# 1 Alisado exponencia simple.

El alisado exponencial simple (Exponential Smoothing), es un método de predicción que se basa se obtener la predición de una serie $y_t$, para el periodo $t+1$, $\hat{y}_t(1) = \hat{y}_{t+1|t}$ a partir de una medía ponderada de todos los valores pasadps de $y_t$ según el siguiente esquema::

$$\begin{aligned} \hat{y}_t(1) &= \alpha y_t + \alpha(1-\alpha) y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^i y_{t-1} \\ 0 &< \alpha < 1 \end{aligned}$$

donde $\alpha$ recibe el nombre de constante de alisamiento. La expresioón anterior se puede reescribir como:

$$\hat{y}_t(1) = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_{t-1}(1) \tag{1}$$

sólo es necesario tener presente que:

$$\hat{y}_t(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^i y_{t-1} = \frac{\alpha}{(1-[1-\alpha]L)} y_t$$

o alternativamente:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_t(1) &= \alpha y_t + \alpha(1-\alpha) y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \alpha(1-\\
\hat{y}_t(1) &= \alpha y_t + (1-\alpha)\Big[\alpha y_{t-1} + \alpha(1-\alpha) y_{t-2} + \alpha(1-\\
\hat{y}_t(1) &= \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_{t-1}(1) \\
con &: \\
\hat{y}_{t-1}(1) &= \alpha y_{t-1} + \alpha(1-\alpha) y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-3} + \cdots
\end{aligned}
$$

El alisado exponencial también admite una representación en términos de mecanismo de correción del error:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_t(1) &= \hat{y}_{t-1}(1) + \alpha e_{t-1}(1) \qquad (2)\\
con &: \\
e_{t-1}(1) &= y_t - \hat{y}_{t-1}(1)
\end{aligned}
$$

A la que se puede llegar facilmente utilizando (1):

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_t(1) &= \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_{t-1}(1) \\
&= \alpha y_t + \hat{y}_{t-1}(1) - \alpha\hat{y}_{t-1}(1) \\
&= \hat{y}_{t-1}(1) + \alpha\left[y_t - \hat{y}_{t-1}(1)\right].
\end{aligned}
$$

Finalmente también es fácil ver que el aliaso exponencial simple es equivalente a asumir que la serie responde a un proceso IMA(1,1), donde la innovación del proceso sería le error de predicción $e_t(1) = y_{t+1} - \hat{y}_t(1)$, dado que:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_t(1) &= \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_{t-1}(1) \\
\hat{y}_t(1) &= y_{t+1} - e_t(1) \\
y_{t+1} - e_t(1) &= \alpha y_t + (1-\alpha)[y_t - e_{t-1}(1)] \\
y_{t+1} - e_t(1) &= \alpha y_t + y_t - \alpha y_t - (1-\alpha)e_{t-1}(1) \\
y_{t+1} - e_t(1) &= y_t - (1-\alpha)e_{t-1}(1) \\
y_{t+1} - y_t &= e_t(1) - (1-\alpha)e_{t-1}(1) \\
(1-L)y_{t+1} &= (1-[1-\alpha]L)e_t(1).
\end{aligned}$$

La estimación de la constante de alisamiento se hace de Mínimos cuadrados no Lineales miinimizando la suma de cuadrados de los errores de predicción un periodo hacia adelante $\sum_{t=1}^{T} e_t^2(1)$ o tambíen se puede estimar el modelo IMA(1,1) $\Delta y_t = (1-\theta L)u_t$ y asignar $\alpha = 1-\theta$.

El alisado exponencial simple al estar ligado con el proceso IMA(1,1) $\Delta y_t = (1-[1-\alpha]L)u_t$ también está ligado al Local Level Model, que es un casl particular del

Local Level Trend que vimos en los modelos estructurales de series temporales:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + e_t \end{aligned} \tag{3}$$

en el que se puede ver que:

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{e_t}{(1-L)} + \varepsilon_t \\ (1-L)\, y_t &= e_t + (1-L)\, \varepsilon_t. \end{aligned}$$

A partir, de todo lo anterior se puede deducir que las prediciones obtenidas con el aliaso exponencial serán equivalente a las obtenidos con un proceso IMA(1,1) y un Local Level.

# 2 Alisado Exponencial de Holt

Es una extensión del Alisado exponencial que permite añadir un comportamiento tendencial a la serie analizada.

Y responde a:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_t(1) &= \hat{T}_t + \hat{\beta}_t \\
\hat{T}_t &= \alpha y_t + (1-\alpha)\left(\hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1}\right) \qquad (4)\\
& \quad \alpha y_t + (1-\alpha)\,\hat{y}_{t-1}(1) \\
\hat{\beta}_t &= \lambda\left[\hat{T}_t - \hat{T}_{t-1}\right] + (1-\lambda)\,\hat{\beta}_{t-1.} \qquad (5)
\end{aligned}$$

Al igual que en el caso anterior admite una representación como mecanismo de corrección de error:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_t(1) &= \hat{T}_t + \hat{\beta}_t \\
\hat{T}_t &= \left(\hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1}\right) + \alpha\left(y_t - \hat{T}_{t-1} - \hat{\beta}_{t-1}\right) \qquad (6)\\
&= \hat{y}_{t-1}(1) + \alpha\left[y_t - \hat{y}_{t-1}(1)\right] \\
&= \hat{y}_{t-1}(1) + \alpha e_{t-1}(1) \\
\hat{\beta}_t &= \hat{\beta}_{t-1} + \alpha\lambda e_{t-1}(1)\,. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Para obtener (6) sólo hay que rescribir (4):

$$\begin{aligned}
\hat{T}_t &= \alpha y_t + (1-\alpha)\left(\hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1}\right) = \\
& \quad \hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1} + \alpha\left(y_t - \hat{T}_{t-1} - \hat{\beta}_{t-1}\right).
\end{aligned}$$

en el caso de (7) si sustituimos $\hat{y}_{t-1}(1) = \hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1}$ en (6) vemos que

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{t-1} &= \hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1} + \alpha e_{t-1}(1) \\
\hat{T}_{t-1} - \hat{T}_{t-1} &= \hat{\beta}_{t-1} + \alpha e_{t-1}(1)
\end{aligned}$$

sustituyendo en (5) vemos que:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_t &= \lambda \left[\hat{\beta}_{t-1} + \alpha e_{t-1}(1)\right] + (1-\lambda)\hat{\beta}_{t-1} \\
&= \hat{\beta}_{t-1} + \lambda\hat{\beta}_{t-1} - \lambda\hat{\beta}_{t-1} + \lambda\alpha e_{t-1}(1) \\
&= \hat{\beta}_{t-1} + \lambda\alpha e_{t-1}(1).
\end{aligned}$$

De forma equivalente al caso anterior se ha demostrado que através del alisado exponencial de Holt se obtiene predicciones equivalentes a las obtenidas mediante el proceso Local Level Trend:

$$\begin{aligned}
y_t &= T_t + \varepsilon_t \\
T_t &= T_{t-1} + \beta_{t-1} + e_t \\
\beta_t &= \beta_{t-1} + v_t
\end{aligned} \tag{8}$$

que a su vez vimos que podia ser escrito como:

$$\begin{aligned}
y_t &= T_t + \varepsilon_t \\
\Delta T_t &= \beta_{t-1} + e_t \\
\Delta \beta_t &= v_t
\end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned}
y_t &= \frac{v_{t-1}}{\Delta^2} + \frac{e_t}{\Delta} + \varepsilon_t \\
\Delta^2 y_t &= v_{t-1} + \Delta e_t + \Delta^2 \varepsilon_t \\
\Delta^2 y_t &= v_{t-1} + e_t + e_{t-1} + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}
\end{aligned}$$

Que es como tener un proceso IMA(2,2).

# 3 Alisado exponencial de Holt-Winters

En este caso además de tendencia se permite tener un comportamiento estacional. La predicción se obtiene a partir de:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_t(1) &= \hat{T}_t + \hat{\beta}_t + \hat{S}_{t-S} \\
\hat{T}_t &= \alpha\left[y_t - \hat{S}_{t-S}\right] + (1-\alpha)\left[\hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1}\right] && (9) \\
\hat{\beta}_t &= \lambda\left[\hat{T}_t - \hat{T}_{t-1}\right] + (1-\lambda)\hat{\beta}_{t-1} && (10) \\
\hat{S}_t &= \gamma\left[y_t - \hat{T}_t\right] + (1-\gamma)\hat{S}_{t-S}. && (11)
\end{aligned}$$

Que como en los caso anteriores admite una representación en terminis de mecanismo de corrección del error que responde a:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_t(1) &= \hat{T}_t + \hat{\beta}_t + \hat{S}_{t-S} \\
\hat{T}_t &= \hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1} + \alpha e_{t-1}(1) && (12) \\
\hat{\beta}_t &= \hat{\beta}_{t-1} + \alpha\lambda e_{t-1}(1) && (13) \\
\hat{S}_t &= \hat{S}_{t-S} + \gamma(1-\alpha)\, e_{t-1}(1)\,. && (14)
\end{aligned}
$$

Para llegar a (12) sólo hace falta reescribir (9):

$$
\begin{aligned}
\hat{T}_t &= \alpha\left[y_t - \hat{S}_{t-S}\right] + (1-\alpha)\left[\hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1}\right] \\
&= \hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1} + \alpha y_t - \alpha\hat{S}_{t-S} - \alpha\left[\hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1}\right] \\
&= \hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1} + \alpha\left[y_t - \hat{T}_{t-1} - \hat{\beta}_{t-1} - \hat{S}_{t-S}\right].
\end{aligned}
$$

En el caso de (13) si partimos de (12) vemos que:

$$
\begin{aligned}
\hat{T}_t &= \hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1} + \alpha e_{t-1}(1) \\
\hat{T}_t - \hat{T}_{t-1} &= \hat{\beta}_{t-1} + \alpha e_{t-1}(1)
\end{aligned}
$$

entonces sustituyendo en (10) llegamos a:

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_t &= \lambda\left[\hat{\beta}_{t-1} + \alpha e_{t-1}(1)\right] + (1-\lambda)\,\hat{\beta}_{t-1} \\
&= \lambda\hat{\beta}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1} - \lambda\hat{\beta}_{t-1} + \lambda\alpha e_{t-1}(1) \\
&= \hat{\beta}_{t-1} + \lambda\alpha e_{t-1}(1)\,.
\end{aligned}
$$

Finalmente para (14) si partimos de (11) vemos que:

$$\begin{aligned}\hat{S}_t &= \gamma y_t - \gamma \hat{T}_t + \hat{S}_{t-S} - \gamma \hat{S}_{t-S} \\ &= \hat{S}_{t-S} + \gamma \left[ y_t - \hat{T}_t - \hat{S}_{t-S} \right]\end{aligned}$$

si sustituimos (12) en la expresión anterior tenemos:

$$\begin{aligned}\hat{S}_t &= \hat{S}_{t-S} + \gamma \left[ y_t - \hat{T}_{t-1} - \hat{\beta}_{t-1} - \alpha e_{t-1}(1) - \hat{S}_{t-S} \right] \\ &= \hat{S}_{t-S} + \gamma \left[ y_t - \hat{T}_{t-1} - \hat{\beta}_{t-1} - \hat{S}_{t-S} - \alpha e_{t-1}(1) \right] \\ &= \hat{S}_{t-S} + \gamma \left[ e_{t-1}(1) - \alpha e_{t-1}(1) \right] \\ &= \hat{S}_{t-S} + \gamma (1-\alpha) e_{t-1}(1).\end{aligned}$$

# 4 Alisado exponencial Multiplicativo

A parte del enfoque aditivo que hemos visto hasta el momento, tambíén se puede adoptar un enfoque multiplicativo en el que alisado exponencial de Holt quedaría:

$$\begin{aligned}\hat{y}_t(1) &= \hat{T}_t \times \hat{\beta}_t \\ \hat{T}_t &= \alpha y_t + (1-\alpha)\left( \hat{T}_{t-1} \times \hat{\beta}_{t-1} \right) \\ \hat{\beta}_t &= \lambda \left[ \hat{T}_t / \hat{T}_{t-1} \right] + (1-\lambda)\hat{\beta}_{t-1}.\end{aligned}$$

Y en la forma de mecanismo de correción del error:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_t(1) &= \hat{T}_t \times \hat{\beta}_t \\
\hat{T}_t &= \hat{T}_{t-1} \times \hat{\beta}_{t-1} + \alpha e_t(1) \\
\hat{\beta}_t &= \hat{\beta}_{t-1} + -\lambda\alpha \left[ e_t(1) / \hat{T}_{t-1} \right] \\
e_t(1) &= y_{t+1} - \hat{y}_t(1) = y_{t+1} - \left( \hat{T}_t \times \hat{\beta}_t \right).
\end{aligned}$$

En el caso del alisado exponencial de Holt-Winters la forma multiplicativa responde a:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_t(1) &= \left( \hat{T}_t + \hat{\beta}_t \right) \hat{S}_{t-S} \\
\hat{T}_t &= \alpha \left[ y_t / \hat{S}_{t-S} \right] + (1-\alpha) \left[ \hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1} \right] \\
\hat{\beta}_t &= \lambda \left[ \hat{T}_t - \hat{T}_{t-1} \right] + (1-\lambda) \hat{\beta}_{t-1} \\
\hat{S}_t &= \gamma \left[ y_t / \hat{T}_t \right] + (1-\gamma) \hat{S}_{t-S.}
\end{aligned}$$

Y su representación en forma de mecanismo de corrección del error:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_t(1) &= \left( \hat{T}_t + \hat{\beta}_t \right) \hat{S}_{t-S} \\
\hat{T}_t &= \hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1} + \alpha \left[ e_t(1) / \hat{S}_{t-S} \right] \\
\hat{\beta}_t &= \hat{\beta}_{t-1} + \alpha\lambda \left[ e_t(1) / \hat{S}_{t-S} \right] \\
\hat{S}_t &= \hat{S}_{t-S} + \gamma \left[ e_t(1) / \hat{T}_{t-1} \right].
\end{aligned}$$

# 5 Representación en el espacio de los estados del alisado exponencial de Holt-Winters

El alisado de Holt-Winters en su forma de mecanismo de corrección del error, responde a:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_t(1) &= \hat{T}_t + \hat{\beta}_t + \hat{S}_{t-S} \\
\hat{T}_t &= \hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1} + \alpha e_{t-1}(1) \\
\hat{\beta}_t &= \hat{\beta}_{t-1} + \alpha\lambda e_{t-1}(1) \\
\hat{S}_t &= \hat{S}_{t-S} + \gamma(1-\alpha) e_{t-1}(1)
\end{aligned}$$

donde el error $e_t(1) = y_{t+1} - \hat{y}_t(1) = y_{t+1} - \left(\hat{T}_t + \hat{\beta}_t + \hat{S}_{t-S}\right)$ luego podemos escribir:

$$y_{t+1} = \hat{T}_t + \hat{\beta}_t + \hat{S}_{t-S} + e_t(1) \tag{15}$$

$$\hat{T}_t = \hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1} + \alpha e_{t-1}(1) \tag{16}$$

$$\hat{\beta}_t = \hat{\beta}_{t-1} + \alpha\lambda e_{t-1}(1) \tag{17}$$

$$\hat{S}_t = \hat{S}_{t-S} + \gamma(1-\alpha) e_{t-1}(1) \tag{18}$$

Donde en (15) el error $e_t(1)$ juega el papel de la innovación de la ecuación de medida. Y tenemos tres ecuaciones de transición de los componentes no observables (16)-(18) que comporten la misma innovación $e_{t-1}(1)$ y que a su vez es la innovación de la ecuación de medida.

# 6 Doble aliasado exponencial Estacional.

El nombre original es "Double Seasonal Exponential Smoothing", fue propuesto originalmente por Taylor (2003) y consiste en una generalización del Alisado exponencial de Holt-Winters, pero permitiendo la existencia de dos periodos estacionales distintos. Es decir, es útil para datos diarios, etc...

En el articulo original se presenta la posibilidad de que la estacionalidad entre en forma aditiva o multiplicativa, tal y como hemos visto anteriormente. El modelo aditivo responde a:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_t(1) &= \hat{T}_t + \hat{\beta}_t + \hat{S}^{(1)}_{t-S_1} + \hat{S}^{(2)}_{t-S_2} \\
\hat{T}_t &= \alpha\left[y_t - \hat{S}^{(1)}_{t-S_1} - \hat{S}^{(2)}_{t-S_2}\right] + (1-\alpha)\left[\hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1}\right] && (19) \\
\hat{\beta}_t &= \lambda\left[\hat{T}_t - \hat{T}_{t-1}\right] + (1-\lambda)\hat{\beta}_{t-1} && (20) \\
\hat{S}^{(1)}_t &= \gamma_1\left[y_t - \hat{T}_t - \hat{S}^{(2)}_{t-S_2}\right] + (1-\gamma_1)\hat{S}^{(1)}_{t-S_1} && (21) \\
\hat{S}^{(2)}_t &= \gamma_2\left[y_t - \hat{T}_t - \hat{S}^{(1)}_{t-S_1}\right] + (1-\gamma_2)\hat{S}^{(2)}_{t-S_2}. && (22)
\end{aligned}$$

Donde se puede apreciar que ahora tenemos dos constantes de alisamiento $\gamma_1$ y $\gamma_2$ para para los dos componentes estacionales $\hat{S}^{(1)}_t$ y $\hat{S}^{(2)}_t$ respectivamente. El número de estaciones de los dos factores o componentes estacionales es distinto $S_1$ y $S_2$.

La versión multiplicativa responde a:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_t(1) &= \left(\hat{T}_t + \hat{\beta}_t\right) \times \hat{S}^{(1)}_{t-S_1} \times \hat{S}^{(2)}_{t-S_2} \\
\hat{T}_t &= \alpha \left[y_t / \left(\hat{S}^{(1)}_{t-S_1} \times \hat{S}^{(2)}_{t-S_2}\right)\right] + (1-\alpha)\left[\hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1}\right] && (23) \\
\hat{\beta}_t &= \lambda \left[\hat{T}_t - \hat{T}_{t-1}\right] + (1-\lambda)\hat{\beta}_{t-1} && (24) \\
\hat{S}^{(1)}_t &= \gamma_1 \left[y_t / \left(\hat{T}_t \times \hat{S}^{(2)}_{t-S_2}\right)\right] + (1-\gamma_1)\hat{S}^{(1)}_{t-S_1} && (25) \\
\hat{S}^{(2)}_t &= \gamma_2 \left[y_t / \left(\hat{T}_t \times \hat{S}^{(1)}_{t-S_1}\right)\right] + (1-\gamma_2)\hat{S}^{(2)}_{t-S_2}. && (26)
\end{aligned}
$$

Como en los caso anteriores el alisado exponencial admite una representación en terminos de mecanismo de corrección del error y como hemos visto tb una representación en espacio de los estados , en el caso aditivo, que sería de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
y_{t+1} &= \hat{T}_t + \hat{\beta}_t + \hat{S}^{(1)}_{t-S_1} + \hat{S}^{(2)}_{t-S_2} + e_t(1) \\
\hat{T}_t &= \hat{T}_{t-1} + \hat{\beta}_{t-1} + \alpha e_t(1) && (27) \\
\hat{\beta}_t &= \hat{\beta}_{t-1} + \lambda^* e_t(1) && (28) \\
\hat{S}^{(1)}_t &= \hat{S}^{(1)}_{t-S_1} + \gamma_1^* e_t(1) && (29) \\
\hat{S}^{(2)}_t &= \hat{S}^{(2)}_{t-S_2} + \gamma_2^* e_t(1). && (30)
\end{aligned}
$$

Para poder aplicar este modelo, se necesita estimar las constantes de alisamiento $\alpha$, $\lambda$, $\gamma_1$ y $\gamma_2$ y además como en cualquier alisado exponencial se necesitan los valores iniciales $\hat{T}_0$, $\hat{\beta}_0$, $\hat{S}_0^{(1)}$,$\hat{S}_{-1}^{(1)}$,... $\hat{S}_{1-S_1}^{(1)}$ y $\hat{S}_0^{(2)}$,$\hat{S}_{-1}^{(2)}$,... $\hat{S}_{1-S_2}^{(2)}$. Esto supone una limitación importante. Este problema se puede solucionar en parte siempre que el ratio que $S_1/S_2$ con $S_1 > S_2$ sea un número entero.

# 7 BATS (Box-Cox transform ARMA errors, Trend and Seasonal Components)

El enfoque BATS es un refinamiento del anterior enfoque en el se introducen ciertas mejoras. El concreto se usa transformación de Box-Cox como paso previo, se permite que los errores del modelo no se comporten como ruido blanco, por lo que pueden presentar correlación serial siguiendo un proceso ARMA(p,q) y finamente se permiten hasta $H$ factores estacionales distintos. El modelo BATS responde a:

$$\begin{aligned}
y_t^{(\delta)} &= \begin{cases} \frac{y_t^\delta - 1}{\delta} & \delta \neq 0 \\ \ln(y_t) & \delta = 0 \end{cases} \\
y_{t+1}^{(\delta)} &= \hat{T}_t + \phi\hat{\beta}_t + \sum_{i=1}^{H} \hat{S}_{t-S_i}^{(i)} + e_{t+1} \\
\hat{T}_t &= \hat{T}_{t-1} + \phi\hat{\beta}_{t-1} + \alpha e_t \\
\hat{\beta}_t &= (1-\phi)\,\beta + \phi\hat{\beta}_{t-1} + \lambda e_t \\
\hat{S}_t^{(i)} &= \hat{S}_{t-S_i}^{(i)} + \gamma_i e_t \quad i = 1, \cdots, H \qquad (31) \\
e_t &= \sum_{i=1}^{p} \varphi_i e_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}.
\end{aligned}$$

Este enfoque es mucho mas versatil que el Double Seasonal Exponential Smoothing. Además de lo que ya hemos comentado, una diferencia adicional es que se añaden $\phi$ y $\beta$ en relación a la pendiente $\hat{\beta}_t$, esta modificación permite que cuando el valor estimado de la pendiente tiende a cero, la estimación se convienta en la pendiente $\beta$ tb llamanda tendencia a largo plazo.

# 8 TBATS (Trigonimetric Box-Cox transform ARMA errors, Trend and Seasonal Components)

Una limitación importante del enfoque de Taylor y del BATS, es que no pueden utilizarse para ciclos estacionales en los que el número de estaciones no sea un número entero. La anterior limitación se puede salvar incorporando un tratamiento de los factores estacionales trigonométrica. Similar a la que se plantea en los modelos estructurales de series temporales:

$$
\begin{aligned}
\hat{S}_t^{(i)} &= \sum_{j=1}^{k_i} \hat{S}_{j,t}^{(i)} \qquad (32) \\
\hat{S}_{j,t}^{(i)} &= \hat{S}_{j,t-1}^{(i)} \cos\left(\omega_j\right) + \hat{S}_{j,t-1}^{(i)*} \sin\left(\omega_j\right) + \gamma_i e_t \\
\hat{S}_{j,t}^{(i)*} &= -\hat{S}_{j,t-1}^{(i)} \sin\left(\omega_j\right) + \hat{S}_{j,t-1}^{(i)*} \cos\left(\omega_j\right) + \gamma_i e_t \\
\omega_j &= \frac{2\pi j}{S_i} \\
k_i &= \begin{cases} S_i/2 & S_i \quad par \\ \left(S_i - 1\right)/2 & S_i \quad impar \end{cases}
\end{aligned}
$$

Es decir remplazamos en $y_{t+1}^{(\delta)} = \hat{T}_t + \phi\hat{\beta}_t + \sum_{i=1}^{H} \hat{S}_{t-S_i}^{(i)} + e_{t+1}$ (31) por (32).

La estimación de los parámetros de estos modelos constantes de alisamiento y valores iniciales se realiza mediante procedimientos no lineales de estimación.