

1 Introducción

En el análisis de series temporales, existen dos enfoques fundamentales, el conocido como "time domain analysis" que se basa en la utilización de las funciones de autocorrelación simple y parcial para estudiar la evolución temporal de las series temporales y la construcción de modelos paramétricos, que es el enfoque que hemos visto hasta el momento. Y el enfoque conocido como "frequency domain analysis" que analiza los movimientos oscilatorios de las series temporales identificando el número de observaciones que se necesitan para que se completen los movimientos oscilatorios o cíclicos de las series temporales. Una herramienta importante para poder llevar a cabo el "frequency domain analysis" es el análisis de Fourier.

1.1 Análisis de Fourier.

El análisis de Fourier se basa en la descomposición la función en un conjunto de funciones elementales llamada

base, de forma que la función analizada puede ser escrita como una combinación lineal de las funciones elementales que forman la base. En el análisis de Fourier las funciones elementales que forman la base son las funciones trigonométricas seno y coseno o lo que es lo mismo exponentes complejos. Las funciones elementales que forman la base han de ser ortogonales. Dadas dos funciones de valor complejo $\phi_k(t)$ y $\phi_j(t)$ definidas en el dominio D , se dice que esas dos funciones son ortogonales si:

$$\sum_{t \in D} \phi_k(t) \phi_j^*(t) \begin{cases} = 0 & k \neq j \\ \neq 0 & k = j \end{cases}$$

donde $\phi_j^*(t)$ es el complejo conjugado de $\phi_j(t)$ (si $\phi_j(t) = e^{-i\omega_j t} = \cos(\omega_j t) - i \sin(\omega_j t)$ entonces $\phi_j^*(t) = e^{i\omega_j t} = \cos(\omega_j t) + i \sin(\omega_j t)$).

Se puede mostrar que las funciones trigonométricas $\sin(2\pi kt/n)$ y $\cos(2\pi kt/n)$ definidas en un número finito de puntos n , tal que $t = 1, 2, \dots, n$, para $k = 0, 1, \dots, [n/2]$, (donde $[x]$ es la parte entera de x) forman una base ortogonal:

$$\left\{ \sin\left(\frac{2\pi kt}{n}\right), \cos\left(\frac{2\pi kt}{n}\right) : k = 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] \right\}. \quad (1)$$

Con n par tenemos $[n/2] = n/2$, y entonces con $k = 0$ y $k = n/2$ tenemos $\sin(0t) = \sin(2\pi t) = 0$ y el sistema quedaria $\cos(2\pi 0t/n) = 1$, $\sin(2\pi kt/n)$ y $\cos(2\pi kt/n)$ para $k = 0, 1, \dots, n/2-1$ y $\cos(2\pi (n/2)t/n) = \cos(\pi t) = -1^t$. Con n impar $[n/2] = (n-1)/2$ y el sistema está formado por $\cos(2\pi 0t/n) = 1$, $\sin(2\pi kt/n)$ y $\cos(2\pi kt/n)$ para $k = 0, 1, \dots, (n-1)/2$. Se trata de una base ortogonal, ya que podemos escribir:

$$\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi kt}{n}\right) \cos\left(\frac{2\pi jt}{n}\right) = \begin{cases} n, & k = j = 0 \text{ ó } n/2 \text{ (} n \text{ par)} \\ n/2, & k = j \neq 0 \text{ ó } n/2 \text{ (} n \text{ par)} \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{2\pi kt}{n}\right) \sin\left(\frac{2\pi jt}{n}\right) = \begin{cases} n/2, & k = j \neq 0 \text{ ó } n/2 \text{ (} n \text{ par)} \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi kt}{n}\right) \sin\left(\frac{2\pi jt}{n}\right) = 0, \quad \forall k, j. \quad (4)$$

$$k, j = 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$$

Es fácil ver que (2) en el caso de que $k = j = 0$ o $k = j = n/2$ se cumple, ya que $\cos(2\pi 0t/n) = \cos(t) = 1$

y $\cos(2\pi(n/2)t/n) = \cos(\pi t) = -1^t$. En el resto casos tambien se puede comprobar la ortogonalidad (ver Wei). Una forma intuitiva de ver que (2) y (3) cuando $k = 0$ y $j \neq 0$ en la que tenemos:

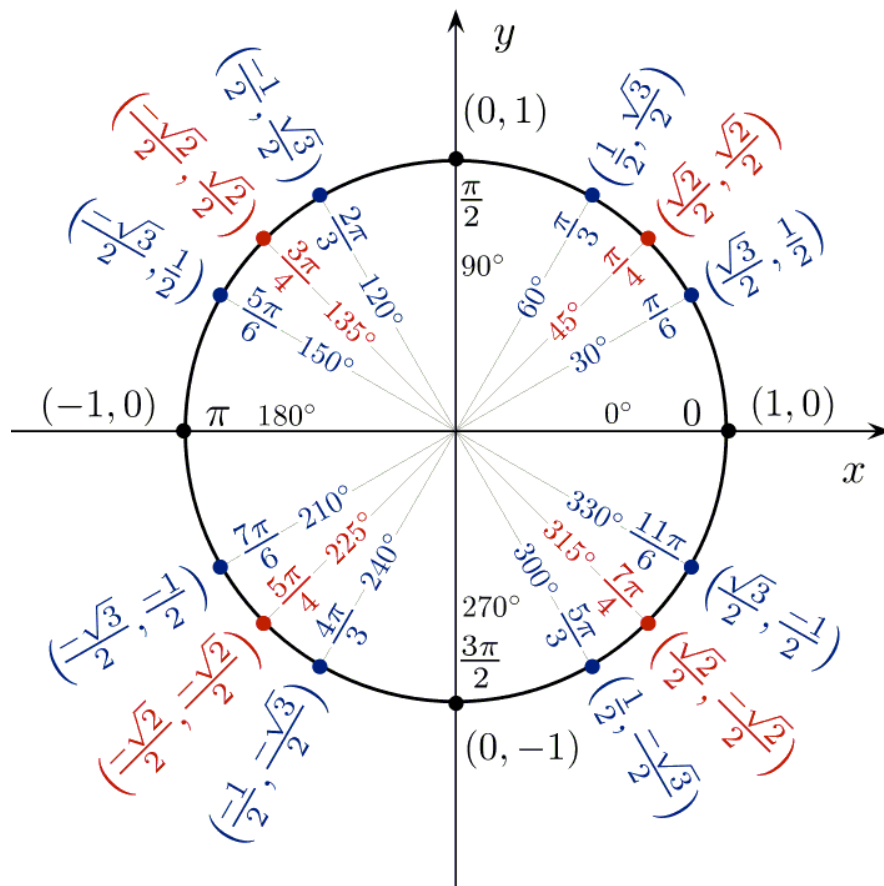
$$\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{2\pi jt}{n}\right) = 0$$

$$j = 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$$

$$\sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{2\pi jt}{n}\right) = 0$$

$$j = 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$$

es el siguiente gráfico:



Este gráfico también permite ver de forma clara que (4) se cumple para $k = j$.

El sistema de funciones trigonométricas (1) puede ser expresado en términos de números complejos utilizando la fórmula de Euler ($e^{\pm i\omega} = \cos(\omega) \pm i \sin(\omega)$). Esta forma es más compacta y simple y en muchos casos más

fácil de usar:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{i\frac{2\pi kt}{n}} : -\frac{n}{2} + 1 \leq k \leq \frac{n}{2} \text{ con } n \text{ par} \\ -\frac{(n-1)}{2} \leq k \leq \frac{(n-1)}{2} \text{ con } n \text{ impar} \end{array} \right\}. \quad (5)$$

En este caso la ortogonalidad del sistema se expresa como:

$$\sum_{t=1}^n e^{i\frac{2\pi kt}{n}} e^{-i\frac{2\pi jt}{n}} = \begin{cases} n, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}.$$

En base a lo anterior podemos definir utilizando como base (1) para una secuencia finita de observaciones Z_t con $t = 1, 2, \dots, n$ se define la representación en series de Fourier de la secuencia de observaciones Z_t con $t = 1, 2, \dots, n$ como:

$$\begin{aligned} Z_t &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{n}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{n}\right) \right], \quad (6) \\ t &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

donde a_k y b_k son los coeficientes de Fourier. Usando las propiedades de ortogonalidad de la base (1) se pueden obtener expresiones para a_k y b_k multiplicando en ambos

lados de (6) por $\cos(2\pi kt/n)$ y $\sin(2\pi kt/n)$, sumando desde $t = 1$ a $t = n$ y despejando:

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_t \cos\left(\frac{2\pi kt}{n}\right) & k = 0 \quad y \quad k = n/2 \quad n \text{ par} \\ \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n Z_t \cos\left(\frac{2\pi kt}{n}\right) & k = 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2}\right] \end{cases} \quad (7)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n Z_t \sin\left(\frac{2\pi kt}{n}\right) \quad k = 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Al anterior resultado tb se llega estimado por MCO (1) teniendo en cuenta que la matrix de productos cruzados asociada a los regresores es una matriz diagonal con elementos en la diagonal principal iguales a n o $n/2$. Si denotamos por $\omega_k = 2\pi k/n$ para $k = 0, 1, \dots, [n/2]$, a las anteriores frecuencias ω_k se las llama frecuencias de Fourier. Otra forma de escribir (6) pero en este caso usando las base (5) es:

$$Z_t = \begin{cases} \sum_{k=-n/2+1}^{n/2} c_k e^{i\omega_k t}, & n \text{ par} \\ \sum_{k=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} c_k e^{i\omega_k t}, & n \text{ impar} \end{cases} \quad (8)$$

En este caso los coeficientes c_k se pueden obtener multiplicando (5) por $e^{-i\omega_k t}$, sumando sumando desde $t = 1$ a $t = n$ y despejando:

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_t e^{-i\omega_k t}. \quad (9)$$

A partir de (6) y (8) o (7) y (9) se puede establecer que existe la siguiente relación:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0; & c_{n/2} &= a_{n/2} \quad \text{si } n \text{ par} \\ c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} \\ c_{-k} &= \frac{a_k + ib_k}{2}, \end{aligned}$$

y como se puede ver c_k y c_{-k} son un par de coeficientes complejos conjugados.

Todo el anterior análisis puede ser extendido de forma inmediata a una secuencia de valores (Z_t) periódica, es decir cuando tenemos:

$$Z_{t+n} = Z_t,$$

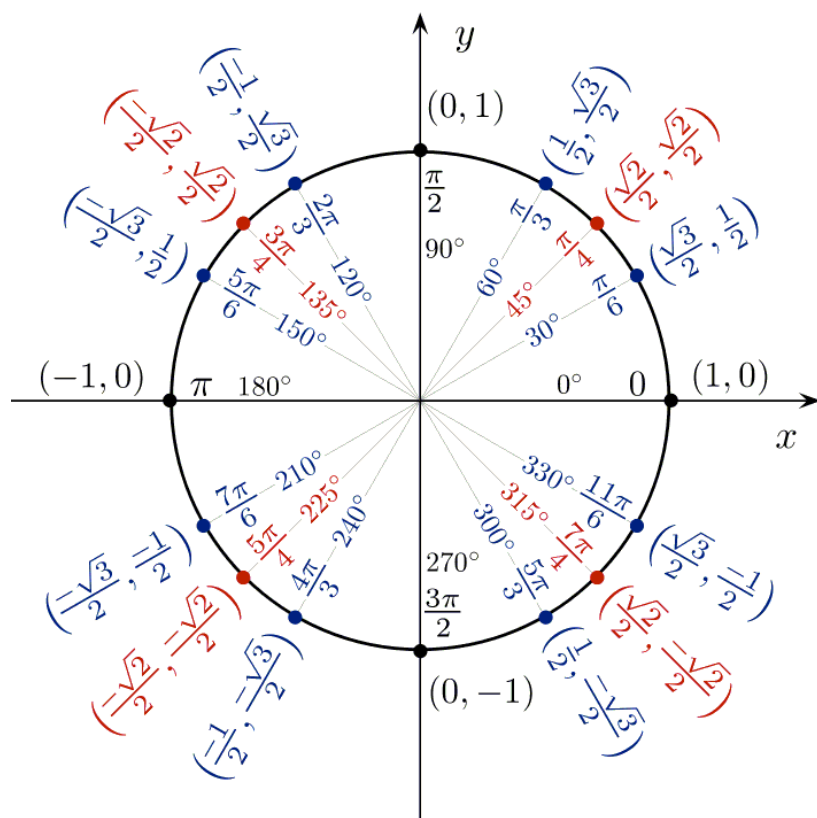
donde el periodo de repetición de la secuencia es n . Y por lo tanto Z_t sólo adopta n valores distintos que se van repitiendo una vez que la secuencia se termina. Por tanto se cumple:

$$Z_{t+jn} = Z_t$$

para cualquier número entero t y j . Es decir, las expresiones (6), (7), (8) y (9) son válidas para cualquier valor entero de t en la secuencia Z_t . El valor más pequeño de n para el cual la representación en series de Fourier se puede hacer, se le llama periodo fundamental n (el número entero menor para el que la secuencia se repite). Asociado al período fundamental n , existe la frecuencia fundamental $2\pi/n$. La frecuencia $2\pi/n$ está asociado a oscilaciones con período de repetición n . En concreto las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/n$ están asociados a oscilaciones con periodo de repetición (o tiempo que tardan en completan una oscilación completa) igual a $2\pi/\omega_k = n/k$. Los términos para $k = 1$ y $k = -1$ en la expresión (8) están asociados al mismo periodo y frecuencia fundamental

n y $\omega_1 = 2\pi/n$, y cuando ocurre esto se les llama armónicos. En concreto para las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/n$ con $k = 1, \dots, n/2 - 1$ si n es par, tenemos que las frecuencias $2\pi k/n$ y $-2\pi k/n$ son indistinguibles y se les llama frecuencias armónicas. Por ejemplo para $n = 6$:

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
ω_k	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π



Para una secuencia periódica Z_t de periodo n , la energía asociada en un periodo completo es $\sum_{t=1}^n Z_t^2$. Si multiplicamos ambos lados de (6) por Z_t y sumamos desde $t = 1$ a $t = n$ obtenemos la siguiente expresión para la energía $\sum_{t=1}^n Z_t^2$:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n Z_t^2 &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left[a_k \sum_{t=1}^n \left(\cos \left(\frac{2\pi kt}{n} \right) Z_t \right) + b_k \sum_{t=1}^n \left(\sin \left(\frac{2\pi kt}{n} \right) Z_t \right) \right] \\ &= na_0^2 + \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{\left[\frac{(n-1)}{2}\right]} [a_k^2 + b_k^2] + na_{n/2}^2 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado (7). Cuando n es impar el término $na_{n/2}^2$ no aparece en (??). De forma equivalente multiplicando a (8) por Z_t y sumando y despues utilizando (9) llegamos a:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n Z_t^2 &= \begin{cases} \sum_{k=-n/2+1}^{n/2} c_k \sum_{t=1}^n \left(e^{i\omega_k t} Z_t \right), & n \text{ par} \\ \sum_{k=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} c_k \sum_{t=1}^n \left(e^{i\omega_k t} Z_t \right), & n \text{ impar} \end{cases} \quad (11) \\ &= \begin{cases} n \sum_{k=-n/2+1}^{n/2} c_k c_{-k}, & n \text{ par} \\ n \sum_{k=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} c_k c_{-k}, & n \text{ impar} \end{cases} . \end{aligned}$$

A las anteriores expresiones se les conoce con el nombre de relaciones de Parseval de las series de Fourier. Si dividimos por n (10) o (11) obtenemos la contribución de cada frecuencia a la potencia de la secuencia $\sum_{t=1}^n Z_t^2/n$. Y podemos ver que será:

$$\begin{aligned} \text{Power} &= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\left[\frac{(n-1)}{2}\right]} [a_k^2 + b_k^2] + a_{n/2}^2 \\ &= \sum_{k=-n/2+1}^{n/2} c_k c_{-k}. \end{aligned}$$

Si llamamos f_k a la contribución de cada frecuencia $\omega_k = 2\pi k/n$ $k = 0, 1, \dots, [n/2]$ a la potencia total $\sum_{t=1}^n Z_t^2/n$ podemos ver que tenemos:

$$\begin{aligned} f_0 &= a_0^2 = c_0^2 \\ f_{n/2} &= a_{n/2}^2 = c_{n/2} c_{-n/2} \\ f_k &= \frac{1}{2} [a_k^2 + b_k^2] = 2c_k c_{-k}. \end{aligned}$$

A la representación gráfica de la descomposición del potencia de de una secuencia $\sum_{t=1}^n Z_t^2/n$ en las distintas frecuencias se le llama Power Spectrum.

Todo lo anterior puede ser extendido a secuencia o series temporales que sean no periodicas. Entonces tenemos:

$$Z_t = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (12)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} Z_t e^{-i\omega t}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (13)$$

A (13) se le llama Transforma de Fourier de la serie temporal Z_t y a (12) se le llama transformada inversa de Fourier y es la base la función de densidad espectral de una serie temporal.

1.2 El Espectro

Para un proceso de series temporales x_t , que sea estacionario. Se puede definir la transformada de Fourier de

su función de autocovarianzas γ_k y tenemos el espectro:

$$\begin{aligned}
 f(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\omega k} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \cos(\omega k) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \gamma_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos(\omega k) \\
 -\pi &\leq \omega \leq \pi.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Donde hemos utilizado el hecho de que $e^{-i\omega k} = \cos(\omega k) - i \sin(\omega k)$, $\gamma_k = \gamma_{-k}$, $\cos(-\omega k) = \cos(\omega k)$ y $\sin(-\omega k) = -\sin(\omega k)$. La secuencia de autocovarianzas γ_k puede ser obtenida a partir de $f(\omega)$ utilizando la transformada inversa de Fourier $\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega k} d\omega$. El espectro tiene las siguientes propiedades:

1. $f(\omega)$ es una función continua, real y no negativa.
2. Es periódica y simétrica $f(\omega + 2\pi) = f(\omega)$ y $f(-\omega) =$

$f(\omega)$. Por lo tanto se representa gráficamente en intervalo $0 \leq \omega \leq \pi$.

3. Dado que $\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega k} d\omega$, tendremos $\gamma_0 =$
 $VAR[x_t] = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega 0} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega$. Es decir, el espectro descompone la varianza de la serie, en la cotribución de cada frecuencia ω a dicha varianza o variabilidad γ_0 .

1.2.1 El espectro de algunos procesos lineales típicos

Teniendo el cuenta que definimos la función generatriz de autovarianzas como:

$$\gamma(L) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k L^k = \sigma_{\varepsilon}^2 \psi(L) \psi(F),$$

se puede ver facilmente que el espectro o función de densidad espectral de un proceso x_t con función de autocovarianzas γ_k se puede definir como, la función generatriz de autocovarianzas $\gamma(L)$ evaluada para $L = e^{-i\omega k}$ y ponderada por $1/(2\pi)$:

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\omega k} \\ &= \frac{1}{2\pi} \gamma(e^{-i\omega}) \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \psi(e^{-i\omega}) \psi(e^{i\omega}). \end{aligned}$$

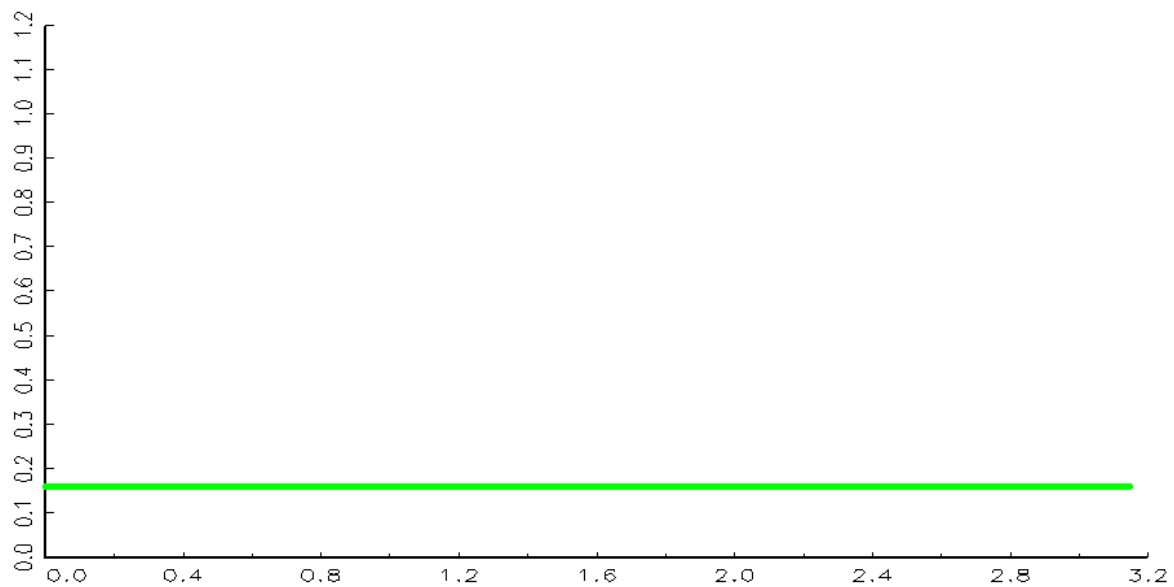
El espectro permite obtener información sobre la aportación a la variabilidad total del proceso estocástico de las oscilaciones asociadas a las distintas frecuencias (ω) con las que se repiten. Cada frecuencia ω está asociado el período de repetición de la oscilación λ , que se obtiene $\lambda = 2\pi/\omega$.

Es fácil ver que el espectro de un proceso ruido blanco tendra un espectro:

$$x_t = \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$g(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \quad \omega = (0, \pi)$$

$$x_t = \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$$



Tal y como hemos visto para un proceso ARMA(p,q) estacionario podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\phi(L) x_t &= \theta(L) \varepsilon_t \\
x_t &= \psi(L) \varepsilon_t \\
\psi(L) &= \frac{\theta(L)}{\phi(L)} \\
\theta(L) &= (1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q) \\
\phi(L) &= (1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)
\end{aligned}$$

Y su espectro responde ha:

$$\begin{aligned}
g(\omega) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \psi(e^{-i\omega}) \psi(e^{i\omega}) \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{\theta(e^{-i\omega}) \theta(e^{i\omega})}{\phi(e^{-i\omega}) \phi(e^{i\omega})}
\end{aligned}$$

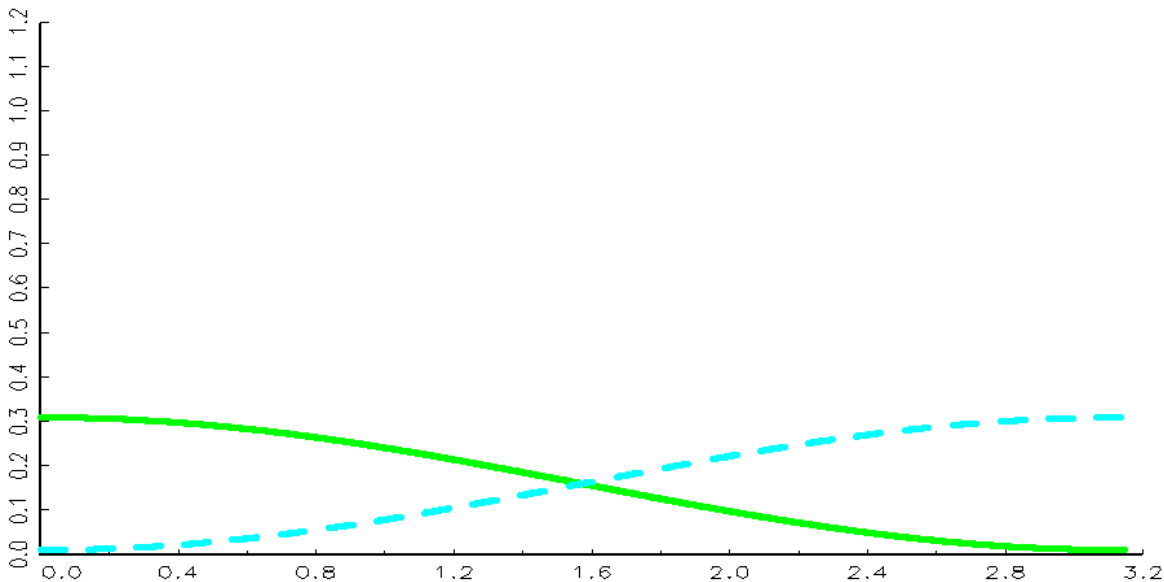
- El espectro de un proceso MA(1):

$$x_t = (1 - \theta L) \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2 \left(1 - \theta e^{-i\omega}\right) \left(1 - \theta e^{i\omega}\right)}{2\pi} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2 \left(1 - 2\theta \cos(\omega) + \theta^2\right)}{2\pi} \end{aligned}$$

$$x_t = (1 - .7L) \varepsilon_t$$

$$x_t = (1 + .7L) \varepsilon_t$$



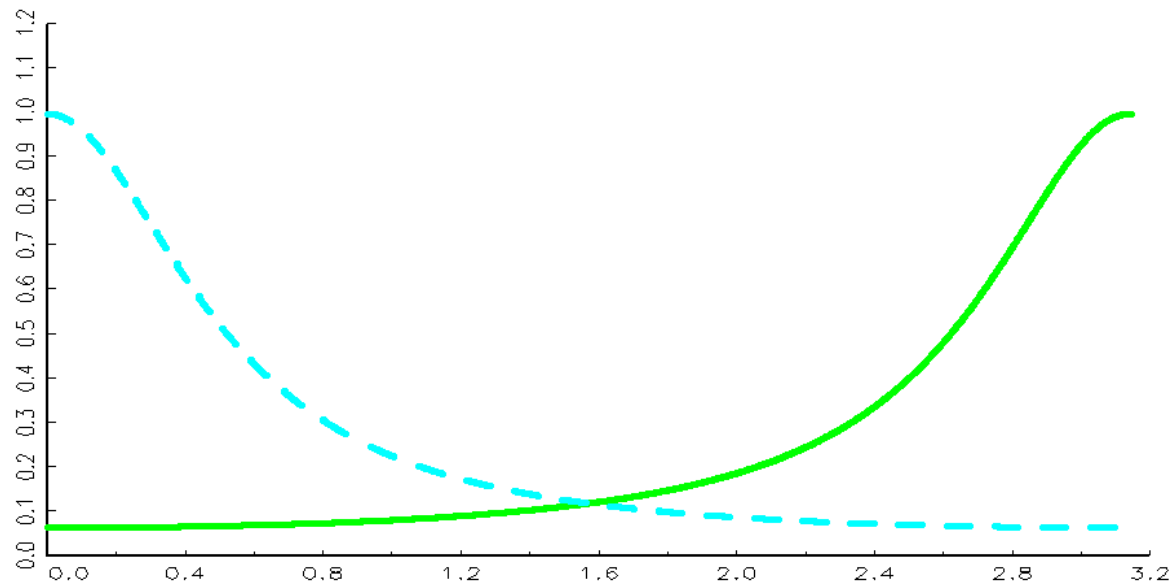
- El espectro de un proceso AR(1):

$$(1 - \phi L) x_t = \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{2\pi} \frac{1}{(1 - \phi e^{-i\omega})(1 - \phi e^{i\omega})} \\ &= \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{2\pi} \frac{1}{(1 - 2\phi \cos(\omega) + \phi^2)} \end{aligned}$$

$$(1 - .6L) x_t = \varepsilon_t$$

$$(1 + .6L) x_t = \varepsilon_t$$

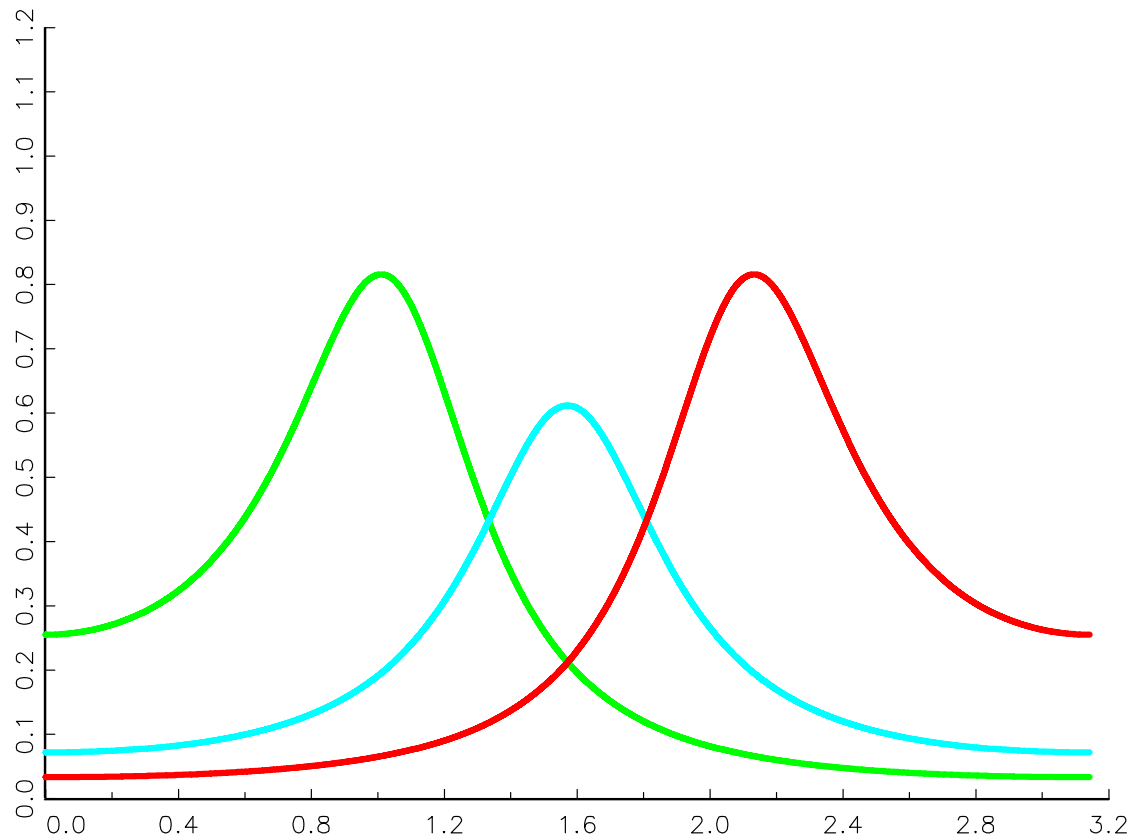


- El espectro de un proceso AR(2):

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) x_t = \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned}
g(\omega) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{1}{\left(1 - \phi_1 e^{-i\omega} - \phi_2 e^{-i2\omega}\right) \left(1 - \phi_1 e^{i\omega} - \phi_2 e^{i2\omega}\right)} \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left\{ 1 - 2\phi_1 \cos(\omega) - 2\phi_2 \cos(2\omega) \right. \\
&\quad \left. + 2\phi_1 \phi_2 \cos(\omega) + \phi_1^2 + \phi_2^2 \right\}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \left(1 - 2 \cos \left(\frac{\pi}{3}\right) .7L + .7^2 L^2\right) x_t = \varepsilon_t \\ \left(1 - 2 \cos \left(\frac{\pi}{2}\right) .7L + .7^2 L^2\right) x_t = \varepsilon_t \\ \left(1 - 2 \cos \left(2\frac{\pi}{3}\right) .7L + .7^2 L^2\right) x_t = \varepsilon_t \end{cases}$$

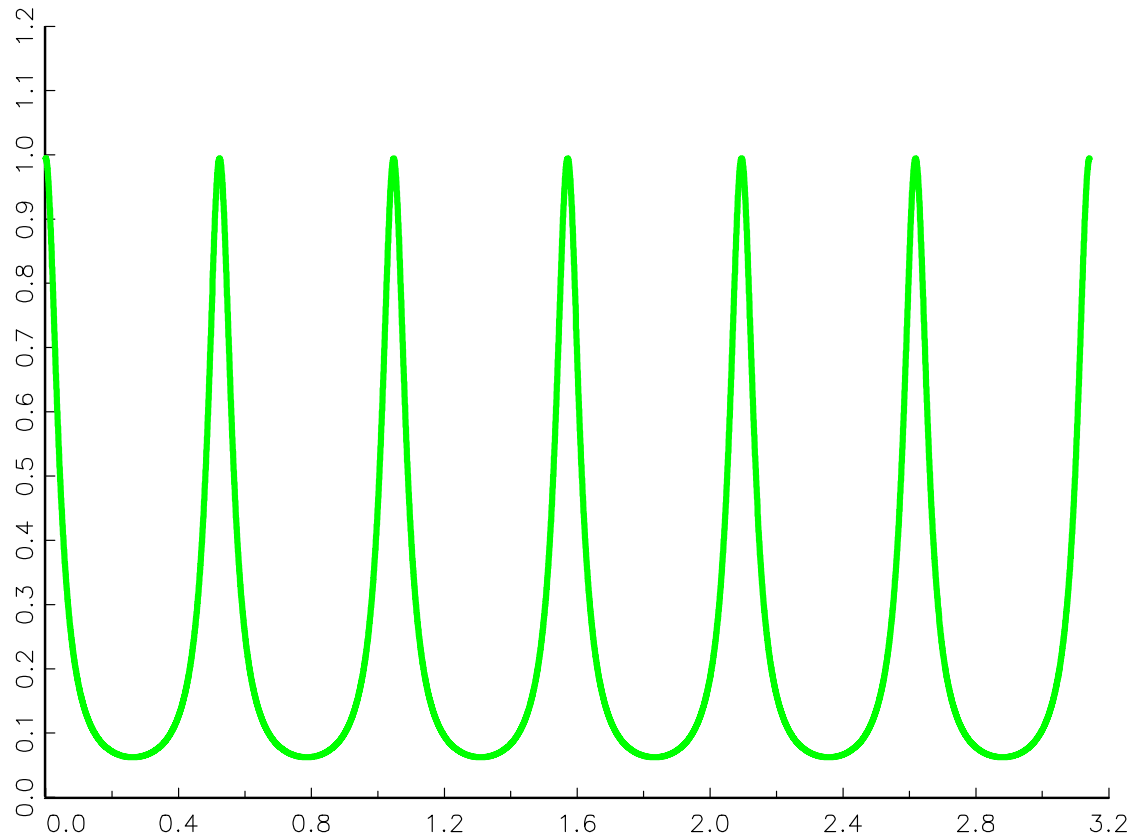


- El espectro de un proceso AR(1) estacional:

$$\left(1 - \Phi L^S\right) x_t = \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{1}{\left(1 - \Phi e^{-iS\omega}\right) \left(1 - \Phi e^{iS\omega}\right)} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{1}{\left(1 - 2\Phi \cos(S\omega) + \Phi^2\right)} \end{aligned}$$

$$(1 - 0.6L^{12}) x_t = \varepsilon_t$$



1.3 Estimación del espectro

Teniendo en cuenta la definición de espectro (14):

$$\begin{aligned}
f(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\omega k} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos(\omega k) \right) \\
-\pi &\leq \omega \leq \pi.
\end{aligned}$$

Una forma natural de estimar $f(\omega)$ consiste en sustituir las autocovarianzas poblacionales γ_k por las autocovarianzas muestrales $\hat{\gamma}_k$, que como es natural podríamos calcular para $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ y tendríamos:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \hat{\gamma}_k e^{-i\omega k} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\gamma}_k \cos(\omega k) \right) \\
-\pi &\leq \omega \leq \pi.
\end{aligned} \tag{15}$$

La estimación del espectro de una serie temporal de la manera anterior presenta un problema importante, que consiste en que $\hat{f}(\omega)$ es un estimador asintóticamente

insesgado de $f(\omega)$, pero es un estimador inconsistente, dado que $VAR[\hat{f}(\omega)] = [f(\omega)]^2$. Para conseguir que el estimador de $f(\omega)$ la solución habitual consiste en realizar un "Smoothing" (suavizado) de la estimación del espectro o función de densidad espectral. Esto se realiza a través de una función de pesos. Dicha función se puede aplicar en el dominio de la frecuencias, y la estimación suavizada de la función de densidad espectral es una media ponderada de (15):

$$\hat{f}_{\mathcal{W}}(\omega_k) = \sum_{j=-m}^m \mathcal{W}(\omega_j) \hat{f}(\omega_k - \omega_j)$$

Es decir la estimación de $f(\omega_k)$ será la media ponderada de $\hat{f}(\omega_k)$ y las m estimaciones contiguas por delante y por debajo de la frecuencia ω_k . La función de pesos o ventana espectral (spectral window) $\mathcal{W}(\omega_j)$ debe de

cumplir las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\sum_{j=-m}^m \mathcal{W}(\omega_j) &= 1 \\ \mathcal{W}(\omega_j) &= \mathcal{W}(-\omega_j) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-m}^m \mathcal{W}(\omega_j)^2 &= 0.\end{aligned}$$

También se puede hacer la estimación ponderada en el dominio temporal, es decir, aplicando una función de ponderación a las autocovarianzas muestrales:

$$\hat{f}_{\mathcal{W}}(\omega_k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} W(k) \hat{\gamma}_k e^{-i\omega k}$$

En la mayoría de casos, en vez de utilizar todas las autocovarianzas que se pueden calcular se trunca la suma ponderada a las M más cercanas (M es el bandwidth):

$$\hat{f}_{\mathcal{W}}(\omega_k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^M W\left(\frac{k}{M}\right) \hat{\gamma}_k e^{-i\omega k}$$

La función de pesos $W(k)$ recibe el nombre "lag window" o kernel y tiene que cumplir las siguientes condi-

ciones:

$$W(x) \leq 1$$

$$W(x) = W(-x)$$

$$W(0) = 1$$

$$W(x) = 0 \quad |x| > 1.$$

Un kernel o ventana muy utilizado es el de Bartlett (o triangular):

$$W\left(\frac{k}{M}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{M} & |k| \leq M \\ 0 & |k| > M \end{cases}.$$

Las ventanas en el dominio temporal y de las frecuencias están relacionadas en concreto la ventana de Bartlett en el dominio temporal es equivalente a la ventana de Fejer en el dominio frecuencial que responde a:

$$\mathcal{W}(\omega) = \frac{1}{2\pi M} \left[\frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)} \right]^2.$$

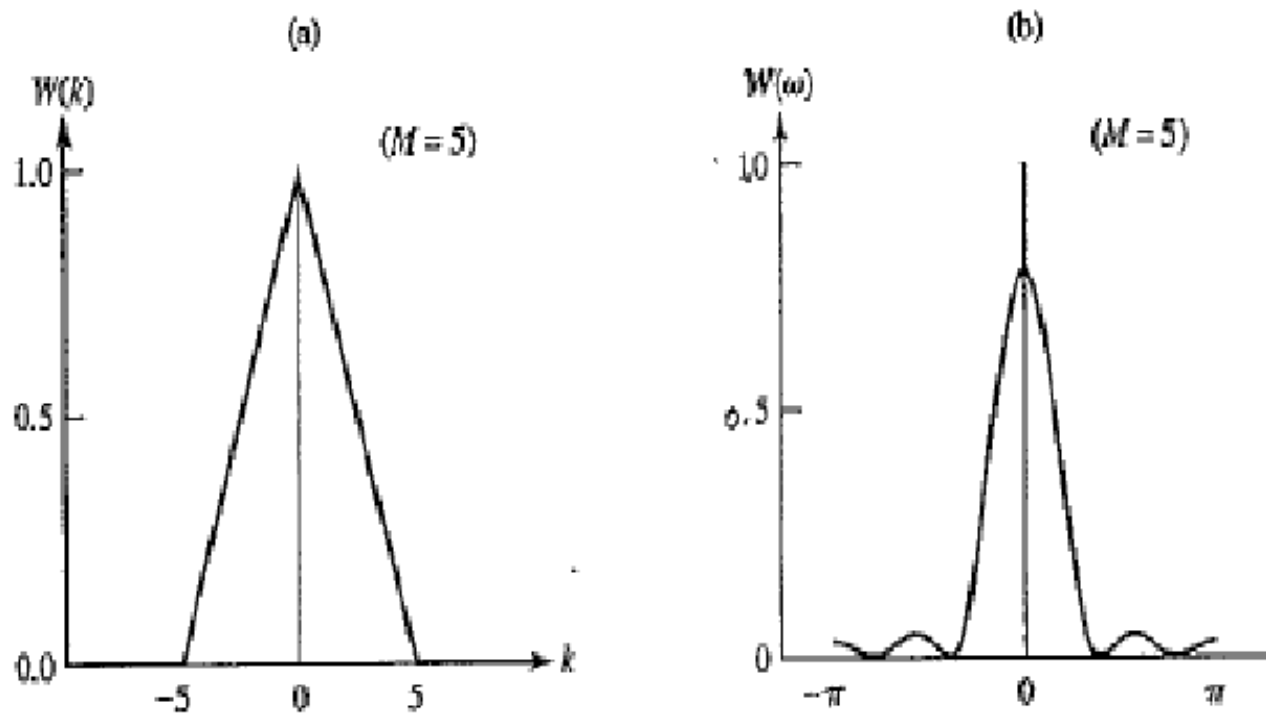


FIGURE 13.5 Bartlett's lag and spectral windows. (a) Bartlett's triangular lag window. (b) Bartlett's spectral window.

Estimación Autoregresiva de la función de densidad espectral o espectro. Cualquier proceso estacionario puede ser aproximado de forma satisfactoria por un proceso autoregresivo de orden p $AR(p)$, de forma que p sea suficiente elevado:

$$\left(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p\right) x_t = a_t$$

para que a_t no presente autocorrelación. Si llamamos $\hat{\phi}_j$ $j = 1, \dots, p$ y $\hat{\sigma}_a^2$ a los estimadores de ϕ_j $j = 1, \dots, p$ y σ_a^2 respectivamente, basándonos el espectro de un proceso AR(p) podemos definir la estimación autoregresiva del espectro como:

$$\hat{f}_{AR}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}_a^2}{2\pi} \frac{1}{\hat{\phi}(e^{-i\omega}) \hat{\phi}(e^{-i\omega})}$$

$$\hat{\phi}(e^{-i\omega}) = (1 - \hat{\phi}_1 e^{-i\omega} - \hat{\phi}_2 e^{-2i\omega} - \dots - \hat{\phi}_p e^{-pi\omega}).$$