Tarea 5/6

Prepara 8 de los siguientes ejercicios para entregar.

1. Para el grupo de Lie $G = SO_3$ de rotaciones, tenemos $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_3 = \mathbb{R}^3$ según la identificación con producto de cross. Para $g \in G$ una rotación, describir la transformación $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

2. Mostrar que $\frac{d}{dt}|_{t=0} \det(I + tA) = tr(A)$.

3. Usamos la notación en las notas sobre formas diferenciales, se puede usar para estos ejercicios cualquier de las identidades en estas notas.

   Sea u, v, w campos vectoriales con divergencia cero en $D \subset \mathbb{R}^3$ y tambien tangente a la frontera ∂D.

   (a) Verificar que $\int_D \omega_u^1 \wedge \omega_v^2 = \int_D (u \cdot v)\omega_{vol} =: \langle u, v\rangle$ y $d(i_u i_v \omega_{vol}) = i_{[u,v]}\omega_{vol} = \omega^2_{[u,v]}$.

   (b) Mostrar: $\langle [u, v], w\rangle = \langle u \times curl(w), v\rangle$.

   Sugerencia: usa $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta - \omega \wedge d\eta$ para 1-formas ω, η.

   (c) Para α un función sobre D, mostrar: $\langle grad(f), v\rangle = 0$.

   estos ejercicios conduce a la ecuación de Euler para fluidos. Esencialmente, has calculado el operador que llamamos B en 'lecture 18': $B(v, v) = v \times curl(v) + grad(\alpha)$, donde el función α esta determinado por la condición de que $B(v, v)$ tiene divergencia cero.

4. (a) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogenea de grado α: $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$ cada $\lambda > 0$. Mostrar que $d_x f(x) = \nabla_x f \cdot x = \alpha f(x)$.

   Considera el problema de n-cuerpos en el plano, con potencial Newtoniano: $U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}$. Suponer que $q(t) = \lambda(t) q_o$ para $\lambda(t) \in \mathbb{C}$ es una solución con q_o un configuración fijada con centra de masa cero.

   (b) Mostrar que $\nabla_{q_o} U = k \nabla_{q_o} I$ donde $I = \sum m_j |q_j|^2$ y k es algún constante. Ademas mostrar que $\lambda(t)$ satisfice un ecuación de Kepler: $\ddot{\lambda} = -\mu \frac{\lambda}{|\lambda|^3}$ donde μ es algún constante.

5. Deja que V sea un espacio vectorial de dimension n, y $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma simplectica sobre V. Es decir: ω es bilineal, anti-simetrica y no-degenerado: $\omega(\vec{u}, \vec{v}) = 0, \forall \vec{v} \in V \Rightarrow \vec{u} = 0$.

   (a) Mostrar que $dim(V)$ es par, $n = 2k$.

   (b) Mostrar que existe un base, $e_1, e_2, ..., e_k, f_1, f_2, ..., f_k$ de V para que $\omega(e_j, f_j) = 1$ y todos los otros productos son cero.

6. El grupo simplectica (lineal), $\mathrm{Sp}(2n)$, consiste de las aplicaciones lineales $A : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ tal que $\omega(\vec{u}, \vec{v}) = \omega(A\vec{u}, A\vec{v})$ para todos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^{2n}$. Para $A \in \mathrm{Sp}(2n)$, mostrar:

   (a) $AJA^T = A^T JA = J$,

   (b) $\det(A) = 1$ (considerar los autovalores de A).

7. Sea $\omega = dp_1 \wedge dq^1 + ... + dp_n \wedge dq^n$ la forma simplectica estandard sobre $\mathbb{R}^{2n}$.

   (a) Dado una transformación de 'base', $q \mapsto Q = Aq$, donde $A_{n\times n}$ es una mapa lineal $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, verificar que su 'levantamiento simplectica' a $(q, p) \mapsto (Q, P)$ donde $A^T P = p$ es una transformación simplectica de $\mathbb{R}^{2n}$.

   (b) Para el problema de 3-cuerpos (q_1, q_2, q_3), determinar el levantamiento simplectica de la transformación heliocentrica: $Q_1 = q_1, Q_2 = q_2 - q_1, Q_3 = q_3 - q_1$. Dar la expresión para la Hamiltoniana en estas coordenadas heliocentricas.

8. Usar el método de seperación de variables para cambiar el oscillador harmónica $H = \frac{p_x^2 + k^2 x^2}{2}$, $dp_x \wedge dx$ (donde $k > 0$ es un constante) a la forma $H(I)$, $dI \wedge d\theta$.

9. Dibuja la evolución de las gráficas $u(x,t)$ por varias valores de t donde u es una solucione de las siguientes EDP con dados condiciones iniciales:

   (a) $tu_t + xu_x = 0$, con condición inicial $u(x,1) = x$. También con condición inicial $u(x,1) = x^2$. Que pasa con condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$?

   (b) $tu_t + xu_x = 1$, con condición inicial $u(x,1) = x$

   (c) $xu_t - tu_x = 0$, con condición inicial $u(x,0) = x$. También con condición inicial $u(x,0) = x^2$.

10. Sea $\gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ una parametrización por longitud del arco de una curva planar (entonces $|\gamma'(s)| = 1$).

    La normal unitario por $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ es $n(s) = i\gamma'(s) := (-y'(s), x'(s))$.

    (a) Mostrar que $\gamma''(s) = \kappa(s)n(s)$ para algún $\kappa(s) \in \mathbb{R}$. Llamamos κ la curvatura de γ. Verificar que $n'(s) = -\kappa(s)\gamma'(s)$.

    (b) Considera una reparametrización por t de la curva planar: $\Gamma(t) = \gamma(s(t))$, donde $\mathbb{R} \ni t \mapsto s(t) \in \mathbb{R}$ da la reparametrización.

    Verificar que $\kappa = \frac{\ddot{\Gamma} \cdot i\dot{\Gamma}}{|\dot{\Gamma}|^3}$, donde los 'dots' son diferenciación por t: $\dot{\Gamma} = \frac{d\Gamma}{dt} = (\dot{x}, \dot{y})$ y $i\dot{\Gamma} := (-\dot{y}, \dot{x})$.

    (c) Determina la caustica de la parabola: $y = x^2$.

11. (a) El problema de 'estacionar' o 'aterrizaje suave' 1-dimensional consiste de considerar $\ddot{q} = u$, para $q \in \mathbb{R}$ y un control $u \in [-1, 1]$. Determina posible controles óptimales, $u_*(t)$, para tomar un posición y velocidad inicial, $(q_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ al origen en tiempo minimal. Bosqueja tales trayectorias en el plano de posiciones y velocidades (q, v).

    (b) Deteniendo un resorte: considerar $\ddot{q} = -q + u$ con $q \in \mathbb{R}$ y $u \in [-1, 1]$. Determina posible controles óptimales, $u_*(t)$ para tomar un posición y velocidad inicial, $(q_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ al origen en tiempo minimal. Bosqueja tales trayectorias óptimales en el plano de posiciones y velocidades (q, v).

    Notar que en estes problemas, el control $u(t)$ no tiene que ser continuo – pueden ser, p.ej. continuo por partes o funciones escalónes.

12. ...en progreso...