Tarea 5

Prepara 5 de los siguientes ejercicios para entregar.

1. Para el grupo de Lie $G = SO_3$ de rotaciones, tenemos $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_3 = \mathbb{R}^3$ según la identificación con producto de cross. Para $g \in G$ una rotación, describir la transformación $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

2. Usamos la notación en las notas sobre formas diferenciales, se puede usar para estos ejercicios cualquier de las identidades en estas notas.

   Sea u, v, w campos vectoriales con divergencia cero en $D \subset \mathbb{R}^3$ y tambien tangente a la frontera ∂D.

   (a) Verificar que $\int_D \omega_u^1 \wedge \omega_v^2 = \int_D (u \cdot v)\omega_{vol} =: \langle u, v\rangle$ y $d(i_u i_v \omega_{vol}) = i_{[u,v]}\omega_{vol} = \omega^2_{[u,v]}$.

   (b) Mostrar: $\langle [u, v], w\rangle = \langle u \times curl(w), v\rangle$.

   Sugerencia: usa $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta - \omega \wedge d\eta$ para 1-formas ω, η.

   (c) Para α un función sobre D, mostrar: $\langle grad(f), v\rangle = 0$.

   estos ejercicios conduce a la ecuación de Euler para fluidos. Esencialmente, has calculado el operador que llamamos B en 'lecture 18': $B(v, v) = v \times curl(v) + grad(\alpha)$, donde el función α esta determinado por la condición de que $B(v, v)$ tiene divergencia cero.

3. (a) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogenea de grado α: $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$ cada $\lambda > 0$. Mostrar que $d_x f(x) = \nabla_x f \cdot x = \alpha f(x)$.

   Considera el problema de n-cuerpos en el plano, con potencial Newtoniano: $U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}$. Suponer que $q(t) = \lambda(t) q_o$ para $\lambda(t) \in \mathbb{C}$ es una solución con q_o un configuración fijada con centra de masa cero.

   (b) Mostrar que $\nabla_{q_o} U = k \nabla_{q_o} I$ donde $I = \sum m_j |q_j|^2$ y k es algún constante. Ademas mostrar que $\lambda(t)$ satisfice un ecuación de Kepler: $\ddot{\lambda} = -\mu \frac{\lambda}{|\lambda|^3}$ donde μ es algún constante.

4. Deja que V sea un espacio vectorial de dimension n, y $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma simplectica sobre V. Es decir: ω es bilineal, anti-simetrica y no-degenerado: $\omega(\vec{u}, \vec{v}) = 0, \forall \vec{v} \in V \Rightarrow \vec{u} = 0$.

   (a) Mostrar que $dim(V)$ es par, $n = 2k$.

   (b) Mostrar que existe un base, $e_1, e_2, ..., e_k, f_1, f_2, ..., f_k$ de V para que $\omega(e_j, f_j) = 1$ y todos los otros productos son cero.

5. ...en progreso...