Tarea 4

Prepara 5 de los siguientes ejercicios para entregar.

1. (a) Considera una sistema non-autonoma con Lagrangiana: $L(q, v, t)$, y acción: $\gamma \mapsto \int_\gamma L$.

   Verificar que las extremales con tiempo y puntos finales fijados (es decir sobre el clase de curvas: $\Gamma = \{\gamma : [0, T] \to Q \ t.q. \ \gamma(0) = q_0, \gamma(T) = q_1\}$ con T, q_0, q_1 fijado) satisficen las ecuaciones de Euler-Lagrange.

   Ademas, muestra que para la 'energía' $E := \partial_v L \cdot v - L$ y una extremal γ, tenemos:

   $$\frac{d}{dt} E(\gamma, \dot{\gamma}, t) = \partial_t L(\gamma, \dot{\gamma}, t).$$

   (b) Considera coordenadas girando en el plano: $e^{i\omega t} Q = q \in \mathbb{C}$. Suponer que el movimiento de q es dado por una Lagrangiana de la forma: $L = \frac{|v|^2}{2} + U(|q|)$. Expresar la Lagrangiana y la energía en estos coordenadas girando: $Q, V = \dot{Q}$.

2. Considera una mesa de bilares, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, convexo con $\partial\Omega$ suave. Deja que $\gamma(s) : [0, \ell] \to \partial\Omega$ sea un parametrización por longitud de $\partial\Omega$ (entonces $\gamma(0) = \gamma(\ell)$).

   Pon $S(s_0, s_1) = dist(\gamma(s_0), \gamma(s_1))$. La funcion $S : [0, \ell] \times [0, \ell] \to \mathbb{R}$ es suave cuando $s_0 \neq s_1$.

   (a) En los puntos donde S esta diferenciable, muestra que $\partial_{s_0} S = -\cos\varphi_0$ y $\partial_{s_1} S = \cos\varphi_1$ (ver figuras para definiciones de los angulos φ_j).

   (b) Para $n \in \mathbb{N}_{>0}$, considera la función $A : [0, \ell]^{n+1} \to \mathbb{R}$ definido por:

   $$A(s_0, ..., s_n) := S(s_0, s_1) + S(s_1, s_2) + ... + S(s_{n-1}, s_n) + S(s_n, s_0).$$

   Muestra que un configuración $(s_0, ..., s_n)$ que es un maximo de A, representa los puntos de impacto con $\partial\Omega$ de una órbita periodica para bilares en Ω.

3. Deja que $u, v, c : [0, T] \to \mathbb{R}$ con u, v continuos y c diferenciable y positiva. Suponer que tales funciones satisficen:

   $$v(t) \leq c(t) + \int_0^t u(s)v(s) \ ds, \quad \text{para } t \in [0, T].$$

   (a) Pon $R(t) := \int_0^t u(s)v(s) \ ds$. Muestra que $\frac{dR}{dt} - u(t)R(t) \leq u(t)c(t)$.

   (b) Usa un factor integrador, μ, para poner parte (a) en la forma:

   $$\frac{d}{dt}(\mu R) \leq \mu uc.$$

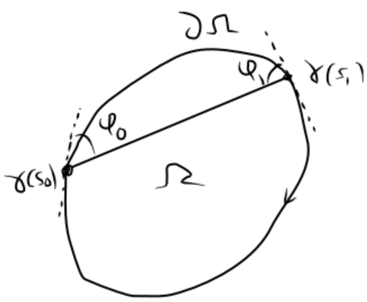
   (c) En integrando los dos lados de (b) de 0 a t y areglando, deducir la lemma de Gronwall:

   $$v(t) \leq c(0) \exp\left(\int_0^t u(s) \ ds\right) + \int_0^t c'(s) \exp\left(\int_s^t u(\tau) \ d\tau\right) ds.$$

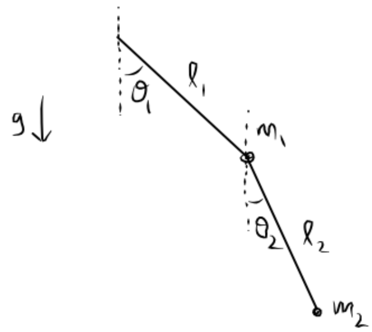
4. Deja que A, B sea dos $n \times n$ matrizes simetricas con A estrictamente positiva. Muestra que las dos pueden ser simultaneamente diagonalizada: existe un matrix invertible, P, con $P^T AP = Id, P^T BP = D$, donde $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ es diagonal con $\lambda_j \in \mathbb{R}$ las racines de $det(B - \lambda A) = 0$.

5. Describir el compartamiento de las órbitas del pendulo doble (ver figuras) cerca a los puntos de equilibrio usando el método de pequenas oscilaciones.

6. Considera el problema de Hooke en el plano: $\ddot{q} = -q$ con $q \in \mathbb{C}$. Aplicar la teorema de Noether para derivar las integrales de este sistema desde sus simetrias.



2) *Bilares en un región convexo del plano.*



5) *El péndulo doble.*