Algunas aplicaciones de la matriz inversa particionada en Econometría

Andreu Sansó

17 de octubre de 2016

Abstract

En este documento se muestran algunas aplicaciones de la la matriz inversa particionada en Econometría, como son: el modelo en desviaciones, fórmulas explícitas para los estimadores MCO individuales y su relación con el teorema Frisch-Waugh-Lovell y los estimadores recursivos.

Contents

1 Introducción

Vamos a mostrar algunas aplicaciones de la matriz inversa particionada a la Econometria. Empezaremos con el lema que muestra dos formas de calcular la inversa de una matriz particionada. Posteriormente, vamos a aplicar estos resultados en diferentes àmbitos del Modelo de Regresión Lineal Múltiple (MRLM) y de los estimadores por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO). En concreto, veremos que su aplicación al MRLM permite demostrar, de forma sencilla, la equivalencia entre diferentes formulaciones del modelo (en desviaciones, grupos de regresores y Teorema Frisch-Waugh-Lovell), así como obtener una expresión recursiva para su cálculo, dando lugar a loes estimadores por mínimos cuadrados recursivos. Finalmente, introduciremos las correlaciones parciales y mostraremos su relación con el MRLM.

La estructura del documento es la siguiente. En primer lugar, presentamos el Lema de la Inversa de una matriz particionada y, a continuación, introducimos la notación y los principales resultados de la estimación MCO del MRLM. En la segunda sección, aplicamos resultados del Lema a diversas formulaciones del MRLM, como son el modelo en desviaciones y el modelo con dos grupos de regresores, desarrolando, para este último caso, el Teorema Frisch-Waugh-Lovell. Para los desarrollos de esta sección se necesita el uso de las matrices de proyecciones, a las cuales se dedica un apartado. En la tercera sección se obtienen las expresiones recursivas de los estimadores MCO del MRLM. A continuación, en la cuarta, se consideran las correlaciones parciales. Finalmente, las principales demostraciones se han agrupado en el apéndice, al final del cual aparecen las referencias bibliográficas.

En el resto del documento haremos un uso extensivo del siguiente Lema que permite obtener, de dos formas diferentes, la inversa de una matriz particionada.

Lemma 1 ***Inversa de una matriz particionada***. *Sea la matriz particionada en bloques*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

donde A_{11} y A_{22} son matrices cuadradas y A_{12} y A_{21} no tienen porqué serlo. Entonces, se verifica

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1}\left(I + A_{12}B_2A_{21}A_{11}^{-1}\right) & -A_{11}^{-1}A_{12}B_2 \\ -B_2A_{21}A_{11}^{-1} & B_2 \end{pmatrix} \qquad (1) \\ &= \begin{pmatrix} B_1 & -B_1A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}B_1 & A_{22}^{-1}\left(I + A_{21}B_1A_{12}A_{22}^{-1}\right) \end{pmatrix} \qquad (2) \end{aligned}$$

donde $B_1 = \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1}$ y $B_2 = \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1}$ siempre que las inversas de A^{-1}, A_{22} y A_{11} existan.

Proof. Ver apéndice. ■

1.1 MRLM y notación

Consideremos el MRLM:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + u_i,$$

$i = 1, ..., T$ (o $i = 1, ..., n$), que en forma matrial tiene la siguiente expresión:

$$y = X\beta + u, \qquad (3)$$

donde y es un vector $T \times 1$ (o $n \times 1$, según el tipo de datos) de observaciones de la variable dependiente, X es una matriz $T \times k$ (o $n \times k$) de regresores, entre los cuales habitualmente hay una columna de unos, β es un vector $k \times 1$ de parámetros a estimar y u es un vector $T \times 1$ (o $n \times 1$) de términos de perturbación. Sobre el MRLM se suele imponer $E(u) = 0$ y $E(uu') = \sigma^2 I_n$ (perturbaciones esféricas).

El estimador MCO de (3), también denominada la regresión de y sobre X, viene dado por

$$\begin{aligned} \widehat{\beta} &= (X'X)^{-1} X'y \qquad (4) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{T} X_i' X_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^{T} X_i' y_i, \end{aligned}$$

donde $X_i \equiv (x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ki})$ y, normalmente, $x_{1i} = 1$ para $i = 1, ..., T$ (o $n \times 1$). Notemos que (4), al involucrar la inversa de la matriz de productos cruzados de los regresores, $X'X$, no permite obtener de manera explícita los estimadores MCO de cada parámetro individual $\widehat{\beta}_j$, $j = 1, .., k$. Veremos más adelante como éstos se pueden obtener aplicando el lema de la matriz inversa particionada.

La matriz de varianzas y covarianzas de los estimadores MCO, bajo los supuestos anteriores sobre u, viene dada por

$$V\left(\widehat{\beta}\right) = \sigma^2 (X'X)^{-1},$$

y para cada uno de los estimadores por $V\left(\widehat{\beta}_j\right) = \sigma^2 a_{jj}$, donde a_{jj} es el elemento j-ésimo de la diagonal principal de $(X'X)^{-1}$, mientras que la t-ratio asociada para contrastar $H_0 : \beta_j = 0$ viene dada por

$$t_j = \frac{\widehat{\beta}_j}{\widehat{\sigma}\sqrt{a_{jj}}}.$$

La bondad del ajuste del modelo se mide a través del **coeficiente de determinación**, también conocido como **coeficiente de correlación múltiple** al cuadrado:

$$\begin{aligned} R^2 &= 1 - \frac{e'e}{\widetilde{y}'\widetilde{y}} \\ &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^{T} e_i^2}{\sum_{i=1}^{T} (y_i - \overline{y})^2}, \end{aligned}$$

donde $e = y - \widehat{y} = y - X\widehat{\beta}$ son los residuos y $\widetilde{y}$ son las desviaciones de y respecto a su media $\overline{y}$. La suma de cuadrados de los residuos $e'e = \sum_{i=1}^{T} e_i^2$ tambien se denomina variación residual, VR, mientras que la suma del cuadrado de las desviaciones respecto de la media de y tambien se denomina variaación total, $VT = \sum_{i=1}^{T} (y_i - \overline{y}) = \widetilde{y}'\widetilde{y}$. Asimismo, defininendo la variación explicada como $VE = \sum_{i=1}^{T} (\widehat{y}_i - \overline{y})^2$, si hay una constante en el modelo se verifica $VT = VE + VT$.

2 Algunos resultados útiles sobre los estimadores MCO

Mostraremos en esta sección algunas aplicaciones del Lema 1 al MRLM. Empezaremos aplicándolo a la inversa de la matriz de productos cruzados, $(X'X)^{-1}$. Posteriormente, mostraremos la equivalencia entre los estimadores MCO del modelo (3) y los del modelo expresado en desviaciones respecto a la media. A continuación, definiremos las matrices de proyecciones y éstas nos van a permitir una interpretación geométrica de los estimadores MCO. A partir de las matrices de proyecciones, presentaremos el Teorema de Frisch-Waugh-Lovell, que permite obtener los estimadores MCO de un grupo de parámetros a partir de los residuos de la variable dependiente y de las variables de interes respecto al resto de variables. Finalmente, vamos a considerar la obtención de fórmulas explícitas de los estimadores MCO de cada uno de los parámetros del modelo $\widehat{\beta}_j$, $j = 1, .., k$, así como de sus t-ratios y varianzas.

Lemma 2 *Si hay una columna de unos en la matriz de observaciones de los regresores X, $X = (\mathbf{i}_n, X_*)$, donde $\mathbf{i}_n \equiv (1, ..., 1)'_{1\times n}$, $X_* \equiv (x_2, ..., x_k)$, $x_j \equiv (x_{j1}, ..., x_{jn})'$, $j = 2, .., k$, la matriz $(X'X)^{-1}$ se puede escribir como*

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 + \overline{x}S_{xx}^{-1}\overline{x}' & -\overline{x}S_{xx}^{-1} \\ -S_{xx}^{-1}\overline{x}' & S_{xx}^{-1} \end{pmatrix},$$

donde $S_{xx} = X_*'X_*/n - \overline{x}'\overline{x}$ es la matriz de varianzas y covarianzas de las variables explicativas.

Proof. Ver apéndice. ■

Remark 3 *En el Lema 23, más adelande, se desarrolla una expresión para S_{xx}^{-1}.*

2.1 Modelo en desviaciones

Si hay una constante en el MRLM, la matriz de datos de los regresores puede escribirse como $X = (\mathbf{i}_n, X_*)$ y el modelo de regresión (3) como

$$y = \mathbf{i}\beta_1 + X_*\beta_* + u \tag{5}$$

donde $X_* \equiv (x_2, ..., x_k)$, $x_j \equiv (x_{j1}, ..., x_{jn})'$, $j = 2, .., k$, y $\beta_* \equiv (\beta_2, ..., \beta_k)'$.

Definition 4 ***Matriz Q para el cálculo de desviaciones:***

$$Q \equiv I_n - \frac{1}{n}\mathbf{ii}' = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Remark 5 *Notemos que premultiplicando un vector de observaciones por la matriz Q se obtienen las desviaciones respecto de la media de la variable:*

$$Qy = y - \frac{1}{n}\mathbf{i}\mathbf{i}'y = y - \mathbf{i}\overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 - \overline{y} \\ y_2 - \overline{y} \\ \vdots \\ y_n - \overline{y} \end{pmatrix}.$$

Asimismo, QX_j proporciona las desviaciones de la variable x_j.

Remark 6 *La matriz Q presenta las propietades seguientes: i) si $\mathbf{c}$ es un vector $(n \times 1)$ de constantes, entonces $Q\mathbf{c} = 0$; ii) la matriz Q es simétrica, semidefinida positiva e idempotente: $QQ' = Q'Q = Q$; iii) rango$(Q) = n - 1$.*

Exercise 7 *Demostrar las propiedades anteriores de la matriz Q.*

Exercise 8 *Sea $\widetilde{y} = Qy$. Demostrar que $\widetilde{y}'y = y'\widetilde{y} = \widetilde{y}'\widetilde{y}$.*

Remark 9 *La matriz de varianzas y convarianzas de los regresores $S_{xx} = X_*'X_*/n - \overline{x}'\overline{x}$, puede escribirse como $S_{xx} = X_*'QX_*/n = \widetilde{X}'\widetilde{X}/n$, donde $\widetilde{X} = QX_*$. Asimismo, el vector de covarianzas entre regresores y variable dependiente se puede escribit como $S_{xy} = X_*'y/n - \overline{x}'\overline{y} = X_*'Qy/n = \widetilde{X}'y/n$, donde $\widetilde{y} = Qy$.*

A partir de la matriz Q podemos escribir el MRLM en deviaciones respecto a las medias de cada variable. En efecto, premultiplicando (5) por la matriz Q se obtiene

$$\begin{aligned} Qy &= Q\mathbf{i}\beta_1 + QX_*\beta_* + Qu \\ &= QX_*\beta_* + Qu \end{aligned}$$

ya que $Q\mathbf{i}\beta_1 = 0$. Denotando $\widetilde{y} = Qy$, $\widetilde{X} = QX_*$ podem escribir el model en desviaciones como:

$$\widetilde{y} = \widetilde{X}\beta_* + \widetilde{u}, \tag{6}$$

o bien,

$$\widetilde{y}_i = \beta_2\widetilde{x}_{2i} + \beta_3\widetilde{x}_{3i} + \cdots + \beta_k\widetilde{x}_{ki} + \widetilde{u}_i$$

para $i = 1, ..., n$, donde $\widetilde{y}_i = y_i - \overline{y}$ y $\widetilde{x}_{ji} = x_{ji} - \overline{x}_j$, $j = 2, ..., k$. Notemos que en el modelo en desviaciones no figura la constante.

Theorem 10 ***Equivalencia entre los estimadores MCO del MRLM con y sin desviaciones respecto a las medias****. Los estimadores MCO de β_* en (3) y (6) són equivalentes.*

Proof. Ver apéndice. ■

Remark 11 *Notemos que estimando el modelo en desviaciones sólo obtendremos estimaciones de los coeficientes β_2,...,β_k. Una estimación de β_1 se puede obtener a partir de $\widehat{\beta}_1 = \overline{y} - \overline{X}_*\widehat{\beta}_*$.*

Remark 12 *El estimador MCO de β_* se puede escribir como $\widehat{\beta}_* = S_{xx}^{-1} S_{xy}$, expresión análoga al estimador MCO de β_2 en el modelo de regresión lineal simple, $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + u_i$.*

2.2 Matrices de proyecciones

Para la siguiente aplicación del Lema 1 al MRLM necesitamos primero definir las matrices de proyecciones. Estas, a su vez, nos permitirán mostrar la interpretación geométrica del ajuste MCO del MRLM.

Definition 13 ***Matrices de Proyecciones***. *Definimos la matrices de proyecciones ortogonales $P = X\left(X'X\right)^{-1} X'$ y $M = I_n - P$.*

Lemma 14 ***Propiedades de las matrices de proyecciones***. *Estas son:*

1. *matrices cuadradas de dimensión n,*
2. *simétricas,*
3. *idempotentes,*
4. *semidefinidas positivas,*
5. *$rango\,(M) = n - k$ y $rango\,(P) = k$,*
6. *$P + M = I_n$,*
7. *ortogonales entre ellas: $PM = 0$,*
8. *M y X son ortogonales: $MX = 0$,*
9. *$PX = X$.*

Proof. Se deja como ejercicio. ■

Remark 15 *Postmultiplicadas por el vector y, la primera proporciona el vector de valores ajustados en el modelo de regresión, $Py = X\left(X'X\right)^{-1} X'y = X\widehat{\beta}$, y la segunda proporciona los residuos, $My = y - X\widehat{\beta} = e$.*

Remark 16 *Cualquier vector $\mathbf{z}$ en un espacio de n dimensiones se puede representar como $\mathbf{z} = P\mathbf{z} + M\mathbf{z}$. Además, $\mathbf{z}'P'M\mathbf{z} = \mathbf{0}$, de manera que $\mathbf{z}$ se puede escribir como suma de dos componentes $P\mathbf{z}$ y $M\mathbf{z}$ ortogonals. Así, P y M definen una descomposición ortogonal del espacio euclideo de n dimensions E^n. En conseqüència, y=Py + My=$X\widehat{\beta} + \mathbf{e}$ donde $X\widehat{\beta}$ y $\mathbf{e}$ son ortogonales. La siguiente figura ilustra esta descomposición, donde $\delta\left(X\right)$ indica el espacio de k dimensiones generado por X y $\delta\left(X\right)^{\perp}$ el espacio de $n-k$ dimensiones ortogonal a $\delta\left(X\right)$, de manera que entre $\delta\left(X\right)$ y $\delta\left(X\right)^{\perp}$ generan un espacio de n dimensiones.*

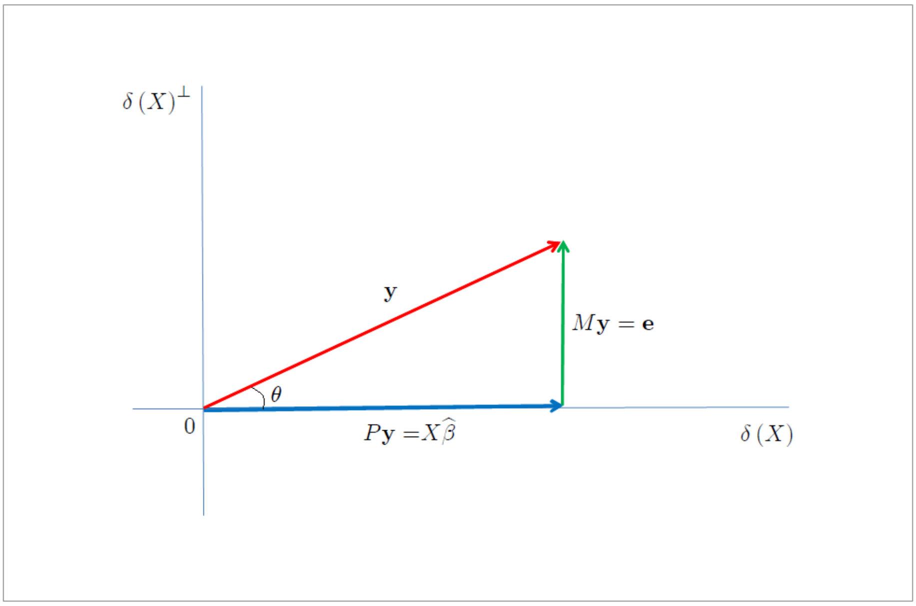

Figure 1:

Remark 17 *Adicionalmente, aplicando el teorema de Pitágoras,* $y'y = \widehat{\beta}X'X\widehat{\beta} + e'e$*; es decir,* $VT = VE + VR$ *y* $(\cos\theta)^2 = \widehat{\beta}X'X\widehat{\beta}/y'y = VE/VT = R^2$ *donde* θ *es el ángulo que forman los vectores* $X\widehat{\beta}$ *e* y*.*

Remark 18 *Si* y *es ortogonal a* X*,* $y'X = 0$*,* $X'y = 0$*, entonces* $Py = 0$*,* $\widehat{\beta} = 0$ *y* $e = My = y$

Proposition 19 *Si en el MRLM hay una constante en el modelo, entonces:*

1. $M_X Q = 0$
2. $M_X = M_{\widetilde{X}}Q$, de modo que $M_X y = M_{\widetilde{X}}\widetilde{y}$, donde $M_{\widetilde{X}} = I - \widetilde{X}\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}\widetilde{X}'$.

Proof. Ver apéndice. ■

Remark 20 *El primer resultado muestra que, si hay una constante en el modelo, las matrices* M_X *y* Q *son ortogonales. El segundo demuestra que tanto la estimación MCO de (3) como del modelo en desviaciones (6) proporcionan los mismos residuos* $e = M_X y = M_{\widetilde{X}}\widetilde{y}$*.*

Remark 21 *Adicionalmente, la suma de cuadrados de los residuos se puede escribir como*

$$e'e = y'M_X y = \widetilde{y}'M_{\widetilde{X}}\widetilde{y}.$$

Remark 22 *Puesto que podemos escribir el coeficiente de determinación como*

$$R^2 = 1 - \frac{y' M_X y}{y' Q y} = 1 - \frac{\widetilde{y}' M_{\widetilde{X}} \widetilde{y}}{\widetilde{y}' \widetilde{y}}$$

y si $S_y^2 \equiv \widetilde{y}'\widetilde{y}/n$, *tambien se verifica*

$$y' M_X y = e'e = n\left(1 - R^2\right) S_y^2. \tag{7}$$

El siguiente lema muestra un resultado de gran utilidad que se aplicarà para obtener, por un lado, fórmulas explícitas para los estimadores individuales, sus varianzas y t-ratios y, por otro lado, en la sección centrada en las correlaciones parciales.

Lemma 23 *La matriz inversa de productos cruzados de las desviaciones de los regresores* $\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}$ *se puede escribir como*

$$\left(\frac{1}{n}\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{S_2^2\left(1-R_2^2\right)} & -\frac{\widehat{\delta}_{2,3}}{S_2^2\left(1-R_2^2\right)} & \cdots & -\frac{\widehat{\delta}_{2,k}}{S_2^2\left(1-R_2^2\right)} \\ -\frac{\widehat{\delta}_{2,3}}{S_2^2\left(1-R_2^2\right)} & \frac{1}{S_3^2\left(1-R_3^2\right)} & \cdots & -\frac{\widehat{\delta}_{3,k}}{S_3^2\left(1-R_3^2\right)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\widehat{\delta}_{2,k}}{S_2^2\left(1-R_2^2\right)} & -\frac{\widehat{\delta}_{3,k}}{S_3^2\left(1-R_3^2\right)} & \cdots & \frac{1}{S_k^2\left(1-R_k^2\right)} \end{pmatrix}.$$

donde $S_j^2 = \widetilde{x}_j'\widetilde{x}_j/n$, *y* R_j^2 *y* $\widehat{\delta}_{j,h}$ $(j = 2, ..., k)$ *son, respectivamente, el coeficiente de determinación y el estimador MCO de* $\delta_{j,h}$ *en la regresión*

$$x_{ji} = \delta_{j,1} + \delta_{j,2}x_{2i} + \cdots + \delta_{j,j-1}x_{j-1,i} + \delta_{j,j+1}x_{j+1,i} + \cdots + \delta_{j,k}x_{k,i} + v_{j,i}.$$

Además, los elementos de la diagonal principal pueden escribirse como $a_{jj} = n\left(\widetilde{x}_j' M_{\widetilde{X}_{(-j)}} \widetilde{x}_j\right)^{-1} = \left(S_j^2\left(1 - R_j^2\right)\right)^{-1}$, *donde* $\widetilde{X}_{(-j)}$ *es el conjunto de observaciones de los regresores en desviaciones excepto la variable* x_j.

Proof. Ver apéndice. ■

Remark 24 *Se comprueba que los términos de la diagonal principal,* a_{jj}, *són la inversa de la suma de cuadrados residual de la regresión de* $\widetilde{x}_j$ *sobre* $\widetilde{X}_{(-j)}$.

Remark 25 *En la demostración del Lema en el apéndice se muestra que*

$$\frac{\widehat{\delta}_{h,j}}{S_h^2\left(1 - R_h^2\right)} = \frac{\widehat{\delta}_{j,h}}{S_j^2\left(1 - R_j^2\right)}.$$

Remark 26 *Nótese que el lema anterior desarrolla los resultados del Lema 2 referentes a* $S_{xx}^{-1} = \left(\frac{1}{n}\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}$.

2.3 Teorema Frisch-Waugh-Lovell

El teorema, dedesarrollado por Frisch y Waugh (1933) y Lovell (1963), se puede aplicar a cualquier regresión con dos o más regresores, por lo que éstos se pueden agrupar en dos grupos. Así, podemos escribir (3) como

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u, \tag{8}$$

donde X_1 es $k_1 \times n$, X_2 es $k_1 \times n$ y $k_1 + k_2 = k$. Sea $M_1 = I - X_1 \left(X_1'X_1\right)^{-1} X_1'$. Premultiplicando (8) por M_1 y teniendo en cuenta que $M_1X_1 = 0$, podemos escribir

$$M_1y = M_1X_2\beta_2 + M_1u, \tag{9}$$

donde M_1y son los residuos de la regresión de y sobre X_1 y M_1X_2 son los de la regresión de X_2 sobre X_1. Estimando por MCO la última expresión,

$$\widehat{\beta}_2 = \left(X_2'M_1X_2\right)^{-1} X_2'M_1y \tag{10}$$

da numéricamente los mismos resultados que la estimación de β_2 en (8), como se muestra en el siguiente Teorema.

Theorem 27 ***Teorema Frisch-Waugh-Lovell (FWL):***

1. El estimador MCO de β_2 en el modelo (8) es equivalente al de la regresión entre los residuos M_1y sobre los residuos M_1X_2 en la regresión (9): $\widehat{\beta}_2 = \left(X_2'M_1X_2\right)^{-1} X_2'M_1y$.
2. Los residuos MCO de (8), $e = My$, y (9) son idénticos, siendo estos últimos $e = M_{2.1}M_1y$, donde $M_{2.1} \equiv I - M_1X_2\left(X_2'M_1X_2\right)^{-1} X_2'M_1$.

Proof. Ver apéndice. ■

Remark 28 *El Teorema FWL muestra que los estimadores MCO de un grupo de parámetros del modelo se pueden obtener en dos etapas: 1) obtener los residuos de la regresión de la variable dependiente así como las variables asociadas a los parámetros de interés sobre el resto de variables; 2) posteriormente, hacer la regresión de los residuos de la variable dependiente sobre los residuos de las regresiones de las variables explicativas.*

Remark 29 *En Davidson y MacKinnon (1993) puede encontrase un interpretación geométrica del Teorema FWL.*

Remark 30 *El resultado del Teorema 10, de equivalencia entre los estimadores MCO del MRLM y del modelo en desviaciones, junto con el remark 20, donde se muestra que los residuos de ambas estimaciones son idénticos, es un caso particular del Teorem FWL, donde $X_1 = \mathbf{i}$ y $X_2 = X_* = (x_2, ..., x_k)$.*

Remark 31 *Notemos que el coeficiente de determinación de (8) y de (9) no es el mismo, a pesar que los residuos de ambas regresiones son identicos, puesto que la variable dependiente no lo es. El de la regresión (8) viene dado por $R^2 = 1 - e'e/y'Qy$ y el de (8) por $R^2 = 1 - e'e/y'M_1QM_1y$.*

Remark 32 *Algunas aplicaciones del teorema anterior:* [1]

1. *Cuando X_1 contiene los elementos deterministas (tendencias, variables ficticias estacionales), que es la situación considerada por Frisch y Waugh (1963) y Lovell (1963). Por ejemplo, supongamos que X_1 es un conjunto de variables ficiticias estacionales y que tanto la estacionalidad de y como la de X_2, si la tiene, es de tipo detreminista. Entonces, $M_1 y$ proporciona la variable y desestacionalizada, y $M_1 X_2$ son los regresores desestacionalizados. En este caso, la regresión (9) es entre variables desestacionalizadas*

2. *Supongamos que X_2 contiene los regresores que queremos contrastar su significación conjunta ($H_0 : \beta_2 = 0$). El contraste F habitual para llevarlo a cabo viene dado por*

$$F = \frac{(e_0' e_0 - e'e)}{e'e} \frac{n-k}{k_2}$$

donde $e = My$ son los residuos es la regresión MCO de (8) y e_0 lo son del modelo reducido $y = X_1 \beta_1 + u'$. Veamos su relación con el Teorema FWL. Del segundo resultado del teorema de deduce que $e'e = y' M_1 M_{2.1} M_1 y = y' M_1 y - y' M_1 X_2 \left(X_2' M_1 X_2 \right)^{-1} X_2' M_1 y$, pero $y' M_1 y$ es, precisamente, la suma de cuadrados de los residuos del modelo reducido, $e_0' e_0$, de manera que el numerador del test F, sin considerar los términos asociados a los grados de libertad, es, precisamente, $y' M_1 X_2 \left(X_2' M_1 X_2 \right)^{-1} X_2' M_1 y$. Además, usando (10), $y' M_1 X_2 \left(X_2' M_1 X_2 \right)^{-1} X_2' M_1 y = y' M_1 X_2 \widehat{\beta}_2$ y $M_1 X_2 \widehat{\beta}_2$ son los valores ajustados del regresando $M_1 y$ en (9). Por tanto,

$$\begin{aligned} F &= \frac{y' M_1 X_2 \left(X_2' M_1 X_2 \right)^{-1} X_2' M_1 y}{y' M y} \frac{n-k}{k_2} \\ &= \frac{y' M_1 X_2 \widehat{\beta}_2}{y' M y} \frac{n-k}{k_2}. \end{aligned}$$

3. *Asimismo, en los siguientes apartados el Teorema FWL se aplica diversas veces.*

2.4 Fórmulas explícitas para los estimadores individuales, sus varianzas y t-ratios

Como se ha visto, la expresión (4) proporciona el vector de estimadores MCO del MRLM (3). El siguiente teorema muestra fórmulas explícitas para cada uno de estos estimadores así como para la varianza individual y para el t-ratio.

Theorem 33 *En el MRLM (3) con constante, para los estimadores MCO $\widehat{\beta}_j$, sus varianzas y sus t-ratios t_j, ($j = 2, ..., k$), se verifica:*

[1] Davidson y MacKinnon (1993), capítulo 6, también lo utilizan al contrastar modelos de regresión no-lineales.

1. $\widehat{\beta}_j = \frac{\widetilde{x}'_j M_{\widetilde{X}_{(-j)}} \widetilde{y}}{\widetilde{x}'_j M_{\widetilde{X}_{(-j)}} \widetilde{x}_j}$

2. $V\left(\widehat{\beta}_j\right) = \frac{\sigma^2}{\widetilde{x}'_j M_{\widetilde{X}_{(-j)}} \widetilde{x}_j} = \frac{\sigma^2}{nS_j^2\left(1-R_j^2\right)}$

3. $t_j = \frac{\widetilde{x}'_j M_{\widetilde{X}_{(-j)}} \widetilde{y}}{\widehat{\sigma}\sqrt{\widetilde{x}'_j M_{\widetilde{X}_{(-j)}} \widetilde{x}_j}} = \frac{\widetilde{x}'_j M_{\widetilde{X}_{(-j)}} \widetilde{y}}{\widehat{\sigma}\sqrt{nS_j^2\left(1-R_j^2\right)}}$

donde $\widetilde{x}_j$ es el vector $n \times 1$ de desviaciones de la variable j-ésima respecto de su media, $S_j^2 = \widetilde{x}'_j \widetilde{x}_j / n$ es su varianza mostral, $M_{\widetilde{X}_{(-j)}} = I_n - \widetilde{X}_{(-j)} \left(\widetilde{X}_{(-j)} \widetilde{X}_{(-j)}\right)^{-1} \widetilde{X}_{(-j)}$ es una matriz de proyecciones, $\widetilde{X}_{(-j)}$ es el conjunto de observaciones de los regresores en desviaciones excepto la variable x_j y R_j^2 es el coeficiente de determinación de la regresión de x_j sobre el resto de regresores.

Proof. Ver apéndice. ■

Remark 34 *El primer resultado es una caso particular del Teorema FWL (Teorem 27), y, puesto que $M_{\widetilde{X}_{(-j)}}$ es idempotente y que $M_{\widetilde{X}_{(-j)}} \widetilde{y}$ son los residuos de la regresión de y sobre todas las variables explivativas excepto x_j, y $M_{\widetilde{X}_{(-j)}} \widetilde{x}_j$ son los residuos de la regresión de x_j sobre el resto de regresores, la primera expresión muestra que el estimador $\widehat{\beta}_j$ se puede obtener como la regresió de los residuos $M_{\widetilde{X}_{(-j)}} \widetilde{y}$ sobre los residuos $M_{\widetilde{X}_{(-j)}} \widetilde{x}_j$; es decir, como los estimadores MCO de la regresión de $M_{\widetilde{X}_{(-j)}} \widetilde{y}$ sobre $M_{\widetilde{X}_{(-j)}} \widetilde{x}_j$. Una manera de comprobar este resultado es premultiplicar por $M_{\widetilde{X}_{(-j)}}$ el MRLM dado por (3) expresado en desviaciones respecto a las medias de cada variable, y teniendo en cuenta que $M_{\widetilde{X}_{(-j)}} \widetilde{X}_{(-j)} = 0$, queda como*

$$\begin{aligned} M_{\widetilde{X}_{(-j)}} \widetilde{y} &= M_{\widetilde{X}_{(-j)}} X\beta + M_{\widetilde{X}_{(-j)}} u \\ &= M_{\widetilde{X}_{(-j)}} \widetilde{x}_j \beta_j + M_{\widetilde{X}_{(-j)}} u. \end{aligned}$$

En otras palabras, dado que la matriz $M_{\widetilde{X}_{(-j)}}$ es idempotente y que, para una variable z, $\widehat{v}_z \equiv M_{\widetilde{X}_{(-j)}} z$ equivale a los residuos de la regresión

$$z_i = \gamma_{z,1} + \gamma_{z,2} x_{2i} + \cdots + \gamma_{z,k-1} x_{k-1,i} + v_{zi},$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_j &= \frac{\widetilde{x}'_j M'_{\widetilde{X}_{(-j)}} M_{\widetilde{X}_{(-j)}} \widetilde{y}}{\widetilde{x}'_j M'_{\widetilde{X}_{(-j)}} M_{\widetilde{X}_{(-j)}} \widetilde{x}_j} \\ &= \frac{\widehat{v}'_{\widetilde{x}_j} \widehat{v}_{\widetilde{y}}}{\widehat{v}'_{\widetilde{x}_j} \widehat{v}_{\widetilde{x}_j}} = \frac{\sum \widehat{v}_{\widetilde{x}_j,i} \widehat{v}_{\widetilde{y},i}}{\sum \widehat{v}^2_{\widetilde{x}_j,i}}, \end{aligned}$$

que equivale al estimador MCO de la regresión

$$\widehat{v}_{\widetilde{y},i} = \beta_j \widehat{v}_{\widetilde{x}_j,i} + w_i,$$

esto es, al estimador que resulta de usar como variables los residuos de la variable dependiente y de la variable explicativa cuando éstas se han regresado sobre el resto de variables explicativas.

Remark 35 *El segundo resultado muestra el efecto de la multicolinealidad, es decir, de la correlación elevada entre regresores. Si se da, entonces R_j^2 será elevado y la varianza del estimador $V\left(\widehat{\beta}_j\right)$ será más elevada respecto del caso en que no haya correlación entre regresores, en que dicha varianza sería $V\left(\widehat{\beta}_j\right) = \sigma^2\left(nS_j^2\right)^{-1}$.*

3 Expressiones recursivas de los estimadores MCO

Para las expresiones recursivas usaremos la siguinte notación: X_t es la matriz de observaciones de los regresores hasta el momento t, x_t es la observación t-ésima de los regressores, y_t lo es de la variable dependiente mientras que $\mathbf{y}_t$ es el vector de observaciones de la variable dependiente hasta el momento t, $\widehat{\beta}_t$ es el estimador MCO con observaciones hasta el momento t.

El objectivo es obtener una forma recursiva de la fórmula habitual de cálculo de los estimadores MCO, dada por

$$\widehat{\beta}_t = \left(X_t'X_t\right)^{-1} X_t'\mathbf{y}_t.$$

La matriz $\left(X_t'X_t\right)^{-1}$ juega un papel clave en el cálculo de los estimadores MCO: entra, por un lado, en la fórmula cálculo de los estimadores como, por otro, es directamente proporcional a la varianza de los estimadores cuando las perturbaciones son esféricas, dado que, en este caso, $V\left(\widehat{\beta}_t\right) = \sigma^2\left(X_t'X_t\right)^{-1}$, de manera que $\left(X_t'X_t\right)^{-1}$ es, a parte de un factor de escala σ^2, una medida de la precisión de los estimadores. Consideraremos aquí la fórmula recursiva de actualización de la matriz $\left(X_t'X_t\right)^{-1}$ así como ciertas propiedades de la secuencia de matrices, para dspués prestentar la fórmula de actualización recursiva de $\widehat{\beta}_t$.

Proposition 36 ***Expresión recursiva de la matriz de productos cruzados de los regresores.*** *Sea el vector recursivo $k\times 1$ dado por $q_{t+1} \equiv \left(X_t'X_t\right)^{-1} x_{t+1}'$, donde X_t es la matriz de observaciones de los regresores hasta el momento t y x_t es la observación t-ésima de los regressores. Se verifica:*

$$\begin{aligned} \left(X_{t+1}'X_{t+1}\right)^{-1} &= \left(X_t'X_t\right)^{-1} - \frac{q_{t+1}q_{t+1}'}{1 + x_{t+1}q_{t+1}} \\ &= \left(X_t'X_t\right)^{-1} - \frac{\left(X_t'X_t\right)^{-1} x_{t+1}'x_{t+1}\left(X_t'X_t\right)^{-1}}{1 + x_{t+1}\left(X_t'X_t\right)^{-1} x_{t+1}'}. \end{aligned} \tag{11}$$

Proof. Ver apéndice. ■

Remark 37 *Podemos corroborar el resultado (11) postmultiplicando por* $\left(X_t'X_t + x_{t+1}'x_{t+1}\right) = \left(X_{t+1}'X_{t+1}\right)$ *y comprobar que da la matriz identidad,*

$$\begin{aligned}
\left(X_{t+1}'X_{t+1}\right)^{-1}\left(X_t'X_t + x_{t+1}'x_{t+1}\right) &= \left(X_t'X_t\right)^{-1}\left(X_t'X_t + x_{t+1}'x_{t+1}\right) \\
&\quad - q_{t+1}\frac{x_{t+1}\left(X_t'X_t\right)^{-1}\left(X_t'X_t + x_{t+1}'x_{t+1}\right)}{1 + x_{t+1}q_{t+1}} \\
&= I + q_{t+1}x_{t+1} \\
&\quad - q_{t+1}\frac{x_{t+1} + x_{t+1}\left(X_t'X_t\right)^{-1}x_{t+1}'x_{t+1}}{1 + x_{t+1}q_{t+1}} \\
&= I + q_{t+1}\left(1 - \frac{1 + x_{t+1}q_{t+1}}{1 + x_{t+1}q_{t+1}}\right)x_{t+1} = I.
\end{aligned}$$

Remark 38 *Notemos que la expressión (11) permite no haber de calcular ningua matriz inversa, excepto, tal vez, la primera de la recursión. Incluso en el caso de multicolinetalidad perfecta, donde no se puede invertir la matriz* $X_{t+1}'X_{t+1}$*, la fórmula recursiva (11) proporcionará resultados finitos, aunque muy elevados, indicando una elevada incertidumbre. En este sentido, la matriz inversa actualizada calculada con la fórmula recursiva se puede interpretar como una pseudo-inversa en sentido de Penrose.*

Proposition 39 *La secuencia de matrices* $\left(X_0'X_0\right)^{-1}, ..., \left(X_t'X_t\right)^{-1}, \left(X_{t+1}'X_{t+1}\right)^{-1}$ *es estrictamente decreciente, en el sentido que* $\left(X_{t+1}'X_{t+1}\right)^{-1} < \left(X_t'X_t\right)^{-1}$.

Proof. Dado que $X_t'X_t$ es definida positiva y, por tanto, $\left(X_t'X_t\right)^{-1}$ también lo es, la forma cuadrática $x_{t+1}q_{t+1} = x_{t+1}\left(X_t'X_t\right)^{-1}x_{t+1}'$ es positiva, $x_{t+1}\left(X_t'X_t\right)^{-1}x_{t+1}' > 0$, excepto en el caso en que $x_{t+1} = 0$, que no se puede dar si hay una constante en el modelo. Asi mismo $q_{t+1}q_{t+1}'$ es definda positiva. Por tanto,

$$\left(X_{t+1}'X_{t+1}\right)^{-1} - \left(X_t'X_t\right)^{-1} = -\frac{q_{t+1}q_{t+1}'}{1 + x_{t+1}\left(X_t'X_t\right)^{-1}x_{t+1}'} < 0.$$

QED. ■

Proposition 40 *Bajo el supuesto* $p\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}X'X \to \Sigma_{xx}$*, dada una elección arbitraria y finita de* $X_0'X_0$*,* $0 \leq X_0'X_0 < \infty$*, entonces*

$$p\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}X_{t+1}'X_{t+1}\right)^{-1} = \Sigma_{xx}^{-1}$$

Proof. Dado $X_0'X_0$, sea $G_t = X_0'X_0 + X_t'X_t = X_0'X_0 + \sum_{j=1}^{t} x_j'x_j = G_{t-1} + x_t'x_t$ para $t = 1, .., T$. Por tanto, bajo $p\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}X_t'X_t = \Sigma_{xx}$,

$$p\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}G_t = p\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}X_0'X_0 + p\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}X_t'X_t = 0 + \Sigma_{xx},$$

de manera que $p\lim_{t\to\infty} tG_t^{-1} = \Sigma_{xx}^{-1}$. QED. ■

Remark 41 *Per tanto, sea cual sea la elección de una matriz finita $X_0'X_0 \geq 0$, y si $(X_0'X_0)^{-1}$ existe, la fórmula recursiva (11), adecuadamente reescalada, converge a Σ_{xx}^{-1}. Intuitivamente, ello es debido a que asintoticamente $X_0'X_0$ tiene un peso que tiende a cero.*

Definition 42 *Los **residuos recursivos** vienen dados por los erroros de predicción de la observación $t+1$ usando los datos hasta el momento t:*

$$e_{t+1|t} \equiv y_{t+1} - x_{t+1}\widehat{\beta}_t, \tag{12}$$

donde $\widehat{\beta}_t$ es el estimador ulitilzando observaciones hasta el momento t.

Proposition 43 ***Expresión recursiva de los estimadores MCO**. Se verifica*

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{t+1} &= \widehat{\beta}_t + \frac{q_{t+1}}{1 + x_{t+1}q_{t+1}}\left(y_{t+1} - x_{t+1}\widehat{\beta}_t\right) \\ &= \widehat{\beta}_t + \frac{(X_t'X_t)^{-1}x_{t+1}'}{1 + x_{t+1}(X_t'X_t)^{-1}x_{t+1}'}e_{t+1|t}. \end{aligned} \tag{13}$$

Proof. Ver apéndice. ■

Remark 44 *Una expresión equivalente a (13) donde la matriz de productos cruzados de los regresores está actualizada en t+1, en lugar de estarlo en t viene dada por:*

$$\widehat{\beta}_{t+1} = \widehat{\beta}_t + \left(X_{t+1}'X_{t+1}\right)^{-1}x_{t+1}'\left(y_{t+1} - x_{t+1}\widehat{\beta}_t\right). \tag{14}$$

Proof.

$$\begin{aligned} \left(X_{t+1}'X_{t+1}\right)\widehat{\beta}_{t+1} &= X_{t+1}'Y_{t+1} \\ &= X_t'Y_t + x_{t+1}'y_{t+1} \\ &= (X_t'X_t)\widehat{\beta}_t + x_{t+1}'y_{t+1} \\ &= \left(X_{t+1}'X_{t+1} - x_{t+1}'x_{t+1}\right)\widehat{\beta}_t + x_{t+1}'y_{t+1} \\ &= \left(X_{t+1}'X_{t+1}\right)\widehat{\beta}_t + x_{t+1}'\left(y_{t+1} - x_{t+1}\widehat{\beta}_t\right). \end{aligned}$$

QED. ■

Algorithm 45 ***Algoritmo de estimación recursiva.***[2] *Sea $\widehat{\beta}_t = P_t b_t$, donde $P_t = (X_t'X_t)^{-1}$ y $b_t = X_t'\mathbf{y}_t = b_{t-1} + x_t'y_t$, el algoritmo (determinista, puesto que no usamos supuestos estocásticos) viene dado por las tres ecuaciones siguientes:*

$$\begin{aligned} g_{t+1} &= P_t x_{t+1}'\left(1 + x_{t+1}P_t x_{t+1}'\right)^{-1} \\ \widehat{\beta}_{t+1} &= \widehat{\beta}_t + g_{t+1}\left(y_{t+1} - x_{t+1}\widehat{\beta}_t\right) \\ P_{t+1} &= P_t - g_{t+1}x_{t+1}P_t. \end{aligned}$$

[2] Véase, por ejemplo, Young (2011), p32.

Remark 46 *Por tanto, la primera ecuación es equivalente a* $g_{t+1} = q_{t+1}\left(1 + x_{t+1}q_{t+1}\right)^{-1}$*, la segunda a (13), y la tercera a (11).*

Remark 47 *El algoritmo anterior muestra que los estimadores recursivos pueden considerarse estimadores on-line. En un momento* t *se dispone en memòria de la estimación hasta ese momento,* $\widehat{\beta}_t$*, y de* P_t*. Cuando llega nueva información,* (y_{t+1}, x_{t+1})*, entonces calculamos* g_{t+1} *y, con este vector, actualizamos* $\widehat{\beta}_{t+1}$ *y* P_{t+1}*, que son las únicas magnitudes que debemos almacenar hasta nueva llegada de información.*

Remark 48 *Las estimaciones iniciales* $\widehat{\beta}_0$ *pueden ser arbitrarias y la recursión converge al verdadero valor. Para que en la práctica la convergencia sea rápida la elección de* $P_0 = \left(X_0'X_0\right)^{-1}$ *debe tener los elementos de la diagonal principal elevados.*

3.1 Aplicaciones de los estimadores recursivos

Aparte de su utilidad como estimadores online, los estimadores recursivos son útiles para detectar cambios estructurales así como para efectuar determinados contrastes. Un elemento clave en estas aplicaciones son los residuos recursivos definidos en la expresión (12), y que no son más que el error de predicción de y_{t+1} usando el estimador con la muestra hasta t:

$$e_{t+1|t} = y_{t+1} - x_{t+1}\widehat{\beta}_t.$$

Por su parte, los residuos MCO vienen dados por $e = y - X\widehat{\beta} = My$ y, dado que la matriz de proyecciones M no es, en general, diagonal ya que los elementos de la diagonal de ésta no son todos iguales, los residuos MCO puede considerarse que presentan, con carácter general, hetoroscedasticidad y autocorrelación, incluso en el caso de que u sea esférico. Como veremos, bajo el supuesto de esfericidad, los residuos recursivos están incorrelacionados y una modificación de éstos, los residuos recursivos normalizados, también son homoscedásticos.

Proposition 49 *Bajo los supuestos de correcta especificación y* $E\left(u\right) = 0$*, entonces* $E\left(e_{t+1|t}\right) = 0$*. Si se añade de perturbaciones esféricas, entonces,*

$$V\left(e_{t+1|t}\right) = \sigma^2\left(1 + x_{t+1}\left(X_t'X_t\right)^{-1}x_{t+1}'\right) = \sigma^2\left(1 + x_{t+1}q_{t+1}\right).$$

Proof. Ver apéndice. ∎

Notemos que la varianza de $e_{t+1|t}$ no es constante, por lo que los residuos recursivos son heteroscedásticos y dependen de los valores de los regresores hasta el momento $t+1$. Para evitar los efectos de la heroscedasticitat a la hora de diseñar contrastes y medidas basadas en los residuos recursivos, es conveniente emplear una modificación de estos que es homoscedástica, los residuos recursivos normalizados.

Definition 50 *El **residuo recursivo normalizado** se define como*

$$\begin{aligned}\widetilde{e}_{t+1|t} &= \frac{e_{t+1|t}}{\sqrt{1+x_{t+1}\left(X_t'X_t\right)^{-1}x_{t+1}'}} \\ &= \frac{e_{t+1|t}}{\sqrt{1+x_{t+1}q_{t+1}}}.\end{aligned}$$

Remark 51 *Notemos que ahora* $V\left(\widetilde{e}_{t+1|t}\right) = \left(1+x_{t+1}q_{t+1}\right)^{-1} V\left(e_{t+1|t}\right) = \sigma^2.$

Proposition 52 *Bajo los supuestos de correcta especificación,* $E(u) = 0$ *y perturbaciones esféricas, los residuos recursivos, normalizados o no, están interrelacionados.*

Proof. Ver apéndice. ■

Remark 53 *Si añadimos el supuesto* $u \sim N\left(0, \sigma^2 I\right)$, *entonces* $e_{t+1|t} \sim N\left(0, \sigma^2\left(1+x_{t+1}q_{t+1}\right)\right)$ *y* $\widetilde{e}_{t+1|t} \sim N\left(0, \sigma^2\right)$, *y, además de incorrelacionados, son estadísticamente independientes.*

Harvey y Phillips (1974) propusieron un contraste de heteroscedasticidad basado en los residuos recursivos y von Newmann (1941) un test de autocorrelación, conocido como **razón de von Newmann**. Nos centraremos en este último. El estadístico de contraste viene dado por el cociente de la media cuadrática de las diferencias sucesivas de los residuos recursivos normalizados respecto de la varianza de estos residuos:

$$VN = \frac{\sum_{t=k+2}^{T}\left(\widetilde{e}_{t|t-1} - \widetilde{e}_{t-1|t-2}\right)^2 / (T-k-1)}{\sum_{t=k+1}^{T}\left(\widetilde{e}_{t|t-1} - \overline{e}\right)^2 / (T-k)}$$

donde $\overline{e} = (T-k)^{-1}\sum_{j=k+1}^{T}\widetilde{e}_{j|j-1}$. Notemos la similitud del estadístico con el Durbin-Watson, $DW = \left(\sum_{t=2}^{T} e_t^2\right)^{-1}\sum_{t=2}^{T}\left(e_t - e_{t-1}\right)^2$. Como éste, requiere el uso de valores críticos tabulados que, sin embargo, son exactos en caso de distribución gaussiana del término de perturbación y, por tanto, no tienen zona de indeterminación como en DW.

Pasemos ahora a considerar el uso de los instrumentos recursivos para **detectar cambio estructural**:

1. Como se ha visto en la proposición 52, los **residuos recursivos normalizados** tienen media nula y están incorrelacionados. Además, si el término de perturbación es gaussiano, son independientes. Por tanto, los residuos recursivos normalizados deben tener un comportamiento errático en una gráfica de evolución temporal. Si tienen un comportamiento sistemático a partir de un momento dado, esto se puede tomar como evidencia de inestabilidad del modelo.[3]

[3] También podría deberse a autocorrelación.

2. Asimismo, se puede estudiar, gráficamente, la evolución de $\widehat{\sigma}_t^2$, que puede escribirse recursivamente como

$$\widehat{\sigma}_t^2 = \widehat{\sigma}_{t-1}^2 + \frac{1}{t-k}\left(\widetilde{e}_{t|t-1}^2 - \widehat{\sigma}_{t-1}^2\right)$$

Si hay un comportamiento sistemático en $\widetilde{e}_{t|t-1}^2$ esto se traducirá en que $\widehat{\sigma}_t^2$ no se estabilice.

3. **Estimadores recursivos**: Un comportamiento sistemático de $e_{t|t-1}$ $(\widetilde{e}_{t|t-1})$ e traducirá en un comportamiento sistemático de $\widehat{\beta}_t$. Por lo tanto, una herramienta de diagnóstico son los gráficos de $\widehat{\beta}_{j,t}$ a lo largo del tiempo, que deben tener a estabilizarse si no hay cambio estructural. Estos gráficos se suelen acompañar de las bandas de confianza calculadas a partir de

$$\begin{aligned}\widehat{V}\left(\widehat{\beta}_t\right) &= \widehat{\sigma}_t^2\left(X_t'X_t\right)^{-1} \\ &= \widehat{\sigma}_t^2\left(\left(X_{t-1}'X_{t-1}\right)^{-1} - \frac{q_t q_t'}{1+x_t q_t}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

4. El **test de Chow** de cambio estructural permite contrastar la hipótesis nula de que el en el momento t_0 no hay cambio estructural. Harvey (1976) muestra en, en este caso, el test de Chow se peude escribir como:

$$F(t_0) = \frac{\sum_{j=t_0+1}^{T}\widetilde{e}_{j|j-1}^2}{\sum_{j=k+1}^{t_0}\widetilde{e}_{j|j-1}^2}\frac{t_0-k}{T-t_0} \underset{H_0}{\sim} \mathcal{F}_{T-t_0,t_0-k}.$$

5. El **CUSUM** se basa en la suma acumulada de residuos recursos normalizados:

$$CUSUM_t = \frac{1}{\widehat{\sigma}_r}\sum_{j=k+1}^{t}\widetilde{e}_{j|j-1}$$

para $t = k+1, ..., T$, donde

$$\widehat{\sigma}_r^2 = \frac{1}{T-k}\sum_{j=k+1}^{T}\left(\widetilde{e}_{j|j-1} - \overline{e}\right)^2$$

y

$$\overline{e} = \frac{1}{T-k}\sum_{j=k+1}^{T}\widetilde{e}_{j|j-1}.$$

Bajo la hipótesis nula de estabilidad $E(CUSUM_t) = 0$ i $V(CUSUM_t) \approx t-k$. Para detectar el cambio estructural, se elabora un gráfico del CUSUM y de los intervalos de confianza que vienen dados por las rectas que unen los puntos $\left(k, \pm a\sqrt{T-k}\right)$ con $\left(T, \pm 3a\sqrt{T-k}\right)$. Al nivel de confianza del 95% $a = 0.948$ y al 99%, $a = 1.143$. Si $CUSUM_t$ sale de las bandas, se rechaza H_0 y se interpreta que el cambio estructural está en el punto donde se corta una de las bandas.

6. El CUSUMQ emplea los cuadrados de los residuos recursivos normalizados

$$CUSUMQ_t = \frac{\sum_{j=k+1}^{t} \widetilde{e}_{j|j-1}^2}{\sum_{j=k+1}^{T} \widetilde{e}_{j|j-1}^2}.$$

Bajo H_0 y normalidad de u, el numerador sigue una χ^2_{t-k} y el denominador una χ^2_{T-k}, de manera que $E\left(CUSUM_t\right) \approx (t-k) / (T-k)$. Para las banda de confianza deben consultarse unas tablas específicas.

4 Apéndice: Demostraciones

En este apéndice se demuestran los Lemas, Teoremas y Proposiciones presentados en el documento. Asimismo, se presentan dos lemas auxiliares utlizados en las demostraciones.

Proof. Demostración del lema 1. Demostraremos (1). El otro resultado se obtiene de manera similar. Sea

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Entonces, por definición

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

de manera que

$$\begin{aligned} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} &= I \\ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} &= 0 \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} &= 0 \\ A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} &= I, \end{aligned}$$

de donde deducimos, de la segunda ecuación, que

$$B_{12} = -A_{11}^{-1} A_{12} B_{22}$$

y, sustituyendo en la cuarta,

$$\begin{aligned} I &= -A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} + A_{22}B_{22} \\ &= \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right) B_{22}, \end{aligned}$$

de manera que

$$B_{22} = \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1}.$$

De la primera ecuación, $A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I$, se obtiene

$$B_{11} = A_{11}^{-1}\left(I - A_{12}B_{21}\right)$$

y de la tercera, $A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = 0$, deducimos que

$$\begin{aligned} A_{22}B_{21} &= -A_{21}B_{11} \\ &= -A_{21}A_{11}^{-1}(I - A_{12}B_{21}) \\ &= -A_{21}A_{11}^{-1} + A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}B_{21} \end{aligned}$$

y, agrupandot términos,

$$\begin{aligned} -A_{21}A_{11}^{-1} &= \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)B_{21} \\ &= B_{22}^{-1}B_{21}, \end{aligned}$$

es a decir,

$$B_{21} = -B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}.$$

Finalmente, substituyendo este resultado en la primera ecuación,

$$\begin{aligned} B_{11} &= A_{11}^{-1}(I - A_{12}B_{21}) \\ &= A_{11}^{-1}\left(I + A_{12}B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}\right). \end{aligned}$$

QED. ■
Proof. Demostración del lema 2. Sea

$$A = \frac{1}{n}X'X = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} n & \mathbf{i}_n'X_* \\ X_*'\mathbf{i}_n & X_*'X_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \overline{x} \\ \overline{x}' & X_*'X_*/n \end{pmatrix},$$

puesto que $\mathbf{i}_n'X_*/n = (\overline{x}_2, ..., \overline{x}_k) = \overline{x}$. A parir del resultado (1) sobre la inversa de una matriz particionada mostrado en lema 1, podemos escribir

$$\begin{aligned} B_2 &= \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} = \left(X_*'X_*/n - \overline{x}'\overline{x}\right)^{-1} = S_{xx}^{-1}, \\ -A_{11}^{-1}A_{12}B_2 &= -\overline{x}S_{xx}^{-1} \\ -B_2A_{21}A_{11}^{-1} &= -S_{xx}^{-1}\overline{x}' \\ A_{11}^{-1}\left(I + A_{12}B_2A_{21}A_{11}^{-1}\right) &= 1 + \overline{x}S_{xx}^{-1}\overline{x}', \end{aligned}$$

y, dado que $(X'X)^{-1} = A^{-1}/n$, queda demostrado el lema. QED. ■
Proof. Demostración del Teorema 10. El estimador MCO de (6) viene dado por:

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_* &= \left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}\widetilde{X}'\widetilde{Y} = \left(X_*'Q'QX_*\right)^{-1}X_*'Q'QY \\ &= \left(X_*'QX_*\right)^{-1}X_*'QY. \end{aligned} \tag{16}$$

Consideremos ahora el estimador MQO de (3). Este se puede escribir como

$$\begin{aligned} \widehat{\beta} &= \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_* \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{i}'Y \\ X_*'Y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 + \overline{x}S_{xx}^{-1}\overline{x}' & -\overline{x}S_{xx}^{-1} \\ -S_{xx}^{-1}\overline{x}' & S_{xx}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n\overline{y} \\ X_*'Y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde hemos usado los resultados del lema 2, y dado que $S_{xx}^{-1} = n\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}$, se obtiene, para $\widehat{\beta}_*$

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_* &= -n\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}\overline{x}'\overline{y} + \left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1} X_*'Y \\
&= \left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}\left(X_*'Y - n\overline{x}'\overline{y}\right) = \left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}\left(X_*'Y - \frac{1}{n}X_*'\mathbf{ii}'Y\right) \\
&= \left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}\left(X_*'\left(I - \frac{1}{n}\mathbf{ii}'\right)Y\right) = \left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}\left(X_*'QY\right) \\
&= \left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}\widetilde{X}'\widetilde{Y},
\end{aligned}$$

que coincide con (16). QED. ■

Proof. Demostración de la proposición 19. Para el primer resultado,

$$\begin{aligned}
M_X Q &= M_X\left(I - \frac{1}{n}\mathbf{i}_n\mathbf{i}_n'\right) \\
&= M_X - \frac{1}{n}M_X\mathbf{i}_n\mathbf{i}_n' \\
&= M_X,
\end{aligned}$$

dado que M_X es ortogonal a los regresores y entre estos se encuentra el vector de unos, $M_X\mathbf{i}_n = 0$. Para el segundo resultado, usando lema 2 y dado que

$S_{xx}^{-1} = n\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}$, se verifica

$$\begin{aligned}
M_X &= I - X\left(X'X\right)^{-1}X' \\
&= I - \frac{1}{n}X\begin{pmatrix} 1+\overline{x}S_{xx}^{-1}\overline{x}' & -\overline{x}S_{xx}^{-1} \\ -S_{xx}^{-1}\overline{x}' & S_{xx}^{-1} \end{pmatrix}X' \\
&= I - (\mathbf{i}_n, X_*)\begin{pmatrix} \frac{1}{n}+\overline{x}\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}\overline{x}' & -\overline{x}\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1} \\ -\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}\overline{x}' & \left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{i}_n' \\ X_*' \end{pmatrix} \\
&= I - (\mathbf{i}_n, X_*)\begin{pmatrix} \frac{1}{n}\mathbf{i}_n' - \overline{x}\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}(X_*' - \overline{x}'\mathbf{i}_n') \\ \left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}(X_*' - \overline{x}'\mathbf{i}_n') \end{pmatrix} \\
&= I - (\mathbf{i}_n, X_*)\begin{pmatrix} \frac{1}{n}\mathbf{i}_n' - \overline{x}\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}\widetilde{X}' \\ \left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}\widetilde{X}' \end{pmatrix} \\
&= I - \frac{1}{n}\mathbf{i}_n\mathbf{i}_n' + \mathbf{i}_n\overline{x}\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}\widetilde{X}' - X_*\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}\widetilde{X}' \\
&= Q - (X_* - \mathbf{i}_n\overline{x})\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}\widetilde{X}' \\
&= Q - \widetilde{X}\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}\widetilde{X}Q' \\
&= M_{\widetilde{X}}Q,
\end{aligned}$$

dado que, al ser Q una matriz simétrica idempotente $\widetilde{X} = QX = QQX = Q\widetilde{X}$ y $\widetilde{X}' = \widetilde{X}'Q$. QED. ■

Proof. Demostración del Lema 23. Obtendremos el resultado para una fila cualquiera, por exemplo la última, y después lo extenderemos al resto. Particionamos $\widetilde{X} = QX$, donde Q es la matriz idempotente de desviaciones, en $\widetilde{X} = \left(\widetilde{X}_{k-1}, \widetilde{x}_k\right)$ donde $\widetilde{X}_{k-1}$ es la matriz que tiene por columnas las desviaciones de $x_{2,i}...x_{k-1,i}$. Sea

$$\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1} = (a_{ij})_{k\times k} = \begin{pmatrix} \widetilde{X}_{k-1}'\widetilde{X}_{k-1} & \widetilde{X}_{k-1}'\widetilde{x}_k \\ \widetilde{x}_k'\widetilde{X}_{k-1} & \widetilde{x}_k'\widetilde{x}_k \end{pmatrix}^{-1}.$$

Según la fórmula de inversión de matrices particionadas (1), $a_{kk} = B_2$, $A_{11} =$

$\widetilde{X}_{k-1}'\widetilde{X}_{k-1}$, $A_{12} = \widetilde{X}_{k-1}'\widetilde{x}_k$; $A_{21} = A_{12}'$ y $A_{22} = \widetilde{x}_k'\widetilde{x}_k$, de manera que

$$\begin{aligned}
a_{kk} &= B_2 = \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} \\
&= \left(\widetilde{x}_k'\widetilde{x}_k - \widetilde{x}_k'\widetilde{X}_{k-1}\left(\widetilde{X}_{k-1}'\widetilde{X}_{k-1}\right)^{-1}\widetilde{X}_{k-1}'\widetilde{x}_k\right)^{-1} \\
&= \left(\widetilde{x}_k'\left(I_n - \widetilde{X}_{k-1}\left(\widetilde{X}_{k-1}'\widetilde{X}_{k-1}\right)^{-1}\widetilde{X}_{k-1}'\right)\widetilde{x}_k\right)^{-1} \\
&= \left(\widetilde{x}_k' M_{\widetilde{X}_{k-1}}\widetilde{x}_k\right)^{-1}
\end{aligned}$$

donde $M_{\widetilde{X}_{k-1}} = I_n - \widetilde{X}_{k-1}\left(\widetilde{X}_{k-1}'\widetilde{X}_{k-1}\right)^{-1}\widetilde{X}_{k-1}'$. Notemos que $\widetilde{x}_k' M_{\widetilde{X}_{k-1}}\widetilde{x}_k$ es la suma de cuadrados residual de la regresión de la variable x_k sobre una constante y el resto de variables explicativas X_{k-1}

$$x_{ki} = \delta_{k,1} + \delta_{k,2}x_{2i} + \cdots + \delta_{k,k-1}x_{k-1,i} + v_{k,i}. \tag{17}$$

A la vez, dado que $R_k^2 = 1 - \widetilde{x}_k' M_{\widetilde{X}_{k-1}}\widetilde{x}_k / \widetilde{x}_k'\widetilde{x}_k$ es el coeficiente de determinación de la regresió (17), entonces $\widetilde{x}_k' M_{\widetilde{X}_{k-1}}\widetilde{x}_k = \widetilde{x}_k'\widetilde{x}_k\left(1 - R_k^2\right)$, como se ha visto en la expresión (7). Por tanto,

$$a_{kk} = \frac{1}{\widetilde{x}_k'\widetilde{x}_k\left(1 - R_k^2\right)} = \frac{1}{nS_k^2\left(1 - R_k^2\right)}.$$

Consideremos ahora el resto de términos de la matriz $\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}$. Los demás elementos de la última fila vienen dados por

$$\begin{aligned}
-B_2A_{21}A_{11}^{-1} &= -a_{kk}\widetilde{x}_k'\widetilde{X}_{k-1}\left(\widetilde{X}_{k-1}'\widetilde{X}_{k-1}\right)^{-1} \\
&= -a_{kk}\widehat{\delta}_{k,R}' \\
&= -\left(nS_k^2\left(1 - R_k^2\right)\right)^{-1}\widehat{\delta}_{k,R}',
\end{aligned}$$

donde

$$\widehat{\delta}_{k,R} = \left(\widetilde{X}_{k-1}'\widetilde{X}_{k-1}\right)^{-1}\widetilde{X}_{k-1}'\widetilde{x}_k,$$

son los estimadores MCO de la regresión de $\widetilde{x}_k$ sobre el resto de variables, dado por (17), y los subíndices de $\widehat{\delta}_{k,R}$ indican que el regresor k-ésimo ha sido regresado sobre el resto de regresorse. Por tanto, el término a_{kj}, $j = 1, ..., k-1$ de la fila k de la matriz $\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1} = (a_{ij})_{k\times k}$ viene dado por

$$a_{kj} = -\frac{\widehat{\delta}_{k,j}}{nS_k^2\left(1 - R_k^2\right)}$$

donde $\widehat{\delta}_{k,j}$ es el estimador MCO de $\delta_{k,j}$ en (17). Los elementos de la última columna de $\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}$ coinciden con los de la última fila, de modo que la columna

k viene dada por $-\left(nS_k^2\left(1-R_k^2\right)\right)^{-1}\widehat{\delta}_{k,R}$. Por último,

$$\begin{aligned}
A_{11}^{-1}\left(I+A_{12}B_2A_{21}A_{11}^{-1}\right) &= \left(\widetilde{X}'_{k-1}\widetilde{X}_{k-1}\right)^{-1}\left(I+\frac{1}{nS_k^2\left(1-R_k^2\right)}\widetilde{X}'_{k-1}\widetilde{x}_k\widetilde{x}'_k\widetilde{X}_{k-1}\left(\widetilde{X}'_{k-1}\widetilde{X}_{k-1}\right)^{-1}\right) \\
&= \left(\widetilde{X}'_{k-1}\widetilde{X}_{k-1}\right)^{-1}+\frac{\widehat{\delta}_{k,R}\widehat{\delta}'_{k,R}}{nS_k^2\left(1-R_k^2\right)}.
\end{aligned}$$

En síntesis

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1} &= \begin{pmatrix} \left(\widetilde{X}'_{k-1}\widetilde{X}_{k-1}\right)^{-1}+\frac{\widehat{\delta}_{k,R}\widehat{\delta}'_{k,R}}{nS_k^2\left(1-R_k^2\right)} & \frac{\widehat{\delta}_{k,R}}{nS_k^2\left(1-R_k^2\right)} \\ \frac{\widehat{\delta}'_{k,R}}{nS_k^2\left(1-R_k^2\right)} & \frac{1}{nS_k^2\left(1-R_k^2\right)} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{nS_k^2\left(1-R_k^2\right)}\begin{pmatrix} nS_k^2\left(1-R_k^2\right)\left(\widetilde{X}'_{k-1}\widetilde{X}_{k-1}\right)^{-1}+\widehat{\delta}_{k,R}\widehat{\delta}'_{k,R} & \widehat{\delta}_{k,R} \\ \widehat{\delta}'_{k,R} & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

El mismo desarrollo puede hacerse para cada una de las filas-columnas de $\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}$. En general, para la variable j, $(j=2,...,k)$,

$$a_{jj}=\left(\widetilde{x}'_jM_{\widetilde{X}_{(-j)}}\widetilde{x}_j\right)^{-1}=\frac{1}{nS_j^2\left(1-R_j^2\right)},$$

y el resto de elementos de la fila j vienen dados por

$$a_{jh}=-\frac{\widehat{\delta}_{j,h}}{nS_j^2\left(1-R_j^2\right)},$$

donde R_j^2 y $\widehat{\delta}_{j,h}$ son, respectivamente, el coeficiente de determinación y el estimador MCO de $\delta_{j,h}$ en la regresió

$$x_{ji}=\delta_{j,1}+\delta_{j,2}x_{2i}+\cdots+\delta_{j,j-1}x_{j-1,i}+\delta_{j,j+1}x_{j+1,i}+\cdots+\delta_{j,k}x_{k,i}+v_{j,i}.$$

Además, puesto que la matriz $\left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}$ es simétrica

$$\frac{\widehat{\delta}_{h,j}}{S_h^2\left(1-R_h^2\right)}=\frac{\widehat{\delta}_{j,h}}{S_j^2\left(1-R_j^2\right)}.$$

Por tanto,

$$\left(\frac{1}{n}\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{S_2^2\left(1-R_2^2\right)} & -\frac{\widehat{\delta}_{2,3}}{S_2^2\left(1-R_2^2\right)} & \cdots & -\frac{\widehat{\delta}_{2,k}}{S_2^2\left(1-R_2^2\right)} \\ -\frac{\widehat{\delta}_{2,3}}{S_2^2\left(1-R_2^2\right)} & \frac{1}{S_3^2\left(1-R_3^2\right)} & \cdots & -\frac{\widehat{\delta}_{3,k}}{S_3^2\left(1-R_3^2\right)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\widehat{\delta}_{2,k}}{S_2^2\left(1-R_2^2\right)} & -\frac{\widehat{\delta}_{3,k}}{S_3^2\left(1-R_3^2\right)} & \cdots & \frac{1}{S_k^2\left(1-R_k^2\right)} \end{pmatrix}.$$

QED. ■

Para demostrar el Teorema 27 el siguiente lema serà de utilidad.

Lemma 54 *Sea* $X = (X_1, X_2)$, $P = X(X'X)^{-1}X'$, $M = I - P, P_1 = X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'$, $M_1 = I - P_1$, $P_2 = X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'$, $M_2 = I - P_2$, *y sea*

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

suponiendo que todas las matrices inversas existen. Entonces, se verifica

1. $B_{11} = (X_1'M_2X_1)^{-1} = (X_1'X_1)^{-1}\left(I + X_1'X_2(X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1}\right)$

2. $B_{22} = (X_2'M_1X_2)^{-1} = (X_2'X_2)^{-1}\left(I + X_2'X_1(X_1'M_2X_1)^{-1}X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}\right)$

3. $B_{21} = (X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1} = (X_1'M_2X_1)^{-1}X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}$

4. $B_{12} = (X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2(X_2'M_1X_2)^{-1} = (X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1(X_1'M_2X_1)^{-1}$

5. $M = M_1 - M_1X_2(X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'M_1 = M_2 - M_2X_1(X_1'M_2X_1)^{-1}X_1'M_2.$

Proof. A partir del resultado (1) del lema 1 sobre la inversa de matrices particionadas, obtenemos:

$$\begin{aligned}
B_{22} &= \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} \\
&= \left(X_2'X_2 - X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2\right)^{-1} = (X_2'M_1X_2)^{-1} \\
B_{21} &= -B_{22}A_{21}A_{11}^{-1} = -(X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1} \\
B_{12} &= -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} = -(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2(X_2'M_1X_2)^{-1} \\
B_{11} &= A_{11}^{-1}\left(I + A_{12}B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}\right) \\
&= (X_1'X_1)^{-1}\left(I + X_1'X_2(X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Usando ahora (2),

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1} \\
&= \left(X_1'X_1 - X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1\right)^{-1} = (X_1'M_2X_1)^{-1} \\
B_{21} &= -B_1A_{12}A_{22}^{-1} = -(X_1'M_2X_1)^{-1}X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1} \\
B_{12} &= -A_{22}^{-1}A_{21}B_1 = -(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1(X_1'M_2X_1)^{-1} \\
B_{22} &= A_{22}^{-1}\left(I + A_{21}B_1A_{12}A_{22}^{-1}\right) \\
&= (X_2'X_2)^{-1}\left(I + X_2'X_1(X_1'M_2X_1)^{-1}X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Puesto que ambas inversas son equivalentes, deben cumplirse los primers 4 resultados del lema.

$$\begin{aligned}
\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1} &= \left(X_1'X_1\right)^{-1}\left(I+X_1'X_2\left(X_2'M_1X_2\right)^{-1}X_2'X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1}\right)\\
\left(X_2'M_1X_2\right)^{-1} &= \left(X_2'X_2\right)^{-1}\left(I+X_2'X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'X_2\left(X_2'X_2\right)^{-1}\right)\\
\left(X_2'M_1X_2\right)^{-1}X_2'X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1} &= \left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'X_2\left(X_2'X_2\right)^{-1}\\
\left(X_1'X_1\right)^{-1}X_1'X_2\left(X_2'M_1X_2\right)^{-1} &= \left(X_2'X_2\right)^{-1}X_2'X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Para el quinto resultado, usando los resultados anteriores

$$\begin{aligned}
M &= I-X\left(X'X\right)^{-1}X'\\
&= I-(X_1,X_2)\\
&\quad\times\begin{pmatrix} \left(X_1'M_2X_1\right)^{-1} & -\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'X_2\left(X_2'X_2\right)^{-1}\\ -\left(X_2'X_2\right)^{-1}X_2'X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1} & \left(X_2'M_1X_2\right)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1'\\ X_2'\end{pmatrix}\\
&= I-(X_1,X_2)\begin{pmatrix} \left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'-\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'X_2\left(X_2'X_2\right)^{-1}X_2'\\ \left(X_2'M_1X_2\right)^{-1}X_2'-\left(X_2'X_2\right)^{-1}X_2'X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'\end{pmatrix}\\
&= I-X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'+X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'P_2\\
&\quad+P_2X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'-X_2\left(X_2'M_1X_2\right)^{-1}X_2'.
\end{aligned}$$

Al ser matrices siméricas, $P_2X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'=X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'P_2$,

$$\begin{aligned}
M &= I-M_2X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'\\
&\quad+P_2X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'-X_2\left(X_2'M_1X_2\right)^{-1}X_2'
\end{aligned}$$

y a partir del resultado 2 del lema anterior,

$$\begin{aligned}
M &= I-X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'+2X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'P_2\\
&\quad-X_2\left[\left(X_2'X_2\right)^{-1}+\left(X_2'X_2\right)^{-1}X_2'X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'X_2\left(X_2'X_2\right)^{-1}\right]X_2'\\
&= I-X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'+2X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'P_2\\
&\quad-P_2-P_2X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'P_2\\
&= M_2-M_2X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'\\
&\quad+M_2X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'P_2\\
&= M_2-M_2X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1}X_1'M_2.
\end{aligned}$$

Asimismo, por simetría

$$M=M_1-M_1X_2\left(X_2'M_1X_2\right)^{-1}X_2'M_1.$$

QED. ■

Proof. Demostración del Teorema 27. Para el primer resuldado podemos escribir el estimador MCO del modelo (8) como

$$\begin{pmatrix}\widehat{\beta}_1\\ \widehat{\beta}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2\\ X_2'X_1 & X_2'X_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} X_1'y\\ X_2'y\end{pmatrix}.$$

Por tanto, a partir de los resultados del lema anterior

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_2 &= B_{21}X_1'y + B_{22}X_2'y \\
&= -\left(X_2'M_1X_2\right)^{-1} X_2'X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1} X_1'y + \left(X_2'M_1X_2\right)^{-1} X_2'y \\
&= \left(X_2'M_1X_2\right)^{-1} X_2'\left(I - X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1} X_1'\right) y \\
&= \left(X_2'M_1X_2\right)^{-1} X_2'M_1y,
\end{aligned}$$

que coincide con el estimador MCO de (9) dado por (10).

Para el segundo resultado del teorema, los residuos (8) vienen dados por $e = My$, donde $M = I - X\left(X'X\right)^{-1} X'$. Por su lado, los de (9) son $M_{2.1}M_1y$, donde $M_{2.1} \equiv I - M_1X_2\left(X_2'M_1X_2\right)^{-1} X_2'M_1$. Desarrollando esta última matriz

$$\begin{aligned}
M_{2.1} &= I - M_1X_2\left(X_2'M_1X_2\right)^{-1} X_2'M_1 \\
&= I - M_1X_2\left(X_2'X_2\right)^{-1}\left(I + X_2'X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1} X_1'X_2\left(X_2'X_2\right)^{-1}\right) X_2'M_1 \\
&= I - M_1X_2\left(X_2'X_2\right)^{-1} X_2'M_1 \\
&\quad + M_1X_2\left(X_2'X_2\right)^{-1} X_2'X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1} X_1'X_2\left(X_2'X_2\right)^{-1} X_2'M_1 \\
&= I - M_1P_2M_1 + M_1P_2X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1} X_1'P_2M_1.
\end{aligned}$$

Al ser matrices idempotentes

$$M_{2.1}M_1 = M_1 - M_1P_2M_1 + M_1P_2X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1} X_1'P_2M_1.$$

Por otro lado, a partir del resultado 5 del lema anterior

$$M = M_1 - M_1X_2\left(X_2'M_1X_2\right)^{-1} X_2'M_1$$

y, usando el resultado 2 del anterior lema,

$$\begin{aligned}
M &= M_1 - M_1X_2\left(X_2'X_2\right)^{-1} X_2'M_1 \\
&\quad + M_1X_2\left(X_2'X_2\right)^{-1} X_2'X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1} X_1'X_2\left(X_2'X_2\right)^{-1} X_2'M_1 \\
&= M_1 - M_1P_2M_1 + M_1P_2X_1\left(X_1'M_2X_1\right)^{-1} X_1'P_2M_1
\end{aligned}$$

que coincide con $M_{2.1}M_1$, de modo que $M_{2.1}M_1y = My$. QED. ■

Proof. Demostración del Teorema 33. Comenzaremos demostrando el resultado para $V\left(\widehat{\beta}_j\right) = \sigma^2 a_{jj}$ donde a_{jj} es el elemento j-ésimo de la diagonal principal de $\left(X'X\right)^{-1}$. A partir de los resultados del Lema 23, se obtiene inmediatamente que $V\left(\widehat{\beta}_j\right) = \sigma^2\left(nS_j^2\left(1 - R_j^2\right)\right)^{-1}$. En cuanto a $\widehat{\beta}_j$, usaremos de nuevo la fórmula de inversión de matrices particionadas (1), donde ya hemos obtenido que $a_{kk} = \left(\widetilde{x}_k'M_{\widetilde{X}_{k-1}}\widetilde{x}_k\right)^{-1}$. Además, $-B_2A_{21}A_{11}^{-1} = -a_{kk}\widetilde{x}_k'\widetilde{X}_{k-1}\left(\widetilde{X}_{k-1}'\widetilde{X}_{k-1}\right)^{-1}$. Dado que $\widehat{\beta}_* = \left(\widetilde{X}'\widetilde{X}\right)^{-1}\widetilde{X}'\widetilde{y}$, el estimador del parámetro β_k viene dado por

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_k &= a_{kk}\widetilde{x}'_k\widetilde{y} - a_{kk}\widetilde{x}'_k\widetilde{X}_{k-1}\left(\widetilde{X}'_{k-1}\widetilde{X}_{k-1}\right)^{-1}\widetilde{X}'_{k-1}\widetilde{y} \\
&= a_{kk}\widetilde{x}'_k\left(I_n - \widetilde{X}_{k-1}\left(\widetilde{X}'_{k-1}\widetilde{X}_{k-1}\right)^{-1}\widetilde{X}'_{k-1}\right)\widetilde{y} \\
&= a_{kk}\widetilde{x}'_k M_{\widetilde{X}_{k-1}}\widetilde{y} \\
&= \frac{\widetilde{x}'_k M_{\widetilde{X}_{k-1}}\widetilde{y}}{\widetilde{x}'_k M_{\widetilde{X}_{k-1}}\widetilde{x}_k}.
\end{aligned}$$

De la misma manera, para el resto de parámetros,

$$\widehat{\beta}_j = \frac{\widetilde{x}'_j M_{\widetilde{X}_{(-j)}}\widetilde{y}}{\widetilde{x}'_j M_{\widetilde{X}_{(-j)}}\widetilde{x}_j}.$$

Finalmente, usando los anteriores resultados,

$$\begin{aligned}
t_j &= \frac{\widehat{\beta}_j}{es\left(\widehat{\beta}_j\right)} \\
&= \frac{\widetilde{x}'_j M_{\widetilde{X}_{(-j)}}\widetilde{y}\left(\widetilde{x}'_j M_{\widetilde{X}_{(-j)}}\widetilde{x}_j\right)^{-1}}{\sqrt{\widehat{\sigma}^2\left(\widetilde{x}'_j M_{\widetilde{X}_{(-j)}}\widetilde{x}_j\right)^{-1}}} \\
&= \frac{\widetilde{x}'_j M_{\widetilde{X}_{(-j)}}\widetilde{y}}{\widehat{\sigma}\sqrt{\widetilde{x}'_j M_{\widetilde{X}_{(-j)}}\widetilde{x}_j}} \\
&= \frac{\widetilde{x}'_j M_{\widetilde{X}_{(-j)}}\widetilde{y}}{\widehat{\sigma}\sqrt{\widetilde{x}'_j\widetilde{x}_j\left(1-R_j^2\right)}}.
\end{aligned}$$

QED. ■

Para la demostración de la proposición 36 nos será de utilidad el seguiente lema.

Lemma 55 *Se cumple:*

$$1 - \frac{x_{t+1}q_{t+1}}{1+x_{t+1}q_{t+1}} = \frac{1}{1+x_{t+1}q_{t+1}}$$

$$\begin{aligned}
q_{t+1} - \frac{q_{t+1}q'_{t+1}x'_{t+1}}{1+x_{t+1}q_{t+1}} &= \frac{q_{t+1}}{1+x_{t+1}q_{t+1}} \\
\frac{1}{1+x_{t+1}q_{t+1}} + x_{t+1}q_{t+1} &= 1 + \frac{x_{t+1}q_{t+1}q'_{t+1}x'_{t+1}}{1+x_{t+1}q_{t+1}}
\end{aligned}$$

Proof. El primer resultado es elemental. En cuanto al segundo, puesto que $x_{t+1}q_{t+1}$ es un escalar, $x_{t+1}q_{t+1} = q'_{t+1}x'_{t+1}$, podemos escribir

$$\begin{aligned} q_{t+1} - \frac{q_{t+1}q'_{t+1}x'_{t+1}}{1+x_{t+1}q_{t+1}} &= \frac{q_{t+1}\left(1+x_{t+1}q_{t+1}\right) - q_{t+1}q'_{t+1}x'_{t+1}}{1+x_{t+1}q_{t+1}} \\ &= \frac{q_{t+1} + q_{t+1}q'_{t+1}x'_{t+1} - q_{t+1}q'_{t+1}x'_{t+1}}{1+x_{t+1}q_{t+1}} \\ &= \frac{q_{t+1}}{1+x_{t+1}q_{t+1}}. \end{aligned}$$

En cuanto al tercero, usando los anteriores resultados,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x_{t+1}q_{t+1}} + x_{t+1}q_{t+1} &= \frac{1}{1+x_{t+1}q_{t+1}} + \frac{\left(1+x_{t+1}q_{t+1}\right)q'_{t+1}x'_{t+1}}{1+x_{t+1}q_{t+1}} \\ &= \frac{1}{1+x_{t+1}q_{t+1}} + \frac{x_{t+1}q_{t+1}}{1+x_{t+1}q_{t+1}} + \frac{x_{t+1}q_{t+1}q'_{t+1}x'_{t+1}}{1+x_{t+1}q_{t+1}} \\ &= \left(1 - \frac{x_{t+1}q_{t+1}}{1+x_{t+1}q_{t+1}}\right) + \frac{x_{t+1}q_{t+1}}{1+x_{t+1}q_{t+1}} + \frac{x_{t+1}q_{t+1}q'_{t+1}x'_{t+1}}{1+x_{t+1}q_{t+1}} \\ &= 1 + \frac{x_{t+1}q_{t+1}q'_{t+1}x'_{t+1}}{1+x_{t+1}q_{t+1}}. \end{aligned}$$

QED. ■

Proof. Demostración de la proposición 36. Sea

$$X'_{t+1}X_{t+1} = X'_tX_t + x'_{t+1}x_{t+1}$$

y

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_tX_t & x'_{t+1} \\ x_{t+1} & -1 \end{pmatrix}.$$

Usando los resultados de inversas de matrices particionadas mostrados en el lema 1, de (2) se obtiene

$$B_1 = \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1} = \left(X'_tX_t + x'_{t+1}x_{t+1}\right)^{-1} = \left(X'_{t+1}X_{t+1}\right)^{-1}$$

y de (1)

$$B_2 = \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} = \left(-1 - x_{t+1}\left(X'_tX_t\right)^{-1}x'_{t+1}\right)^{-1} = -\left(1+x_{t+1}q_{t+1}\right)^{-1}$$

que es un escalar. Además,

$$\begin{aligned} A_{11}^{-1}\left(I + A_{12}B_2A_{21}A_{11}^{-1}\right) &= \left(X'_tX_t\right)^{-1}\left(I + x'_{t+1}B_2x_{t+1}\left(X'_tX_t\right)^{-1}\right) \\ &= \left(X'_tX_t\right)^{-1} - \left(X'_tX_t\right)^{-1}x'_{t+1}x_{t+1}\left(X'_tX_t\right)^{-1}\left(1+x_{t+1}q_{t+1}\right)^{-1} \\ &= \left(X'_tX_t\right)^{-1} - q_{t+1}q'_{t+1}\left(1+x_{t+1}q_{t+1}\right)^{-1}, \end{aligned}$$

de manera que, puesto que se ha de cumplir que $B_1 = A_{11}^{-1}\left(I + A_{12}B_2A_{21}A_{11}^{-1}\right)$, resulta

$$\left(X_{t+1}'X_{t+1}\right)^{-1} = \left(X_t'X_t\right)^{-1} - \frac{q_{t+1}q_{t+1}'}{1 + x_{t+1}q_{t+1}}$$

quedando demostrado (11). QED. ■

Proof. Demostración de la proposición 43. Dado que,

$$X_{t+1}'Y_{t+1} = X_t'Y_t + x_{t+1}'y_{t+1},$$

y teniendo en cuenta que $x_{t+1}q_{t+1} = q_{t+1}'x_{t+1}'$ y (11) los estimadores resursivos vienen dados por

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_{t+1} &= \left(X_{t+1}'X_{t+1}\right)^{-1} X_{t+1}'Y_{t+1} \\
&= \left(\left(X_t'X_t\right)^{-1} - \frac{q_{t+1}q_{t+1}'}{1 + x_{t+1}q_{t+1}}\right)\left(X_t'Y_t + x_{t+1}'y_{t+1}\right) \\
&= \left(X_t'X_t\right)^{-1} X_t'Y_t + \left(X_t'X_t\right)^{-1} x_{t+1}'y_{t+1} - \frac{q_{t+1}q_{t+1}'X_t'Y_t + q_{t+1}q_{t+1}'x_{t+1}'y_{t+1}}{1 + x_{t+1}q_{t+1}} \\
&= \widehat{\beta}_t + q_{t+1}y_{t+1} - \frac{q_{t+1}x_{t+1}}{1 + x_{t+1}q_{t+1}}\widehat{\beta}_t - \frac{q_{t+1}q_{t+1}'x_{t+1}'}{1 + x_{t+1}q_{t+1}}y_{t+1} \\
&= \widehat{\beta}_t + \left(q_{t+1} - \frac{q_{t+1}q_{t+1}'x_{t+1}'}{1 + x_{t+1}q_{t+1}}\right)y_{t+1} - \frac{q_{t+1}}{1 + x_{t+1}q_{t+1}}x_{t+1}\widehat{\beta}_t \\
&= \widehat{\beta}_t + \left(\frac{q_{t+1}}{1 + x_{t+1}q_{t+1}}\right)y_{t+1} - \frac{q_{t+1}}{1 + x_{t+1}q_{t+1}}x_{t+1}\widehat{\beta}_t \\
&= \widehat{\beta}_t + \left(\frac{q_{t+1}}{1 + x_{t+1}q_{t+1}}\right)\left(y_{t+1} - x_{t+1}\widehat{\beta}_t\right)
\end{aligned}$$

quedando demostrado (13). QED. ■

Proof. Demostración de la proposición 49. Bajo el supuesto de correcta especificación, podemos escribir (12) com

$$\begin{aligned}
e_{t+1|t} &= y_{t+1} - x_{t+1}\left(X_t'X_t\right)^{-1} X_t'\mathbf{y}_t \\
&= x_{t+1}\beta + u_{t+1} - x_{t+1}\left(X_t'X_t\right)^{-1} X_t'\left(X_t\beta + \mathbf{u}_t\right) \\
&= u_{t+1} - x_{t+1}\left(X_t'X_t\right)^{-1} X_t'\mathbf{u}_t.
\end{aligned}$$

y si $E(u) = 0$, entonces $E\left(e_{t+1|t}\right) = 0$. Bajo perturbaciones esféricas,

$$\begin{aligned}
E\left(e_{t+1|t}^2\right) &= \sigma^2 + x_{t+1}\left(X_t'X_t\right)^{-1} X_t'E\left(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t'\right)X_t\left(X_t'X_t\right)^{-1} x_{t+1}' \\
&= \sigma^2\left(1 + x_{t+1}\left(X_t'X_t\right)^{-1} x_{t+1}'\right).
\end{aligned}$$

QED. ■

Proof. Demostración de la proposición 52.Partimos de $e_{t|t-1} = y_t - x_t\widehat{\beta}_{t-1} = x_t\beta + u_t - x_t\widehat{\beta}_{t-1} = x_t\left(\beta - \widehat{\beta}_{t-1}\right) + u_t$ y dado que $\widehat{\beta}_{t-1}$ es insesgado y x_t fijo, $E\left(e_{t|t-1}\right)=0$. Asimismo,

$$\begin{aligned} V\left(e_{t|t-1}\right) &= \left(\sigma^2+x_tV\left(\widehat{\beta}_{t-1}\right)x_t'\right) \\ &= \left(1+x_t\left(X_{t-1}'X_{t-1}\right)^{-1}x_t'\right)\sigma^2, \end{aligned}$$

de manera que $V\left(\widetilde{e}_{t|t-1}\right)=\sigma^2$. Por otro lado, dado que $\widehat{\beta}_{t-1}=\beta+\left(X_{t-1}'X_{t-1}\right)^{-1}X_{t-1}\mathbf{u}_{t-1}$, donde $\mathbf{u}_{t-1}=\left(u_1,...,u_{t-1}\right)'$ y suponiendo, sin pérdida de generalidad que $j<t$

$$\begin{aligned} E\left(e_{t|t-1}e_{j|j-1}\right) &= E\left(\left(y_t-x_t\widehat{\beta}_{t-1}\right)\left(y_j-x_j\widehat{\beta}_{j-1}\right)\right) \\ &= E\left(\left(x_t\left(\beta-\widehat{\beta}_{t-1}\right)+u_t\right)\left(\left(\beta-\widehat{\beta}_{j-1}\right)'x_j'+u_j\right)\right) \\ &= x_tE\left(\left(\beta-\widehat{\beta}_{t-1}\right)\left(\beta-\widehat{\beta}_{j-1}\right)'\right)x_j'+E\left(u_tu_j\right) \\ &\quad +x_tE\left(\left(\beta-\widehat{\beta}_{t-1}\right)u_j\right)+E\left(\left(\beta-\widehat{\beta}_{j-1}\right)u_t\right)x_j' \\ &= x_tE\left(\left(X_{t-1}'X_{t-1}\right)^{-1}X_{t-1}'\mathbf{u}_{t-1}\mathbf{u}_{j-1}'X_{j-1}\left(X_{j-1}'X_{j-1}\right)^{-1}\right)x_j' \\ &\quad -x_tE\left(\left(X_{t-1}'X_{t-1}\right)^{-1}X_{t-1}'\mathbf{u}_{t-1}u_j\right) \\ &\quad -E\left(\left(X_{j-1}'X_{j-1}\right)^{-1}X_{j-1}'\mathbf{u}_{j-1}u_t\right)x_j', \end{aligned}$$

definiendo la matriz de órdenes $(t-1)\times(j-1)$

$$A=E\left(\mathbf{u}_{t-1}\mathbf{u}_{j-1}'\right)=\begin{pmatrix} \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma^2 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=\sigma^2\begin{pmatrix} I_{j-1} \\ 0_{(t-j)\times(j-1)} \end{pmatrix}$$

y teniendo en cuenta que $X_{t-1}'AX_{j-1}=\sigma^2X_{j-1}'X_{j-1}$ y que

$$\left(X_{t-1}'X_{t-1}\right)^{-1}X_{t-1}'E\left(\mathbf{u}_{t-1}u_j\right)=\left(X_{t-1}'X_{t-1}\right)^{-1}x_j'\sigma^2$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} E\left(e_{t|t-1}e_{j|j-1}\right) &= x_t\left(X_{t-1}'X_{t-1}\right)^{-1}X_{t-1}'AX_{j-1}\left(X_{j-1}'X_{j-1}\right)^{-1}x_j' \\ &\quad -x_t\left(X_{t-1}'X_{t-1}\right)^{-1}x_j'\sigma^2-0 \\ &= \sigma^2\left(x_t\left(X_{t-1}'X_{t-1}\right)^{-1}x_j'-x_t\left(X_{t-1}'X_{t-1}\right)^{-1}x_j'\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

de manera que los residuos recursivos y los recursivos normalizados están interrelacionados. QED. ■

References

[1] Davidson, R. y J.G. MacKinnon (1993): *Estimation and Inference in Econometrics*. Oxford University Press. New York.

[2] Frisch, R. y F.V. Waugh (1933): "Partial Time Regressions as Compared with Individual Trends". *Econometrica*, 1, 387-401.

[3] Harvey, A.C. (1976): "An Alternative proof and Generalization of a Test for Structural Change". *The American Statitician*, 30, pp. 122-123.

[4] Harvey, A.C. y D.D.A. Phillips (1974): "An Comparison of the power of Some Tests for Heteroscedasticity in the general Linear Model". *journal of Econometrics*, 2, pp. 407-416.

[5] James, G., Witten, D., Hastie, T., & Tibshirani, R. (2013). *An introduction to statistical learning*. New York: Springer.

[6] Lovell, M.C. (1963): "Seasonal Adjustment of Economic Time Series". *Journal of the American Statistical Association*, 58, 993-1010.

[7] Peña, D. (2002): *Análisis de datos multivariantes*. McGraw-Hill.

[8] von Newmann, J. (1941): "Distribution of the Ratio of the Mean Square Successive Difference to the Variance". *Annals of Mathematical Statistics*. 12, pp. 367-395.

[9] Young, P. (2011): *Recursive Estimation and Time Series Analysis*. 2^a edició. Springer.