Los modelos PAR, modelos periodicos autoregresivos son una generalización de los modelos AR:

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\sim iid\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right) \end{aligned}$$

$$\left(1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p\right) x_t = \mu + \varepsilon_t$$

en la que se permite tener un valor distinto de los parametros del modelo en cada estación. Es decir si suponemos que tenemos un total de S por año el modelo adpotaría la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_{S(\tau-1)+s} &= \mu_s + \phi_{1s} x_{S(\tau-1)+s-1} + \cdots + \\ &\quad \phi_{ps} x_{S(\tau-1)+s-p} + \varepsilon_{S(\tau-1)+s} \\ \varepsilon_{S(\tau-1)+s} &\sim iid\left(0, \sigma_s^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \phi_{1s} L - \cdots - \phi_{ps} L^p\right) x_{S(\tau-1)+s} &= \mu_s + \varepsilon_{S(\tau-1)+s} \\ \tau &= 1, 2, 3, \ldots, N \\ s &= 1, 2, \ldots, S \end{aligned}$$

donde tenemos un total de $T = NS$ obsevaciones y en concreto τ hace referencia la año en el que nos encontramos y s a la estación del año en la que nos encontramos. Alternativamente se puede utilizar la notación de doble subindice y el modelo quedaría:

$$\begin{aligned} x_{s\tau} &= \mu_s + \phi_{1s} x_{s-1,t} + \cdots + \phi_{ps} x_{s-p,t} + \varepsilon_{st} \\ \varepsilon_{st} &\sim iid\left(0, \sigma_s^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \phi_{1s} L - \cdots - \phi_{ps} L^p\right) x_{s\tau} &= \mu_s + \varepsilon_{st} \\ \tau &= 1, 2, 3, \ldots, N \\ s &= 1, 2, \ldots, S \end{aligned}$$

cuando $s-p \leq 0$ se entiende que $x_{s-p,t} = x_{S-(p-1),t-1}$, es decir, que pasamos al siguiente año. La forma de calcular τ y s el año y la estación en la que nos encontramos a partir de t es la siguiente:

$$\begin{aligned} \tau &= 1 + int\left[(t-1)/S\right] \\ s &= 1 + \left[(t-1) \bmod S\right]. \end{aligned}$$

El modelo PAR en principio no es estacionario y tal y como lo hemos especificado, permite que las innovaciones

$\varepsilon_{S\tau-s}$ tengan una varianza distinta para cada estación. Es decir, permite que tengamos heteroscedasticidad períodica.

A partir de modelo PAR mas sencillo el PAR(1) vamos a ver como no es un modelo estacionario, sino que es ciclo-estacionario.

$$\begin{aligned} x_{S(\tau-1)+s} &= \phi_s x_{S(\tau-1)+s-1} + \varepsilon_{S(\tau-1)+s} \\ x_{s\tau} &= \phi_s x_{s-1,\tau} + \varepsilon_{s\tau} \end{aligned} \quad (1)$$

si sustituimos recursivamente tenemos::

$$\begin{aligned} x_{S(\tau-1)+s} &= \phi_s\phi_{s-1}x_{S(\tau-1)+s-2} + \varepsilon_{S(\tau-1)+s} \\ &\quad +\phi_s\varepsilon_{S(\tau-1)+s-1} \\ &= \phi_s\phi_{s-1}\phi_{s-2}x_{S(\tau-1)+s-3} + \varepsilon_{S(\tau-1)+s} \\ &\quad +\phi_s\varepsilon_{S(\tau-1)+s-1} + \\ &\quad +\phi_s\phi_{s-1}\varepsilon_{S(\tau-1)+s-2} \\ &\quad \vdots \\ &= \phi_S\phi_{S-1}\cdots\phi_1 x_{S(\tau-2)+s} + \varepsilon_{S(\tau-1)+s} + \\ &\quad +\phi_s\varepsilon_{S(\tau-1)+s-1} + \\ &\quad +\phi_s\phi_{s-1}\varepsilon_{S(\tau-1)+s-2} + \cdots + \\ &\quad +\phi_s\phi_{s-1}\cdots\phi_{s-(S-1)}\varepsilon_{S(\tau-1)+s-(S-1)} \end{aligned}$$

que en caso de notación del doble subindice quedaria con datos trimestrales:

$$
\begin{aligned}
x_{4\tau} &= \mathbf{\Psi} x_{4,\tau-1} + \varepsilon_{4\tau} + \phi_4 \varepsilon_{3\tau} + \phi_4 \phi_3 \varepsilon_{2\tau} + \phi_4 \phi_3 \phi_2 \varepsilon_{1\tau} \\
x_{3\tau} &= \mathbf{\Psi} x_{3,\tau-1} + \varepsilon_{3\tau} + \phi_3 \varepsilon_{2\tau} + \phi_3 \phi_2 \varepsilon_{1\tau} + \phi_3 \phi_2 \phi_1 \varepsilon_{4,\tau-1} \\
x_{2\tau} &= \mathbf{\Psi} x_{2,\tau-1} + \varepsilon_{2\tau} + \phi_2 \varepsilon_{1\tau} + \phi_2 \phi_1 \varepsilon_{4,\tau-1} + \\
&\quad + \phi_2 \phi_1 \phi_4 \varepsilon_{3,\tau-1} \\
x_{1\tau} &= \mathbf{\Psi} x_{1,\tau-1} + \varepsilon_{1\tau} + \phi_1 \varepsilon_{4,\tau-1} + \phi_1 \phi_4 \varepsilon_{3,\tau-1} + \\
&\quad + \phi_1 \phi_4 \phi_3 \varepsilon_{2,\tau-1} \\
\mathbf{\Psi} &= \phi_4 \phi_3 \phi_2 \phi_1
\end{aligned}
$$

y que podemos llegar a:

$$
\begin{aligned}
x_{4\tau} &= \boldsymbol{\Psi}^{\tau} x_{4,0} + \sum_{j=0}^{\tau-1} \Big(\varepsilon_{4,\tau-j} + \phi_4 \varepsilon_{3,\tau-j} + \phi_4 \phi_3 \varepsilon_{2,\tau-j} + \\
&\quad + \phi_4 \phi_3 \phi_2 \varepsilon_{1,\tau-j} \Big) \\
x_{3\tau} &= \boldsymbol{\Psi}^{\tau} x_{3,0} + \sum_{j=0}^{\tau-1} \Big(\varepsilon_{3,\tau-j} + \phi_3 \varepsilon_{2,\tau-j} + \phi_3 \phi_2 \varepsilon_{1,\tau-j} + \\
&\quad + \phi_3 \phi_2 \phi_1 \varepsilon_{4,\tau-1-j} \Big) \\
x_{2\tau} &= \boldsymbol{\Psi}^{\tau} x_{2,0} + \left(\sum_{j=0}^{\tau-1} \varepsilon_{2,\tau-j} + \phi_2 \varepsilon_{1,\tau-j} + \phi_2 \phi_1 \varepsilon_{4,\tau-1-j} + \right. \\
&\quad + \phi_2 \phi_1 \phi_4 \varepsilon_{3,\tau-1-j} \Big) \\
x_{1\tau} &= \boldsymbol{\Psi}^{\tau} x_{1,0} + \sum_{j=0}^{\tau-1} \Big(\varepsilon_{1,\tau-j} + \phi_1 \varepsilon_{4,\tau-1-j} + \phi_1 \phi_4 \varepsilon_{3,\tau-1-j} \\
&\quad + \phi_1 \phi_4 \phi_3 \varepsilon_{2,\tau-1-j} \Big)
\end{aligned}
$$

Para que sea estacionario un PAR(1) se tiene que cumplir que $\left|\prod_{j=1}^{S} \phi_j\right| < 1$. A partir de lo anterior podemos ver que tendriamos para las varianzas:

$$
\begin{aligned}
\gamma_4(0) &= \frac{\sigma_4^2 + \phi_4^2\sigma_3^2 + \phi_4^2\phi_3^2\sigma_2^2 + \phi_4^2\phi_3^2\phi_2^2\sigma_1^2}{1-(\phi_4\phi_3\phi_2\phi_1)^2} \\
\gamma_3(0) &= \frac{\sigma_3^2 + \phi_3^2\sigma_2^2 + \phi_3^2\phi_2^2\sigma_1^2 + \phi_3^2\phi_2^2\phi_1^2\sigma_4^2}{1-(\phi_4\phi_3\phi_2\phi_1)^2} \\
\gamma_2(0) &= \frac{\sigma_2^2 + \phi_2^2\sigma_1^2 + \phi_2^2\phi_1^2\sigma_4^2 + \phi_2^2\phi_1^2\phi_4^2\sigma_3^2}{1-(\phi_4\phi_3\phi_2\phi_1)^2} \\
\gamma_1(0) &= \frac{\sigma_1^2 + \phi_1^2\sigma_4^2 + \phi_1^2\phi_4^2\sigma_3^2 + \phi_1^2\phi_4^2\phi_3^2\sigma_2^2}{1-(\phi_4\phi_3\phi_2\phi_1)^2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el PAR(1) es heterocedástico, aunque dentro de cada estación tiene la misma varianza. Incluso si todas las innovaciones tienen la misma varianza $\sigma_4^2 = \sigma_3^2 =$

$\sigma_2^2 = \sigma_1^2 = \sigma_\varepsilon^2$ seguimos teniendo heteros:

$$\begin{aligned}
\gamma_4(0) &= \frac{\left(1+\phi_4^2+\phi_4^2\phi_3^2+\phi_4^2\phi_3^2\phi_2^2\right)}{1-(\phi_4\phi_3\phi_2\phi_1)^2}\sigma_\varepsilon^2 \\
\gamma_3(0) &= \frac{\left(1+\phi_3^2+\phi_3^2\phi_2^2+\phi_3^2\phi_2^2\phi_1^2\right)}{1-(\phi_4\phi_3\phi_2\phi_1)^2}\sigma_\varepsilon^2 \\
\gamma_2(0) &= \frac{\left(1+\phi_2^2+\phi_2^2\phi_1^2+\phi_2^2\phi_1^2\phi_4^2\right)}{1-(\phi_4\phi_3\phi_2\phi_1)^2}\sigma_\varepsilon^2 \\
\gamma_1(0) &= \frac{\left(1+\phi_1^2+\phi_1^2\phi_4^2+\phi_1^2\phi_4^2\phi_3^2\right)}{1-(\phi_4\phi_3\phi_2\phi_1)^2}\sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}$$

Tambien podemos ver que las autocovarianzas varian con la estación si multiplicamos en (1) por $x_{s-1,\tau}$ tenemos y tomamos esperanzas:

$$\begin{aligned}
x_{s-1,\tau}x_{s\tau} &= \phi_s x_{s-1,\tau}x_{s-1,\tau} + \varepsilon_{s\tau}x_{s-1,\tau} \\
E\left[x_{s\tau}x_{s-1,\tau}\right] &= \phi_s E\left[x_{s-1,\tau}x_{s-1,\tau}\right] + E\left[\varepsilon_{s\tau}x_{s-1,\tau}\right] \\
\gamma_s(1) &= \phi_s\gamma_{s-1}(0).
\end{aligned}$$

En los modelos PAR una muy útil de trabajar con ellos es su representación VAR. Por ejemplo para un PAR(1) con $S=4$ tendriamos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\tau} \\ x_{2\tau} \\ x_{3\tau} \\ x_{4\tau} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \phi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,\tau-1} \\ x_{2,\tau-1} \\ x_{3,\tau-1} \\ x_{4,\tau-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1\tau} \\ \varepsilon_{2\tau} \\ \varepsilon_{3\tau} \\ \varepsilon_{4\tau} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_0 X_\tau = \Phi_1 X_{\tau-1} + E_\tau$$

En concreto para un PAR(p) le corresponderá un VAR(P) donde $P = int\left[\left(p+S-1\right)/S\right]$.

Si en la representación VAR(1) del PAR(1):

$$
\begin{aligned}
\Phi_0 X_\tau &= \Phi_1 X_{\tau-1} + E_\tau \\
X_\tau &= \Phi_0^{-1}\Phi_1 X_{\tau-1} + \Phi_0^{-1} E_\tau \\
X_\tau - X_\tau &= \Phi_0^{-1}\Phi_1 X_{\tau-1} - X_\tau + \Phi_0^{-1} E_\tau \\
(1-L)\, X_\tau &= \left[\Phi_0^{-1}\Phi_1 - I\right] X_{\tau-1} + \Phi_0^{-1} E_\tau \\
(1-L)\, X_\tau &= \Pi X_{\tau-1} + \Phi_0^{-1} E_\tau \\
\Pi &= \left[\Phi_0^{-1}\Phi_1 - I\right] \\
\Pi &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \phi_1 \\ 0 & -1 & 0 & \phi_1\phi_2 \\ 0 & 0 & -1 & \phi_1\phi_2\phi_3 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 - 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$