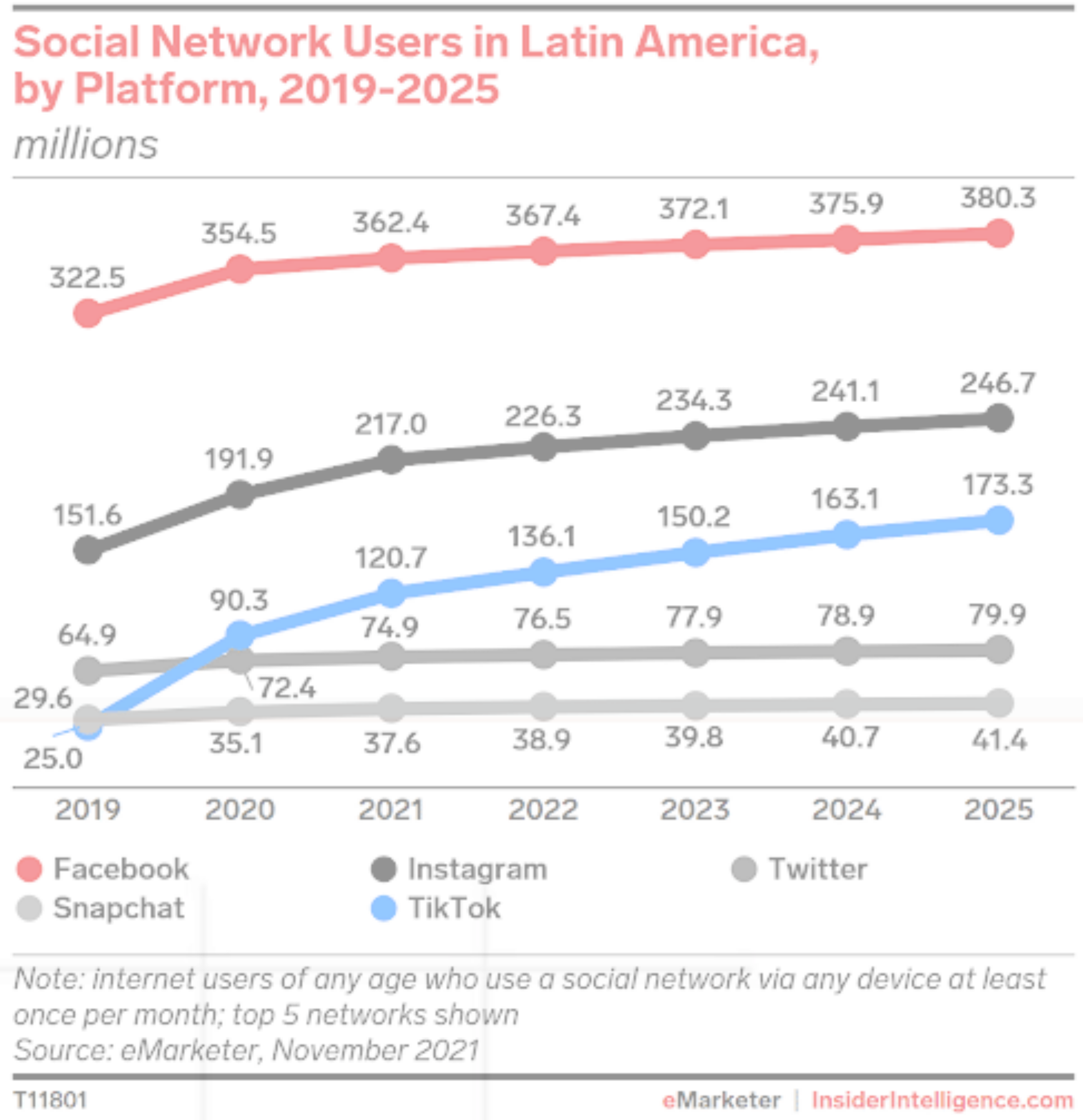
Cálculo

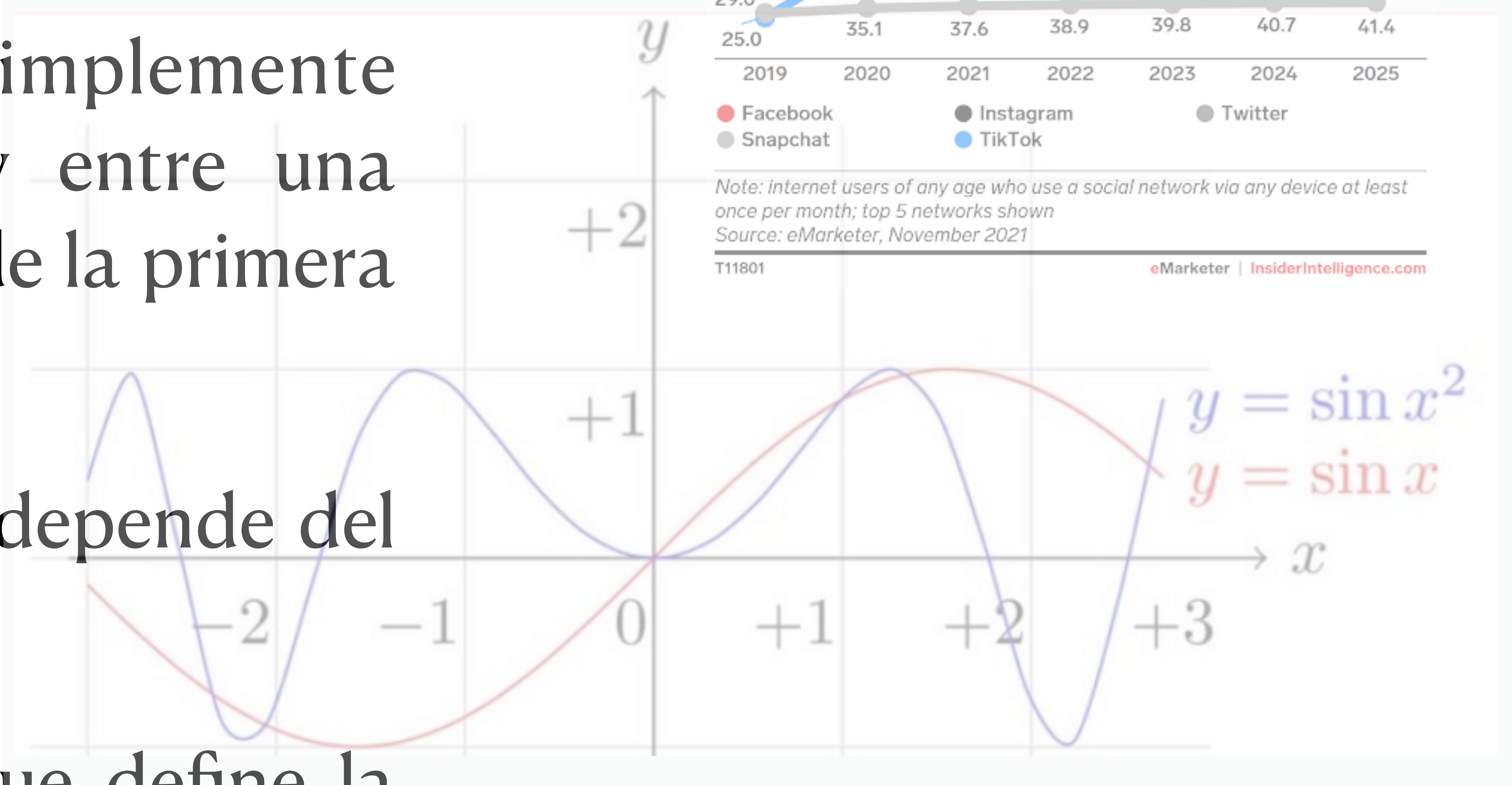
Propedéutico de la Maestría en Ciencia de Datos. CUCEA, Universidad de Guadalajara. 2024B

Guadalajara, Jal. Junio de 2025

Introducción

Función matemática

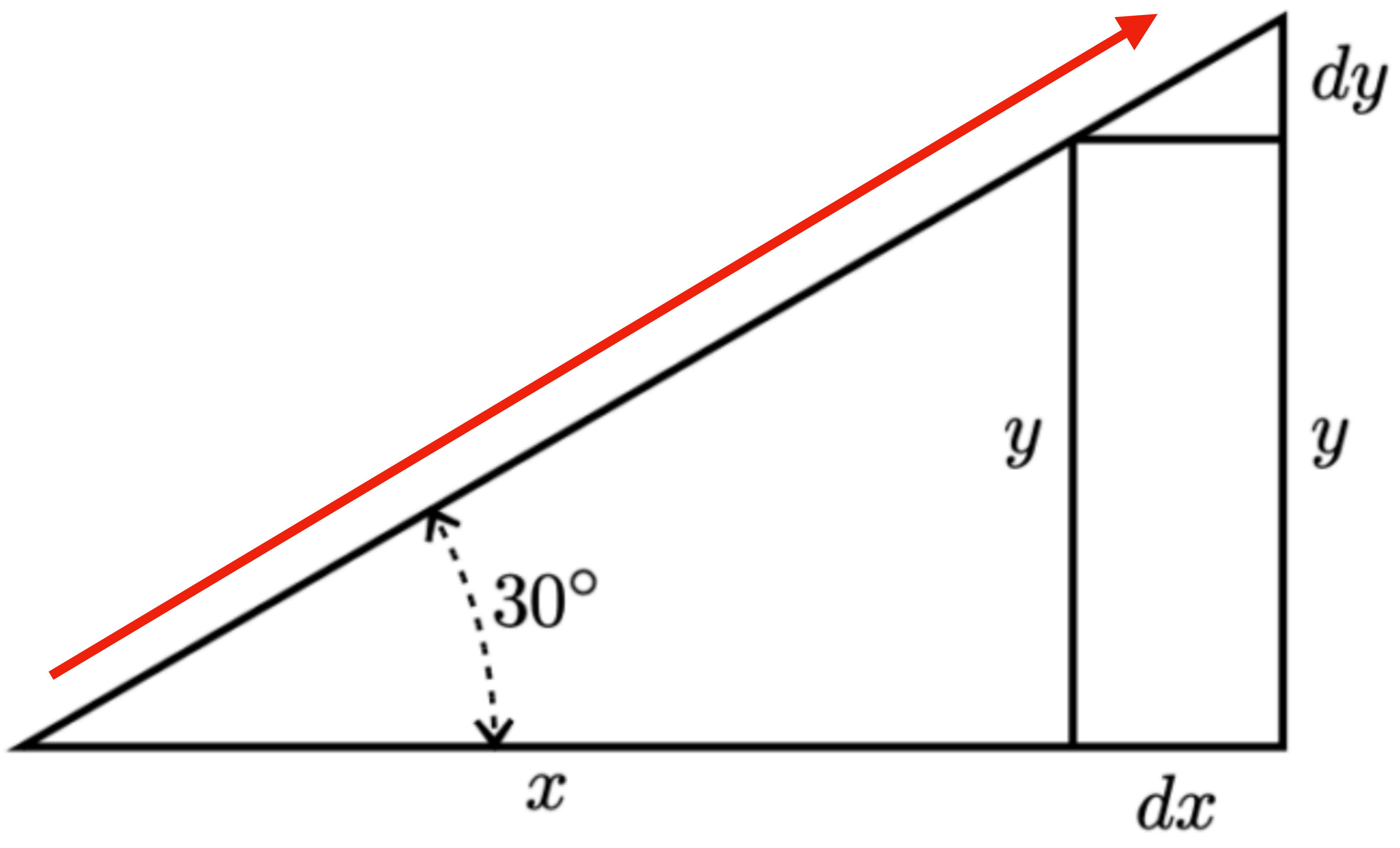




- Una función matemática (o simplemente función) es la relación que hay entre una magnitud y otra, cuando el valor de la primera depende de la segunda.
- **Variable dependiente**. Es la que depende del valor de la otra magnitud.
- **Variable independiente**. Es la que define la variable dependiente.

Cálculo de una sola variable

Concepto de derivada

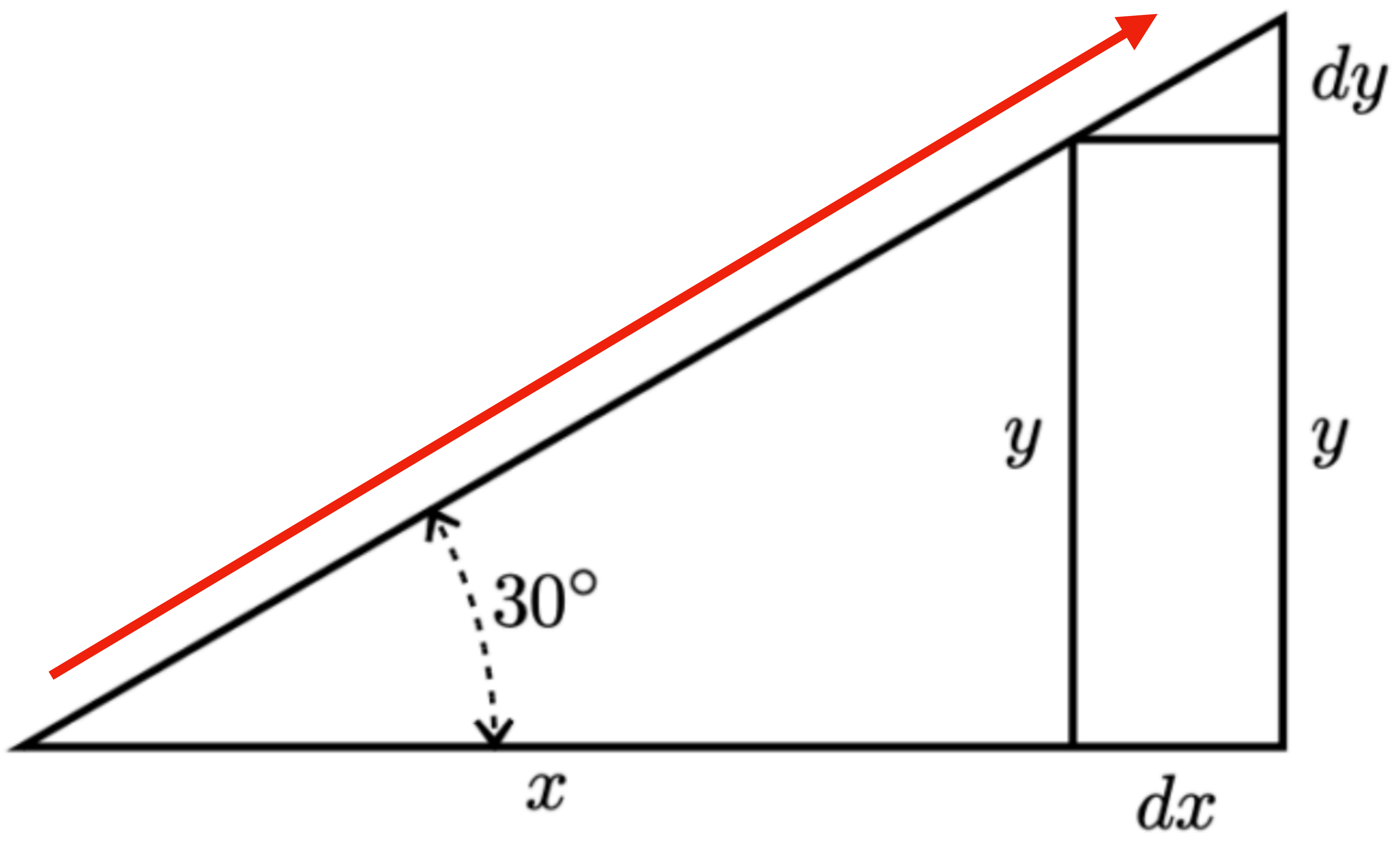


- En resumen, las derivadas describen el cambio que hay entre variables. En sistemas más complejos, usualmente lidiamos con muchas variables que cambian y que dependen una de la otra.

- En un caso geométrico, en el caso de tener sólo una variable dependiente (x), un cambio en una variable lleva a un cambio a la variable dependiente. Geométricamente puede ser visualizada como un triángulo rectángulo, donde un incremento en (la longitud) de uno de sus lados lleva a un incremento (en longitud) de otro de sus lados adyacentes.

Cálculo de una sola variable

Concepto de derivada

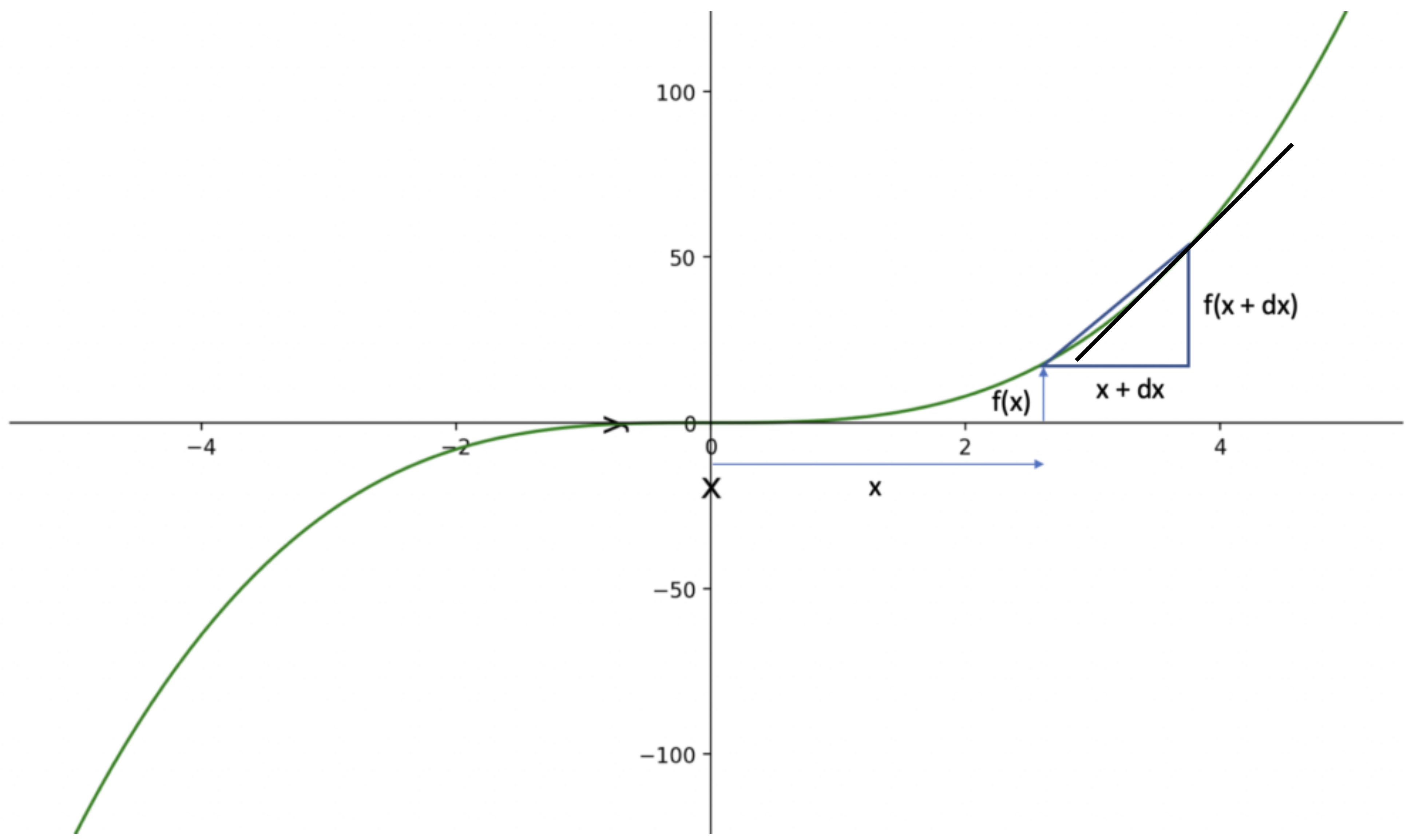


- En este caso, la derivada es expresada como la pendiente de la hipotenusa de este triángulo.
- En términos de cambios en las dos variables, $x + dx$, $y + dy$, tomando un cambio en x, el correspondiente cambio en y estaría representado por:

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

Cálculo de una sola variable

Concepto de derivada

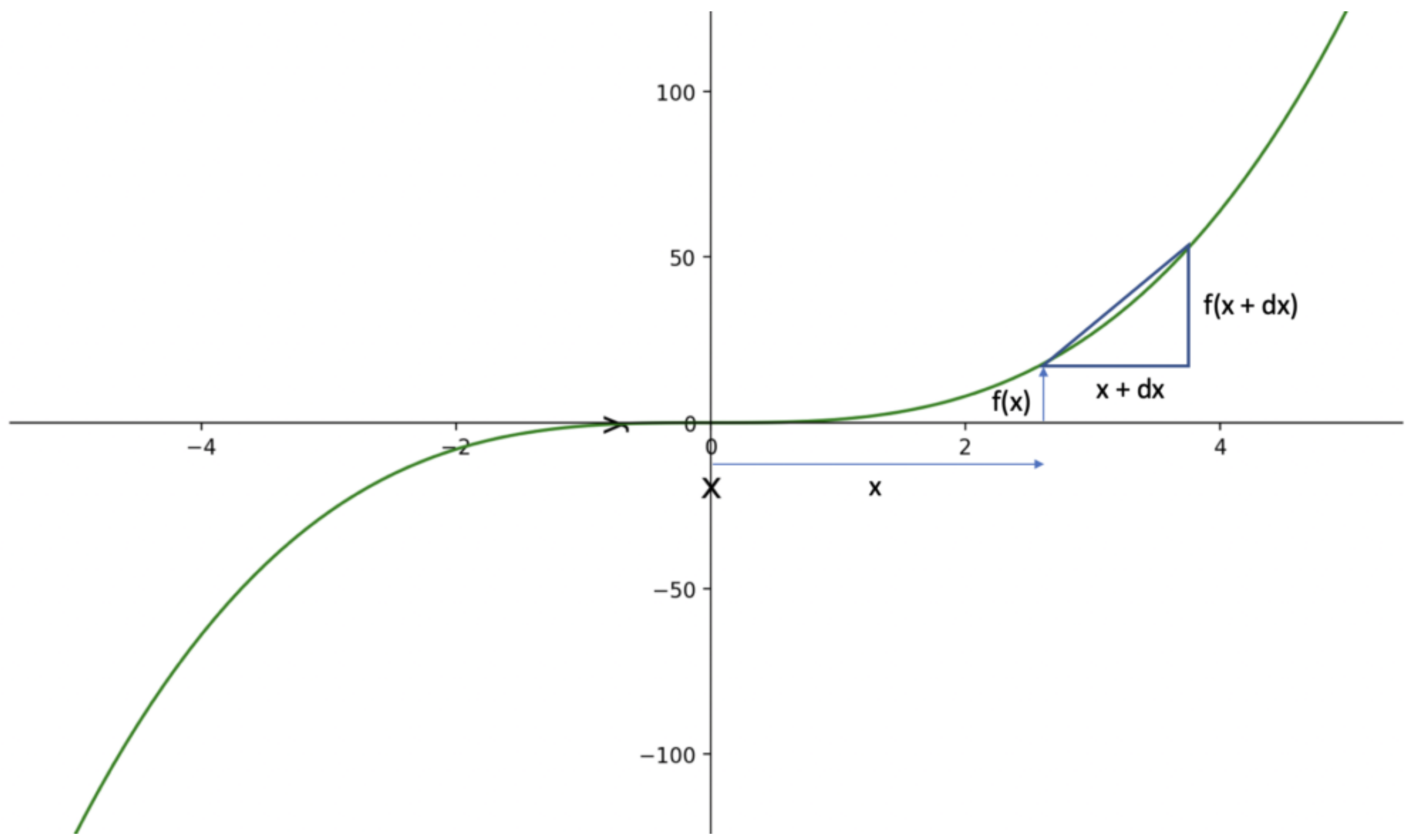


- Para determinar la pendiente de la curva en verde, uno tendría que crear un número **infinito** de triángulos rectángulo **infinitamente pequeños** en cada punto de la curva.
- Esta razón que uno obtiene de cada uno de "estos triángulos" es llamada **diferencial.**

$$\frac{dy}{dx}$$

Cálculo de una sola variable

Concepto de derivada



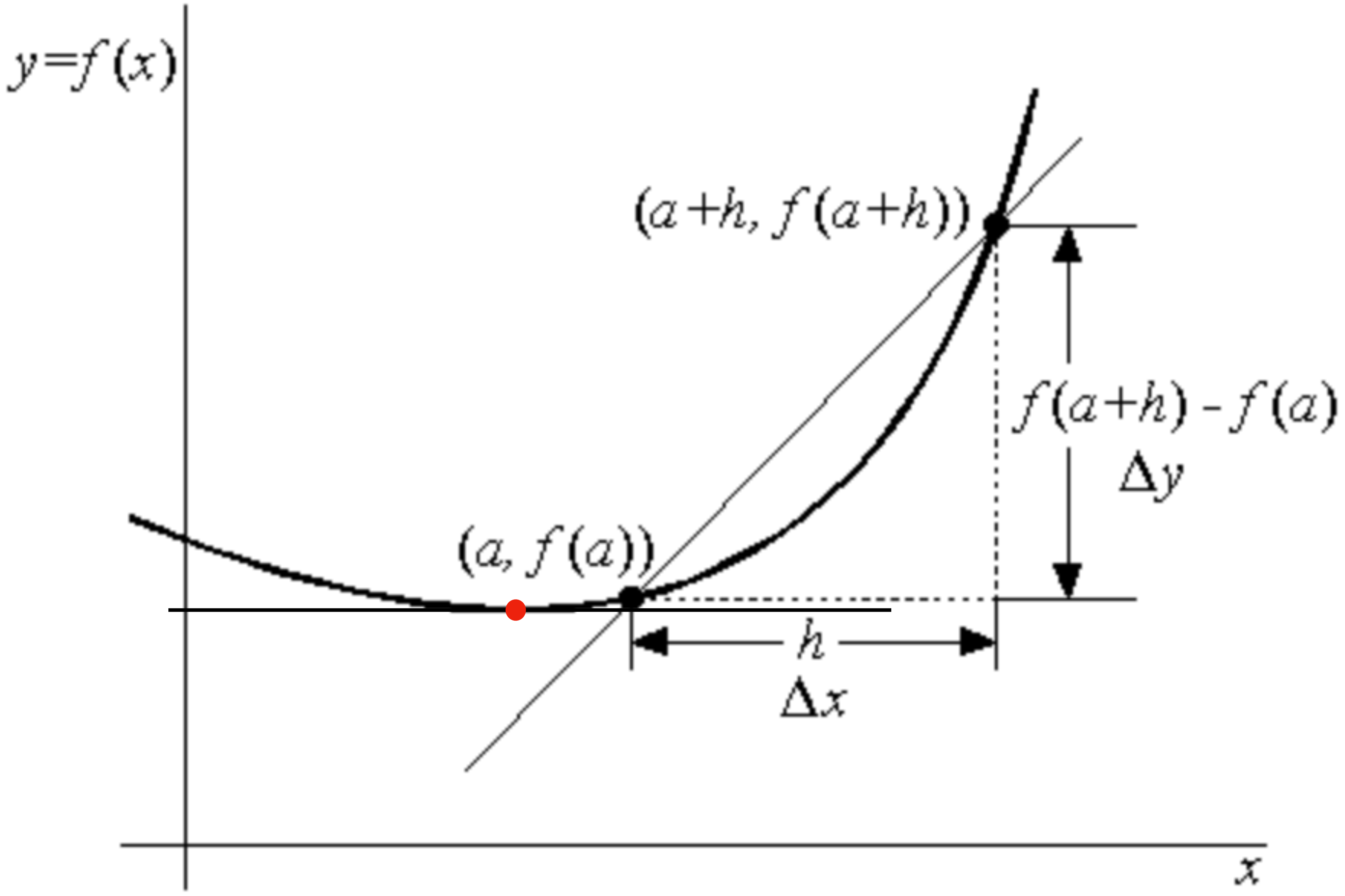
- Uno calcularía la pendiente de cada uno de los triángulos de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{(x+dx) - x} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

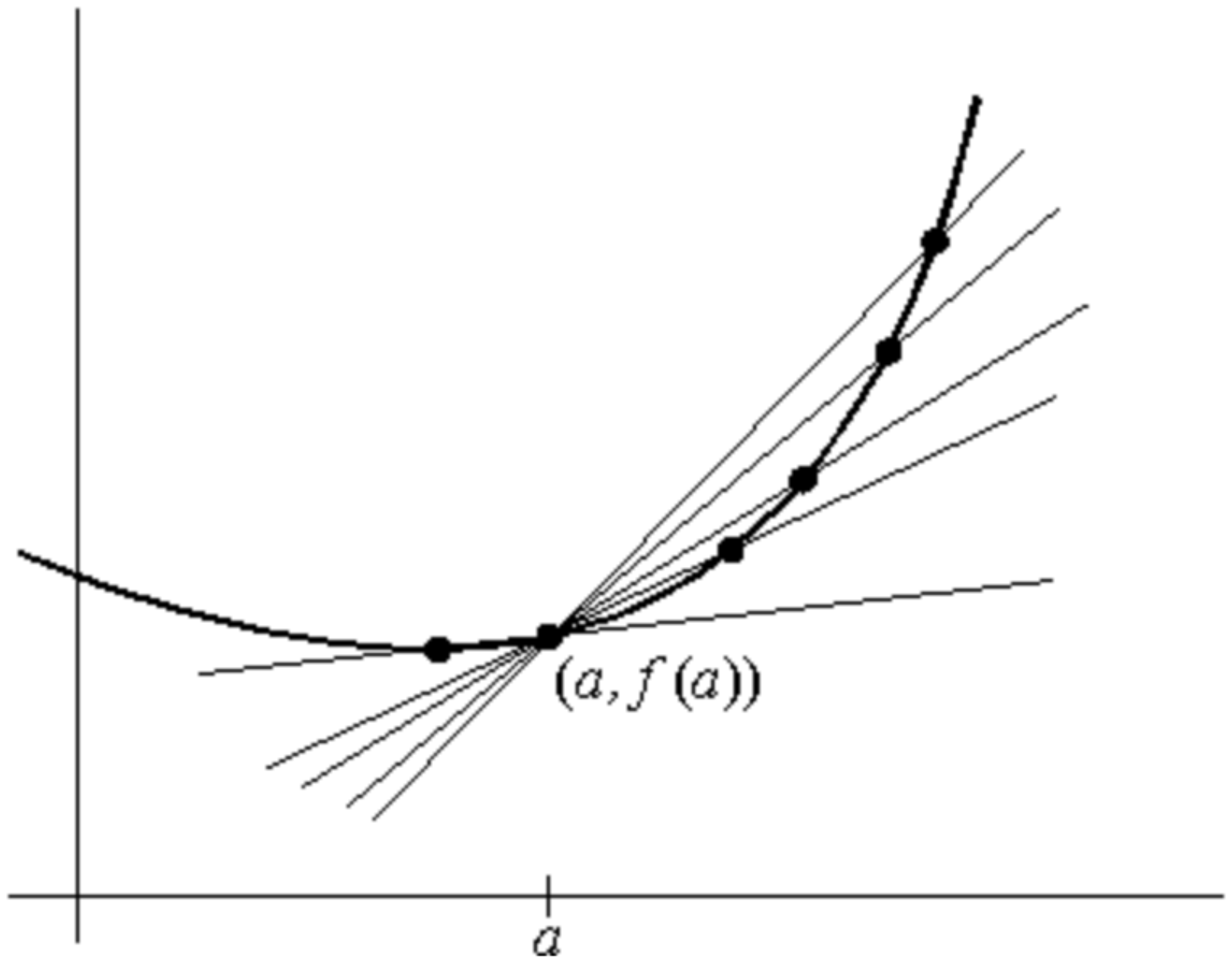
$$f'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{dy}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

$$y = f(x)$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

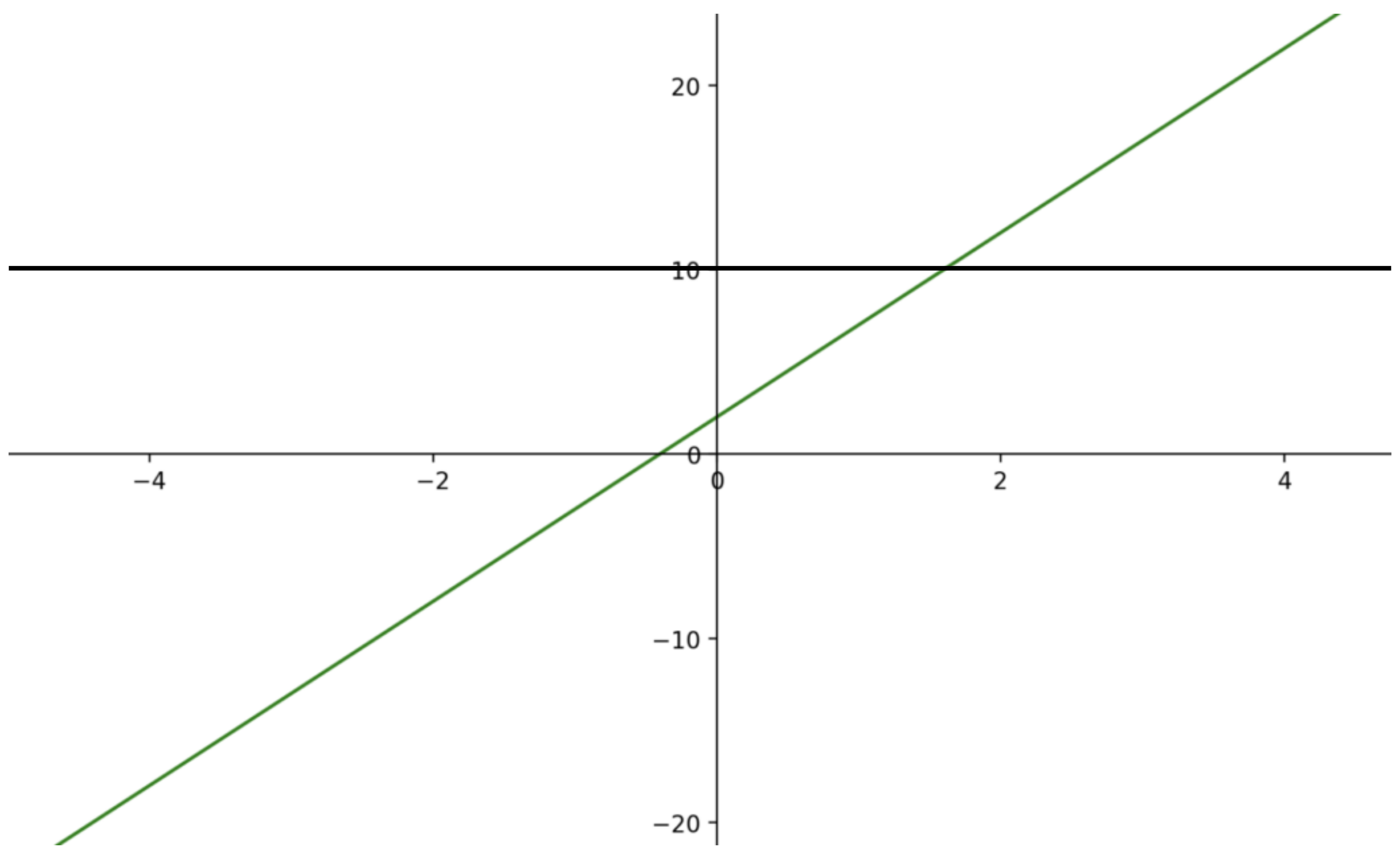


$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



Derivada

Caso simple



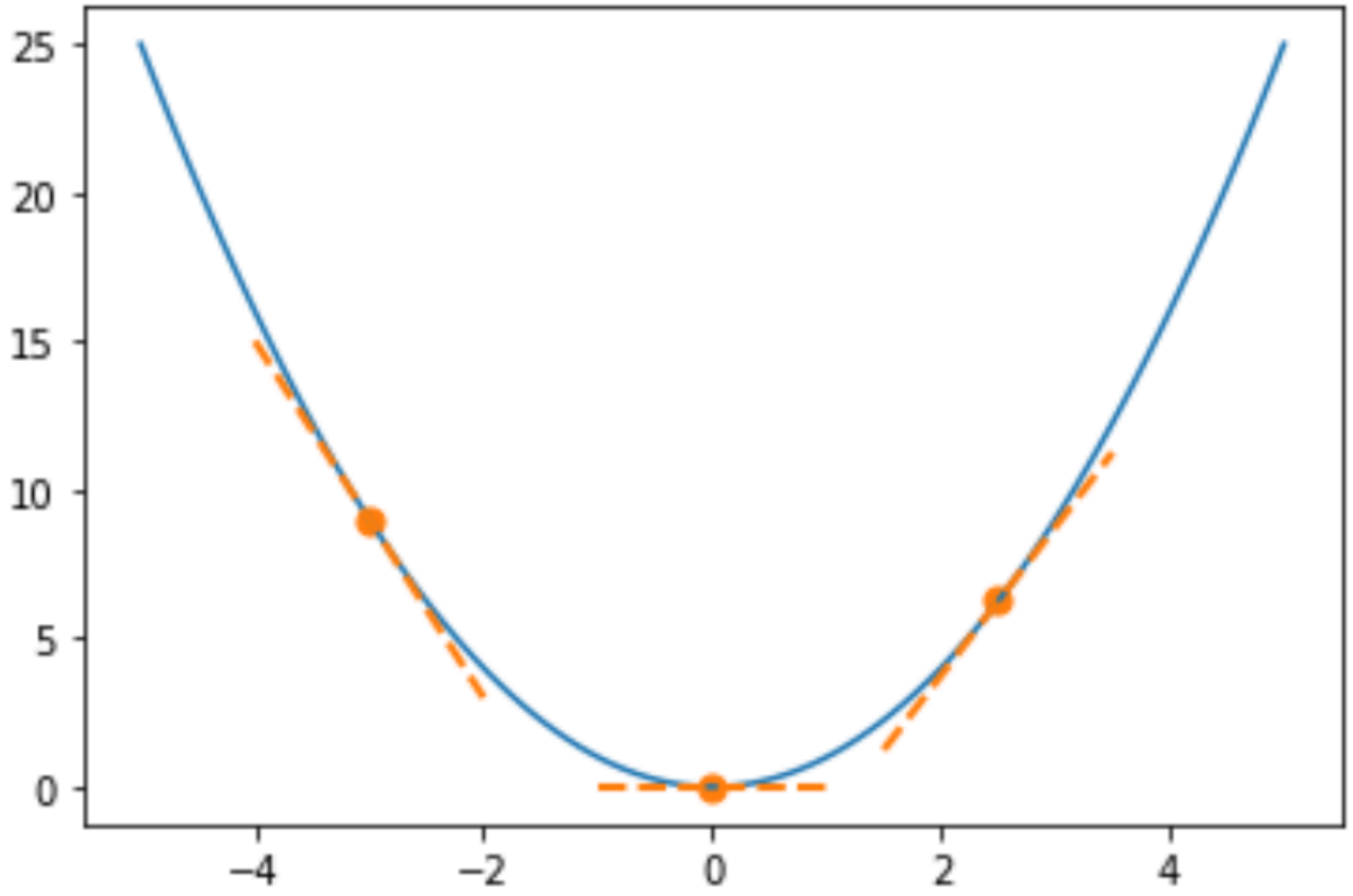
- El caso más simple es cuando lidiamos con una función que es una recta. En este caso la pendiente es constante a lo largo de toda la función.
- **Para una función constante $f(x) = \text{cte}$:**
- $f'(x) = 0$
- **Para una función lineal $f(x) = ax + b$:**
- $f'(x) = a$

Derivada

Regla de potencias

$$f(x) = 2x^3 \qquad a = 3$$

$$f'(x) = 2 * 3x^2 = 6x^2$$



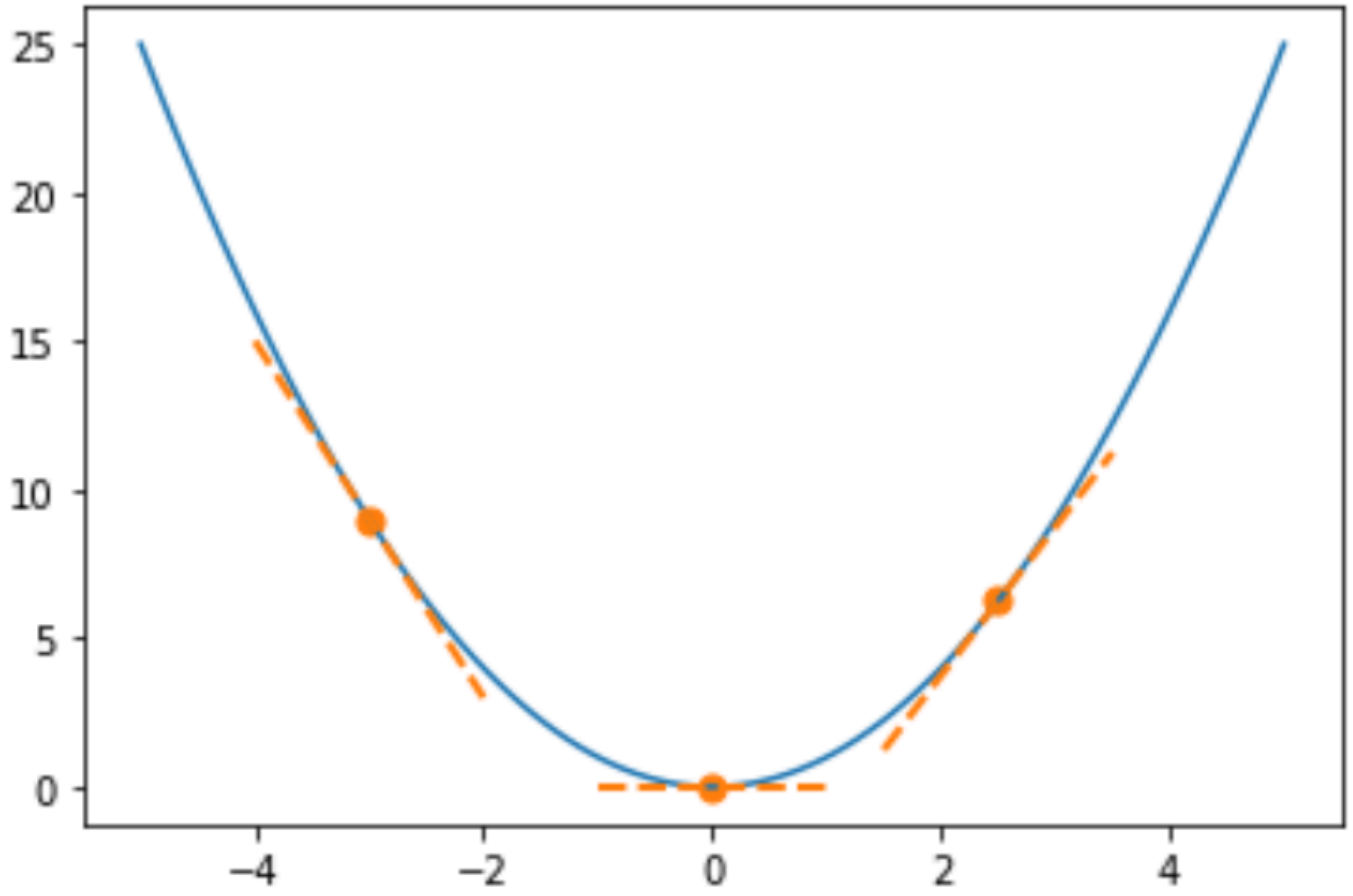
- Una función de orden superior cambie constantemente su pendiente, y sí la función sigue una ley de potencias $f(x) = x^a$ se tiene que:

$$f'(x) = ax^{a-1}$$

- **Ejemplo:** Una parábola $f(x) = x^2; f'(x) = 2x$.

Derivada

Regla de potencias



- Ejemplo
- $f(x) = x^3$,
- Se tiene la forma $f(x) = x^a$, cuya derivada es $f'(x) = ax^{a-1}$, se tiene que $a = 3$.
- $f'(x) = 3x^2$

Derivada

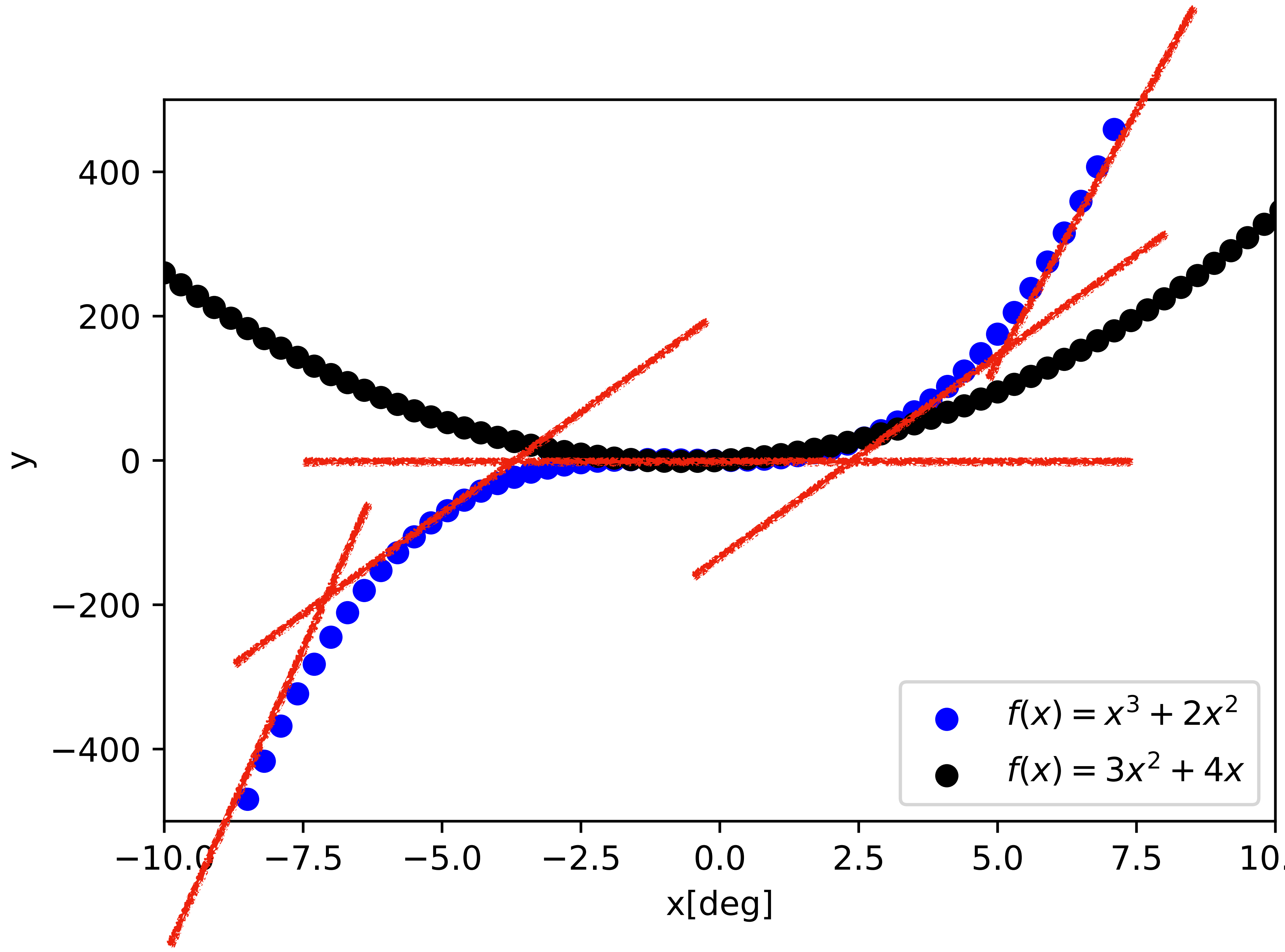
Regla de adición

- La regla de adición dice que al derivar una función con múltiples términos es equivalente a derivar los términos individualmente y sumarlos.

$$f + g = f' + g'$$

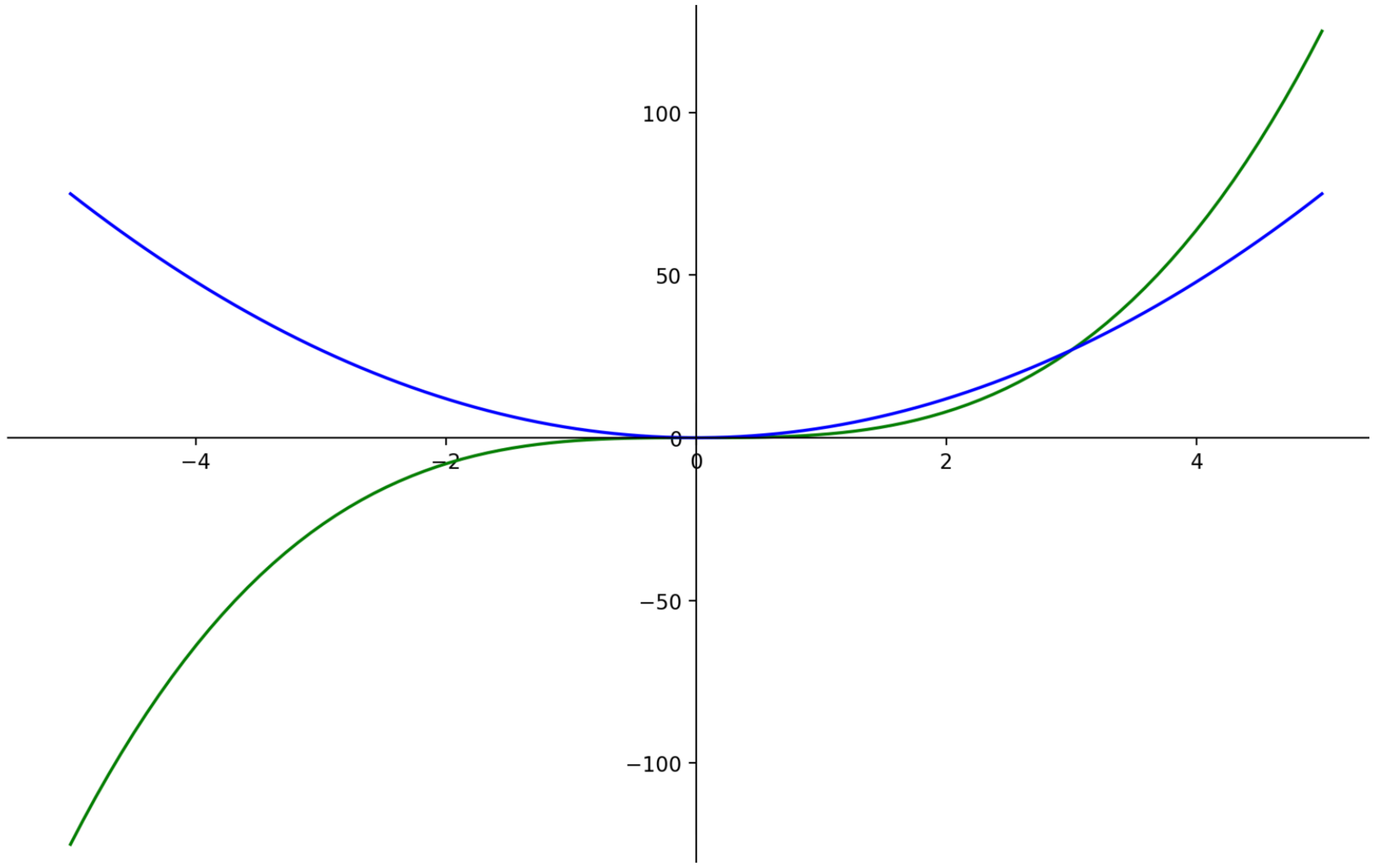
- Ejemplo: $F(x) = f(x) + g(x) = x^3 + 2x^2$

- $F'(x) = f'(x) + g'(x) = 3x^2 + 4x$



1era y 2da derivada

Interpretación

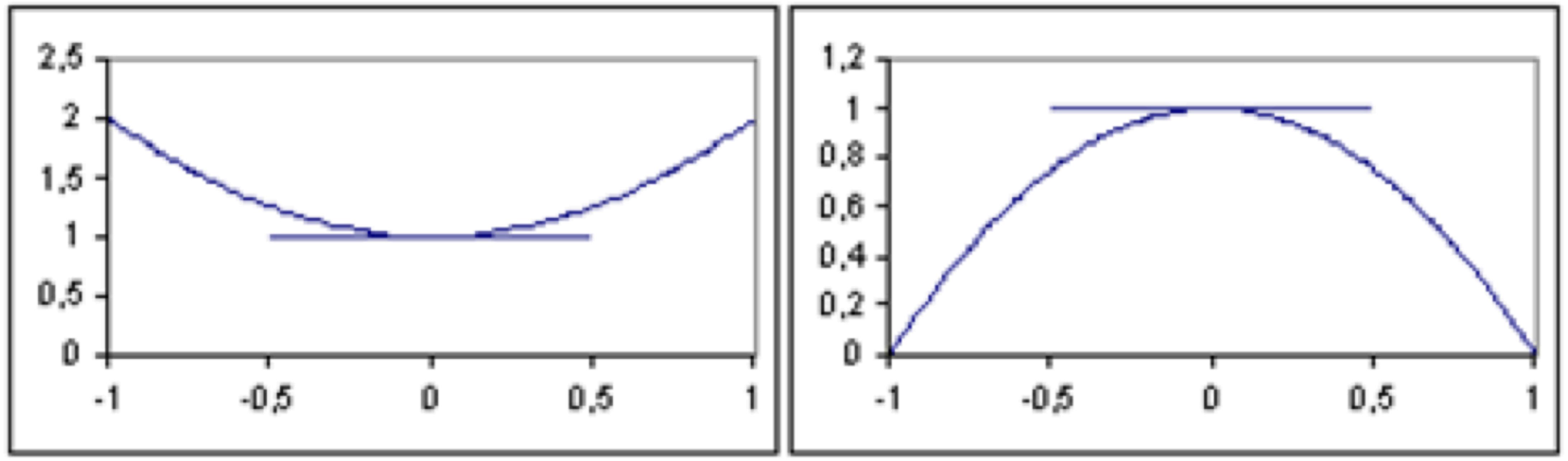


- Ya teníamos que la primer derivada se denota como $f'(x)$ y se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente en el punto x.
- En términos no gráficos, la primer derivada nos dice si una función es creciente (derivada positiva) o decreciente (derivada negativa) en un punto.
- Una pendiente de cero (**llamados puntos estáticos**) por sí sola no nos indica si la función crece o no crece en ese punto. Aquí la función podría ser creciente, decreciente, un máximo (mínimo) local (global).

1era y 2da derivada

Interpretación

$$\frac{dg(z)}{dz}$$



- La segunda derivada de una función es la derivada de la derivada de esta función. Se denota por $f''(x)$ ó $\frac{d^2f}{dx^2}$.
- De la misma forma, la segunda derivada nos indica si **la primer derivada** es creciente o decreciente. En forma gráfica, nos da información sobre la forma de la función original, si es convexa o cóncava.
- En conjunto con la primer derivada en un punto estático, nos indica la presencia de máximos ($f''(x) < 0$) o mínimos ($f''(x) > 0$) locales (globales).

Derivada

Regla de la cadena

- La regla de la cadena nos dice cómo obtener la derivada de una función anidada en y, con respecto a x. Es decir:

$$y = y(u(x))$$

- Esta expresión compuesta contiene dos funciones individuales que dependen de dos variables:

- $y = y(u)$

- $u = u(x)$

Derivada

Regla de la cadena

- La derivada de esta función compuesta se obtiene de la siguiente forma:
- 1) Derivando y con respecto a u
- 2) Derivando u con respecto a x
- 3) Multiplicando las expresiones de los últimos dos puntos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Derivada

Regla del producto

- Suponiendo que y se puede poner de la siguiente forma, como la multiplicación de dos funciones:

- $y = u \times v$

- La derivada correspondiente es:

- $\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

Derivada

Derivadas parciales

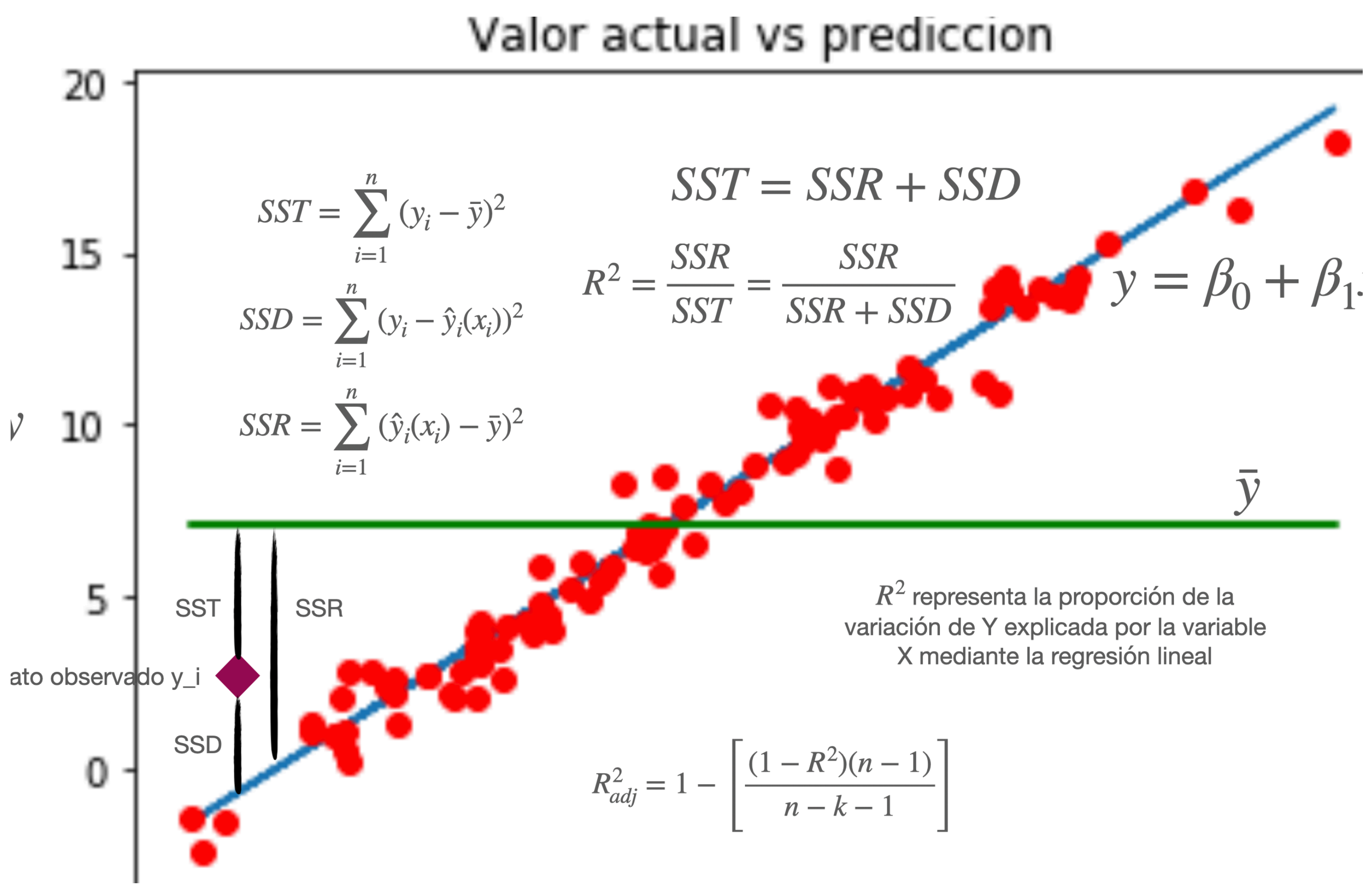
- Si una función depende de más de una variable $f(u, v)$, una derivada parcial nos dice cómo el cambio **de una sola variable** afecta esta función. Por ejemplo, si solamente queremos ver cómo cambia la función al variar u.
- $\dfrac{\partial f}{\partial u}$
- Realizar una derivada parcial se realiza al hacer la derivada con respecto a la variable indicada **y tomando las demás variables como si fueran constantes.**
- **En muchos casos, las variables x, y varían simultaneamente, así que de manera general una derivada total incluye la derivada CON RESPECTO A TODAS LAS VARIABLES DEPENDIENTES.**
- $dy = \dfrac{\partial y}{\partial u}du + \dfrac{\partial y}{\partial v}dv$

Derivative	Integral (Antiderivative)
$\frac{d}{dx}n = 0$	$\int 0\, dx = C$
$\frac{d}{dx}x = 1$	$\int 1\, dx = x + C$
$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{d}{dx}e^x = e^x$	$\int e^x\, dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C$
$\frac{d}{dx}n^x = n^x \ln x$	$\int n^x\, dx = \frac{n^x}{\ln n} + C$
$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$

$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$	$\int \tan x \sec x\, dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$	$\int \cot x \csc x\, dx = -\csc x + C$
$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C$
$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arccos x + C$
$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + C$
$\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\cot x = -\frac{1}{1+x^2}$	$\int -\frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arc}\cot x + C$
$\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\sec x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx = \operatorname{arc}\sec x + C$
$\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\csc x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx = \operatorname{arc}\csc x + C$

Regresión lineal

Técnica de mínimos cuadrados



- ¿Cómo podemos encontrar los parámetros del modelo lineal?
- La diferencia entre el valor real y el estimado (residuales) se puede escribir como:
- $E = (\hat{y}_i - y_i)$, donde $\hat{y}_i$ son los valores predichos por cada x_i, y y_i son los valores históricos (asociados a cada x_i).
- El objetivo es minimizar la suma de errores al cuadrado sobre todos los puntos del data set $X = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$
- $$\min \sum_{i=1}^{n} E^2 = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} ((\beta_0 + \beta_1 x_i) - y_i)^2 = e$$

Optimización

Parámetro β_0

- Queremos ver dónde se encuentra el mínimo de este error. En otras palabras, dónde su derivada (pendiente) es igual a cero. Para eso tenemos que utilizar la primera derivada.

- Primero derivamos con respecto al parámetro β_0

- $\dfrac{\partial}{\partial \beta_0} e = \dfrac{\partial}{\partial \beta_0} \left[\sum_{i=1}^{n} ((\beta_0 + \beta_1 x_i) - y_i)^2 \right] = 0$

Optimización

Parámetro β_0

- La idea es ver esta expresión de una manera más sencilla. Todo lo que está dentro del paréntesis se puede ver como **una función de β_0**, y podríamos llamarla si queremos $u(\beta_0) = \beta_0 + \beta_1 x_i - y_i$.

- **Recordar que en esta derivada parcial, β_0 es la única variable. Qué quiere decir? Que consideramos β_1 como constante, un número.**

- $\frac{\partial}{\partial \beta_0} e = \frac{\partial}{\partial \beta_0} \left[\sum_{i=1}^{n} (u(\beta_0))^2 \right] = \frac{\partial}{\partial \beta_0} \left[\sum_{i=1}^{n} u^2(\beta_0) \right]$ Ya no se ve tan mal.!!!

Optimización

Parámetro β_0

- $\dfrac{\partial}{\partial \beta_0} e = \dfrac{\partial}{\partial \beta_0} \left[\sum_{i=1}^{n} u^2(\beta_0) \right]$. Entonces, tenemos una función anidada en otra!!!
- Tenemos una función $e(u) = \sum_{i=1}^{n} u^2$, $u(\beta_0) = \beta_0 + \beta_1 x_i - y_i$. Por regla de la cadena:
- $\dfrac{\partial e}{\partial \beta_0} = \dfrac{\partial e}{\partial u} \dfrac{\partial u}{\partial \beta_0}$

Optimización

Parámetro β_0

- $\dfrac{\partial e}{\partial \beta_0} = \dfrac{\partial e}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial \beta_0}$
- Hacemos cada una por separado. Cada una de las derivadas únicamente requiere derivadas **de una ley de potencias. !!! Recordar sustituir de vuelta la variable u del comienzo.**
- $\dfrac{\partial e}{\partial u} = \sum_{i=1}^{n} 2u = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)$
- $\dfrac{\partial u}{\partial \beta_0} = 1$

Optimización

Parámetro β_0

- Entonces, sólo nos queda sustituir:
- $$\frac{\partial e}{\partial \beta_0} = \frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \beta_0} = \left[2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)\right][1] = 0$$
- Que podemos reordenar, despejar:
- $$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0 = \sum_{i=1}^{n} y_i - n\beta_0 - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i$$
- $$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i = n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Optimización

Parámetro β_1

- Derivando con respecto al parámetro β_1 es algo muy similar, pero hay un factor x_i adicional por ahí.
- $$\frac{\partial}{\partial \beta_1}(e) = \left[2\sum_{i=1}^{n}\left[-x_i\right](y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)\right] = 0$$
- $$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$
- $$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Optimización

Parámetro óptimos : sistema de ecuaciones

- Entonces tenemos un sistema de dos ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{2}$$

- Y al resolver, uno llega a lo siguiente:

$$\beta_1 = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$

Optimización

Parámetro β_0

- De la ecuación 1, podemos dividir entre n:
- $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
- $\Rightarrow \bar{y} = \beta_0 + \beta_1 \bar{x}$
- $\Rightarrow \beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$

Optimización

Parámetro β_1

- Entonces podemos sustituir esta expresión para β_0 en la ecuación (2).
- $$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (\bar{y} - \beta_1 \bar{x}) \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$
- $$= \bar{y} \sum_{i=1}^{n} x_i - \beta_1 \bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$
- Dividimos entre n,
- $$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \bar{y} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - \beta_1 \bar{x} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$
- $$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \bar{y}\bar{x} - \beta_1 \bar{x}\bar{x} + \beta_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Optimización

Parámetro β_1

- Despejando tenemos que:
- $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y} = \beta_1 \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 \right)$$
- $$\Rightarrow Cov(x, y) = \beta_1 \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 \right)$$

Optimización

Parámetro β_1

- Por otro lado, tenemos que la varianza puede expresarse de otra forma:
- $$Var(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{x} + \sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2\right)$$
- $$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\bar{x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i + \frac{1}{n}n\bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}^2$$
- $$Var(x) = \sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}^2$$

Optimización

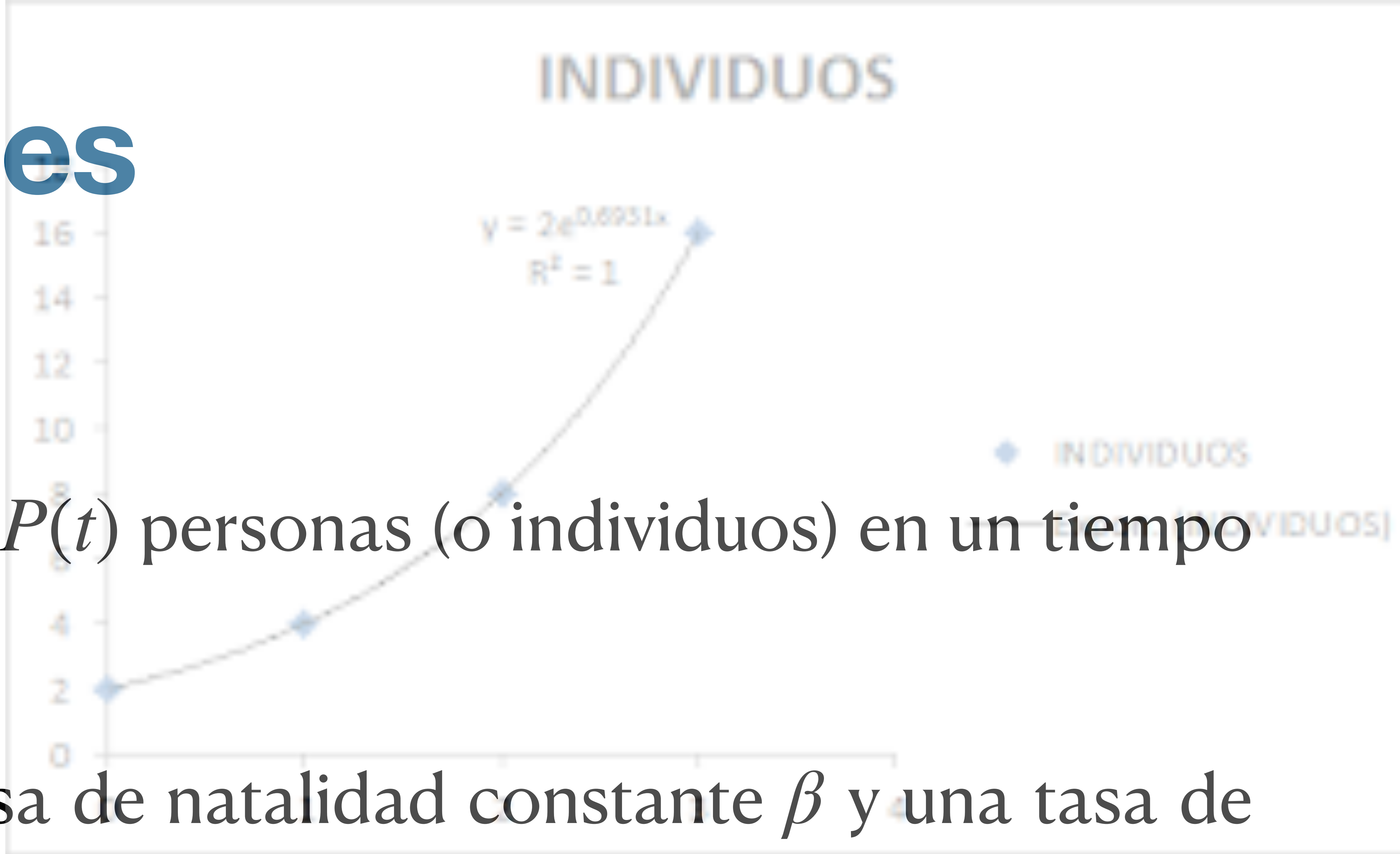
Parámetro β_1

- $Cov(x, y) = \sigma_{xy} = \beta_1 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 \right) = \beta_1 \sigma_x^2$
- $\beta_1 = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$

Ecuaciones diferenciales

Ecuaciones diferenciales

Ejemplo



- Considérese una población que aumenta $P(t)$ personas (o individuos) en un tiempo t.

- Suponer que esta población tiene una tasa de natalidad constante β y una tasa de mortalidad σ. Es decir, que durante un período ocurrirán βP nacimientos y σP muertes.

- Para valores muy pequeños de tiempo dt, el valor de $P(t)$ cambiará tan poquito que se podría considerar "casi contante", es decir, el número de nacimientos se aproximará $\beta P(t)dt$ y el número de fallecimientos por $\sigma P(t)dt$.

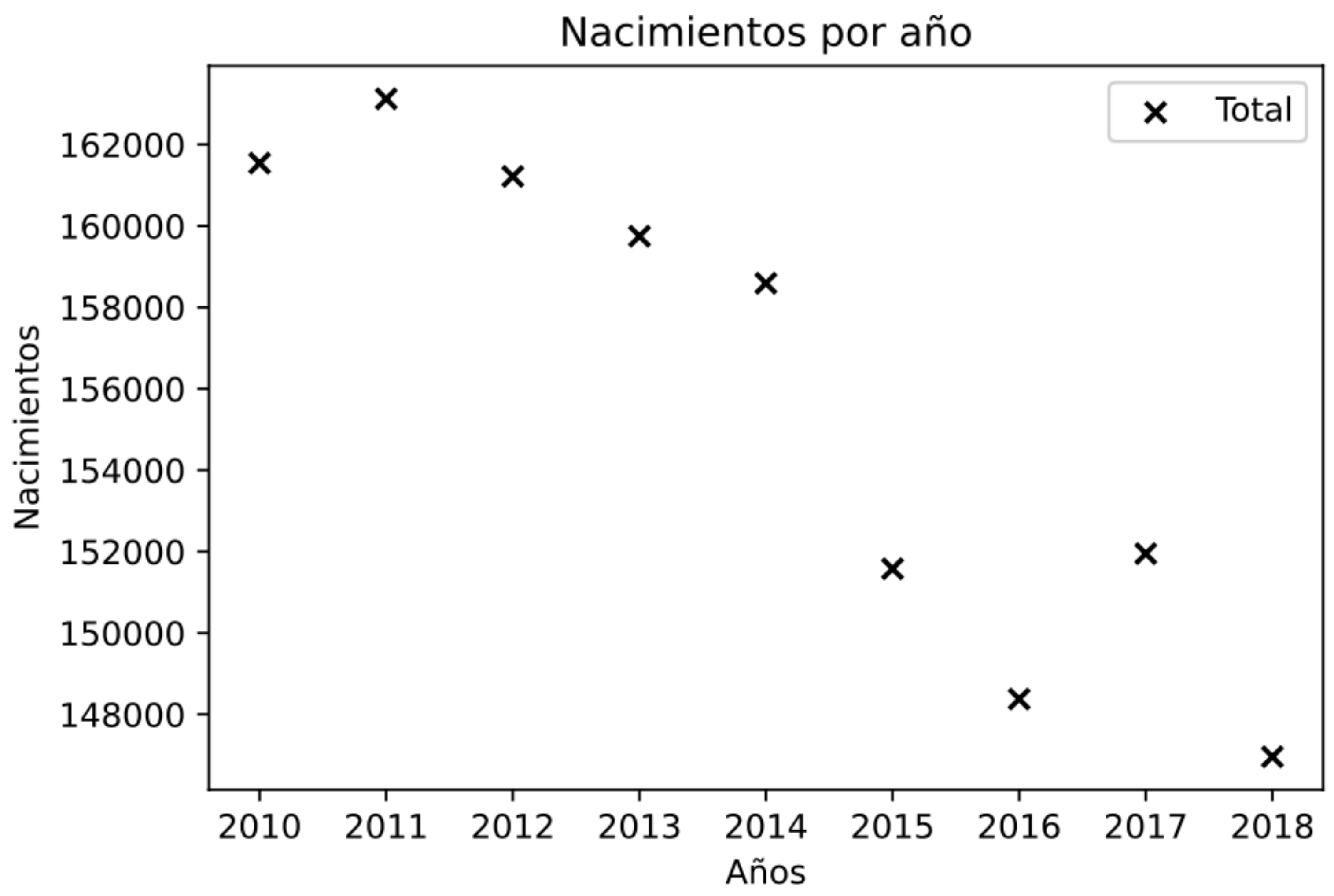
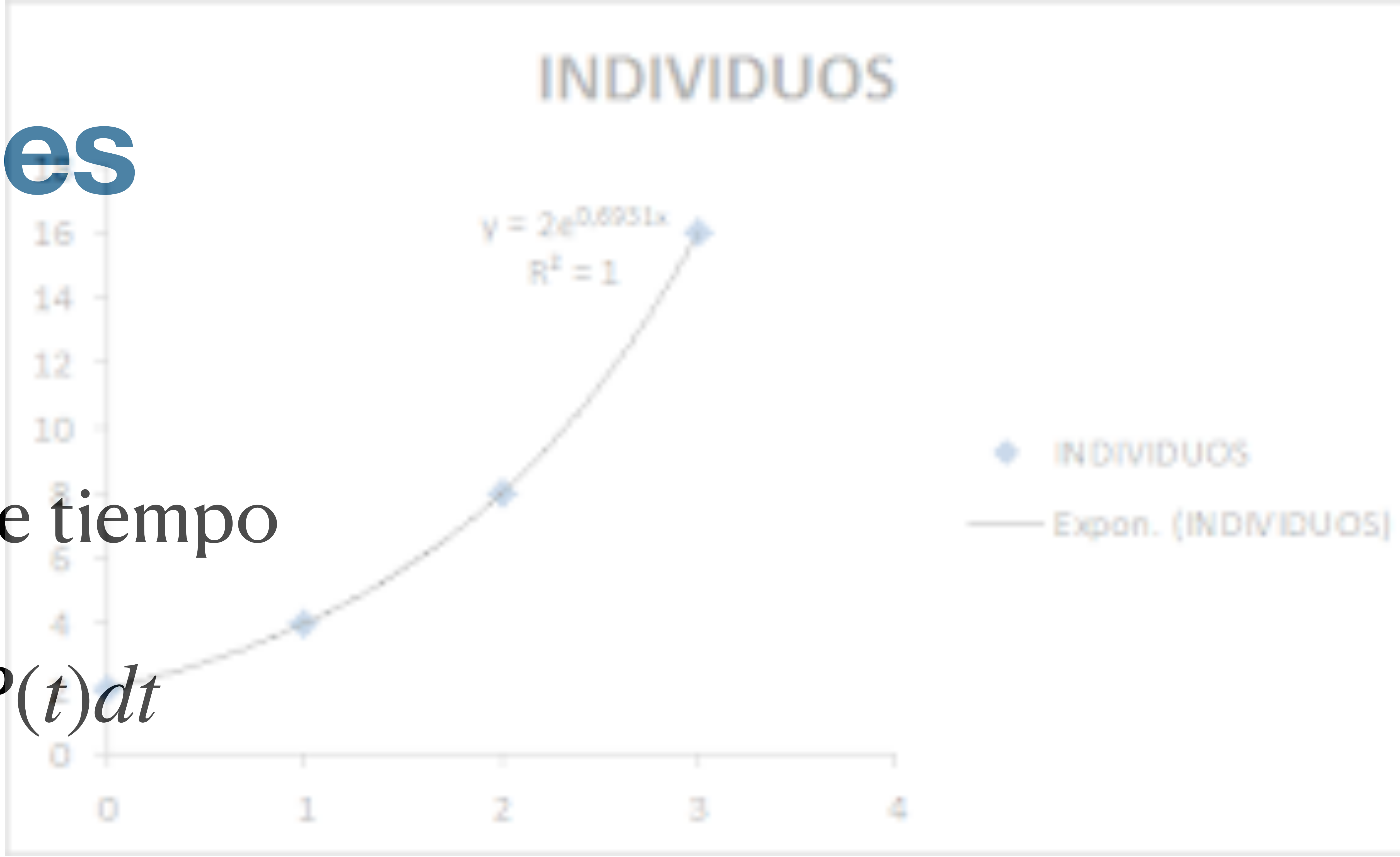


Figura 2:

$$\text{Poblacion} = -\beta_1 \ \text{year} + \beta_0$$

Ecuaciones diferenciales

Ejemplo



- Entonces en un cambio infinitesimal de tiempo
- $dP = P(t + dt) - P(t) \approx \beta P(t)dt - \sigma P(t)dt$
- O puesto de otra forma,
- $\dfrac{dP}{dt} = P'(t) \approx (\beta - \sigma)P(t)$
- $P'(t) = kP(t)$

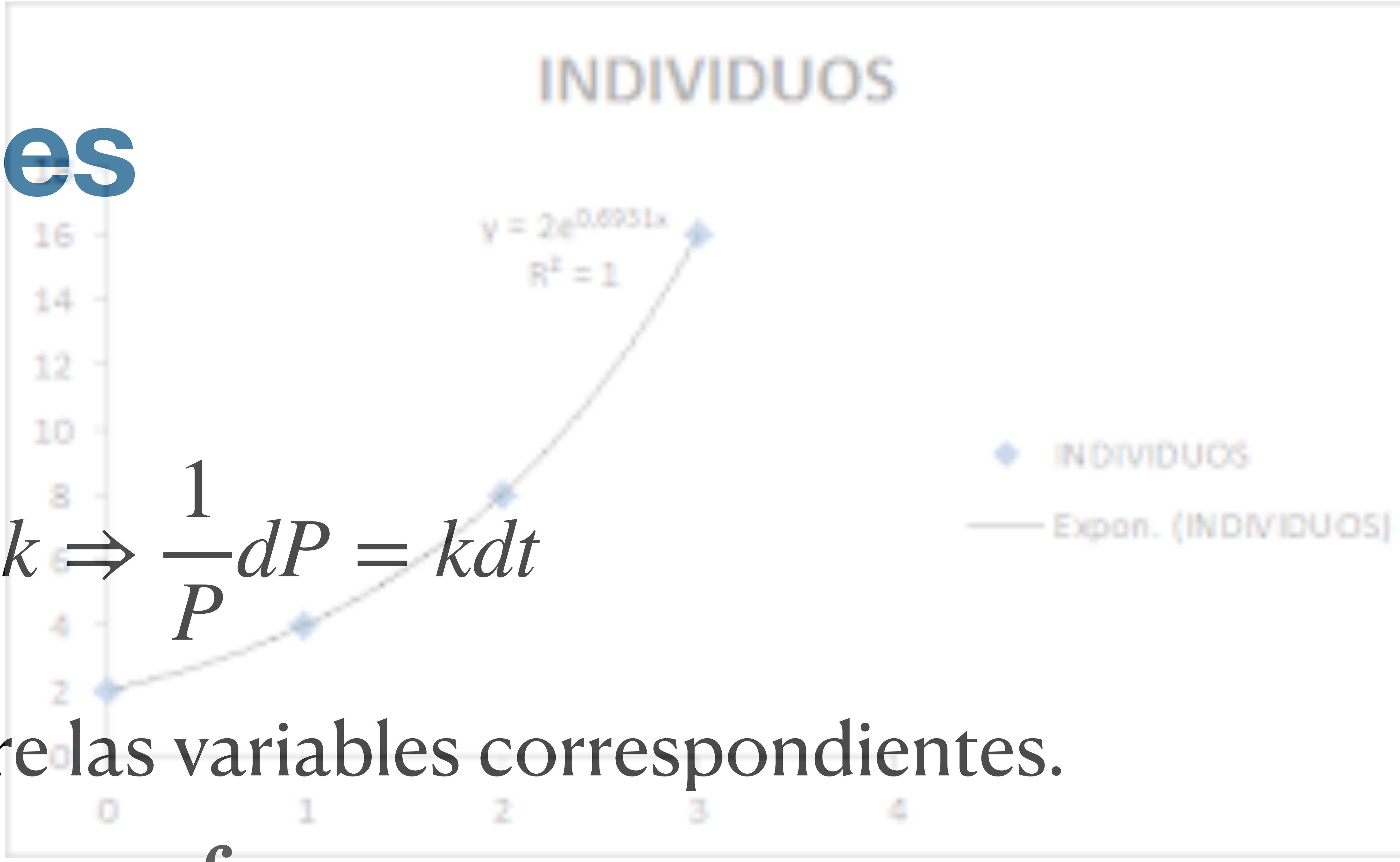
Ecuación diferencial

Definición

- Una **ecuación diferencial** es aquella en la que aparece una función desconocida y una o más de sus derivadas. Si la función depende sólo de una variable independiente entonces la ecuación recibe el nombre de **ecuación diferencial ordinaria** (E. D. O.).
- $F(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dt^n}) = F(t, y, y', \cdots, y^n) = 0$
- Cuando la función desconocida depende de dos o más variables, entonces las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial serán derivadas parciales, y en este caso diremos que se trata de una **ecuación en derivadas parciales.**

Ecuaciones diferenciales

Ejemplo



- Despejando en $\dfrac{dP}{dt} = kP \Rightarrow \dfrac{1}{P}\dfrac{dP}{dt} = k \Rightarrow \dfrac{1}{P}dP = kdt$
- Podemos realizar una integración sobre las variables correspondientes.
- $\displaystyle\int \frac{1}{P}dP = \int kdt$

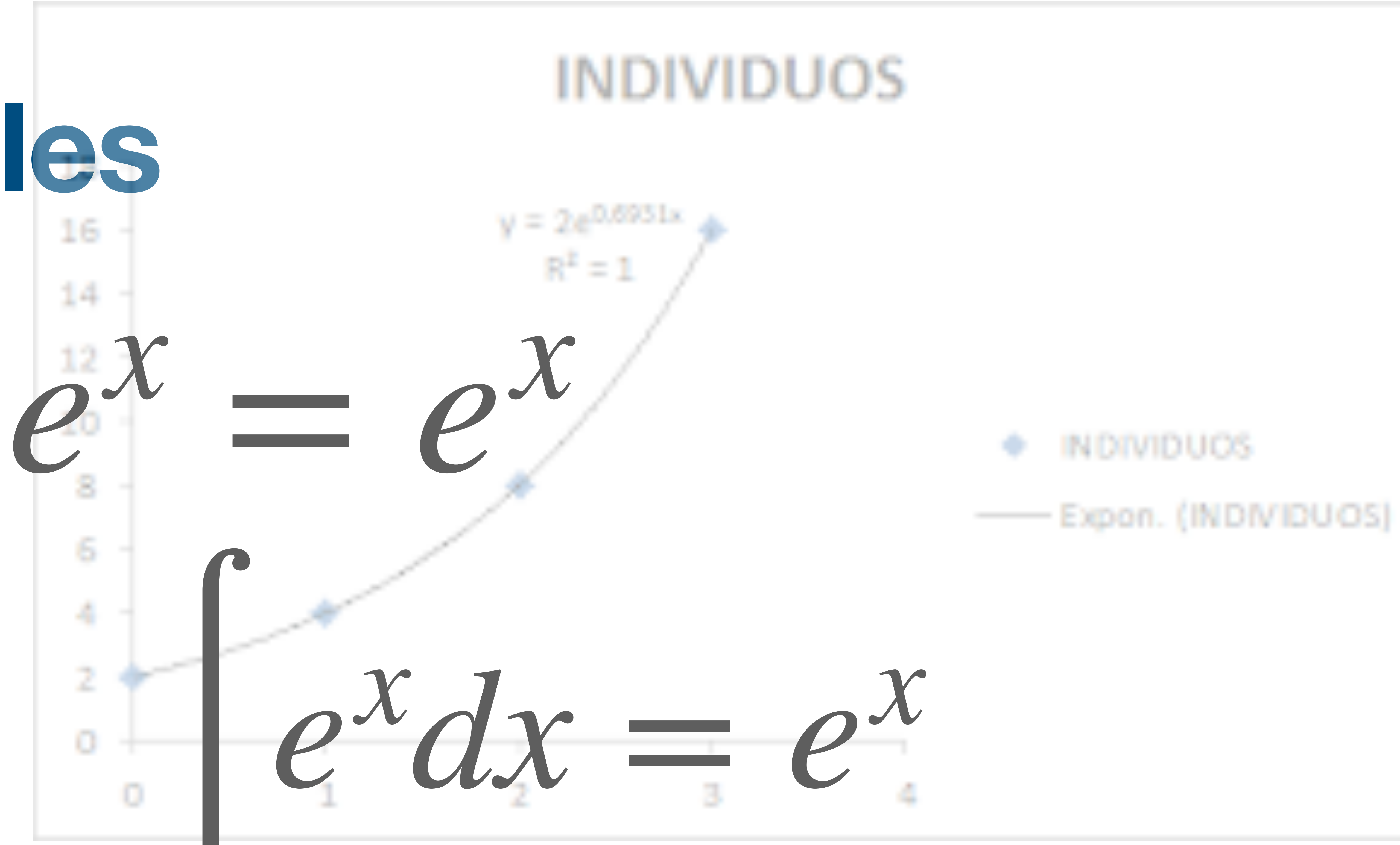
$$\ln(P) + J = k\int dt = kt + C$$

$$\exp(\ln P) = \exp(C + kt) = e^{C}e^{kt} = C'e^{kt}$$

$$P = e^{kt} \Rightarrow P(t) = P(0)e^{kt}$$

Ecuaciones diferenciales

Ejemplo



$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

- Entonces,
- $\ln P = kt + C$
- Resolviendo para P,
- $P = e^{kt+C} = e^{kt} \cdot e^{C}$
- Donde $e^{C} = A$ es simplemente una constante,
- $P(t) = Ae^{kt}, \;\; P(t = 0) = Ae^{0k} = A$
- A puede interpretarse como el valor de la población a un tiempo $t = 0$.
- Esto suele llamarse "crecimiento exponencial"

$$\frac{dx}{dt} = 3e^{-t} \Rightarrow dx = 3e^{-t}dt \Rightarrow x = \int dx = 3\int e^{-t}dt = -3e^{-t}$$

$$\int e^{-t}dt = -\int e^{u}du = -e^{u} = -e^{-t}$$

Hacemos la sustitución $u = -t \Rightarrow -du = dt$

Ecuaciones diferenciales

Orden de una ecuación

- El **orden de una ecuación diferencial** es el que corresponde a la derivad de mayor orden que aparece en la ecuación.

- Por ejemplo, $y' = ay - by^2$ sería una ecuación diferencial de primer orden.

- Por ejemplo, $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$

Ecuaciones diferenciales

Ejemplos

- $y' + t^2 y = te^t$
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
- $y'' + y \sin t = 0$
- $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$
- $\dfrac{d^2 y}{dt^2} + t \sin y = 0$
- $\dfrac{d^2 \rho}{d\theta^2} = \sqrt[4]{\rho + \left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2}$

Ecuaciones diferenciales

Ejemplos

- Ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden.
- Ecuación en derivadas parciales de segundo orden.
- Ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden.
- Ecuación diferencial en derivadas parciales de cuarto orden.
- Ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden.
- Ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden.

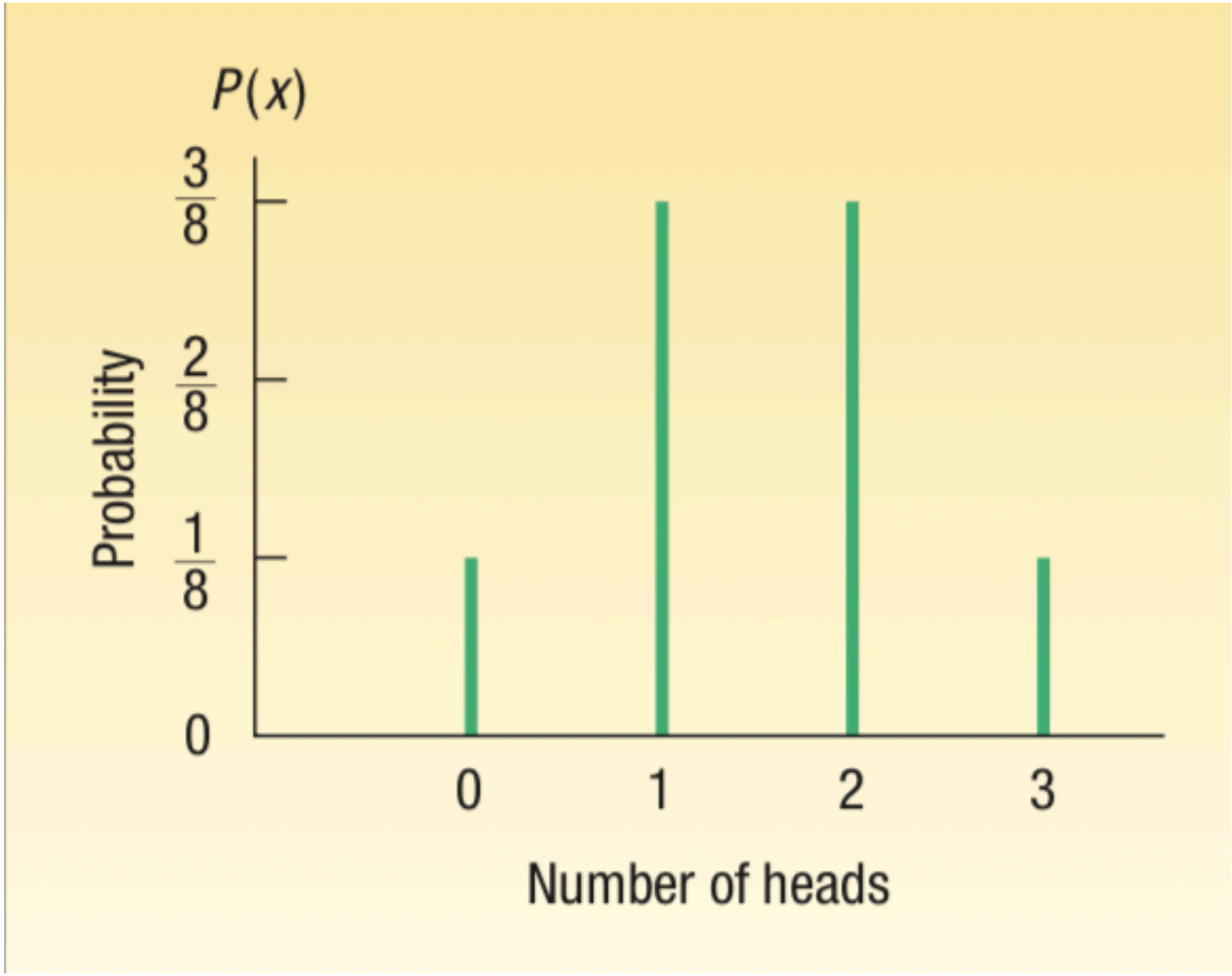
Ecuaciones diferenciales

Soluciones

- Observar la ecuación $\left(y'(t)\right)^2 + 1 = 0$.
- ¿Qué tipo de soluciones tiene?
- $t + yy' = 0$ podría tener una solución $t^2 + y^2 - 4 = 0$.
- Una ecuación diferencial tiene generalmente un número infinito de soluciones que recibe el nombre de solución general. Algunas ecuaciones tienen soluciones que no pueden obtenerse de la solución general y en este caso reciben el nombre de soluciones singulares.

Cálculo integral

Distribuciones de probabilidad



Number of Heads, x	Probability of Outcome, $P(x)$
0	$\frac{1}{8} = .125$
1	$\frac{3}{8} = .375$
2	$\frac{3}{8} = .375$
3	$\frac{1}{8} = .125$
Total	$\frac{8}{8} = 1.000$

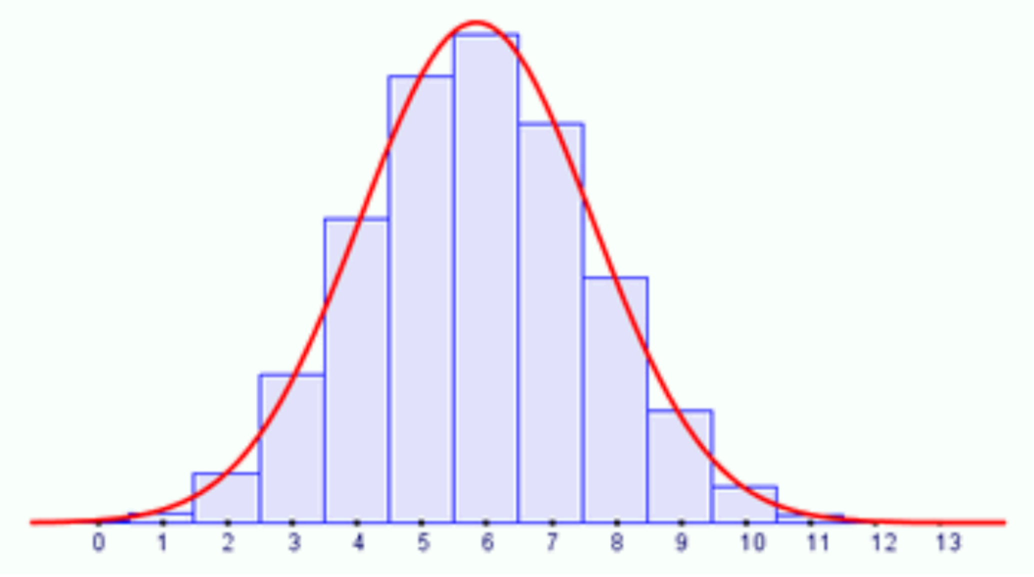
Possible Result	Coin Toss			Number of Heads
	First	Second	Third	
1	T	T	T	0
2	T	T	H	1
3	T	H	T	1
4	T	H	H	2
5	H	T	T	1
6	H	T	H	2
7	H	H	T	2
8	H	H	H	3

Distribuciones de probabilidad

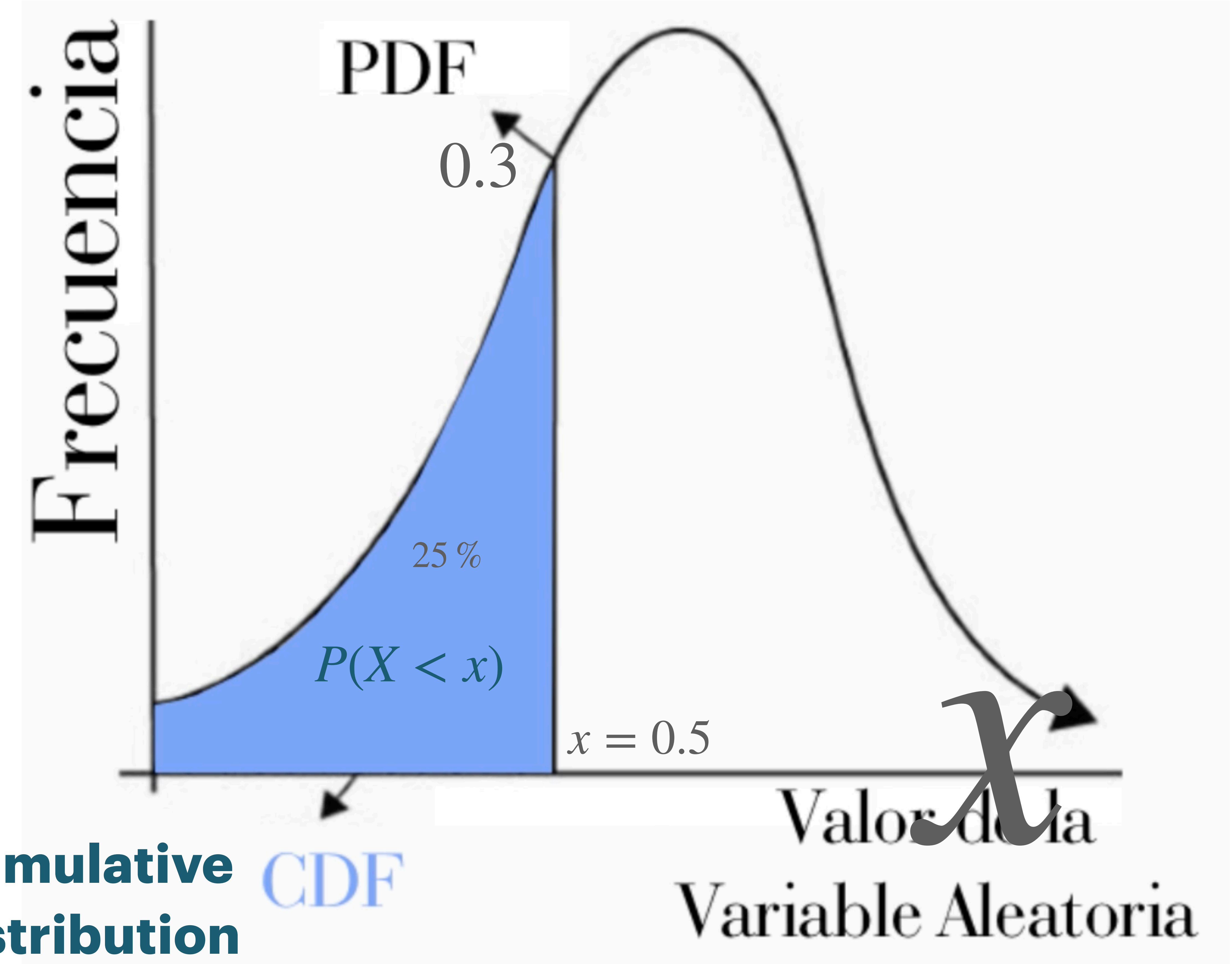
Discretas y continuas

$$1 = \sum P(x_i)$$

$$1 = \int P(x_i)dx$$



Probability distribution function



Cumulative distribution function

x

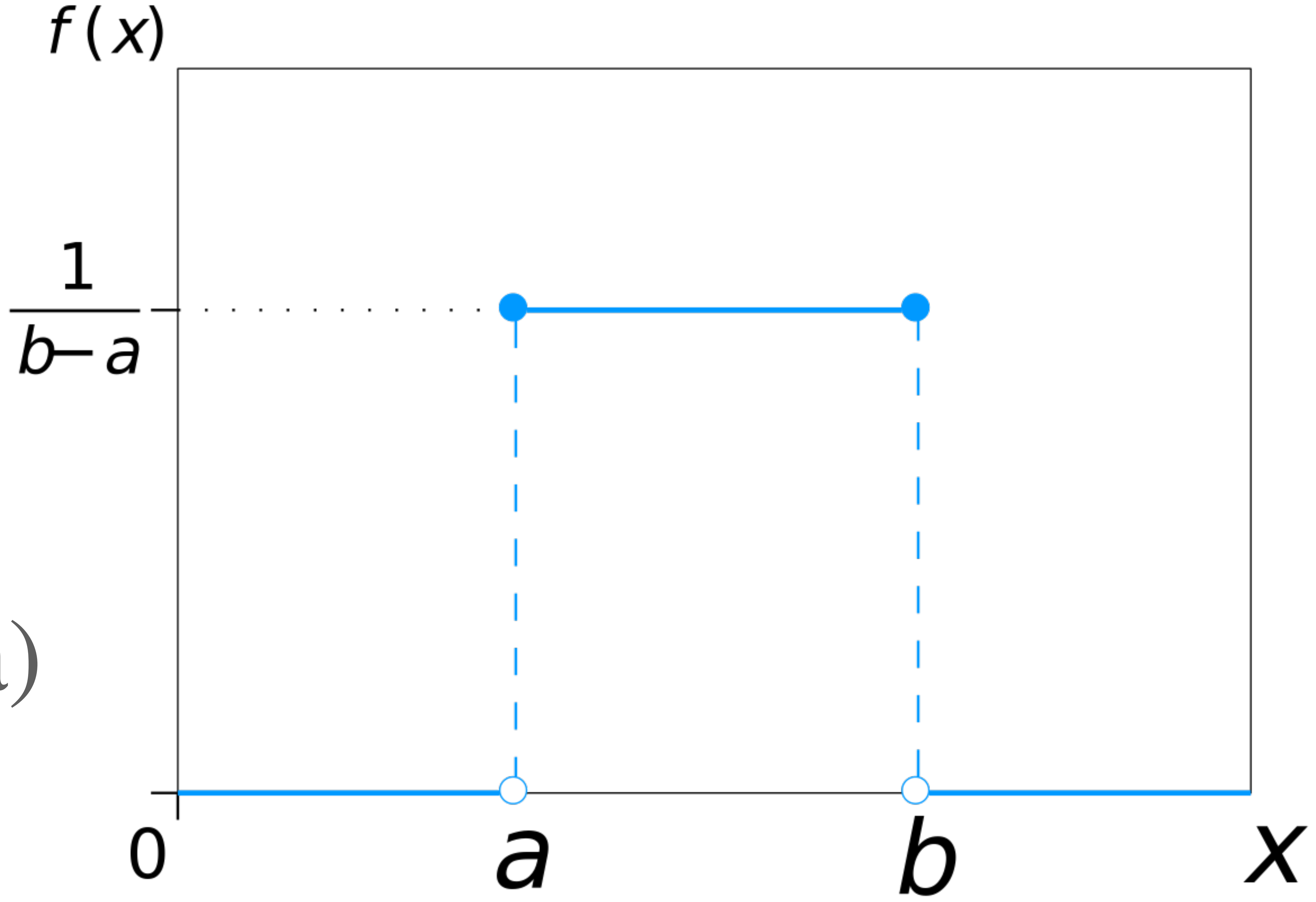
Probabilidad en una distribución continua

Distribución uniforme

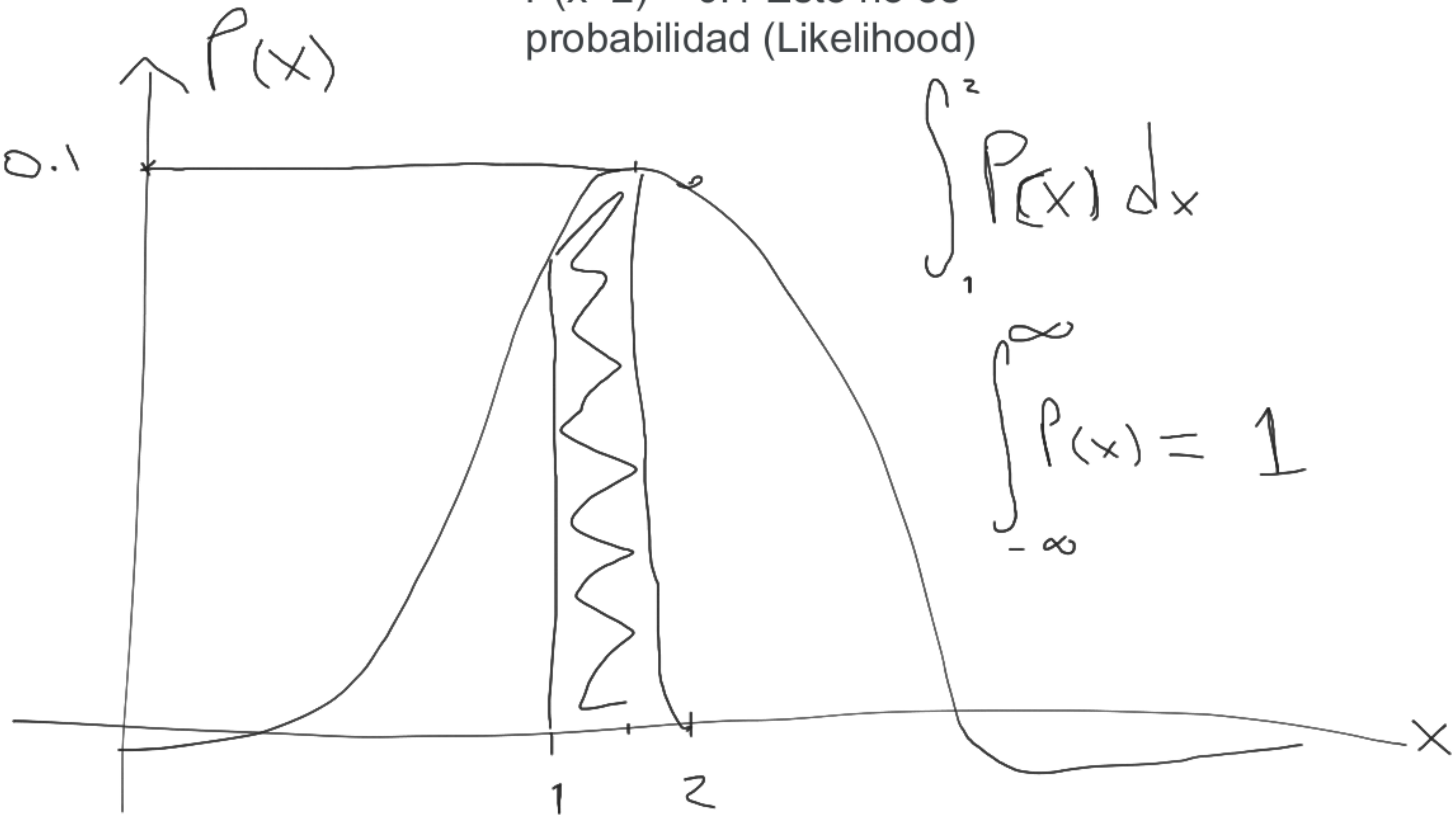
- Se definen extremos a y b que indica que los valores comprendidos entre a y b tienen la misma probabilidad de ocurrir.

- La altura $f(x)$ va de acuerdo a normalizar el área bajo la curva.

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } (-\infty, a) \\ 1 \text{ si } [a, b] \\ 0 \text{ si } (b, \infty) \end{cases}$$

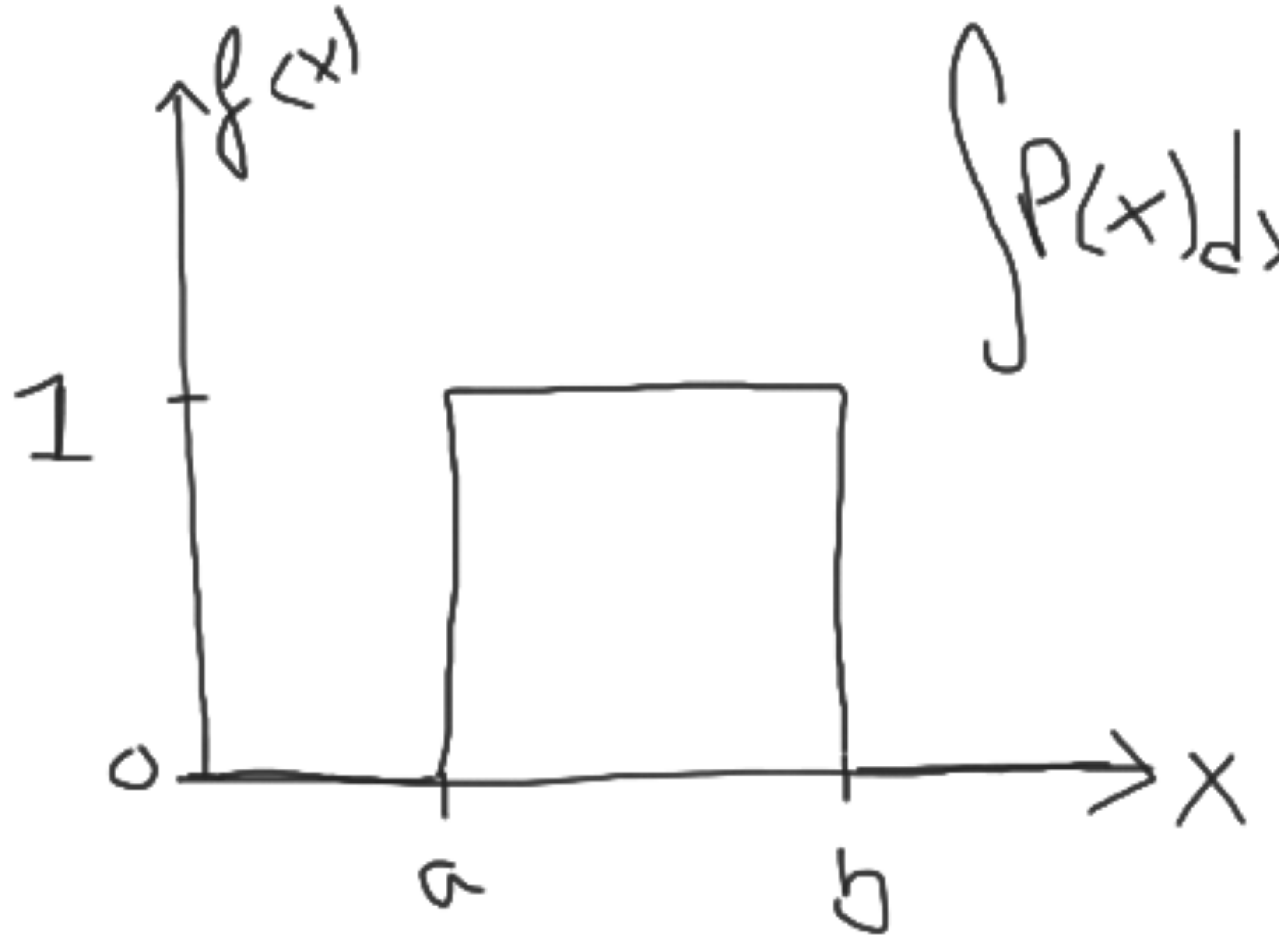


P(x=2) = 0.1 Esto no es probabilidad (Likelihood)



$$\int_1^2 P(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) = 1$$



$$\int p(x)\,dx = C\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\infty, a \\ 1 & a, b \\ 0 & b, \infty \end{cases}$$

$$= C\left[\cancel{\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx}^{\,0} + \int_a^b f(x)\,dx + \cancel{\int_b^{\infty} f(x)\,dx}^{\,0}\right]$$

$$= C\int_a^b 1\,dx = Cx\Big|_a^b = \underline{C(b-a) = 1} \rightarrow C = \frac{1}{(b-a)}$$

$$P(x) = C d(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$[a, b]$$

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b^2-a^2}{b-a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(b+a)\cancel{(b-a)}}{\cancel{b-a}}\right)$$

$$= \boxed{\frac{b+a}{2} = \mu}$$

Integración

Fórmulas básicas

$$f(x) = x\cos(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int f(x)dx = \int x\cos(x^2+1)dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \int x\cos(x^2+1)dx + \tan^{-1}(x)$$

Por partes, fracciones parciales, **por sustitución**

$$u = x^2+1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = (2x)dx; dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int x\cos(x^2+1)dx = \int x\cos(u)dx = \int x\cos(u)\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int cos(u)du$$

$$= \sin(u) = \sin(x^2+1)$$

- $\int 1\, dx = x + C$
- $\int a\, dx = ax + C$
- $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ n \neq -1$
- $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
- $\boxed{\int \cos x\, dx = \sin x + C}$
- $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
- $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$
- $\int \sec x(\tan x)\, dx = \sec x + C$
- $\int \csc x(\cot x)\, dx = -\csc x + C$
- $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x\, dx = e^x + C$
- $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;\ a > 0, a \neq 1$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sin^{-1} x + C$
- $\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \tan^{-1} x + C}$
- $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\, dx = \sec^{-1} x + C$
- $\int \sin^n(x)dx = \frac{-1}{n}\sin^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)dx$
- $\int \cos^n(x)dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}(x)\sin(x) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)dx$
- $\int \tan^n(x)dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}(x) + \int \tan^{n-2}(x)dx$
- $\int \sec^n(x)dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}(x)\tan(x) + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(x)dx$
- $\int \csc^n(x)dx = \frac{-1}{n-1}\csc^{n-2}(x)\cot(x) + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2}(x)dx$

$$\int f(x)dx = \sin(x^2+1) + \tan^{-1}(x)$$

$$\int f(x)dx = \int x\cos(x^2+1)dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$\int f(x)dx = \int x\cos(x^2+1)dx + \tan^{-1}(x) + C$$

Utilizo el argumento de la función trigonométrica, sea $u = x^2 + 1$.
Obtenemos la derivada de esta nueva función,

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx$$

$$dx = \frac{1}{2x}du$$

Sustituyo este diferencial,

$$\int f(x)dx = \int \cancel{x}\cos(x^2+1)\left(\frac{1}{2\cancel{x}}du\right) + \tan^{-1}(x) + C$$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}\int \cos(u)du + \tan^{-1}(x) + C$$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}\int \cos(u)du + \tan^{-1}(x) + C$$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sin(u) + \tan^{-1}(x) + C$$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sin(x^2 + 1) + \tan^{-1}(x) + C$$

Integración

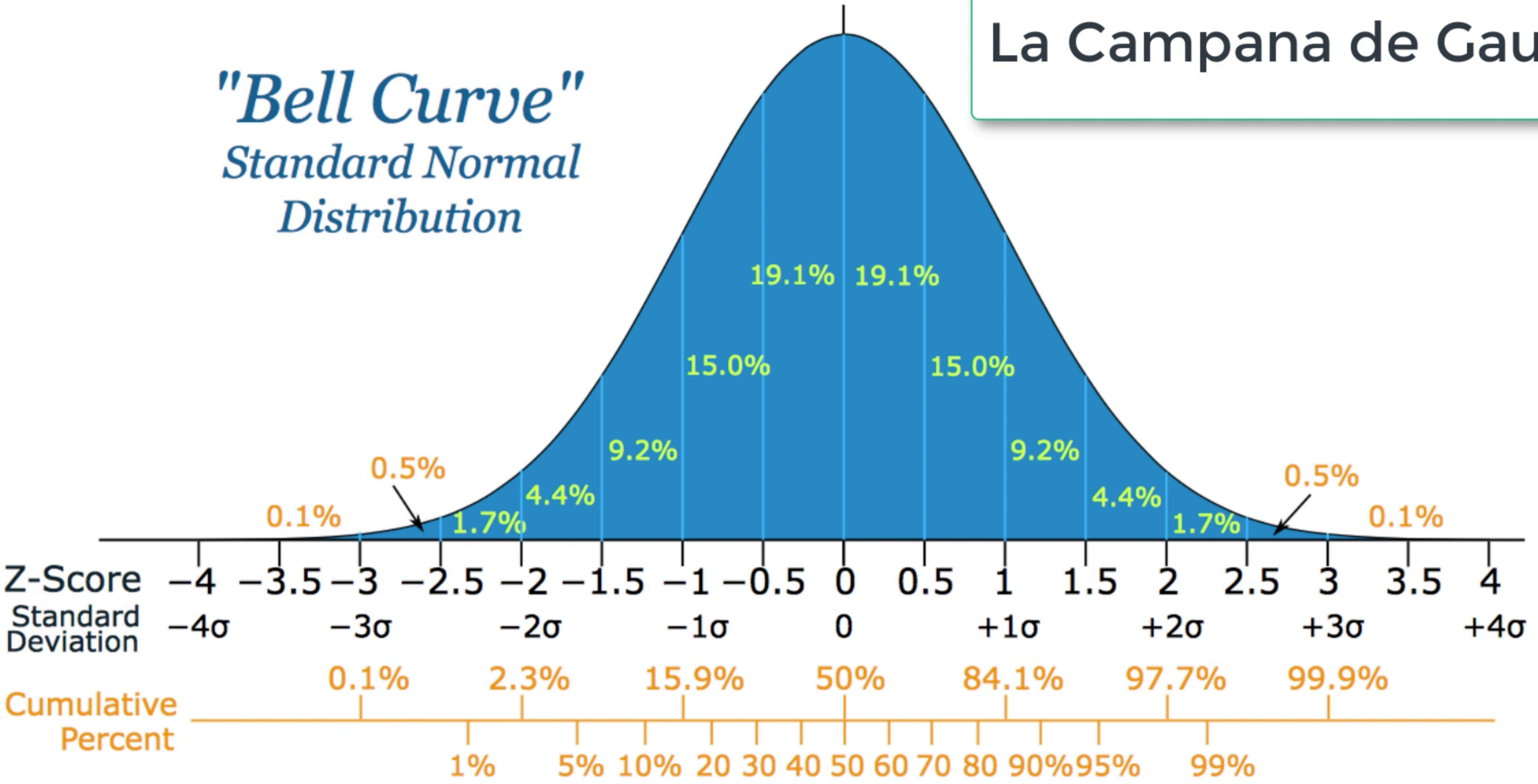
Integración por partes

- Cuando tenemos un producto de funciones, se utiliza la integración por partes:
- $\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx$
- u es la primer función de x: $u(x)$
- v es la primer función de x: $v(x)$

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$$

La Campana de Gauss



Calcular la integral de Gauss con coordenadas polares.

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right]^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \underbrace{e^{-(x^2+y^2)}}_{\text{Integrar en el plano } (x,y)}\,dx\,dy$$

Podemos hacer esta integral en coordenadas polares

$x = r\cos\theta \quad ; \quad y = r\sin\theta$

$$J(r,\theta) = \begin{bmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{bmatrix}$$

$$= r$$

$$dx\,dy \longrightarrow r\,dr\,d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \left(\int_0^{\infty} r e^{-r^2}\,dr\right)\overbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)}^{2\pi}$$

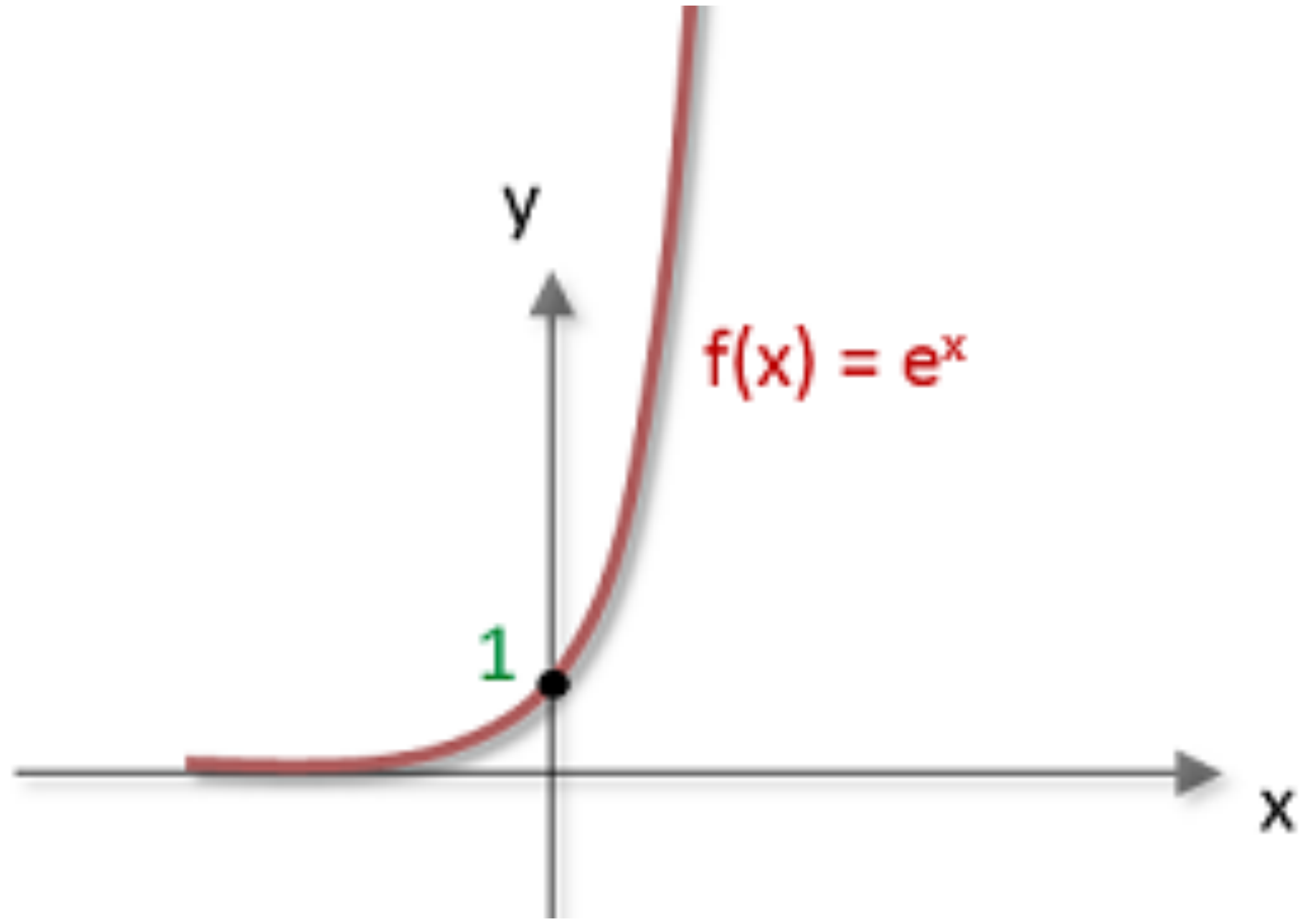
$$\int_0^\infty re^{-r^2}dr \qquad u = -r^2$$

$$du\frac{d}{du}u = dr\frac{d}{dr}(-r^2)$$

$$du(1) = (-2r)dr \Rightarrow dr = \frac{1}{-2r}dr$$

$$\int_0^\infty re^u\frac{1}{-2r}dr = -\frac{1}{2}\int_0^\infty e^u = -\frac{1}{2}e^u = -\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{2}(\cancelto{0}{e^{-\infty}} - \cancelto{1}{e^0})$$

$$= \frac{1}{2}$$



$$= \left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^\infty \cdot 2\pi$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \underline{\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}$$

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma)^2}$$

$$\to N(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$P(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz$$

$$z = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$$

Empirical Rule