1 Introducción

En el análisis de series temporales se suele asumir que la varianza de los errores o innovaciones es constante. Pero en muchas situaciones este supuesto puede resultar poco realista sobre todo el trabajar con datos financieros. En los mercados financieros es habitual asumir que la volatilidad no es constante a lo largo del tiempo. Consideremos un modelo en el cual la innovación no tiene varianza constante sino que va evolucionando a lo largo del tiempo:

$$\begin{aligned} \varphi(L)\,x_t &= \mu + \theta(L)\,n_t \\ n_t &= \sigma_t \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim iid\,(0,1) \\ E\left[\varepsilon_t n_{t-j}\right] &= 0 \quad \forall j > 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Por lo tanto, aw puede ver que, tanto ε_t como n_t tienen valor esperado zero y no presentan correlación serial, pero la varianza de ε_t es $VAR\,[\varepsilon_t] = 1$ mientras que la varianza de η_t será $VAR\,[n_t | I_{t-1}] = \sigma_t^2$. Dependiedo del proceso o esquema que asumamos que sigue σ_t^2 estaremos frente a un modelo de volatilidad u otro. Los dos models más populares son los ARCH y los GARCH.

2 Modelo ARCH

ARCH es la abreviacion de "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity" y reponde a que el proceso que sigue $VAR\left[n_t|I_{t-1}\right] = \sigma_t^2$ es:

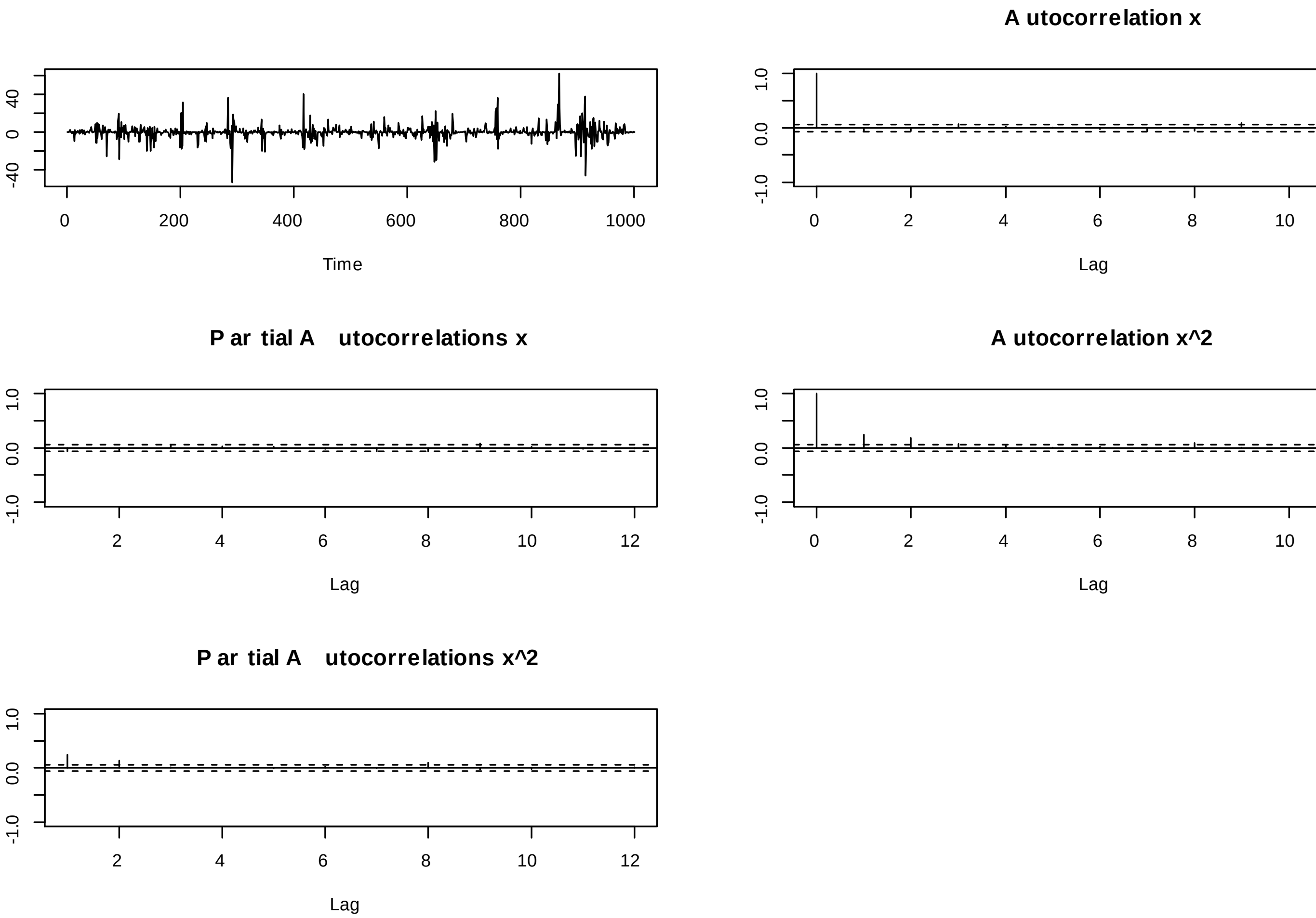
$$\begin{aligned} n_t &= \sigma_t \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim iid\,(0,1) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 n_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_s n_{t-s}^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Es decir, la varianza de n_t condidicional a la información disponible en el periodo $t-1$ $VAR\left[n_t|I_{t-1}\right] = VAR\left[n_t|n_{t-1}, n_{t-2}, \ldots\right]$ es función de los s primeros retardos de n_t^2. Basandonos en (2) podemos ver que es equivalente a la predicción de n_t^2, es decir, $E\left[n_t^2|I_{t-1}\right]$ si n_t^2 siguiera un proceso AR(s):

$$\begin{aligned} n_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 n_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_s n_{t-s}^2 + a_t \\ a_t &\sim iid\left(0, \sigma_a^2\right) \end{aligned}$$

Aunque existen complicaciones adicionales, que iremos analizando a continuación.

$$x_t = \eta_t \qquad \eta_t = \sigma_t \varepsilon_t \qquad n_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 n_{t-1}^2 + a_t$$



Es evidente que resulta necesario imponer algunas rectricciones sobre los parámetros de (2) para tener un proceso bien definido, en concreto para que esté bien definido es necesario que:

$$\begin{aligned}
\sum_p \alpha_i &\geq 0 \quad i = 0, 1, \ldots, p \\
\sum_{i=1}^{p} \alpha_i &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_p < 1.
\end{aligned}$$

La condición $\sum \alpha_i \geq 0$, es importante para que la varianza de n_t $VAR[n_t|I_{t-1}] = \sigma_t^2$ esté bien definida. La segunda condición es necesaria para haya estacionariedad en el proceso autoregresivo.

Para ilustrar las propiedades de los modelos ARCH vamos utilizar el caso del ARCH(1):

$$\begin{aligned}
n_t &= \sigma_t \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim iid\,(0, 1) \\
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 n_{t-1}^2.
\end{aligned} \tag{3}$$

En primer lugar podemos ver que el valor esperado de n_t responde a:

$$\begin{aligned}
E[n_t] &= E[E[n_t|I_{t-1}]] = E[E[\sigma_t \varepsilon_t|I_{t-1}]] = \\
&= \sigma_t E[\varepsilon_t|I_{t-1}] = 0
\end{aligned}$$

Utilizamos la "Law of itererated expectations" es decir que $E[x] = E[E[x|y]]$.

Si, elevamos al cuadro $n_t = \sigma_t \varepsilon_t$ en (3) y vamos sustituyendo recursivamente tenemos:

$$
\begin{aligned}
n_t^2 &= \sigma_t^2 \varepsilon_t^2 \\
&= \varepsilon_t^2 \left(\alpha_0 + \alpha_1 n_{t-1}^2\right) = \alpha_0 \varepsilon_t^2 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 n_{t-1}^2 \\
&= \alpha_0 \varepsilon_t^2 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 \left(\sigma_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2\right) \\
&= \alpha_0 \varepsilon_t^2 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-1}^2 \left(\alpha_0 + \alpha_1 n_{t-2}^2\right) \\
&= \alpha_0 \varepsilon_t^2 + \alpha_0 \alpha_1 \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1^2 \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-1}^2 n_{t-2}^2 \\
&= \alpha_0 \varepsilon_t^2 + \alpha_0 \alpha_1 \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1^2 \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-1}^2 \left(\sigma_{t-2}^2 \varepsilon_{t-2}^2\right) \\
&\quad \vdots \\
&= \alpha_0 \sum_{j=1}^{T-1} \alpha_1^j \varepsilon_t^2 \cdots \varepsilon_{t-j}^2 + \alpha_1^T \varepsilon_t^2 \cdots \varepsilon_{t-(T-1)}^2 n_0^2,
\end{aligned}
$$

si $|\alpha_1| < 1$, el término $\alpha_1^T \varepsilon_t^2 \cdots \varepsilon_{t-(T-1)}^2 n_0^2$ tiende a zero si T tiende a infinito, entonces llegamos a:

$$
n_t^2 = \alpha_0 \sum_{j=1}^{T-1} \alpha_1^j \varepsilon_t^2 \cdots \varepsilon_{t-j}^2 + o_p(1)
$$

y podemos deducir que:

$$\begin{aligned}
E\left[n_t^2\right] &= \alpha_0 \sum_{j=1}^{T-1} \alpha_1^j E\left[\varepsilon_t^2 \cdots \varepsilon_{t-j}^2\right] = \\
&= \alpha_0 E\left[\varepsilon_t^2\right] + \alpha_0\alpha_1 E\left[\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2\right] + \alpha_0\alpha_1^2 E\left[\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2\varepsilon_{t-2}^2\right. \\
&= \alpha_0\left(1 + \alpha_1 + \alpha_1^2 + \cdots\right) \\
&= \frac{\alpha_0}{(1-\alpha_1)}
\end{aligned}$$

Aqui aplicamos la desigualdad de Cauchy–Schwarz, dado q podemos escribir:

$$\begin{aligned}
E\left[\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2\right] &\leq E\left[\left|\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2\right|\right] \leq \left(E\left[\varepsilon_t^2\right] E\left[\varepsilon_{t-1}^2\right]\right)^{1/2} = 1 \\
E\left[\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2\varepsilon_{t-2}^2\right] &\leq E\left[\left|\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2\varepsilon_{t-2}^2\right|\right] \leq \left(E\left[\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2\right] E\left[\varepsilon_{t-2}^2\right]\right. \\
&\vdots
\end{aligned}$$

De lo que se desprende que para que la varianza de n_t este bien definida se tiene que cumplir que $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$ y que $\alpha_1 < 1$, ya que $VAR\left[n_t^2\right] = E\left[n_t^2\right] = \alpha_0\left(1-\alpha_1\right)^{-1}$.

Por lo que hemos llegado a que en caso de un ARCH(1) tenemos:

$$\begin{aligned}
n_t &= \sigma_t \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim iid\,(0,1) \\
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 n_{t-1}^2 \\
E\,[n_t] &= 0 \\
VAR\,[n_t] &= E\left[n_t^2\right] = \frac{\alpha_0}{(1-\alpha_1)}.
\end{aligned}$$

Tambien podemos ver en el caso de los valores esperado y varianza condiconales a la información disponible hasta el período $t-1$ ($E\,[n_t|I_{t-1}]$ y $VAR\,[n_t|I_{t-1}]$) tenemos:

$$\begin{aligned}
E\,[n_t|I_{t-1}] &= E\,[\sigma_t \varepsilon_t|I_{t-1}] = E\left[\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 n_{t-1}^2}\varepsilon_t|I_{t-1}\right. \\
&= \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 n_{t-1}^2}E\,[\varepsilon_t|I_{t-1}] = 0 \\
VAR\,[n_t|I_{t-1}] &= E\left[n_t^2|I_{t-1}\right] = E\left[\sigma_t^2 \varepsilon_t^2|I_{t-1}\right] = \\
&= \sigma_t^2 E\left[\varepsilon_t^2|I_{t-1}\right] = \alpha_0 + \alpha_1 n_{t-1}^2.
\end{aligned}$$

Podemos ver que las autocovarianzas de n_t son iguales a cero, ya que:

$$\begin{aligned}
\gamma_k\,(n_t) &= E\,[n_t n_{t+k}] = E\,[E\,[n_t n_{t+k}|I_{t+k-1}]] \\
&= E\,[n_t E\,[\sigma_{t+k}\varepsilon_{t+k}|I_{t+k-1}]] = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto las FAS y la FAP de n_t será como la de un ruido blanco. Pero la de n_t^2 será como la de un AR(1) lo que se desprende de:

$$\begin{aligned} n_t^2 &= \sigma_t^2 + n_t^2 - \sigma_t^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 n_{t-1}^2 + n_t^2 - \sigma_t^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 n_{t-1}^2 + \sigma_t^2 \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 n_{t-1}^2 + \sigma_t^2 \left(\varepsilon_t^2 - 1\right) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 n_{t-1}^2 + a_t \end{aligned} \tag{4}$$

donde $a_t = \sigma_t^2 \left(\varepsilon_t^2 - 1\right)$ será el ruido del proceso seguido por n_t^2 que es un esquema AR(1). Como $\varepsilon_t \sim iid\,(0,1)$ si además tenemos normalidad es decir $\varepsilon_t \sim Niid\,(0,1)$, entonces $\varepsilon_t^2 \sim \chi_1^2$, luego la inovación a_t tendrá un comportamiento mas complicado que el caso habitual de un AR(1).

Para identificar modelos ARCH, primero se estima se modeliza la media del proceso, es decir estimando el modelo (1) y se toman los residuos del modelo $\hat{n}_t$ y analizan la FAS y FAP de $\hat{n}_t^2$ para ver si sigue un proceso AR(s).

Finalmente, el modelo ARCH(1) presenta kurtosis positiva. La kurtosis se da cuando el momento de orden cuarto de una proceso o distribución está por debajo o por encima del adopta en el caso de la normal. Con normalidad tenemos $x \sim N(0, \sigma)$ $E\left[x^4\right] = 3\sigma^2$. En el caso de un ARCH(1) tenemos asumiendo normalidad para $\varepsilon_t \sim Niid(0, 1)$:

$$
\begin{aligned}
E\left[n_t^4\right] &= E\left[\sigma_t^4 \varepsilon_t^4\right] = E\left[E\left[\sigma_t^4 \varepsilon_t^4 | I_{t-1}\right]\right] \\
&= E\left[\sigma_t^4 E\left[\varepsilon_t^4 | I_{t-1}\right]\right] \\
&= E\left[\varepsilon_t^4 | I_{t-1}\right] \\
&= 3E\left[\sigma_t^4\right]
\end{aligned}
$$

Con respecto a σ_t^4 modemos ver que:

$$
\begin{aligned}
E\left[\sigma_t^4\right] &= E\left[\left(\alpha_0 + \alpha_1 n_{t-1}^2\right)^2\right] = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 E\left[\left(n_{t-1}^2\right)^2\right] + 2\alpha \\
&= \alpha_0^2 + \alpha_1^2 \left(VAR\left[n_{t-1}^2\right] + E\left[n_{t-1}^2\right]^2\right) + +2\alpha_0\alpha_1 E
\end{aligned}
$$

sabemos que $E\left[n_{t-1}^2\right] = \frac{\alpha_0}{(1-\alpha_1)}$ ademas en el caso de $VAR\left[n_t^2\right]$ podemos escribir al responder a un AR(1) segun (4):

$$\begin{aligned}
VAR\left[n_{t-1}^2\right] &= VAR\left[a_t\right] / \left(1-\alpha_1^2\right) \\
VAR\left[a_t\right] &= VAR\left[\sigma_t^2\left(\varepsilon_t^2-1\right)\right] \\
&= E\left[\sigma_t^2\right] E\left(\left(\varepsilon_t^2-1\right)^2\right) \\
&= E\left[\sigma_t^2\right]\left(E\left[\varepsilon_t^4\right]+1-2E\left[\varepsilon_t^2\right]\right) \\
&= E\left[\sigma_t^2\right](3+1-2) \\
&= 2E\left[\sigma_t^2\right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo en el paso anterior

$E\left[\sigma_t^4\right] = \alpha_0^2 + \alpha_1^2\left(2E\left[\sigma_t^2\right] / \left(1-\alpha_1^2\right) + \alpha_0^2 / \left(1-\alpha_1\right)^2\right) + +2\alpha$

Simplificando se puede llegar a:

$$E\left[\sigma_t^4\right] = \frac{\alpha_0^2}{(1-\alpha_1)} \frac{(1+\alpha_1)}{\left(1-3\alpha_{2_1}\right)}$$

entonces:

$$E\left[n_t^4\right] = 3\frac{\alpha_0^2}{(1-\alpha_1)} \frac{(1+\alpha_1)}{\left(1-3\alpha_{2_1}\right)}$$

Que se puede demostrar que será mayor que 3.

McLeod y Li (1983) extendieron el test Q para contrastar la hipótesis nula de que los primeros coeficientes de autocorrelación ρ_j de $\hat{n}_t^2$ (que denotaremos $\rho_1\left(\hat{n}_t^2\right)$) de $j = 1, 2, \ldots, k$ son iguales entre e iguales a cero:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \rho_1\left(\hat{n}_t^2\right) = \rho_2\left(\hat{n}_t^2\right) = \cdots = \rho_k\left(\hat{n}_t^2\right) = 0 \\
Q(k) &= T(T+2)\sum_{j=1}^{k}\frac{\hat{\rho}_1^2\left(\hat{n}_t^2\right)}{T-j}
\end{aligned}
$$

Bajo H_0 n_t^2 es un ruido blanco entonces $Q(k)$ seguira una distribución Chi-cuadrado con k grados de libertad.

3 Modelo GARCH

Una extensión natural del modelo ARCH, es considerar que la varianza condicional σ_t^2 de los errores n_t $VAR\left[n_t|I_{t-1}\right] =$

σ_t^2 no es sólo función de los errores pasados elevados al cuadrado sino que también es función de los valores pasados de la varianza condicional, es decir que tenemos:

$$\begin{aligned} n_t &= \sigma_t \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim iid\,(0,1) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \varphi_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \varphi_r \sigma_{t-r}^2 + \alpha_1 n_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_s n_{t-s}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

donde todas las raices de $(1 - \varphi_1 L - \cdots - \varphi_r L^r) = 0$ tienen que caer fuera del circulo unidad para $\sigma_t^2 > 0$, también asuminos que $\alpha_0 > 0$ y que los coeficientes φ_i y α_j son positivos. El modelo anterior es GARCH(r,s), es decir un "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic model" de order (r,s). Cuando r=0 un GARCH(r,s) se convierte en un ARCH(s).

Se puede llegar a la conclusión erronea de que un GARCH(r,s) es equivalente que la varianza condicional sigua un proceso ARMA(r,s). Pero en realidad (5) no es un proceso ARMA propiamente dicho, dado que, que un proceso ARMA se construye a partir de una innovación que se comporta como un ruido blanco y ni σ_t^2 ni n_t^2 pueden ser considerados como ruido blanco. Si definimos $a_t =$

$\left(n_t^2 - \sigma_t^2\right)$ y entonces tenemos $\sigma_t^2 = \left(n_t^2 - a_t\right)$ podemos reescribir (5) en términos de n_t^2 y a_t y vemos que:

$$\begin{aligned}
\left(n_t^2 - a_t\right) &= \alpha_0 + \varphi_1\left(n_{t-1}^2 - a_{t-1}\right) \\
&\quad + \cdots + \varphi_r\left(n_{t-r}^2 - a_{t-r}\right) \\
&\quad + \alpha_1 n_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_s n_{t-s}^2 \\
n_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\left(\varphi_i + \alpha_i\right) n_{t-i}^2 + a_t - \sum_{j=1}^{r}\varphi_j a_{t-j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(1 - \lambda_1 L - \cdots - \lambda_m L^m\right) n_t^2 &= \alpha_0 + \\
&\quad \left(1 - \varphi_1 L - \cdots - \varphi_r L^r\right) a_t \\
m &= \max\left(r, s\right) \\
\lambda_j &= \varphi_j + \alpha_j \\
a_t &= \left(n_t^2 - \sigma_t^2\right) \\
&= \left(\sigma_t^2 \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2\right) \\
&= \sigma_t^2\left(\varepsilon_t^2 - 1\right)
\end{aligned}$$

Los modelos ARCH y GARCH se estimar como los AR y ARMA a partir de una estimación de la Varianza condicional. Y para comprobar que se ha estimado bien el modelo se de puede aplicar el contraste Q de McLeod y Li (1983) sobre los residuos del modelo y mirar la FAS y FAP de los residuos al cuadrado del modelo estimado.