge$, 'retrasar' o cambio de coordenadas, φ^*, derivada interior, i_v, derivada exterior, d, y derivada de Lie, $\mathscr{L}_v$.

La usa de formas juega un papel mayor por ejemplo en geometría diferencial, física, topología, ... Ya mencionamos las secciones relevante de Arnold, pero también hay otras referencias concisas para familiarizarse con el uso de formas. Por ejemplo: do Carmo 'differential forms and applications', Weintraub 'differential forms: theory and practice', Bachman 'a geometric approach to differential forms', Darling 'differential forms and connections', ... Si tu mira algún de estos libros y encontra uno que te gusta, te beneficiará trabajar con los ejercicios y desarolla estas herramientas.

Terminamos con una tablita de unas identidades adicional a la de Cartan. En este tabla ω es una k-forma y η una ℓ-forma.

$\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge \omega$	$\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\eta$	$i_v(\omega \wedge \eta) = i_v\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge i_v\eta$
$d(d\omega) = 0$	$\varphi^*(d\omega) = d\varphi^*\omega$	$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$
$\mathscr{L}_v d\omega = d\mathscr{L}_v\omega$	$\mathscr{L}_v(\omega \wedge \eta) = \mathscr{L}_v\omega \wedge \eta + \omega \wedge \mathscr{L}_v\eta$	$\mathscr{L}_v(i_u\omega) = i_{[v,u]}\omega + i_u\mathscr{L}_v\omega$

En la última entrada de esta tabla tenemos los soportes de Lie, $[\cdot,\cdot]$. Dado dos campos vectoriales, su soporte $[v,u]$ es un otro campo vectorial. Es un caso de la derivada de Lie, en que este campo vectorial mide el 'cambio de u bajo el flujo de v', o lo que termina siendo la misma mide si los flujos de los campos u, v comutan. Se puede definir por: $[v,u] = \mathscr{L}_v u := \frac{d}{dt}|_{t=0}\phi_*^{-t}u$, donde ϕ^t es el flujo de v.