Álgebra lineal

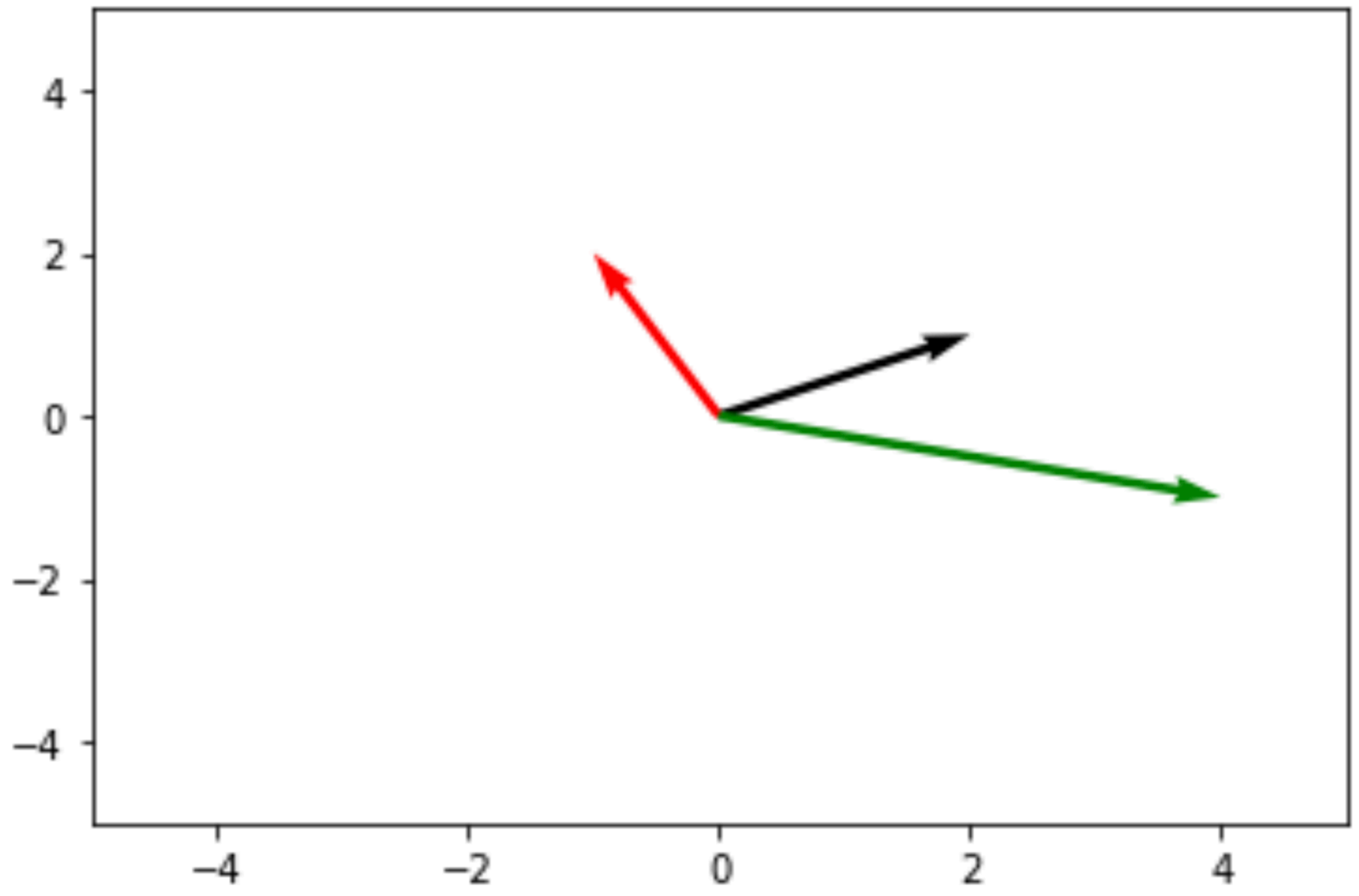
Propedéutico de la Maestría en Ciencia de Datos.
CUCEA, Universidad de Guadalajara. 2024B

Guadalajara, Jal. Junio de 2025

Operaciones de vectores

Definición

- Un vector es un arreglo de números ordenados. Son comúnmente utilizados para describir datos en un espacio multidimensional. Tienen una **magnitud** y **dirección.**
- Cada número define una coordinadas a lo largo de una dimensión en el espacio.
- $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$



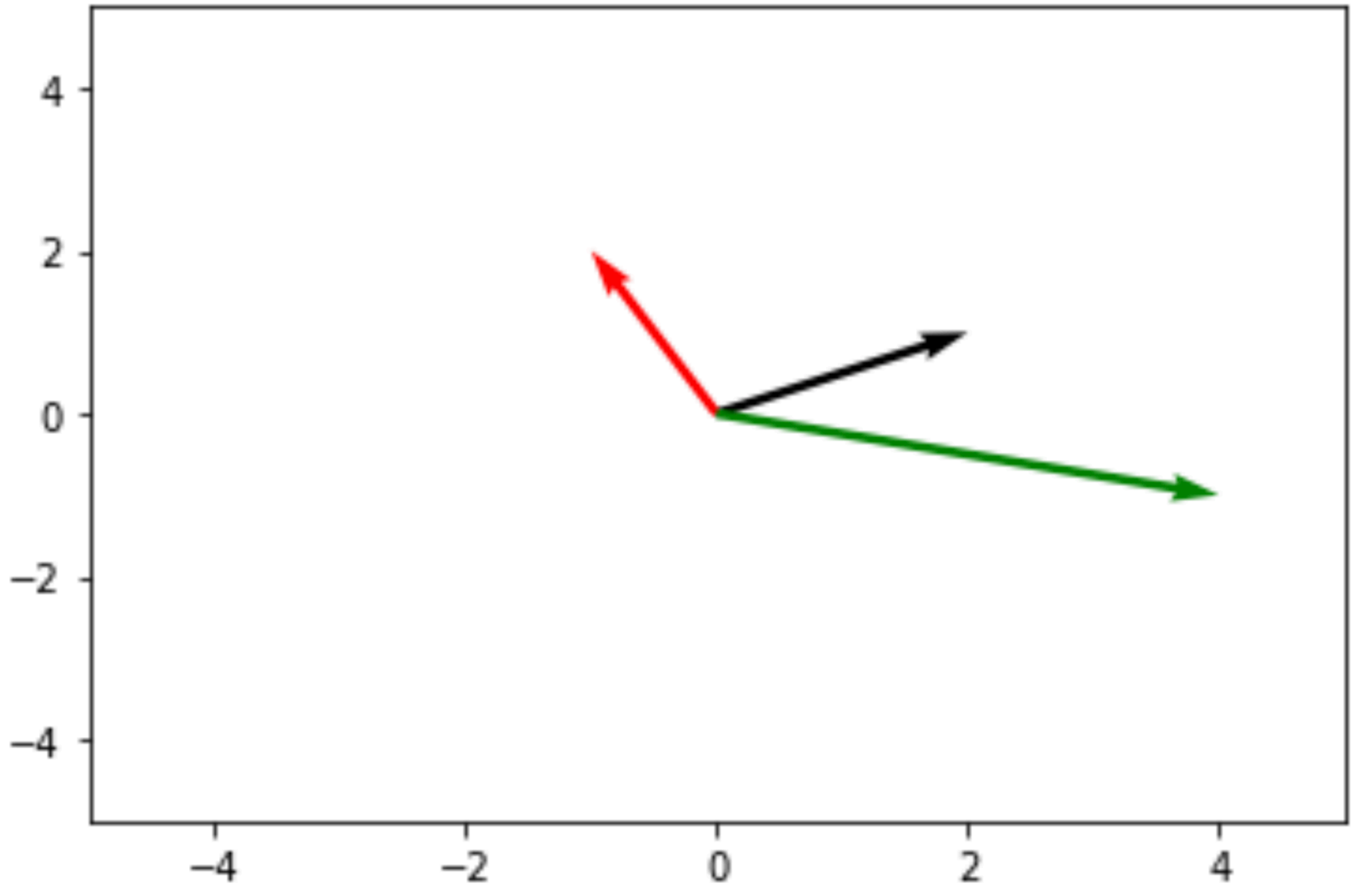
Operaciones de vectores

Magnitud

- Si un vector está dado por $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$, la magnitud de un vector está dada por:
- $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$

$\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

- $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$
- Un **vector unitario** se define como un vector que va en la misma dirección que $\overrightarrow{v}$ pero que tiene magnitud 1. $\hat{v} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}$



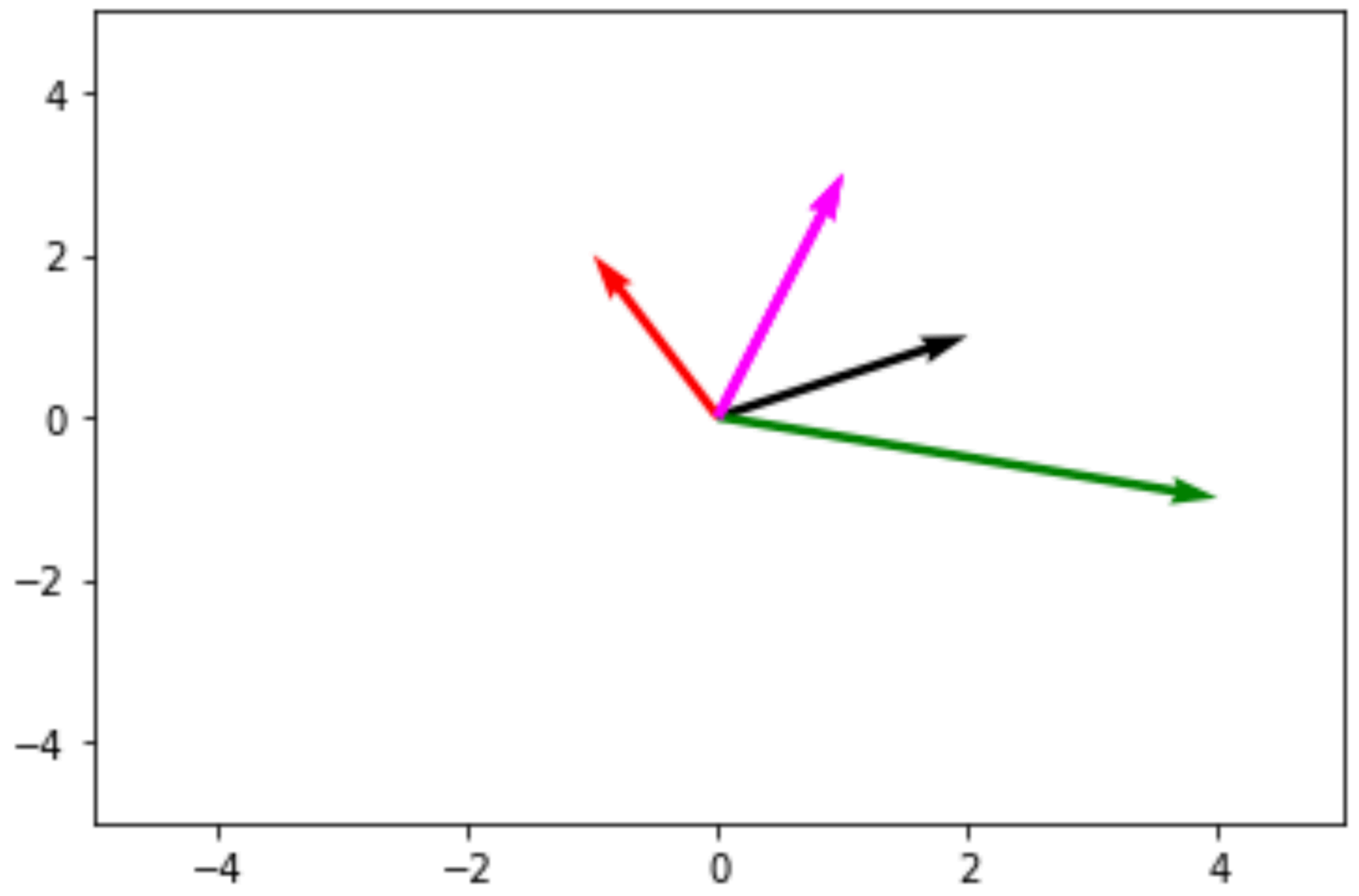
Operaciones de vectores

Suma de vectores

- Una suma de vectores se realiza tomando cada entrada del primer vector y sumando la correspondiente entrada en el segundo vector.

- $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = [v_1 + u_1, v_2 + u_2, \ldots, v_n + u_n]$

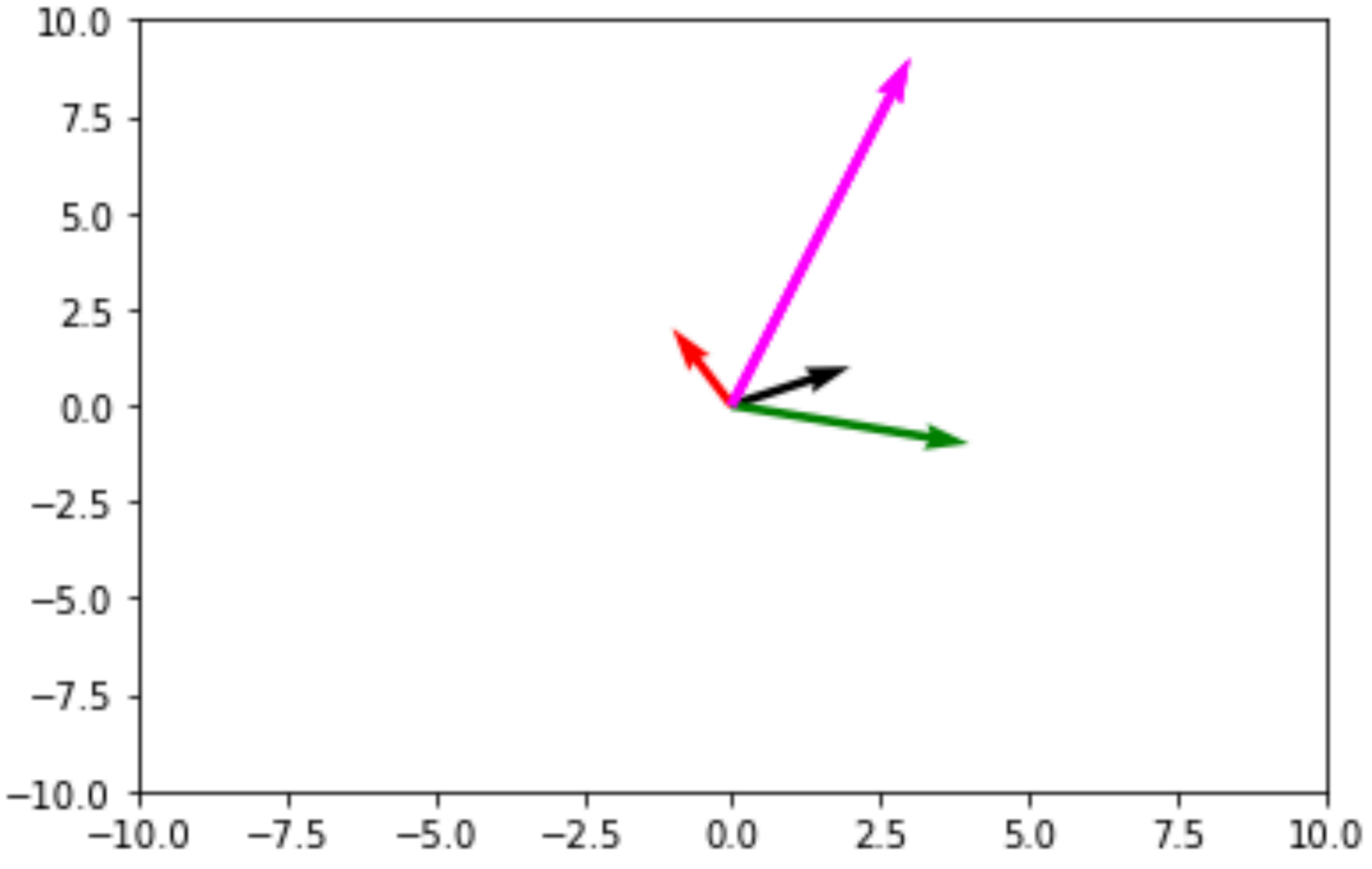
- $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$



Operaciones de vectores

Multiplicación por un escalar

- Un **escalar** es un número utilizado para "escalar" un vector. Se toma un número y se multiplica por cada entrada del vector.
- $3\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}$



Operaciones con vectores

Ejemplo

- Suponer que un vector caracteriza la venta de ciertos productos de un negocio. Vendidas por hora.
- $\begin{bmatrix} \text{Pan} \\ \text{Bisquet} \\ \text{Dona} \\ \text{Total} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 30 \\ 2500 \end{bmatrix}$
- Para entender mejor el problema, se colecta información de días previos para generar una vector que represente todos los elementos por cada hora del día.
- $\begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 30 \\ 2500 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40 \\ 10 \\ 60 \\ 2000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 60 \\ 10 \\ 10 \\ 2100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 70 \\ 100 \\ 6600 \end{bmatrix}$

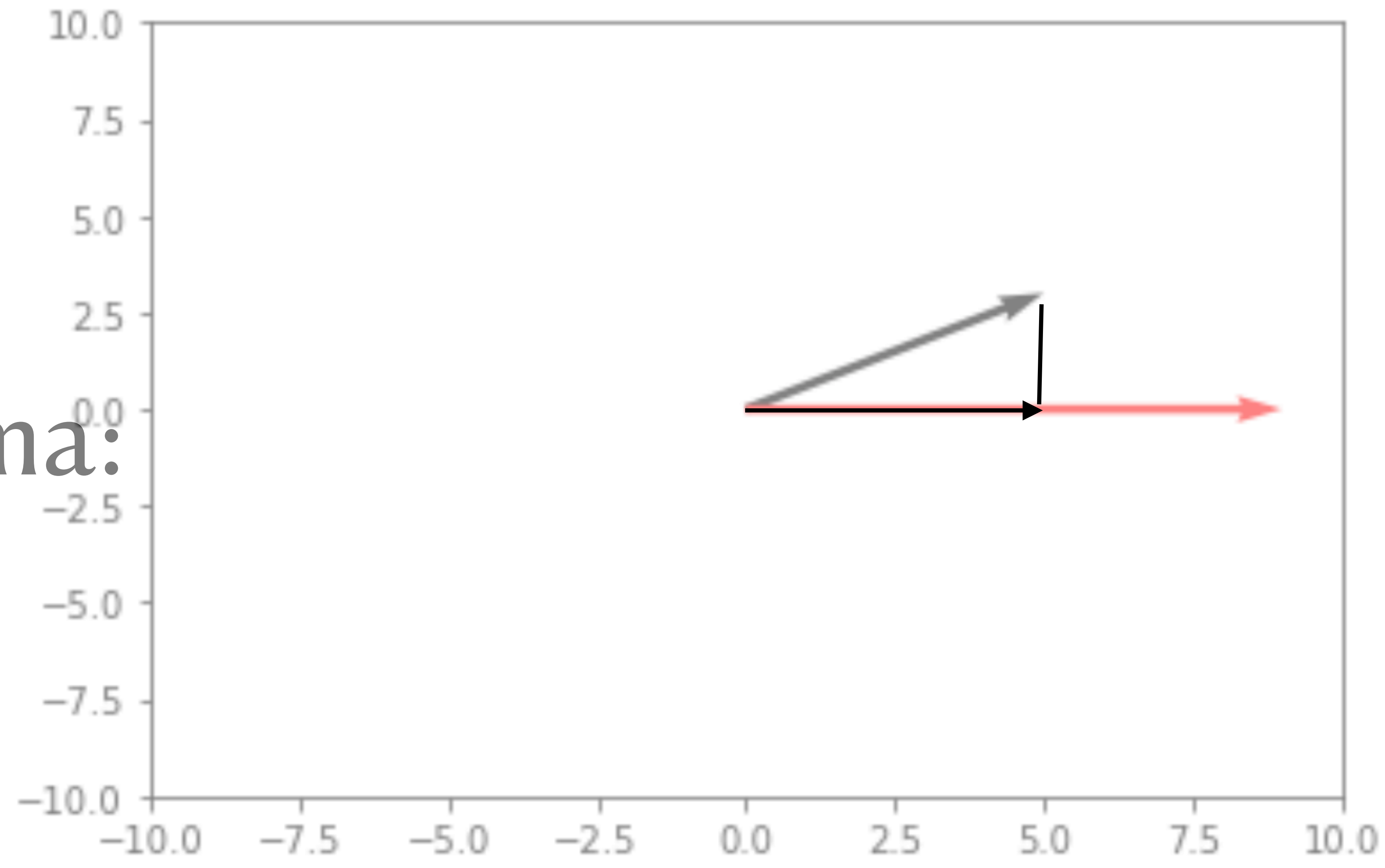
$$\begin{bmatrix} 40 & 40 & 60 \\ 50 & 10 & 10 \\ 30 & 60 & 10 \\ 2500 & 2000 & 2100 \end{bmatrix}$$

Operaciones con vectores

Producto punto

$$\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, \dots . v_n]$$

- El **producto punto** se calcula de la siguiente forma:
- $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n$
- Se tiene de salida un número escalar.



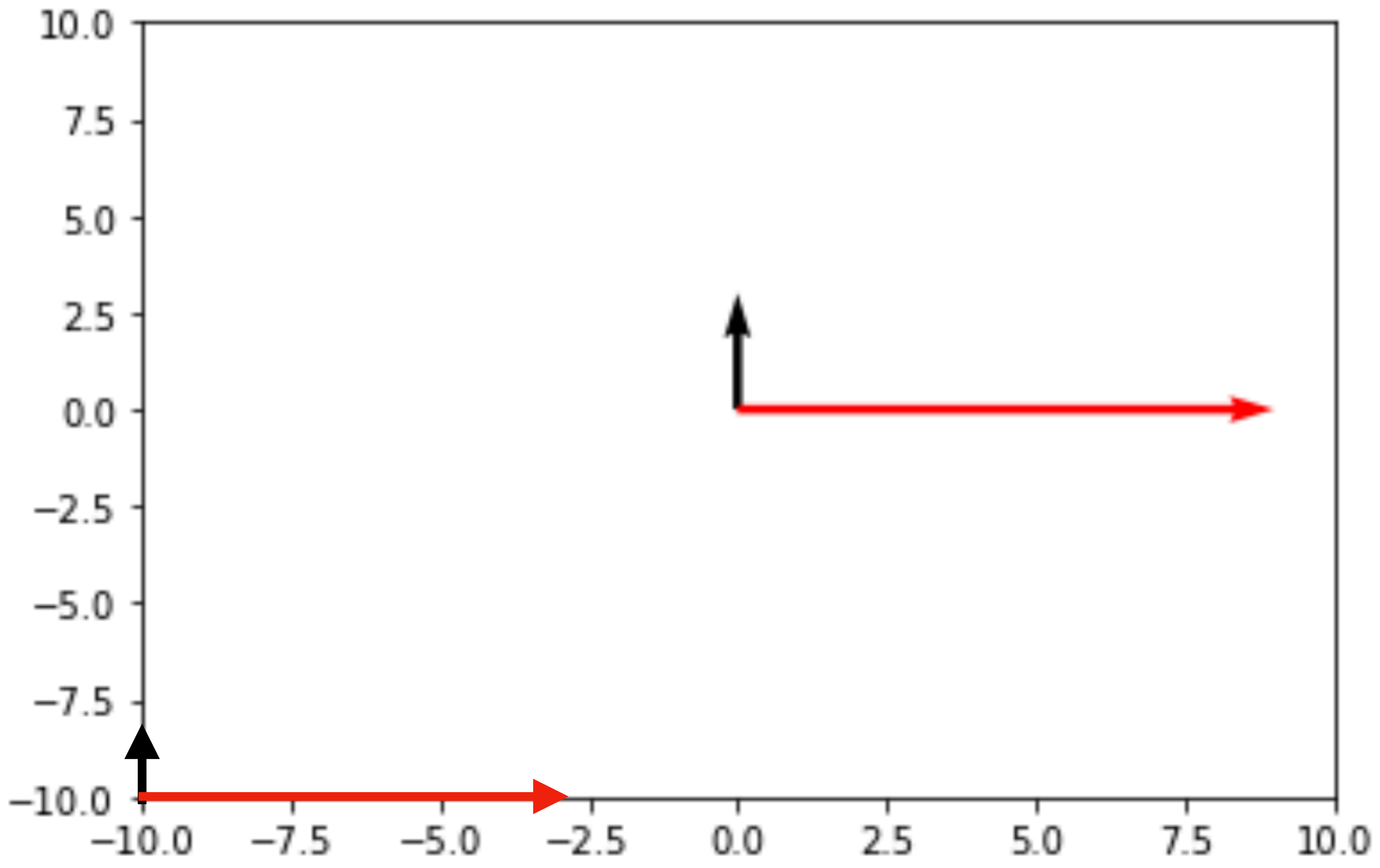
Producto punto = 45

- También puede calcularse mediante $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|\cos\theta$, utilizando el ángulo entre los dos vectores. En este sentido, un producto punto se puede ver como la proyección de un vector sobre otro.

Operaciones con vectores

Producto punto (vectores ortogonales)

- Un caso especial se da cuando el ángulo entre los vectores es de 90º.
- En este caso $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = 0$
- $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $a \cdot b = 0$



`Producto punto = 0`

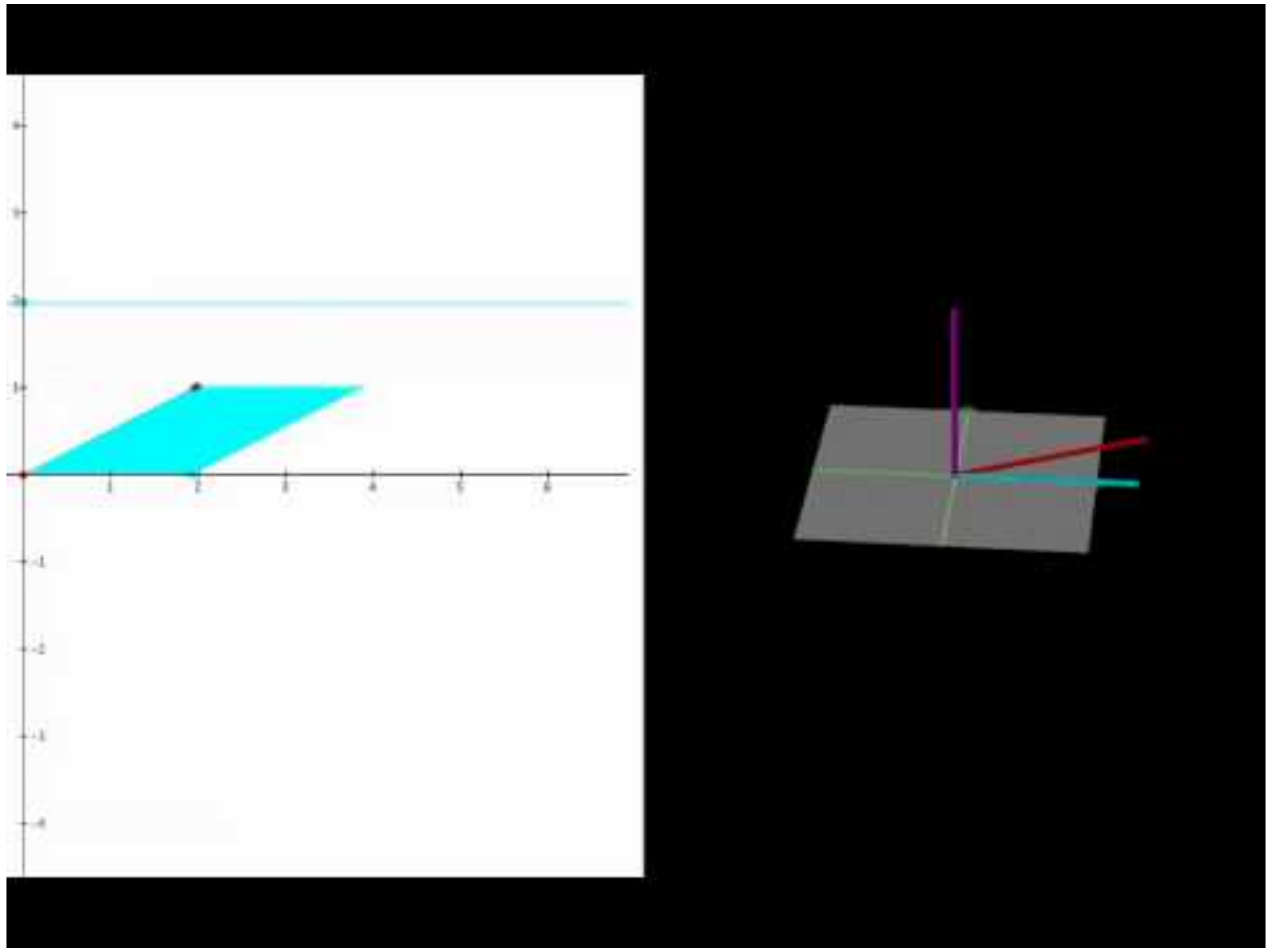
Operaciones con vectores

Producto cruz

- Se calcula el **producto cruz** de dos vectores de la siguiente manera:

- $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|\sin(\theta)\ \hat{n}$

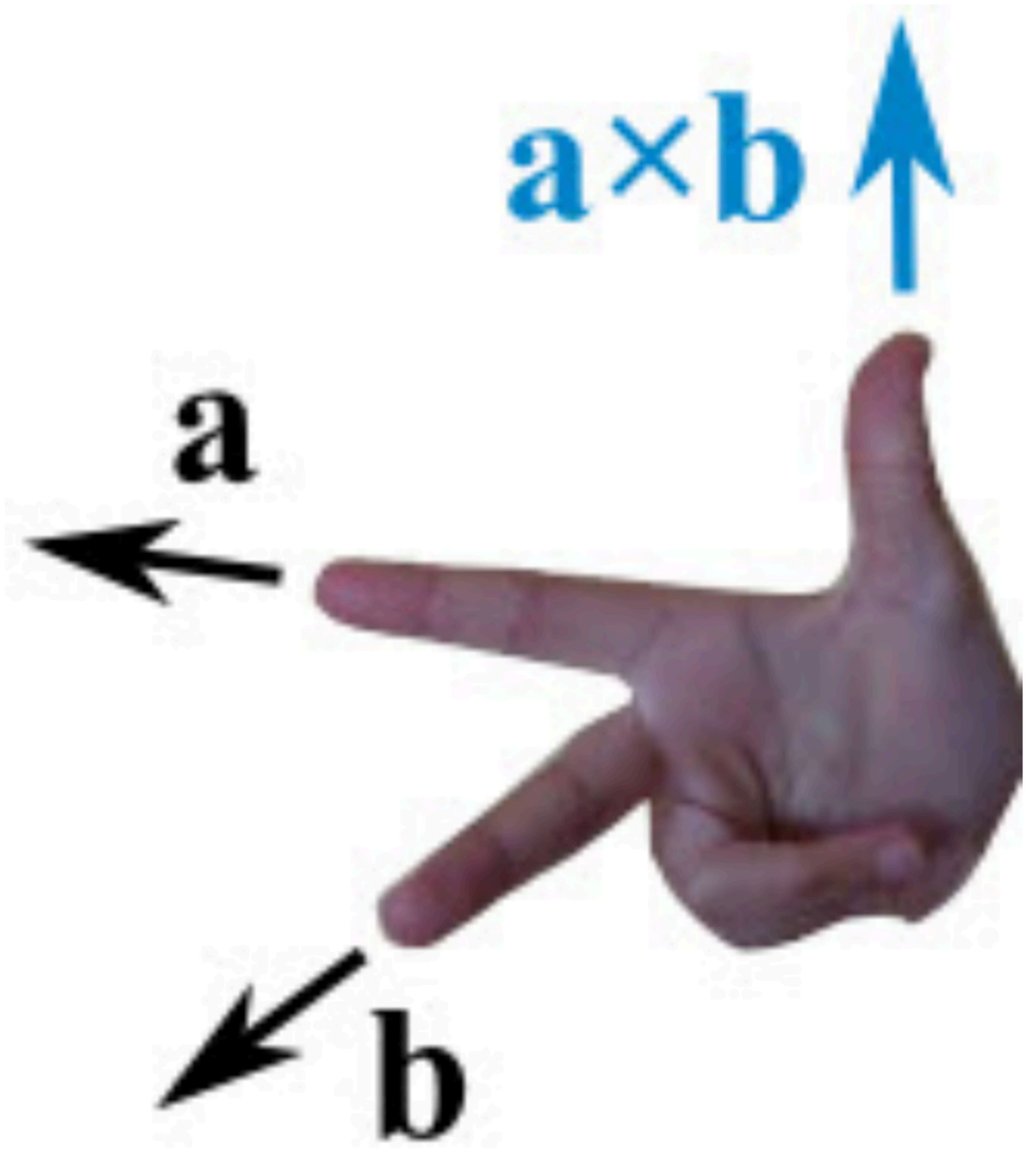
- $\hat{n}$ es un vector unitario ortogonal a $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u}$ a la vez.



Operaciones con vectores

Producto cruz

- En tres dimensiones, otra forma de calcularlo es de forma matricial,
- $u \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\hat{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\hat{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\hat{k}$
- $\hat{i} = (1,0,0);\ \hat{j} = (0,1,0);\ \hat{k} = (0,0,1)$
- **Ejemplo,** $a = (2,3,4); b = (5,6,7)$
- $a \times b = (3 \cdot 7 - 4 \cdot 6)\hat{i} + (4 \cdot 5 - 2 \cdot 7)\hat{j} + (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5)\hat{k} = (-3,6,-3)$



Independencia linear

Definición

- Cuando un conjunto de vectores es **linearmente independiente,** no es posible representar un vector como una combinación lineal de los vectores restantes. Ejemplo: dos vectores ortogonales son linealmente independientes.

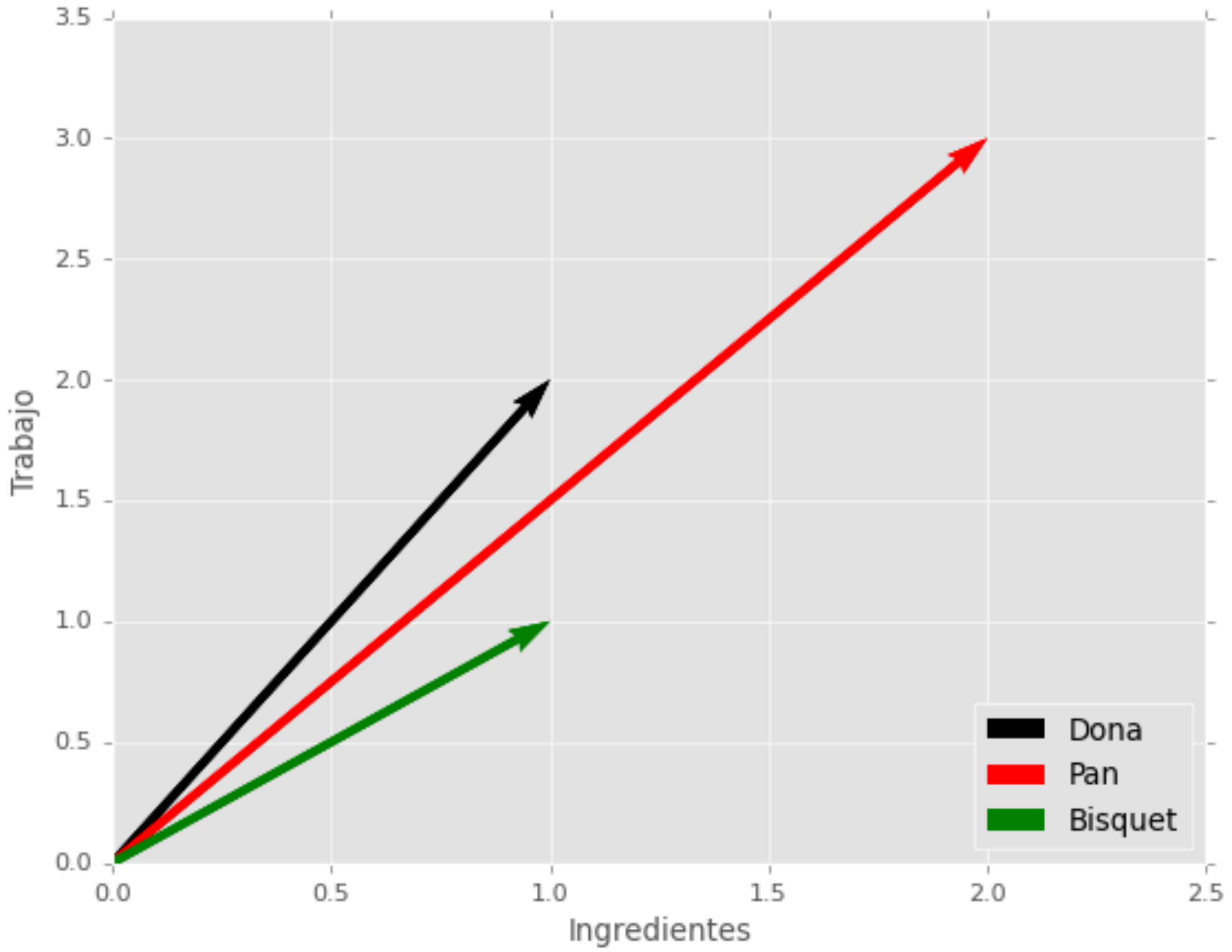
- Una **combinación lineal** de un vector es creada al combinar dos o más vectores a través de sumas o diferencias. Los vectores constituyentes pueden ser escalados por valores arbitrarios. Un vector $\overrightarrow{w}$ es una combinación lineal de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ si se puede expresar de la siguiente forma:

- $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$, siendo a y b números escalares.

Independencia linear

Ejemplo

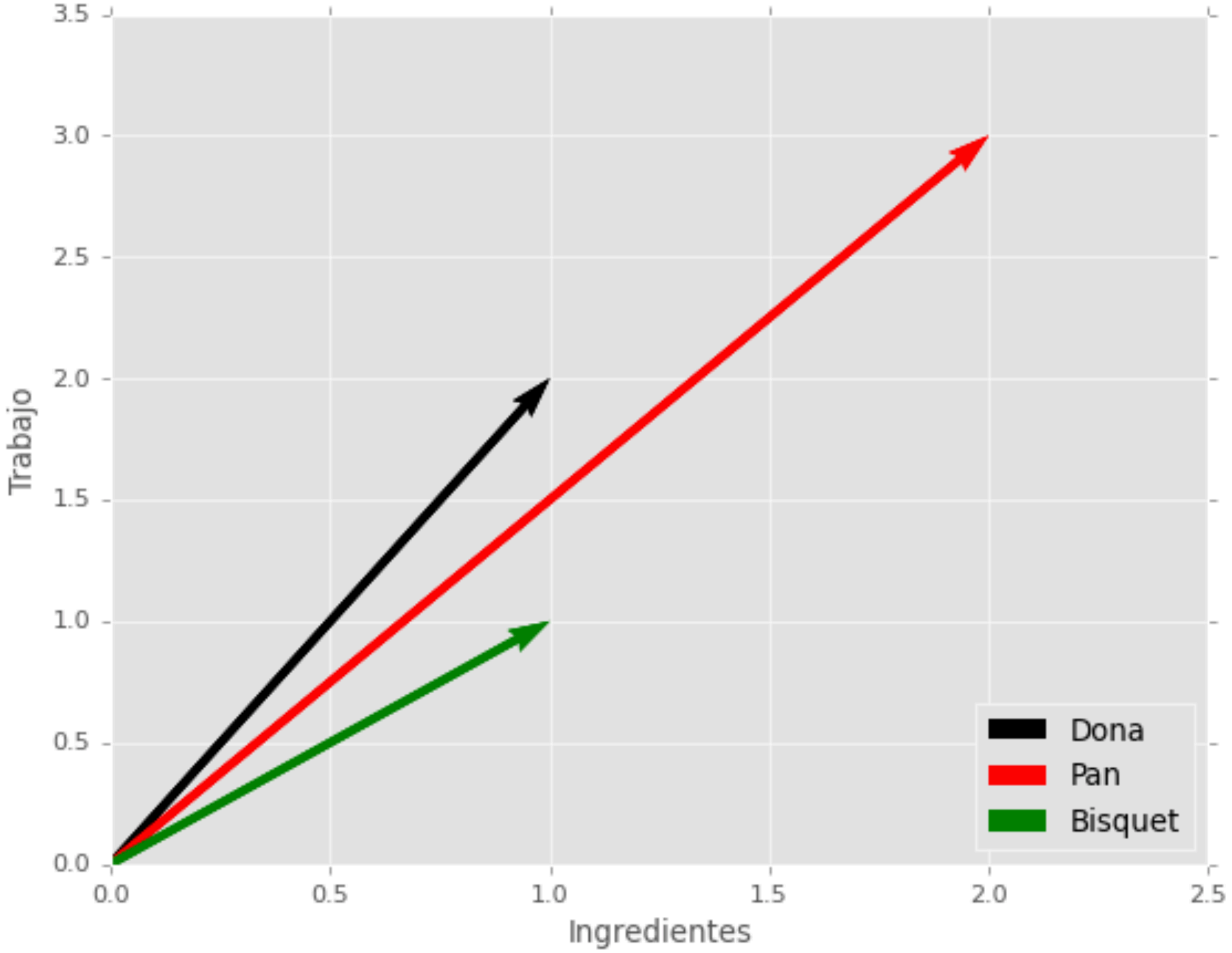
- Suponemos que se pueden caracterizar los productos café, sandwich y dona en términos del trabajo requerido, y los ingredientes.
- $\text{Precio\_dona} = \begin{bmatrix} \text{Ingredientes} \\ \text{Trabajo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \ \text{Precio\_pan} = \begin{bmatrix} \text{Ingredientes} \\ \text{Trabajo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \ \text{Precio\_bisquet} = \begin{bmatrix} \text{Ingredientes} \\ \text{Trabajo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



Independencia linear

Definición

- Se pone una limitante a la hora de hacer un producto. Únicamente se pueden realizar actividades de acuerdo a estas tres cosas, en combinaciones de 1 ingrediente (2 trabajo), 2 ingredientes (3 trabajo), 1 ingrediente (1 trabajo). La condición es que sólo puedes hacer combinaciones de esto. Uno podría combinar los recursos de dos productos para tener un tercero.

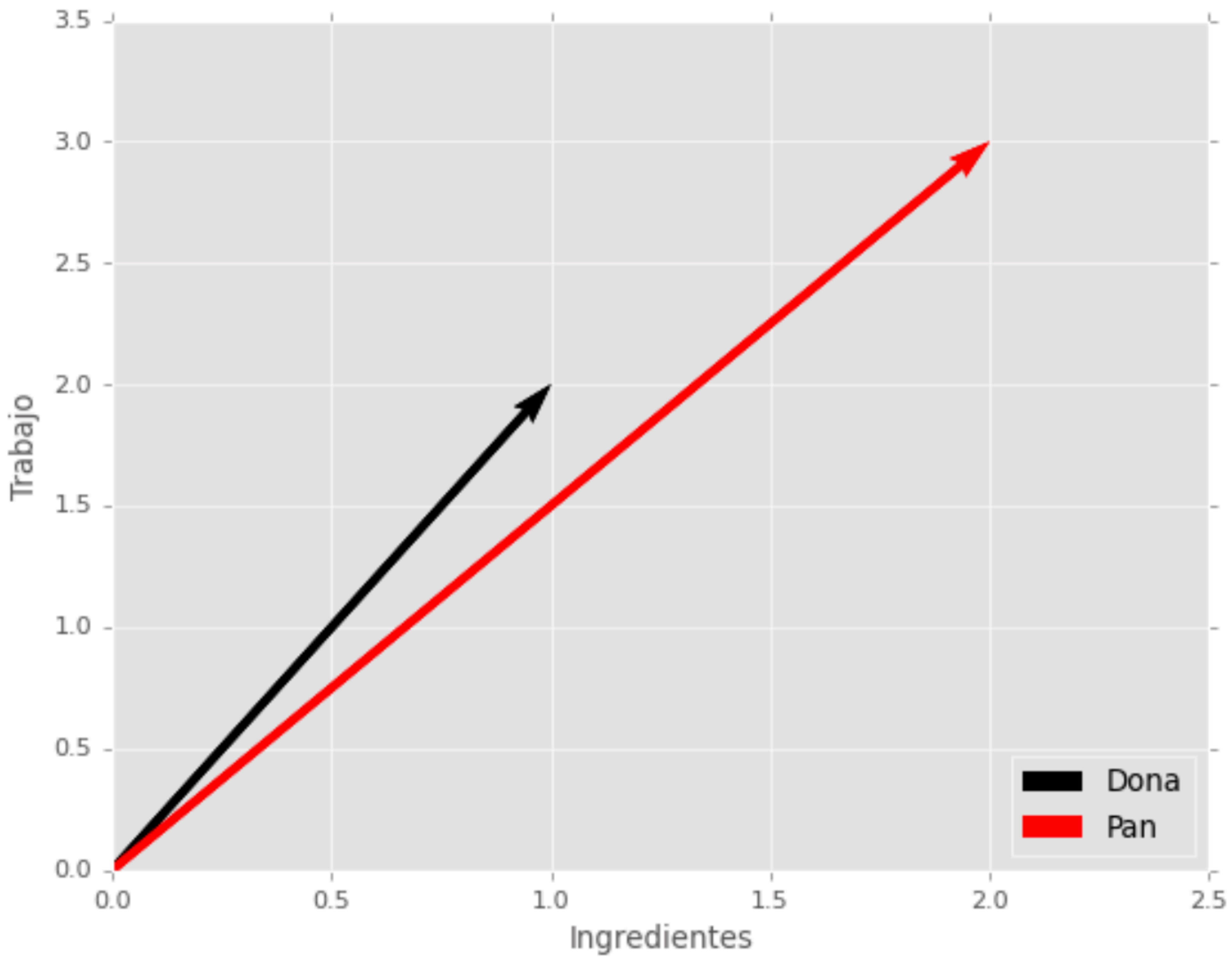


- En este sentido, se podría utilizar los recursos de un bisquet y una dona para crear un pan.
- $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$
- Como es posible crear un vector como combinación de los otros, existe una dependencia linear en este vector.

Independencia linear

Definición

- Ahora quitamos los bisquets.

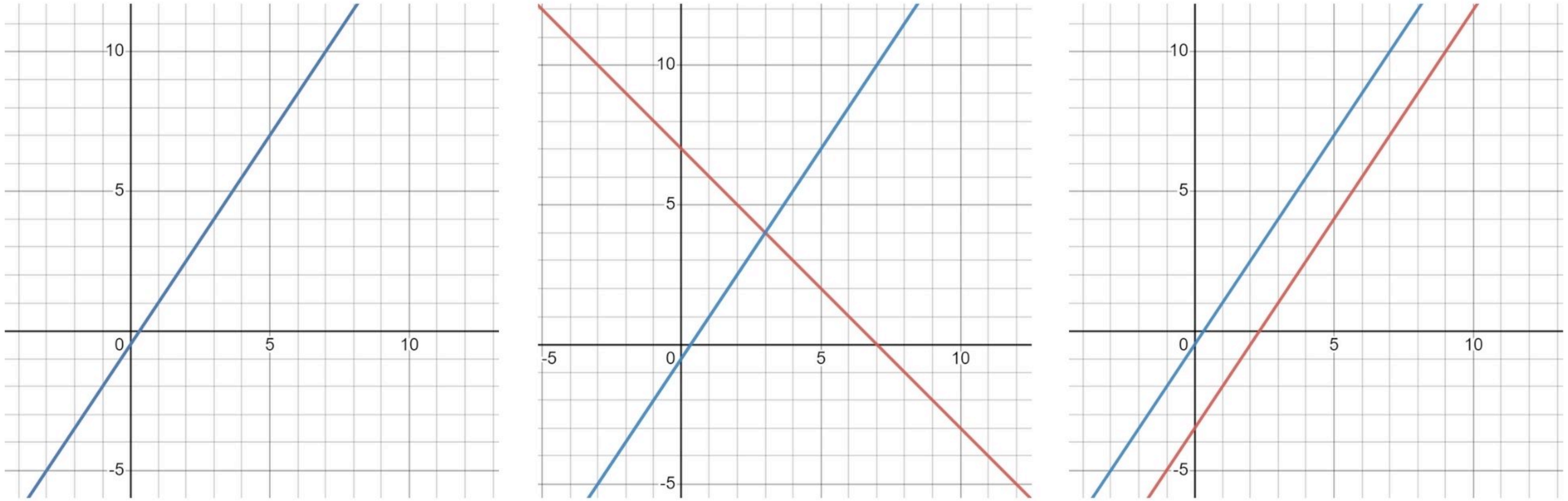


- Ahora ya no podemos crear pan a partir de solamente recursos de "dona".
- $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$
- En este sentido, el vector (2,3) es linealmente independiente de los demás.

Sistemas de ecuaciones lineales

2 dimensiones

- Un sistema de ecuaciones lineales es un sistema de ecuaciones en el que cada ecuación es lineal. Una solución de un sistema es una asignación de valores para las incógnitas que hace verdadera cada una de las ecuaciones.
- $\mathbb{R}^2$. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$



∞ Solution — One Solution — No Solution

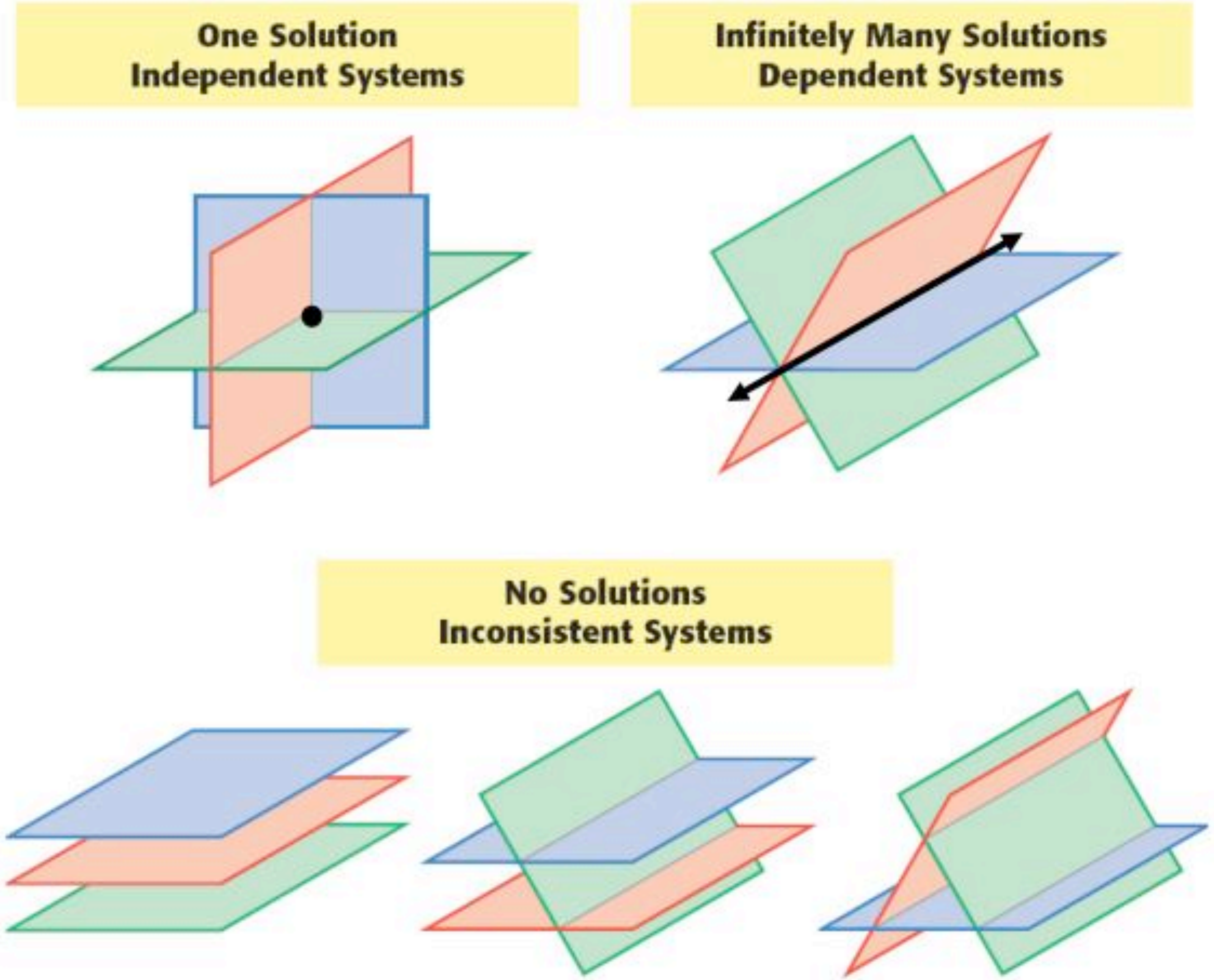
Sistemas de ecuaciones lineales

3 dimensiones

- $$\mathbb{R}^3 : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x + y + 2z = 5 \\ x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$



Sistemas de ecuaciones lineales

Método de solución: sustitución

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

- $$\begin{cases} x + 2y = 2 & (a) \\ x - 2y = 0 & (b) \end{cases} \qquad y = \frac{1}{2}x + 0$$
- De la ecuación b, podemos despejar una de sus variables,
- $$x = 2y \quad (c)$$
- Esto lo podemos sustituir en la ecuación a,
- $$x + 2y = (2y) + 2y = 4y = 2; \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}$$
- Esto lo podemos sustituir en la ecuación c,
- $$x = 2y = 2\frac{1}{2} = 1$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Tipos de soluciones

- $$\begin{cases} x - 3y = 1 \quad (a) \\ 2x - 6y = 3 \quad (b) \end{cases}$$
- De la ecuación a tenemos que $x = 3y + 1$, y sustituyendo en la ecuación b,
- $2x - 6y = 2(3y + 1) - 6y = 6y + 2 - 6y = \boxed{2 = 3,}$ NO HAY SOLUCIÓN

Sistemas de ecuaciones lineales

Tipos de soluciones

- $$\begin{cases} x - 3y = 1 & (a) \\ 2x - 6y = 2 & (b) \end{cases}$$
- De la ecuación a tenemos que $x = 3y + 1$, y sustituyendo en la ecuación b,
- $2x - 6y = 2(3y + 1) - 6y = 6y + 2 - 6y = \boxed{2 = 2,}$ INFINITAS SOLUCIONES

Sistemas de ecuaciones lineales

Método de solución: Gauss-Jordan

- $$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ -5x + 2y - 3z = -2 \end{cases}$$
- Generamos una matriz asociada al sistema de ecuaciones,
- $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$
- Además, utilizamos sus soluciones para una matriz aumentada,
- $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | \ 2 \\ 2 & -3 & 1 & | -1 \\ -5 & 2 & -3 & | -2 \end{bmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Método de solución: Gauss-Jordan

- Se aplican transformaciones de tal manera que diagonalinzemos la matriz asociada,
- $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & -3 & -2 \end{array}\right]$$
- Ejemplo: multiplicamos el renglón 1 por (-2) y se lo sumamos al renglón 2,
- $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -1 & -5 \\ -5 & 2 & -3 & -2 \end{array}\right]$$
- Se multiplica el renglón 1 por (5) y se suma al renglón 3,
- $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -1 & -5 \\ 0 & 12 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Método de solución: Gauss-Jordan

- Se divide el renglón 3 entre (2),
- $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -1 & -5 \\ 0 & 6 & 1 & 4 \end{array}\right]$$
- Se multiplica el renglón 3 por (7),
- $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -1 & -5 \\ 0 & 42 & 7 & 28 \end{array}\right]$$
- Se multiplica el renglón 2 por (-6) y se suma al renglón 3,
- $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Método de solución: Gauss-Jordan

- Al renglón 1 se le resta el renglón 3,
- $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$
- Al renglón 2 se le suma el renglón 3,
- $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$
- El renglón 2 es dividido por (-7)
- $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Método de solución: Gauss-Jordan

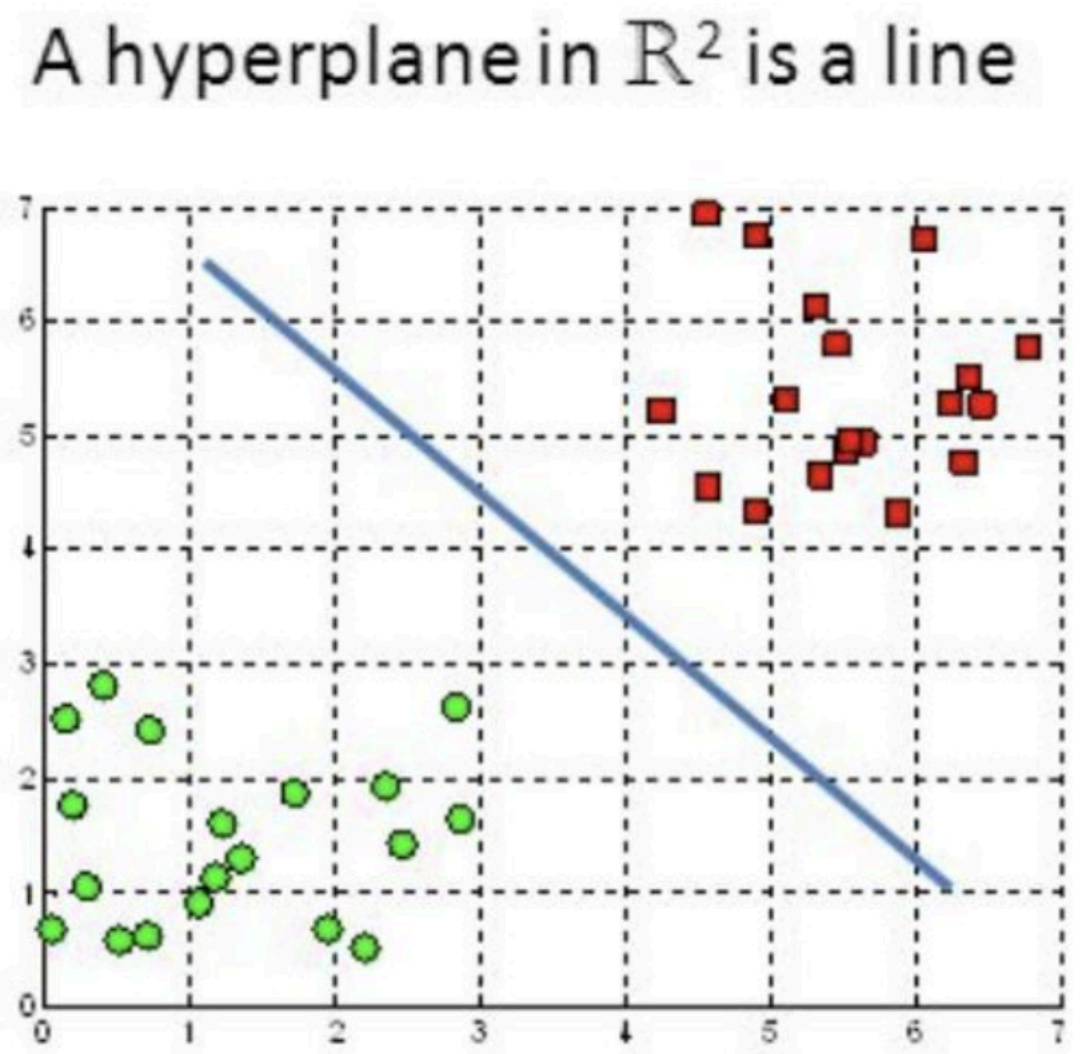
- Se multiplica el renglón 2 por (-2) y se suma al renglón 1,
- $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$
- Finalmente tenemos el vector de soluciones,
- $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

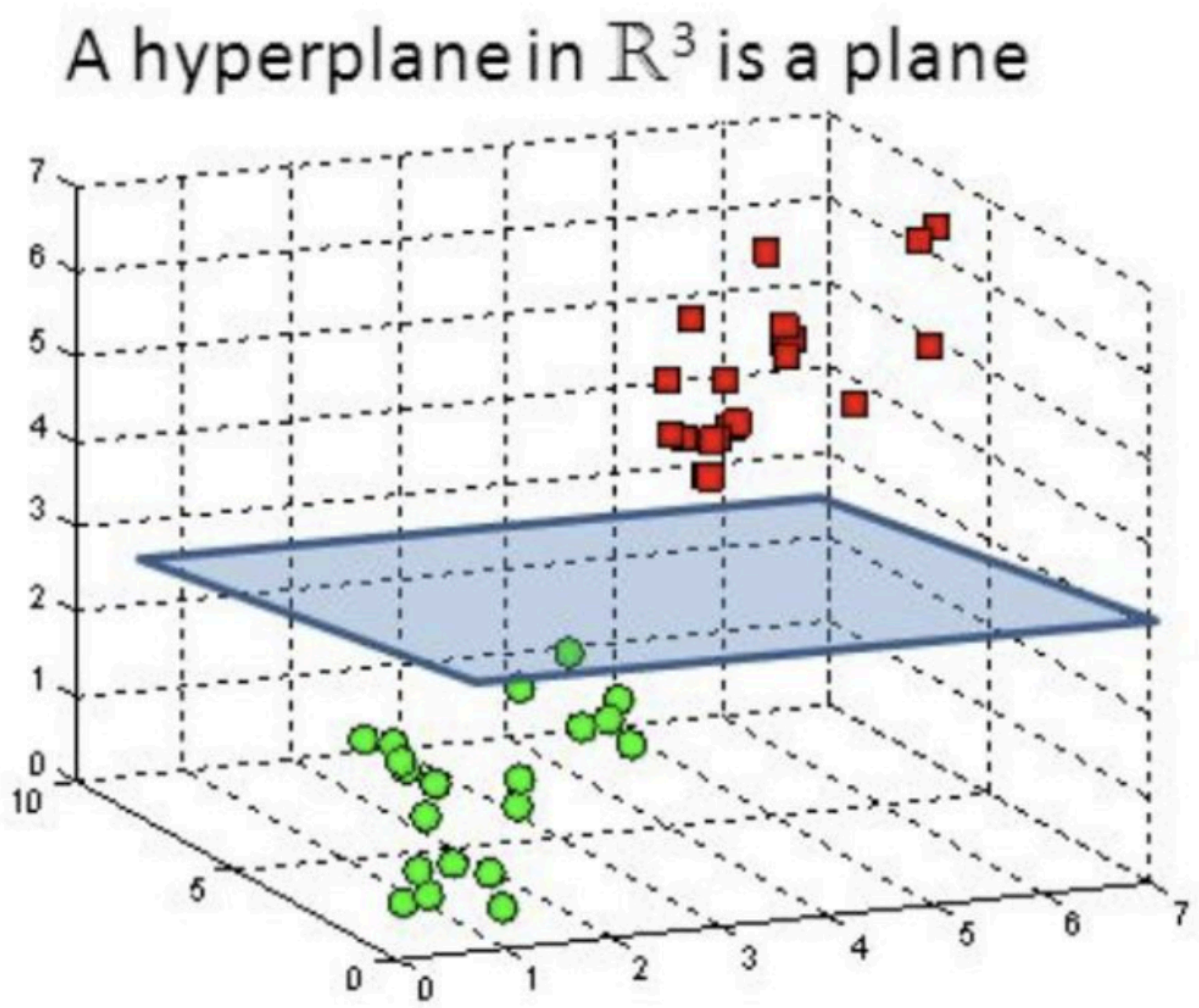
ML

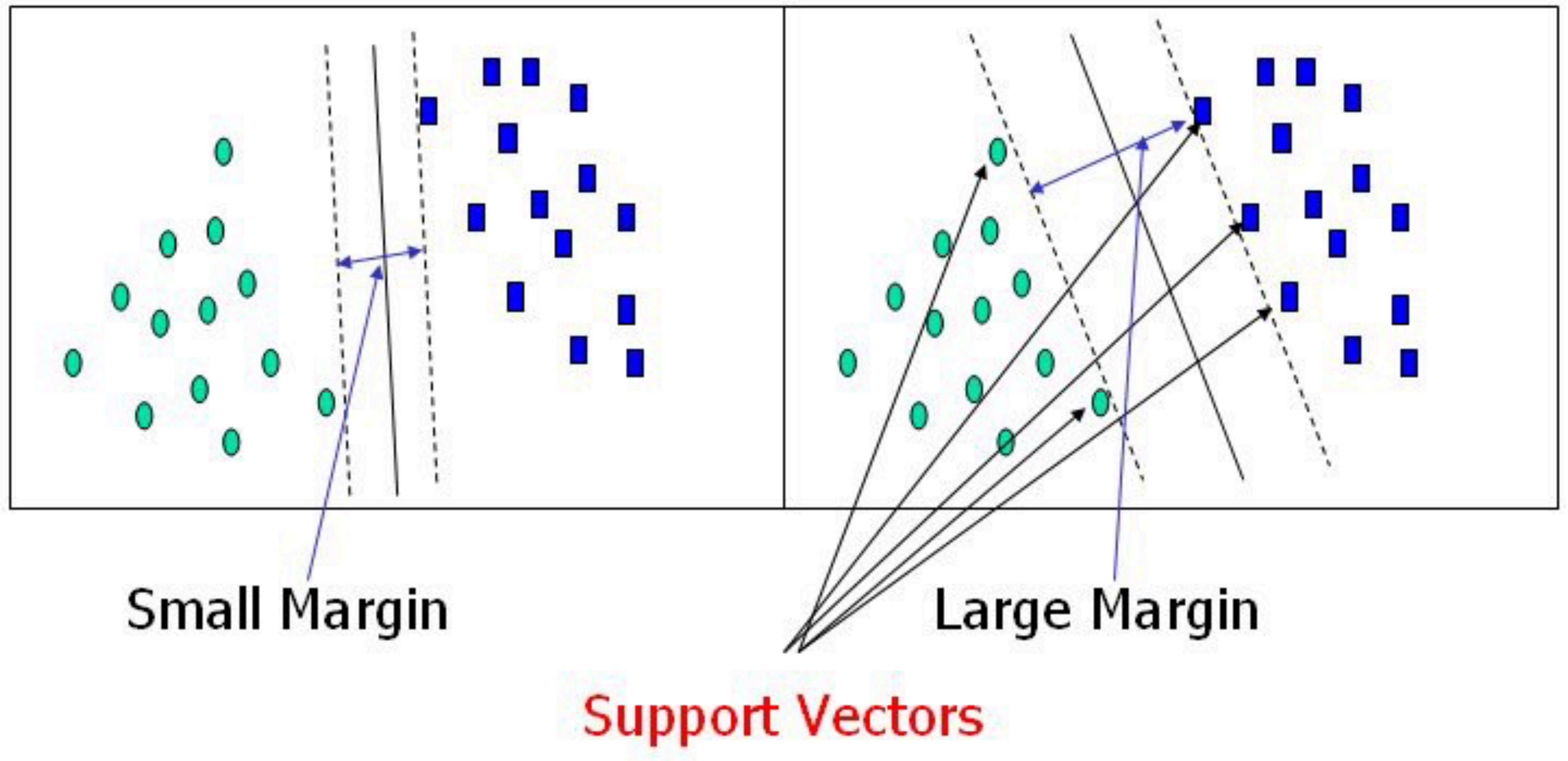
Support Vector Machine

- En aprendizaje supervisado, se conocen las "clases" a priori para un DataSet de entrenamiento, y se quiere entrenar un algoritmo para que regrese cierta cantidad (una clasificación), dada una nueva observación.

- En este contexto, está el método Support Vector Machine (SVM).







Matrices

Matrices

Definición

- Una matriz es un vector 2-dimensional.
- Los vectores tienen una sola dimensión m, mientras que las matrices tienen 2 dimensiones m
- $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
- Se dice que A tiene un orden $m \times n$. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Matrices

Suma de matrices

- La suma de matrices se obtiene al sumar un elemento con su correspondiente posición en la otra matriz. Para que esto sea posible, ambas matrices tienen que tener **el mismo número de dimensiones.**
- $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$
- La diferencia de dos matrices trabaja de la misma forma:
- $A - B = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Matrices

Multiplicación de matrices

- La multiplicación de matrices consiste en la multiplicación de todas las entradas de la columna de la primer matriz, con respecto a todas las entradas de la fila de una segunda matriz.

- Por lo tanto, el número de columnas de la primer matriz tiene que coincidir con el número de filas de la segunda matriz. $A^{i\times j} \cdot B^{j\times k} = C^{i\times k}$

- $$\boxed{\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}}$$
  $$C^{3\times1} = A^{\boxed{3}\times2} \times B^{2\times\boxed{1}} = \begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 3\\4 & 3\end{bmatrix} \times \boxed{\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}12\\17\\17\end{bmatrix}$$
  $$B^{2\times1} \times A^{3\times2}$$

Matrices

Multiplicación de matrices

- $C^{3\times4} = A^{3\times2} \times B^{2\times4} = \begin{bmatrix} \boxed{3 \quad 2} \\ 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{2} & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boxed{1} \times \boxed{3} + \boxed{2} \times \boxed{2}) & (1 \times 3 + 2 \times 2) & (1 \times 3 + 2 \times 2) & (1 \times 3 + 2 \times 2) \\ (1 \times 4 + 2 \times 3) & (1 \times 4 + 2 \times 3) & (1 \times 4 + 2 \times 3) & (1 \times 4 + 2 \times 3) \\ (1 \times 4 + 2 \times 3) & (1 \times 4 + 2 \times 3) & (1 \times 4 + 2 \times 3) & (1 \times 4 + 2 \times 3) \end{bmatrix}$
- $= \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$

Matrices

Multiplicación de matrices

- En un caso de 3 x 3.
- $$C^{3\times3} = A^{3\times3} \times B^{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$
- $$= \begin{bmatrix} (b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} + b_{31}a_{13}) & (b_{12}a_{11} + b_{22}a_{12} + b_{32}a_{13}) & (b_{13}a_{11} + b_{23}a_{12} + b_{33}a_{13}) \\ (b_{11}a_{21} + b_{21}a_{22} + b_{31}a_{23}) & (b_{12}a_{21} + b_{22}a_{22} + b_{32}a_{23}) & (b_{13}a_{21} + b_{23}a_{22} + b_{33}a_{23}) \\ (b_{11}a_{31} + b_{21}a_{32} + b_{31}a_{33}) & (b_{12}a_{31} + b_{22}a_{32} + b_{32}a_{33}) & (b_{13}a_{31} + b_{23}a_{32} + b_{33}a_{33}) \end{bmatrix}$$
- $$c_{mk} = \sum_{n=1}^{N} a_{mn}b_{nk}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 18 & 24 \\ 40 & 29 & 40 \\ 44 & 32 & 45 \end{bmatrix}$$

Matrices

Multiplicación de matrices

- Como estamos multiplicando filas por columnas, una multiplicación de matrices **no es conmutativa.** Si cambiamos el orden de los elementos, tenemos un producto diferente, o incluso a veces no es posible el cálculo.

- $A \times B \neq B \times A$

- La multiplicación de matrices es **asociativa.** En una multiplicación de tres matrices A,B,C, no importa si primero se multiplica A x B, ó si primero se multiplica B x C.

- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

Matrices

Multiplicación de matrices

- La multiplicación de matrices es solamente parcialmente distribuida, puesto que el orden del producto importa.
- $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$
- $(B + C) \times A = (B \times A) + (C \times A)$
- $A \times (B + C) \neq (B + C) \times A$

Matrices

Matriz identidad y matriz inversa

$$A \cdot I = A = I \cdot A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

- La matriz identidad es una matriz que cumple la propiedad de ser el elemento neutro del producto de matrices.
- La matriz inversa A^{-1} de una matriz A es la matriz que, al multiplicarse por la matriz original da como resultado la matriz identidad.
- $A \cdot A^{-1} = I$
- Se puede calcular con una matriz aumentada.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1}$ $\qquad AA^{-1} = I$

4. -2. 2. 0

2 $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad AA^{-1} = I$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\,2 + (-1)(-\frac{1}{2}) & (-\frac{1}{8})(2) + (-\frac{1}{4})(-1) \\ (\frac{1}{4})(-4) + (-\frac{1}{2})(-2) & (-\frac{1}{8})(-4) + (-\frac{1}{4})(-2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices

Matriz transpuesta

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = I$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$A \cdot I = A = I \cdot A$$

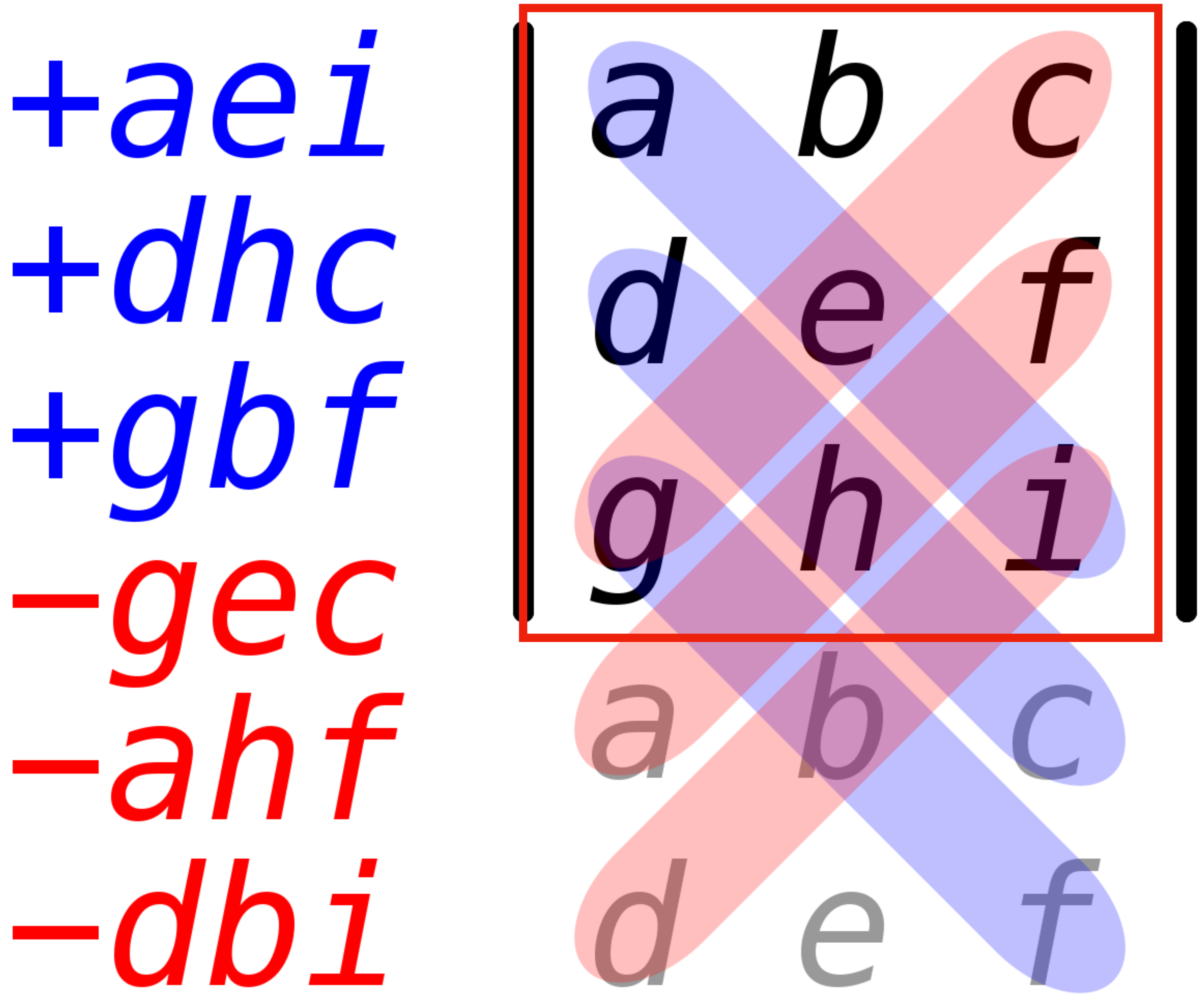
- La transpuesta de una matriz se obtiene al intercambiar sus filas por sus columnas (o viceversa).
- $A = \begin{bmatrix}a & b & c\\d & e & f\end{bmatrix}; \quad A^T = \begin{bmatrix}a & d\\b & e\\c & f\end{bmatrix}$

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix}a & b & c\\d & e & f\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}a & d\\b & e\\c & f\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a^2+b^2+c^2 & ad+eb+fc\\ad+eb+fc & d^2+e^2+f^2\end{bmatrix}$$

Matrices

Determinante

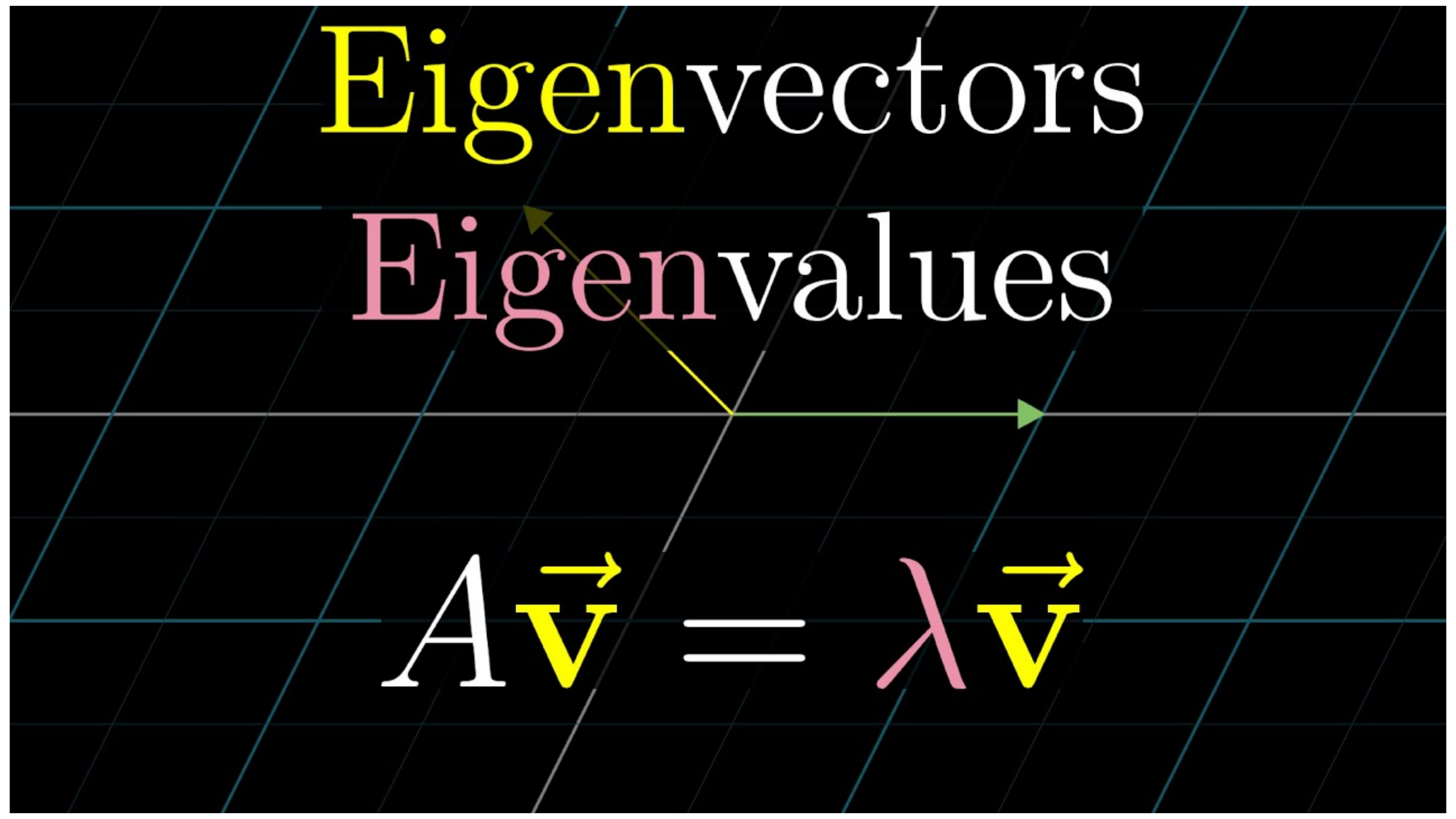
- El **determinante de una matriz** es un valor escalar utilizado para obtener la matriz inversa de una matriz cuadrada.
- El método de Sarrus consiste en:



Componentes principales

Cálculo (Alternativo, Eigenvalores y Eigenvectores)

Link



$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathbf{a}_1} = \Sigma \cdot \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} \cdot \Sigma - \lambda \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \Sigma \mathbf{a}_1 = \lambda \mathbf{a}_1$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{a}_1 - 1 = 0$$

- Otra forma de verlo puede ser como ecuación de eigenvectores,

$$\Sigma \mathbf{a}_1 = \lambda \mathbf{a}_1$$

- Σ es una matriz de orden m. Dimensiones $m \times m$.
- $\mathbf{a}_1$ es un eigenvector asociado a esta matriz Σ.
- λ es el eigenvalor asociado al eigenvector $\mathbf{a}_1$.

Regresión lineal múltiple

Regresión lineal múltiple

Definición

- En una regresión lineal múltiple se trabajan con más de 1 variable independiente.
- $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_n x_{ni} + \epsilon_i$
- O de forma equivalente, $y_i = \beta_0 + \left(\sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij} \right) + \epsilon_i$ para k variables independientes.

Regresión lineal múltiple

Forma matricial

- O puesto de otra forma,
- $y_1 = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{1j} + \epsilon_1$
- $y_2 = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{2j} + \epsilon_2$
- $y_3 = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{3j} + \epsilon_3$
- $\vdots$
- $y_n = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{nj} + \epsilon_n$

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\mathrm{Y} = \mathrm{X}\beta + \epsilon}$$

Regresión lineal múltiple

Mínimos cuadrados

- Queremos minimizar $\sum_{i=1}^{n} \hat{\epsilon}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{1i} - \ldots - \hat{\beta}_k x_{ki})^2$
- O puesto en forma matricial
- $\epsilon^T \epsilon = (Y^T - B^T X^T)(Y - BX)$
- Que se puede desarrollar y llegar a que:

$B^T X^T Y = Y^T X B$

- $\epsilon^T \epsilon = Y^T Y - 2B^T X^T Y + B^T X^T X B$

Regresión lineal múltiple

Mínimos cuadrados

- Entonces, tomando la primera derivada,
- $\dfrac{\partial(\epsilon^T \epsilon)}{\partial B} = -\,2X^TY + 2X^TXB$
- Al igualar a cero. Ya estamos considerando solamente los estimadores de la minimización $\hat{\beta}$,
- $-2X^TY + 2X^TX\beta = 0 \Rightarrow X^TX\beta = X^TY$
- Multiplicando por la inversa de la matriz X^TX
- $\beta = (X^TX)^{-1}X^TY$