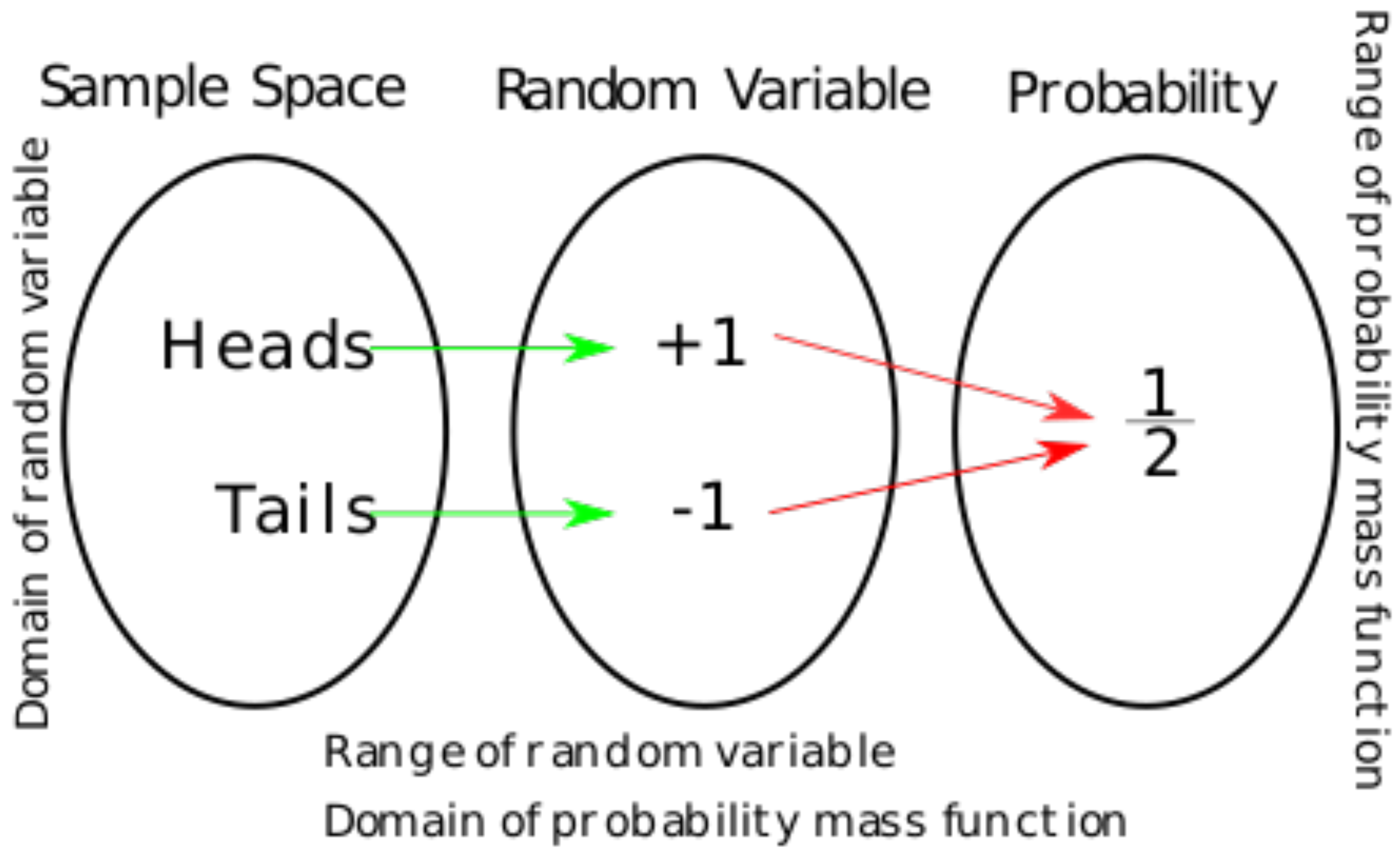
Introducción a Probabilidad

Propedéutico de la Maestría en Ciencia de Datos.
CUCEA, Universidad de Guadalajara. 2024B

Guadalajara, Jal. Junio de 2025

¿Que significa tener algo aleatorio?

- Tener algo aleatorio significa tener algo que carece de un patrón, o que no puede predecirse con exactitud.
- **Ejemplo comunes.** La tirada de una moneda, de un dado, toma una carta de una baraja.



Probabilidad

Overview

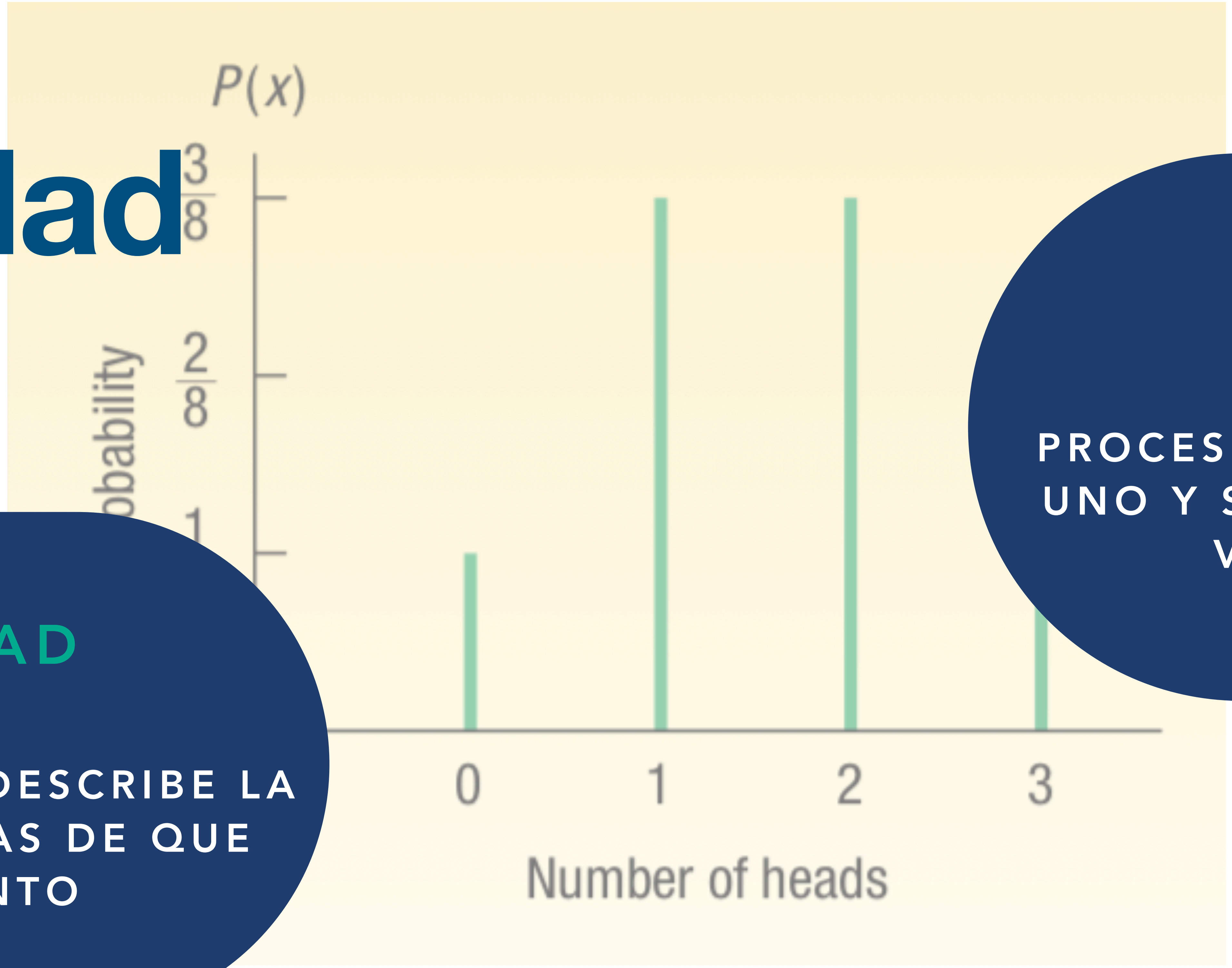
- La probabilidad de un resultado un fenómeno aleatorio es la proporción de veces que ocurre un resultado en una serie grande de repeticiones. El valor puede ir de 0 a 1.

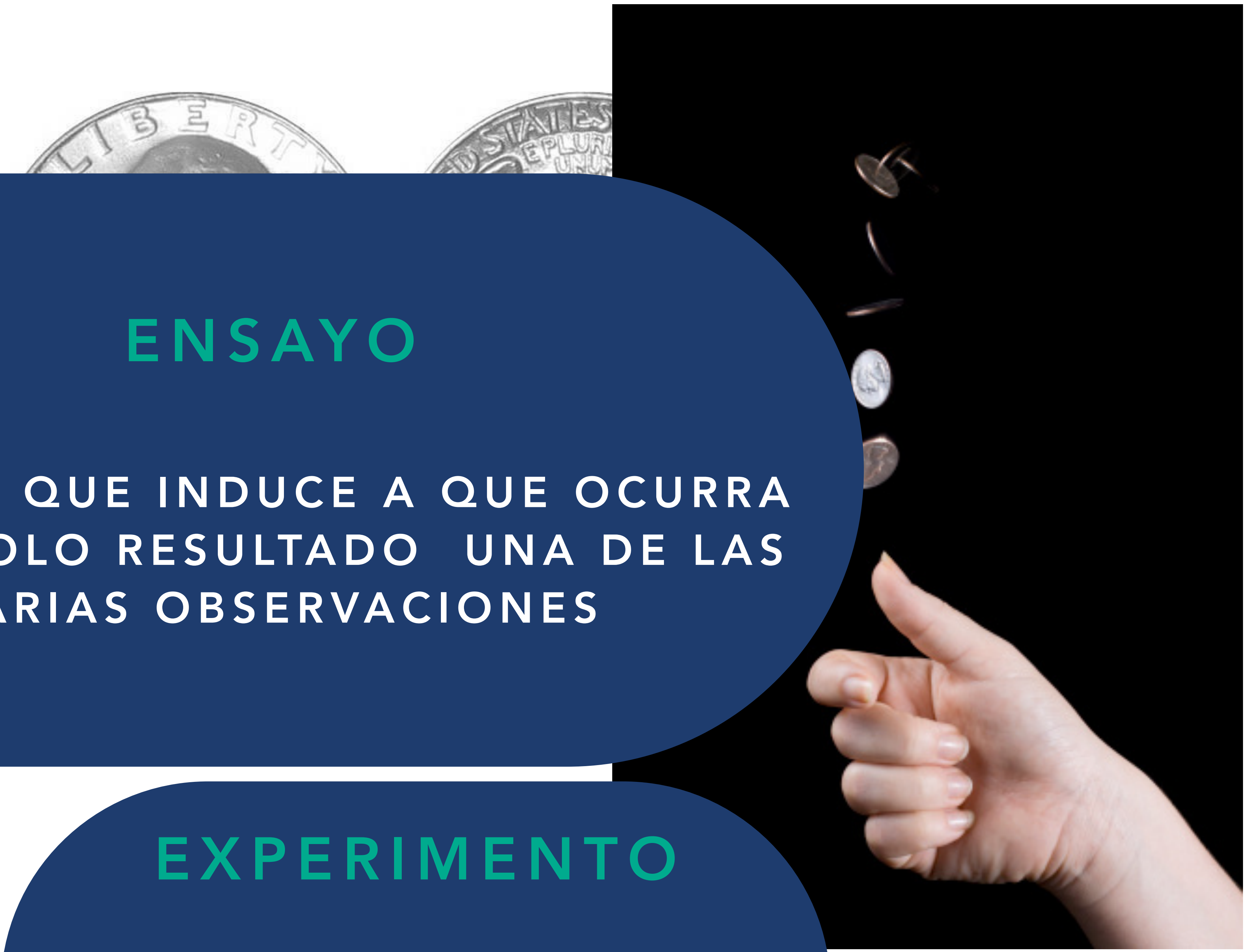
- Por ejemplo, si tener águila en la tirada de una moneda es considerada un acierto, deberíamos tener un acierto 1/2 del tiempo, i.e., la probabilidad de tener un resultado de acierto en una tirada es de 0.5.

- $P(E_{aguila}) = 0.5$

Probabilidad

Terminología





PROBABILIDAD

VALOR ENTRE 0 Y 1 QUE DESCRIBE LA PROBABILIDAD RELATIVAS DE QUE OCURRA UN EVENTO

ENSAYO

PROCESO QUE INDUCE A QUE OCURRA UNO Y SOLO RESULTADO UNA DE LAS VARIAS OBSERVACIONES

EXPERIMENTO

PUEDE INCLUIR LA REALIZACIÓN DE UNO O VARIOS ENSAYOS

RESULTADO

EL RESULTADO PARTICULAR DE UN EVENTO

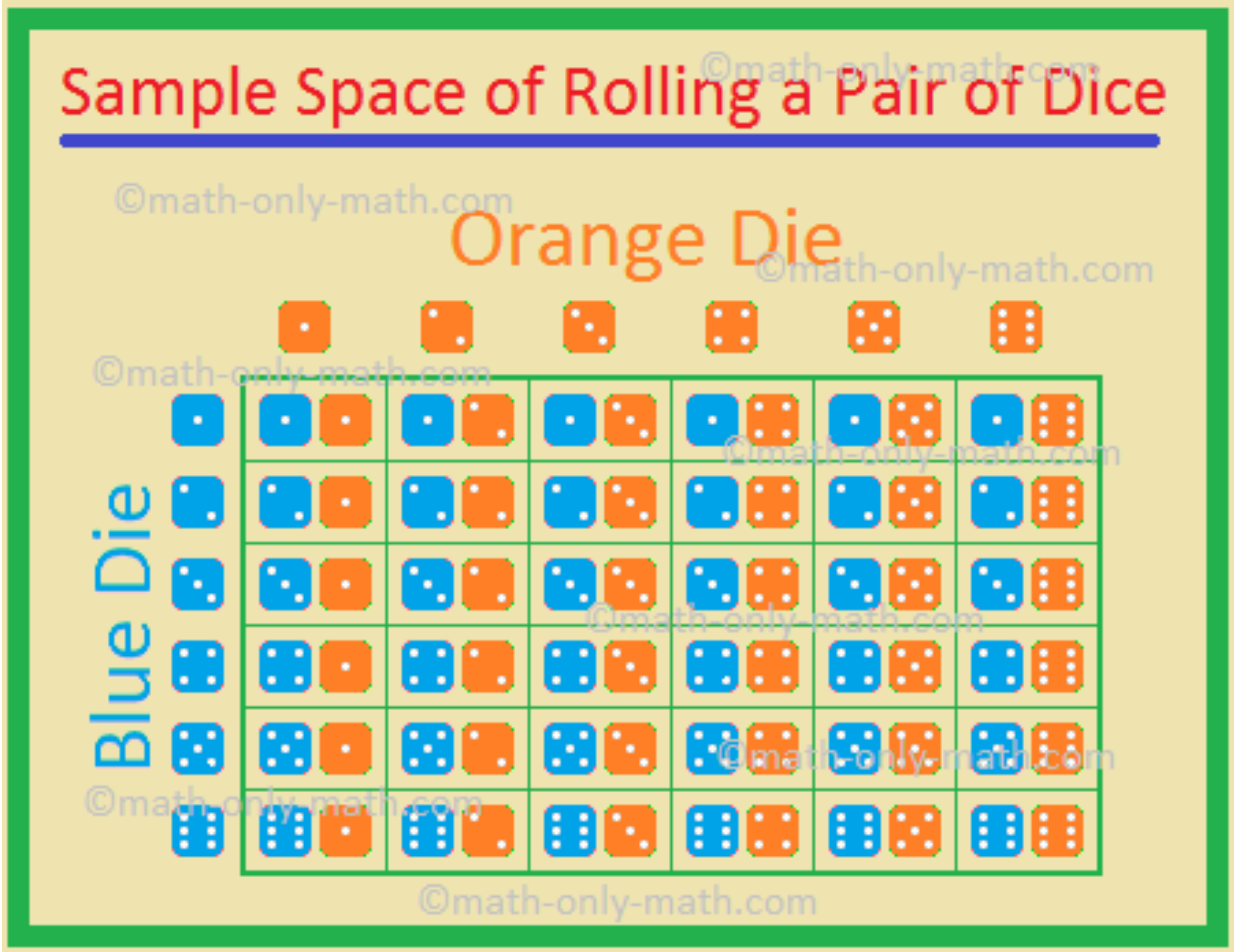
EVENTO

CONJUNTO DE UNO O MÁS RESULTADOS DE UN EXPERIMENTO

Probabilidad

Espacio muestral

- Un espacio muestral es una colección o conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Normalmente es representado por S
Ejemplo: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, ó $S = \{\text{Aguila, Sello}\}$.



	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Probabilidad

Probabilidad clásica

- Basada en la suposición de que todos los resultados de un experimento son igualmente probables.
- $\text{Probabilidad de un evento} = \dfrac{\text{Numero de resultados favorables}}{\text{Numero Total de resultados posibles}}$
- Ejemplo: Probabilidad de tener un número par. En este caso los resultados “favorables” son 2,4,6, y la probabilidad de este evento sería 0.5

Probabilidad

Probabilidad empírica

- **Ley de grandes números.** Para experimentos independientes, mientras aumenta el número de éstos, la frecuencias relativa de eventos repetidos se acerca cada vez más a un valor singular. Ejemplo: Al tirar una moneda varias veces es dónde se aprecia la prob. 0.5

- Si observamos repetidamente un resultado de un evento, entonces la fracción de veces que se tiene dicho acierto es la **probabilidad empírica**.

- Al tirar una sola vez una moneda, la frecuencia relativa está entre 0 y 1. Al tirar varias veces se aproxima a 0.5

$$\text{Frecuencia Relativa } (A) = \frac{\text{Numero de veces que ocurre A}}{\text{Total de experimentos}}$$

Probabilidad

Probabilidad subjetiva

- Este tipo de probabilidad es subjetiva
- Se basa en la experiencia de una persona (puede ser un experto), y a veces es basado en una ocurrencia similar del mismo evento en el pasado.
- Ejemplo: Como está el clima. Hay probabilidad 30% de que llueva.

Probabilidad

Kolmogorov's axioms

- $P(C) \geq 0$, para todos los eventos C. La probabilidad de un resultado particular está entre 0 y 1.
- $P(S) = 1$. La lista es exhaustiva, la suma de probabilidades de los varios eventos es 1.
- Para una colección de eventos mutuamente exclusivos $\hat{C} = \{C_1, C_2, \ldots\}$, se tiene que $P\left(\bigcup_{C \in \hat{C}} C\right) = \sum_{C \in \hat{C}} P(C)$

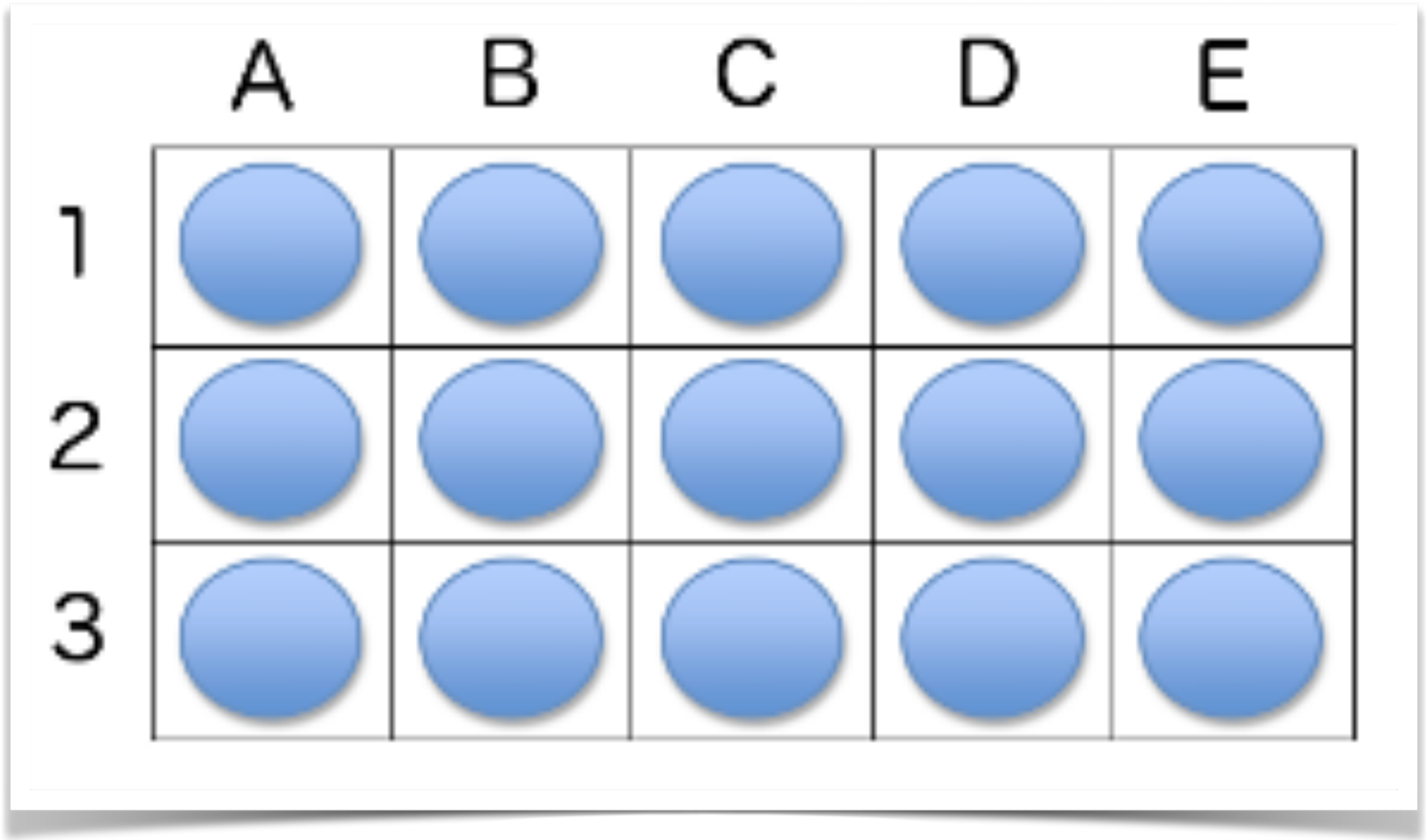
Métodos de conteo

Métodos de conteo

Introducción

- Si el número de resultados posibles de un experimento es pequeño, es relativamente sencillo contarlos. Por ejemplo, al tirar un dado tenemos 6 posibles resultados.
- ¿Pero qué tal algo más complicado,? como el caso que vimos de tirar 10 veces una moneda. En ese caso a veces tendremos todas águilas (super raro), o un águila y nueve sellos, y así...
- Consideremos qué tantas formas uno puede seleccionar una letra del set {A,B,C,D,E} y un número del set {1,2,3}.

Tenemos $5 \times 3 = 15$ posibles resultados.

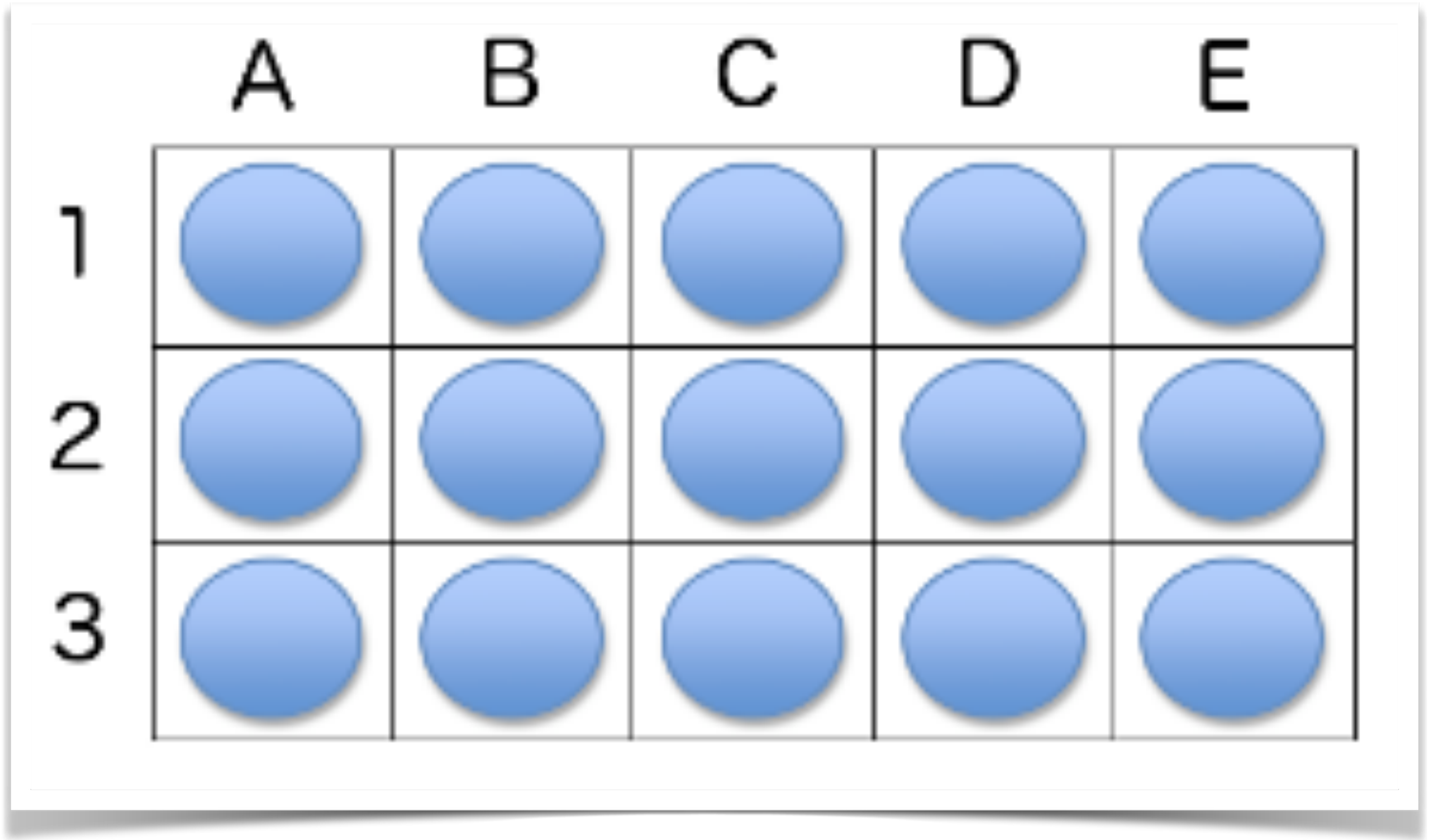


Métodos de conteo

Introducción

- De igual forma, el número de formas que puede ocurrir dos eventos, donde el primero puede ocurrir en k_1 formas posibles, y el segundo en k_2 formas posibles, debe ser $k_1 k_2$.
- En general, para n eventos, se tendrían $k_1 k_2 \cdots k_n$.
- También llamada **Fórmula de multiplicación**

Tenemos $5 \times 3 = 15$ posibles resultados.



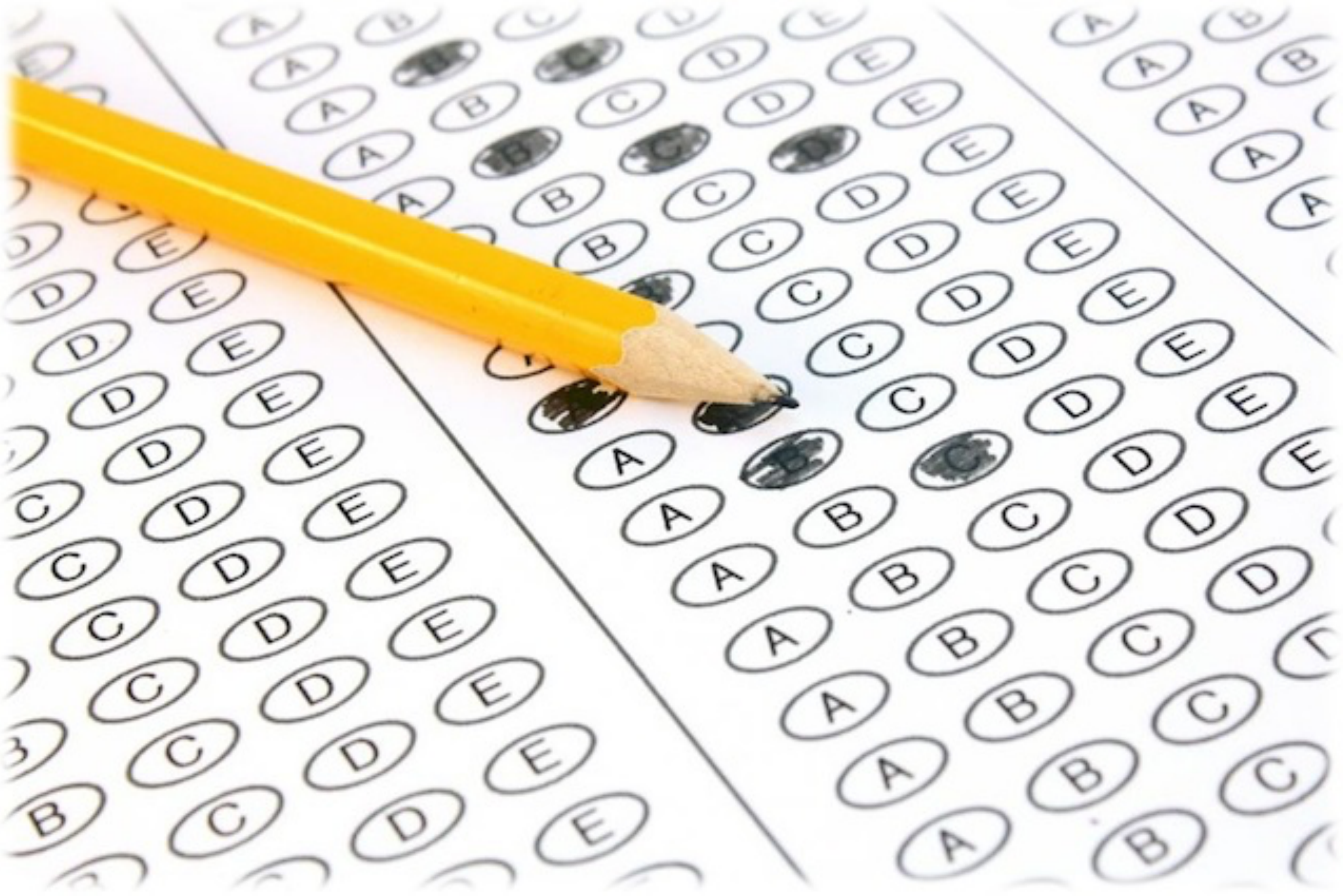
Métodos de conteo

Combinaciones y permutaciones

Métodos de conteo

Permutación con repetición

- Cuando una cosa tiene n tipos distintos, cada vez que uno elige se tienen k opciones.
- De la regla fundamental de conteo n eventos con $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = k$ posibilidades.
- Las número de permutaciones está dado por k^n.



Métodos de conteo

Permutación sin repetición (todos los elementos)

- Consideremos las posibles permutaciones sin repetir de tres letras diferentes $\{a, b, c\}$.
- $[a, b, c], [a, c, b], [b, a, c], [b, c, a], [c, a, b], [c, b, a]$
- Tenemos 6 posibles permutaciones.
- Aplicamos la regla fundamental de conteo. Tenemos $n = 3$ eventos (elegir la primera, segunda y tercera letra).
- Al elegir la primera letra tenemos tres opciones a escoger ($k_1 = 3$).
- En las próximas esto se reduce. $k_2 = 2$,$k_3 = 1$
- El número de permutaciones está dada por $k_3 \times k_2 \times k_1$

Métodos de conteo

Permutación sin repetición (todos los elementos)

- Cuando se considera una permutación sin repetición. El número de opciones se reduce por 1 en cada evento de elección.

- Para eventos simples, donde se eligen todos los elementos de un conjunto, en general el número de permutaciones está dado por $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Métodos de conteo

Permutación sin repetición (subconjunto de elementos)

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

- Pero eso no es todo, tenemos que considerar que el factorial no iría completo,
- En el caso de las siete personas, podemos escribir

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{\boxed{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot} 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7!}{3!} = \frac{7!}{(7-4)!}$$

- En forma general, contando el número de formas que uno puede arreglar a un grupo de k cosas, seleccionado de un grupo de n cosas, en secuencia, es llamado **fórmula de permutación.**

$$_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Métodos de conteo

Permutaciones (Ejemplo)

$$_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Un sitio web requiere de un contraseña de 4 caracteres.
- Los caracteres pueden ser ya sea letras minúsculas o dígitos 0-9.
- No se puede repetir una letra o un número.
- ¿Qué tantas contraseñas diferentes existen?

Sin repetición

Letras + dígitos = 37

$$_{37}P_4 = \frac{37!}{(37-4)!}$$

[redacted]

Métodos de conteo

Permutaciones (Ejemplo)

- Un sitio web requiere de un contraseña de 4 caracteres.
- Los caracteres pueden ser ya sea letras minúsculas o dígitos 0-9.
- No se puede repetir una letra o un número.
- ¿Qué tantas contraseñas diferentes existen?
- Resolución: 27 letras y 10 dígitos, 37 caracteres posibles.
- $n = 37; \quad k = 4$
- Permutación sin repetición: ${}_7P_4 = \frac{37!}{(37-4)!} = \frac{37!}{33!} = \frac{37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32\ldots}{33 \cdot 32 \cdot 31 \cdots} = 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34$

Métodos de conteo

Permutaciones (Ejemplo)

- Cuántas placas de 4 dígitos diferentes se pueden crear usando los números 0-9, permitiendo que se repitan.

[redacted]

Métodos de conteo

Permutaciones (Ejemplo)

- Cuántas placas de 4 dígitos diferentes se pueden crear usando los números 0-9, permitiendo que se repitan.

$$n = 4; \quad k = 10$$

$$k^n = 10^4$$

Métodos de conteo

Permutación de objetos idénticos

- Generalizando, para un grupo de n objetos que caen en k grupos, donde los elementos de un grupo son indistinguibles entre ellos, pero sí distinguibles con respecto a otro grupo, donde el número de objetos en estos grupos son dados por $n_1, n_2, \ldots, n_k$, entonces el número de formas de arreglar estos n objetos está dada por:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

- Consideremos cuántas formas hay de ordenar las letras de la palabra **MISSISSIPPI**

- Aquí hay que considerar que, por ejemplo, una letra S es idéntica a una letra S, por lo que intercambiar S's no cambiaría la palabra, es decir, hay varios duplicados que hay que eliminarse.

- Antes que nada, tratando de cosas totales, como si cada letra fuera diferente, tenemos 11 letras totales en un arreglo de 11 letras, por lo que tenemos 11! Permutaciones totales. (Sin considerar duplicados).

$$\frac{11!}{1!4!4!2!}$$

MISSISSIPPI

$$M \longrightarrow 1!$$

$$S \longrightarrow 4!$$

$$I \longrightarrow 4!$$

$$P \longrightarrow 2!$$

Métodos de conteo

Combinaciones (sin repetición)

- A diferencia de la permutación, el arreglo de los objetos a considerar no llevan un orden específico.

- Por ejemplo, los arreglos $[a, b, c], [a, c, b], [b, a, c], [b, c, a], [c, a, b], [c, b, c]$ en el caso de una combinación serían idénticos, y sólo se tomarían como un solo objeto en la combinación.

ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA
ABE	AEB	BAE	BEA	EAB	EBA
ACD	ADC	CAD	CDA	DAC	DCA
ACE	AEC	CAE	CEA	EAC	ECA
ADE	AED	DAE	DEA	EAD	EDA
BCD	BDC	CBD	CDB	DBC	DCB
BCE	BEC	CBE	CEB	EBC	ECB
BDE	BED	DBE	DEB	EBD	EDB
CDE	CED	DCE	DEC	ECD	EDC

$$_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ABC
ABD
ABE
ACD
ACE
ADE
BCD
BCE
BDE
CDE

Fórmula de combinación

$$_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA

$$k = 3$$ Número de elementos a ordenar

$$k! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Métodos de conteo

Combinaciones (sin repetición): Ejemplo

- El departamento de marketing tiene la tarea de asignar códigos de color para 42 diferentes líneas de libros vendidos por cierta compañía. Tres colores se tienen que usar para cada línea, pero una combinación de 3 colores usada para uno no puede ser usada para otro.

- ¿7 colores son suficientes para tener 3 a la vez para codificar las 42 líneas.

- ${}_7C_3 = \dfrac{7!}{3!4!} = 35$

- Es decir, sólo hay 35 combinaciones posibles, se necesitan más colores

- En el caso de 8 colores ,tengo ${}_8C_3 = \dfrac{8!}{3!(8-3)!} = ?$

Métodos de conteo

Combinaciones (con repetición)

- El número de combinaciones de k objetos tomados de un conjunto de n objetos donde se permite repetición del objeto está dado por:

$$_{n+k-1}C_k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

$$_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

~~X1~~ X2 ~~X3~~ X4 ~~X1~~ X3

X1 X3 X1

Métodos de conteo

Resumen

☆ Cuadro lógico de Análisis Combinatorio – Resumen

	Orden	Repetición	
Variaciones	Importa	No	$V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$
		Sí	$V'_{n,r} = n^r$
Permutaciones n = r	Importa	No	$P_{n,r} = n!$
		Sí	$P'_{n,\,r(a,b,c)} = \frac{n!}{a!\,.b!\,.c!}$
Combinaciones	NO Importa	No	$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$
		Sí	$C'_{n,r} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,.\,(n-1)!}$

1. **(10 puntos)** Utilizar los distintos métodos de conteo para contestar lo siguiente:

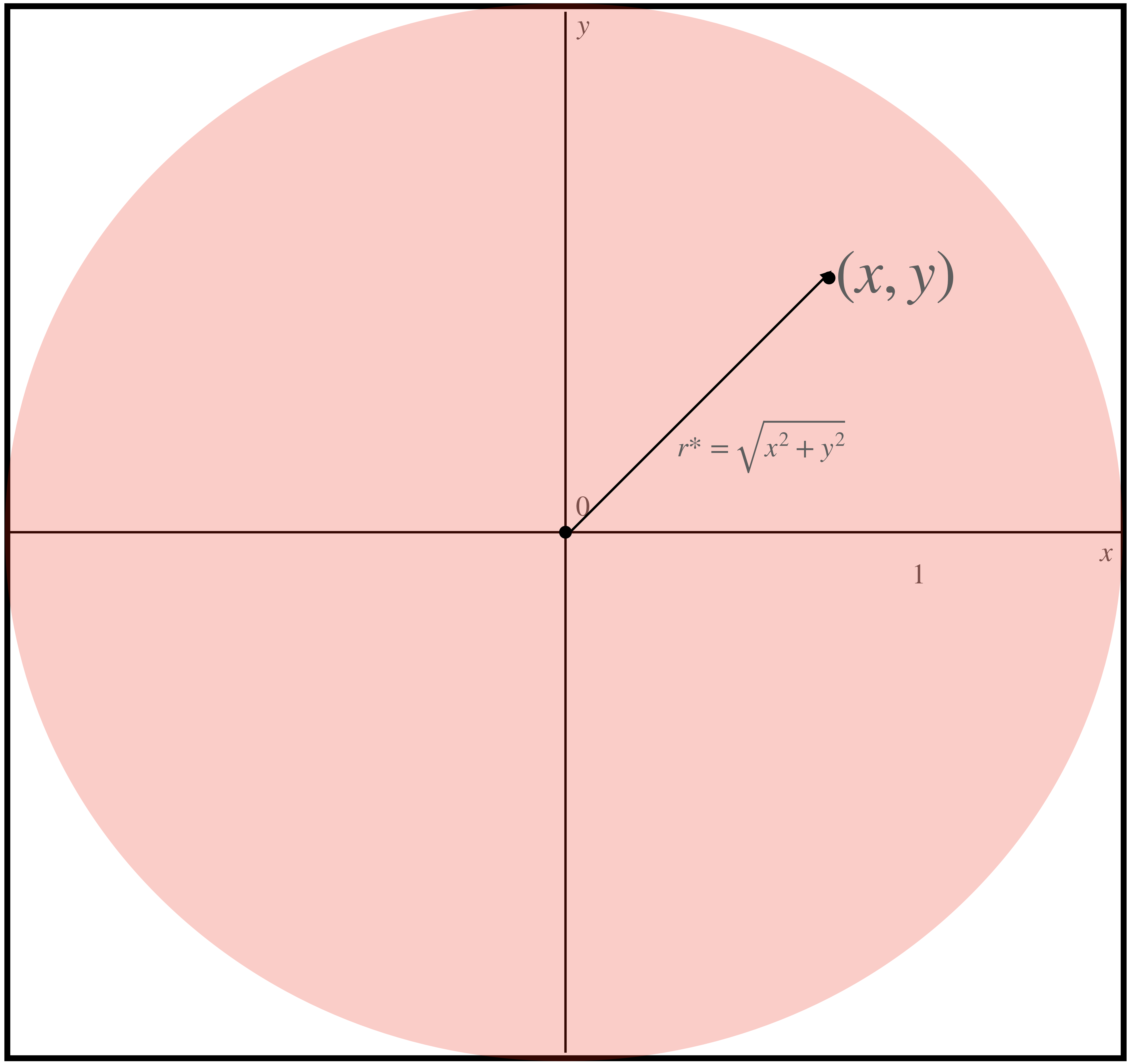
   - Si tienes 2 pares de zapatos, 3 pantalones, y 5 camisas, ¿ cuántos outfits diferentes puedes hacer?
   - ¿ Un examen de opción múltiple tiene 20 preguntas. Cada pregunta tiene 3 opciones de respuestas y sólo se escoge 1 de ellas por pregunta. ¿Cuántas maneras diferentes de contestar el examen existen?
   - ¿Cuántas maneras hay de arreglar 4 cuadros **en orden** en una pared si tienes 7 cuadros (diferentes entre sí) para escoger?
   - ¿En cuántas posibles formas puedes reordenar las letras (**permutacion de objetos idénticos**) de la palabra INTERNET ?
   - Un club tiene 20 miembros. ¿Qué tantas maneras hay para escoger un comité de 4 personas?
   - Entras a la tienda de la dulces de la rosa (Av Aztecas 3200). Tienes suficiente dinero para escoger 6 piezas de dulce y tienes tres opciones de dulces: Mazapanes, Duvalines y Pulparindos. ¿Cuántas combinaciones puedes hacer al elegir 6 piezas? (puedes elegir el mismo dulce varias veces).

$$P = \frac{1}{4} = \frac{Q}{A}$$

$$A = 4$$

$$P = \frac{A_{\circ}}{A_{\text{square}}} = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\pi = 4P$$



Escribir el procedimiento completo (ecuaciones y variables utilizadas) para resolver los siguientes problemas:

1. **(10 puntos)** Utilizar los distintos métodos de conteo para contestar lo siguiente:

Multiplicación

- Si tienes 2 pares de zapatos, 3 pantalones, y 5 camisas, ¿ cuántos outfits diferentes puedes hacer?

$$k_1 \times k_2 \times k_3$$

Permutacion con repeticion

- ¿ Un examen de opción múltiple tiene 20 preguntas. Cada pregunta tiene 3 opciones de respuestas y sólo se escoge 1 de ellas por pregunta. ¿Cuántas maneras diferentes de contestar el examen existen?

$$k^n$$

Permutacion sin repeticion, sin contar todos los elementos

- ¿Cuántas maneras hay de arreglar 4 cuadros **en orden** en una pared si tienes 7 cuadros (diferentes entre sí) para escoger?

$${}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutacion de objetos idénticos

- ¿En cuántas posibles formas puedes reordenar las letras (**permutacion de objetos idénticos**) de la palabra INTERNET ?

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots}$$

Combinación sin repeticion

- Un club tiene 20 miembros. ¿Qué tantas maneras hay para escoger un comité de 4 personas?

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Combinación con repeticion

- Entras a la tienda de la dulces de la rosa (Av Aztecas 3200). Tienes suficiente dinero para escoger 6 piezas de dulce y tienes tres opciones de dulces: Mazapanes, Duvalines y Pulparindos. ¿Cuántas combinaciones puedes hacer al elegir 6 piezas? (puedes elegir el mismo dulce varias veces).

$${}_{n+k-1}C_k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

3. **(20 puntos)**. Al realizar un análisis de regresión lineal es necesario hacer el ajuste de todos los modelos posibles, considerando todos los modelos de una variable, todos los de dos, todos los de tres, ..., etc. Considerando un conjunto de 5 variables predictivas entonces se deberán revisar modelos de 5, de 4, de 3, de 2 y de 1 variable. Recordar que aquí el orden de las variables predictivas no es importante, i.e., el modelo que implica la variable x_1 y x_2 es el mismo que el modelo que implica x_2 y x_1.

- ¿Cuántos modelos de regresión de 3 variables se tienen que revisar? ${}_5C_3$
- ¿Cuántos modelos de regresión se tienen que revisar en total considerando que se tiene 5 variables de entrada? ${}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5$
- Del total de combinaciones calculado anteriormente, ¿cuál es la probabilidad de elegir un modelo que solo contenga 3 variables predictivas?

Combinaciones

$$\frac{{}_5C_3}{{}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5}$$

Teoría de conjuntos

MMM
HHH
MMH
MHH
HMM
HHM
MHM
HMH

$P(M > 1) = \frac{7}{8} = 0.875$

$$1 - P(M \cap M \cap M) = 1 - P(M) * P(M) * P(M) = 1 - (0.5)^6$$

$$P(H \cap M \cap H) = P(H) * P(M) * P(H) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

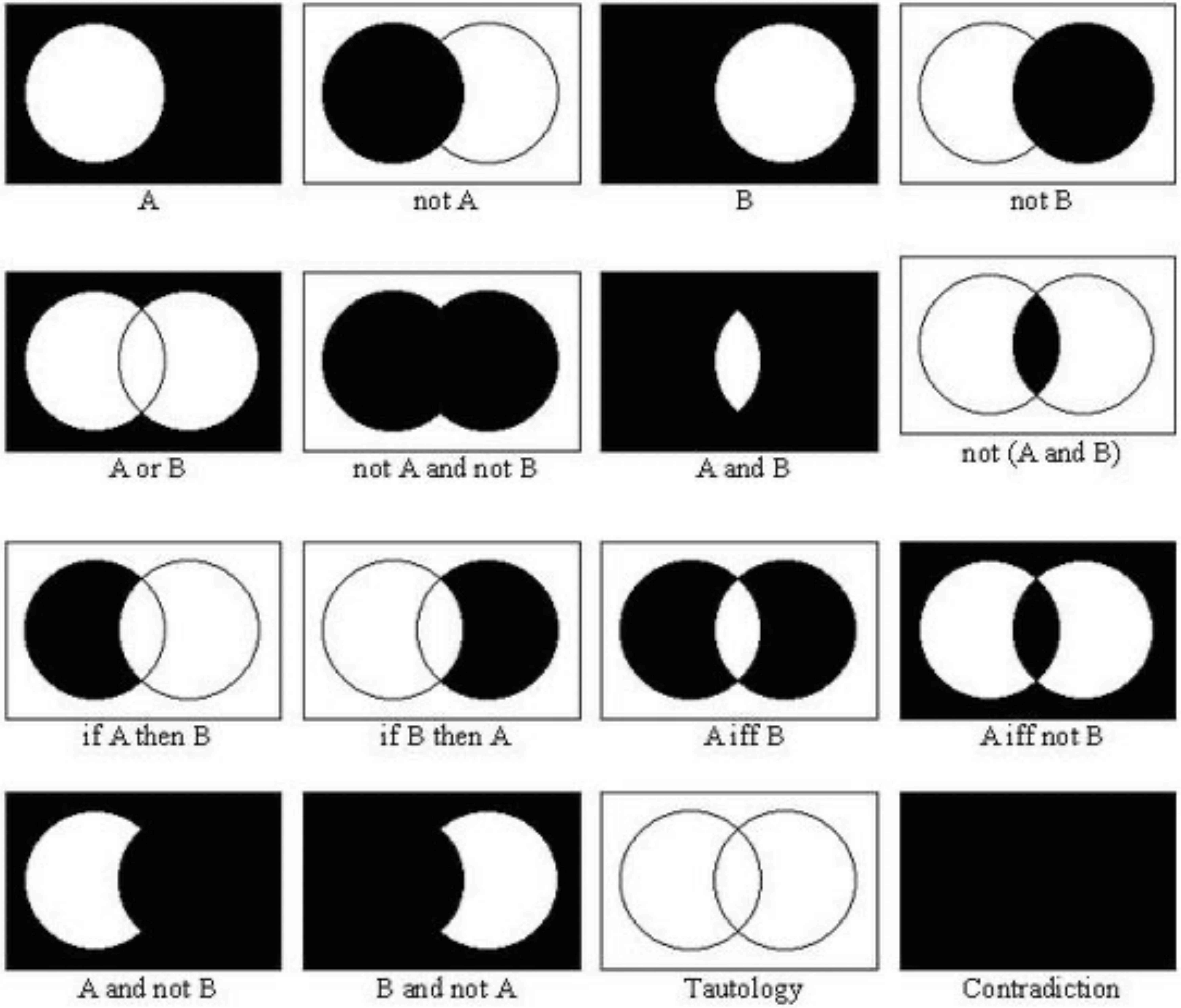
$$P(M \cap H \cap H) = P(M) * P(H) * P(H) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(H \cap H \cap M) = P(H) * P(H) * P(M) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(H \cap M \cap H) + P(H \cap M \cap H) + P(H \cap M \cap H)$$

Conjuntos

Overview

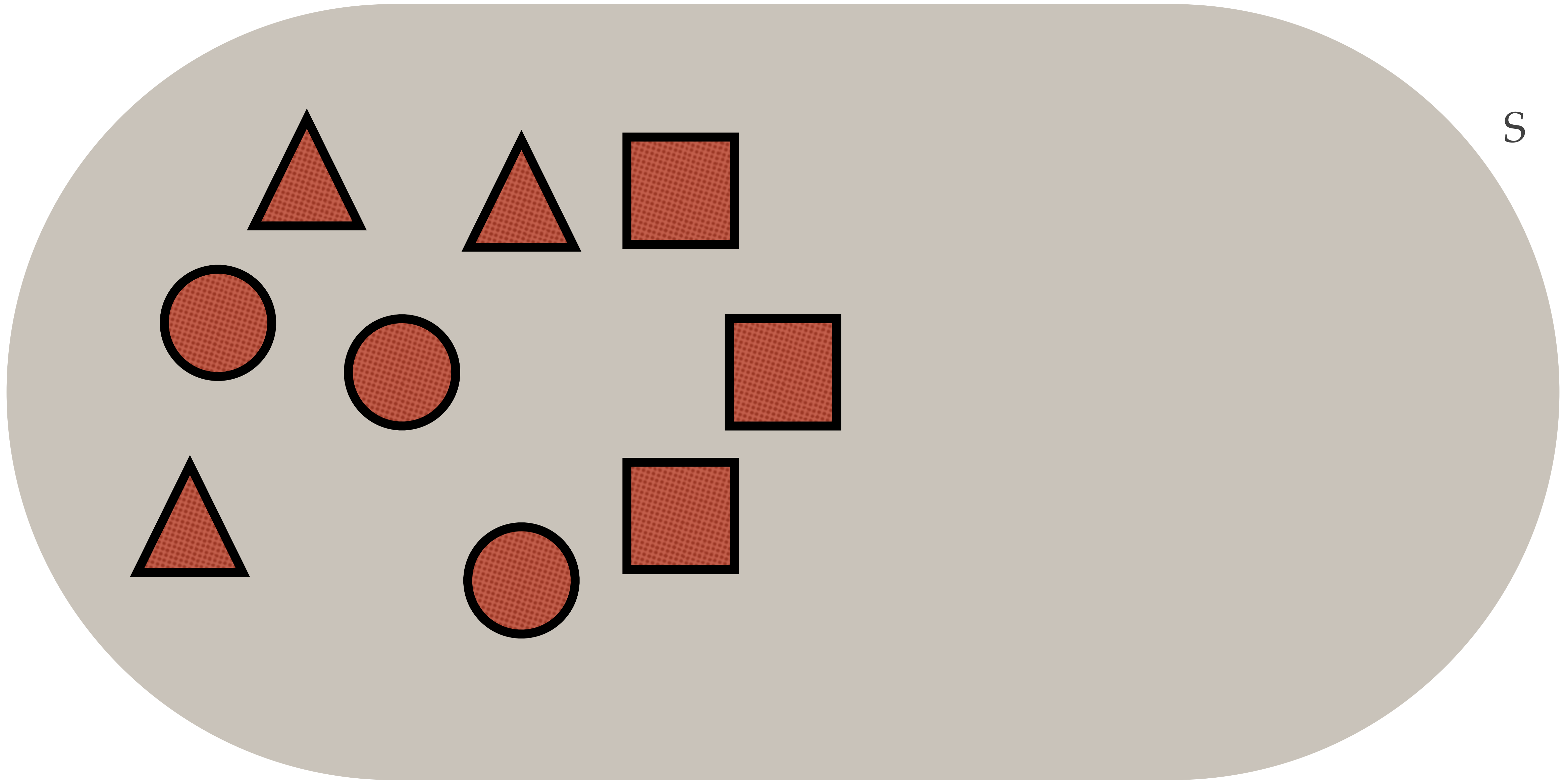


Conjuntos

Intersección

- En probabilidad, una intersección describe el espacio muestra donde dos eventos ocurren simultáneamente.
- Consideremos una caja con pelotas de color y algunas formas.

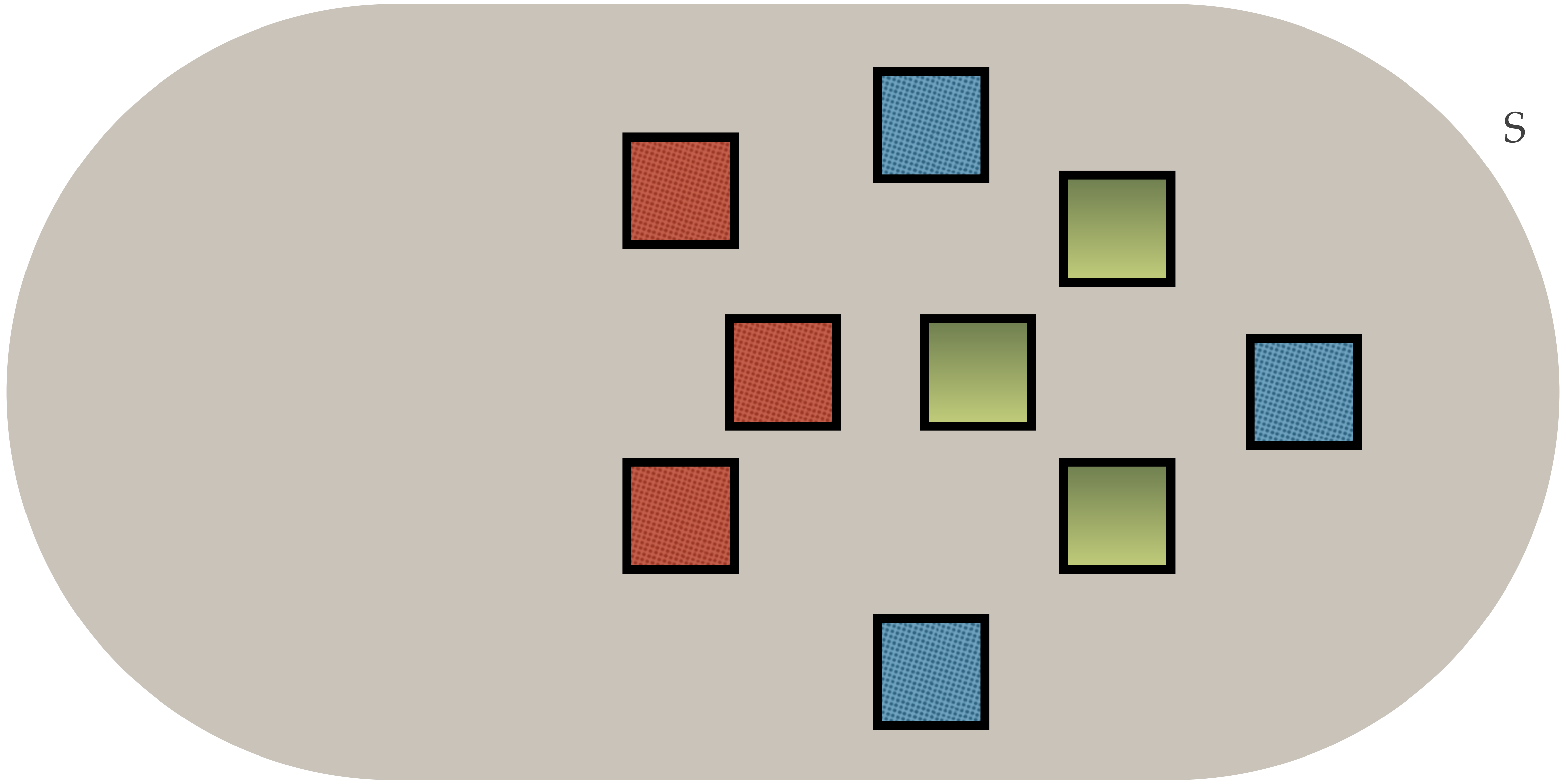
- 9 de las figuras son rojas



Conjuntos
Intersección

- En probabilidad, una intersección describe el espacio muestra donde dos eventos ocurren simultáneamente.
- Consideremos una caja con pelotas de color y algunas formas.

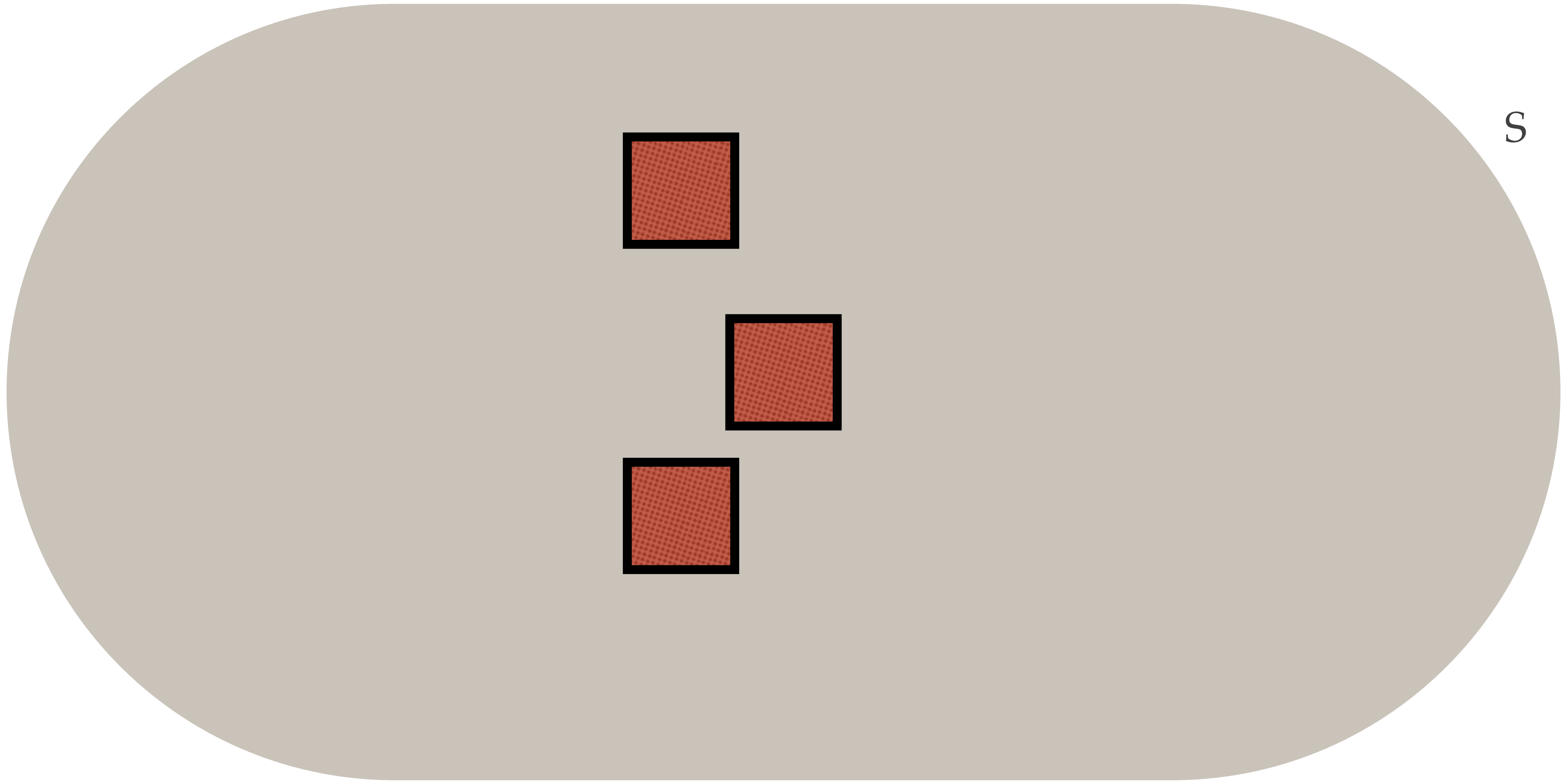
- 9 de las figuras son cuadrados.



Conjuntos
Intersección

- En probabilidad, una intersección describe el espacio muestra donde dos eventos ocurren simultáneamente.
- Consideremos una caja con pelotas de color y algunas formas.

- 3 de las figuras son rojas y cuadrados.

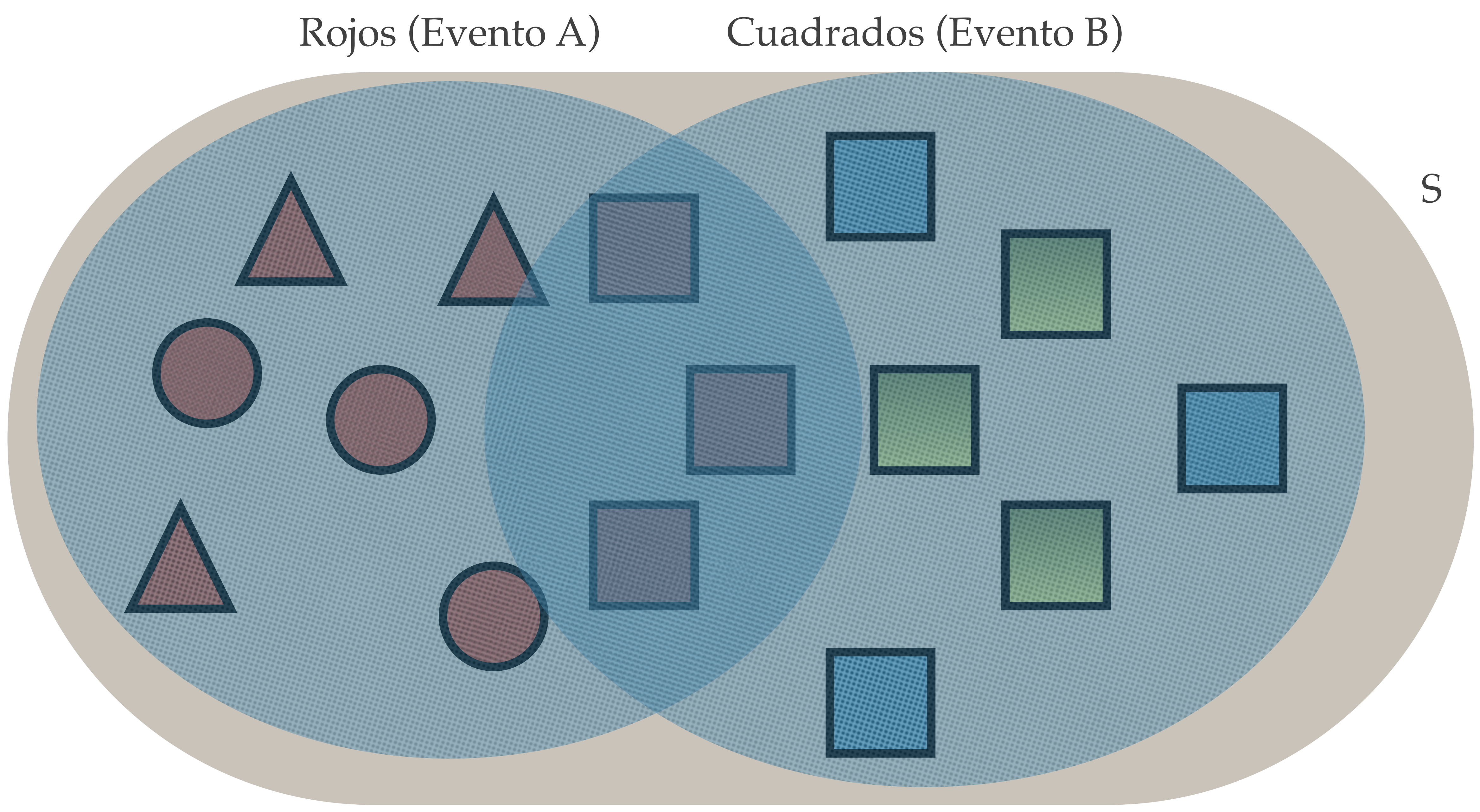


Conjuntos

Intersección

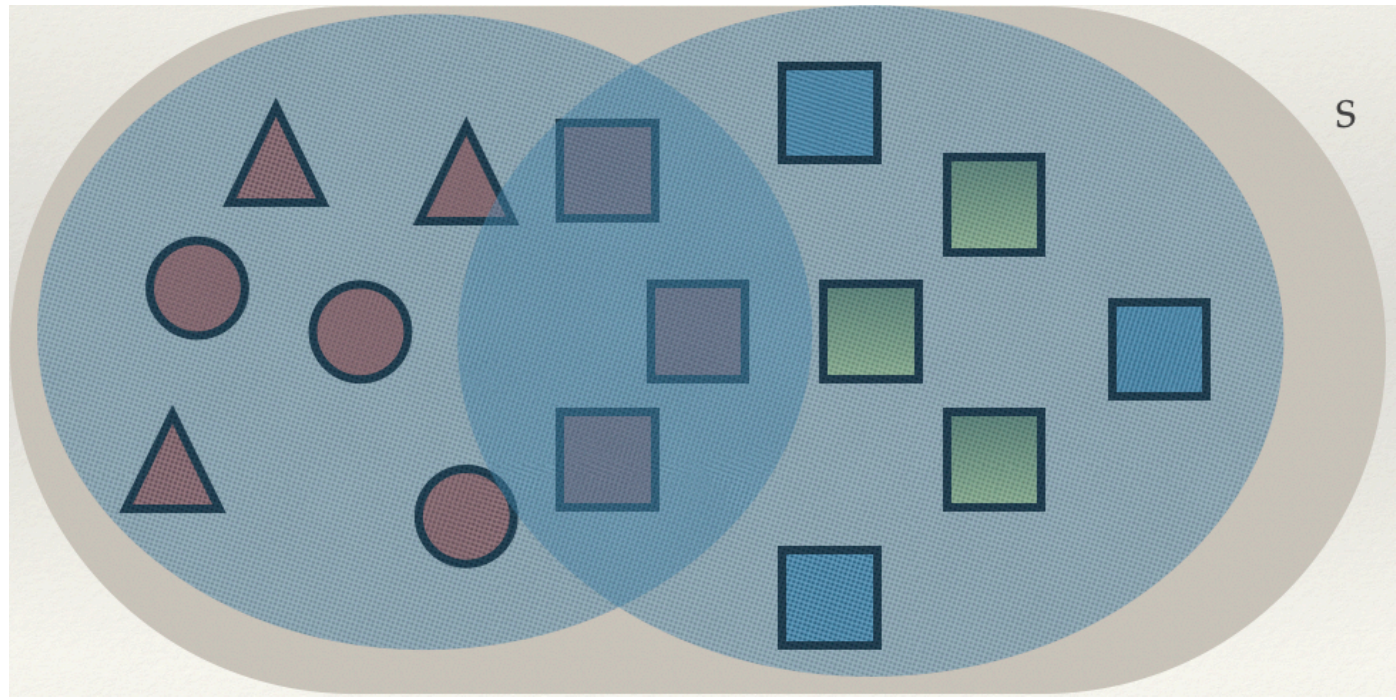
- En probabilidad, una intersección describe el espacio muestra donde dos eventos ocurren simultáneamente.
- Consideremos una caja con pelotas de color y algunas formas.

- Cuál es la probabilidad de tener un cuadrado rojo?



Conjuntos

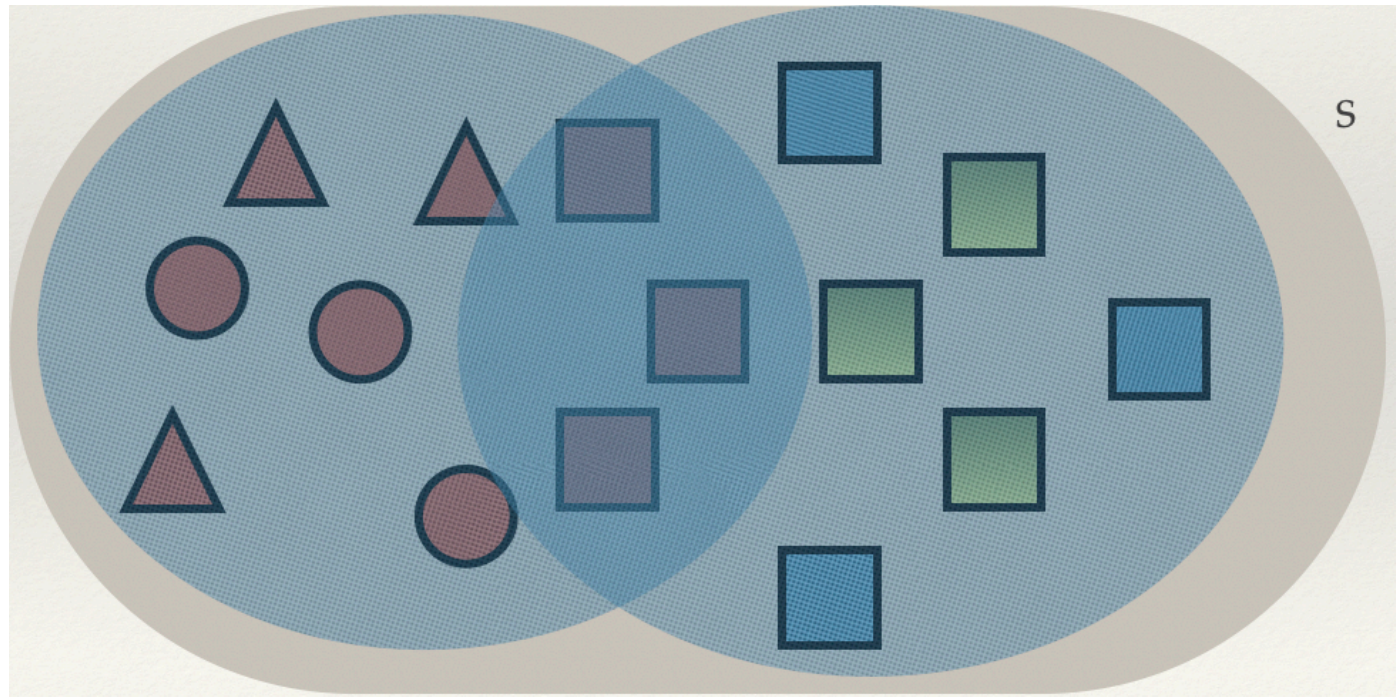
Intersección



- Si asignamos A como el evento de elegir objetos rojos.
- Asignamos B al evento de elegir objetos cuadrados.
- La intersección de A con B está dada por:
- $A \cap B$
- El orden aquí no es importante (un evento no afecta el otro).
- La probabilidad de A ($P(A)$) y B ($P(B)$) se denota por $P(A \cap B)$.
- En este caso se interpreta como:
- $P(A \cap B) = \dfrac{3}{15} = 0.2$

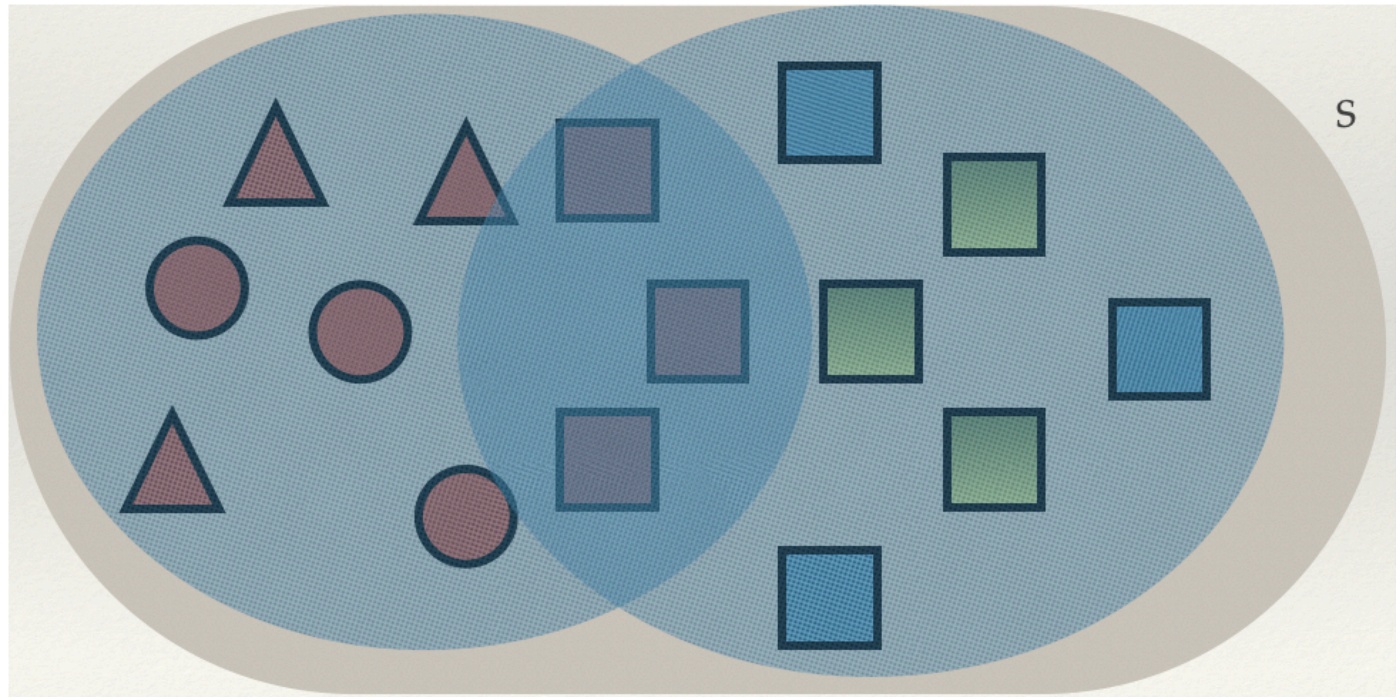
Conjuntos

Unión



- La unión de dos eventos considera si A **o** B ocurren (una **u** la otra), y se denota por $A \cup B$.
- Otra vez, aquí el orden no es importante.
- La probabilidad de A **o** B está dada por:
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- En este caso:
- $P(A \cup B) = \dfrac{9}{15} + \dfrac{9}{15} - \dfrac{3}{15} = 1.0$

Conjuntos
Complemento

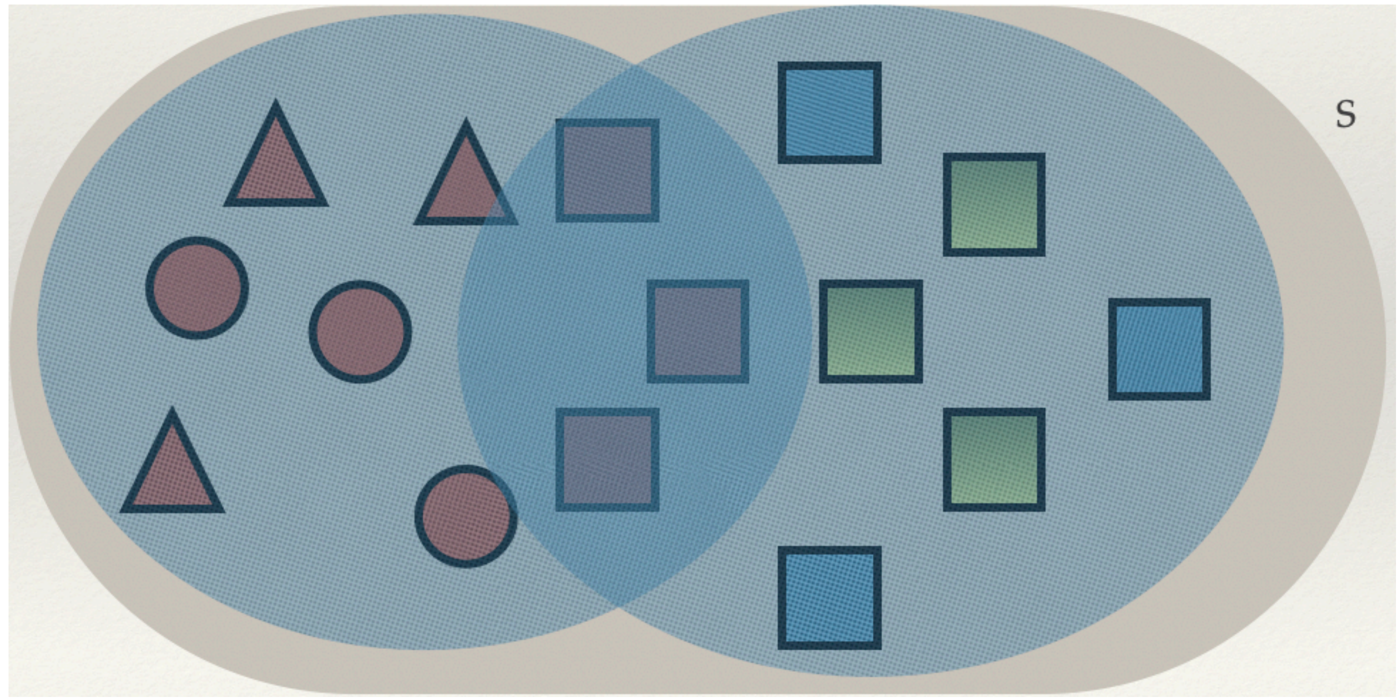


- El complemento de un evento considera todo resultado exterior al evento, denotado por $\bar{A}$.

- La probabilidad de no tener un evento A está dado por:

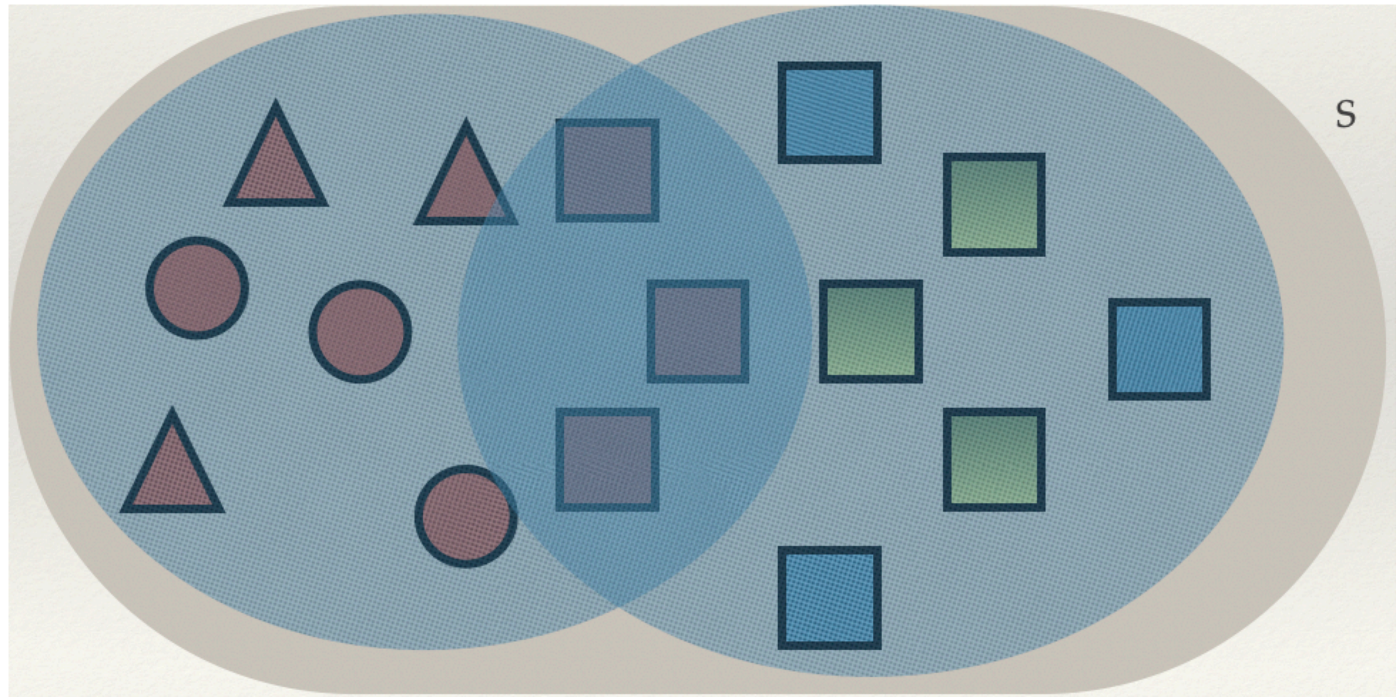
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \dfrac{15}{15} - \dfrac{9}{15} = \dfrac{6}{15} = 0.4$

Conjuntos
Ejemplo



- La probabilidad de que una carta escogida al azar de una baraja sea rey **O** corazón.
- Hay 52 cartas totales, 13 corazones, 13 espada, 13 trébol, 13 diamantes. De esas, 4 son reyes.
- A (rey), B (corazón)
- $P(A) = \dfrac{4}{52}; \quad P(B) = \dfrac{13}{52}; \quad P(A \cap B) = \dfrac{1}{52},$

Conjuntos
Ejemplo



- La probabilidad de que una carta escogida al azar de una baraja sea rey **O** corazón.
- Hay 52 cartas totales, 13 corazones, 13 espada, 13 trébol, 13 diamantes. De esas, 4 son reyes.
- A (rey), B (corazón)
- $P(A) = \dfrac{4}{52}; \quad P(B) = \dfrac{13}{52}; \quad P(A \cap B) = \dfrac{1}{52},$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 4/52 + 13/52 - 1/52$

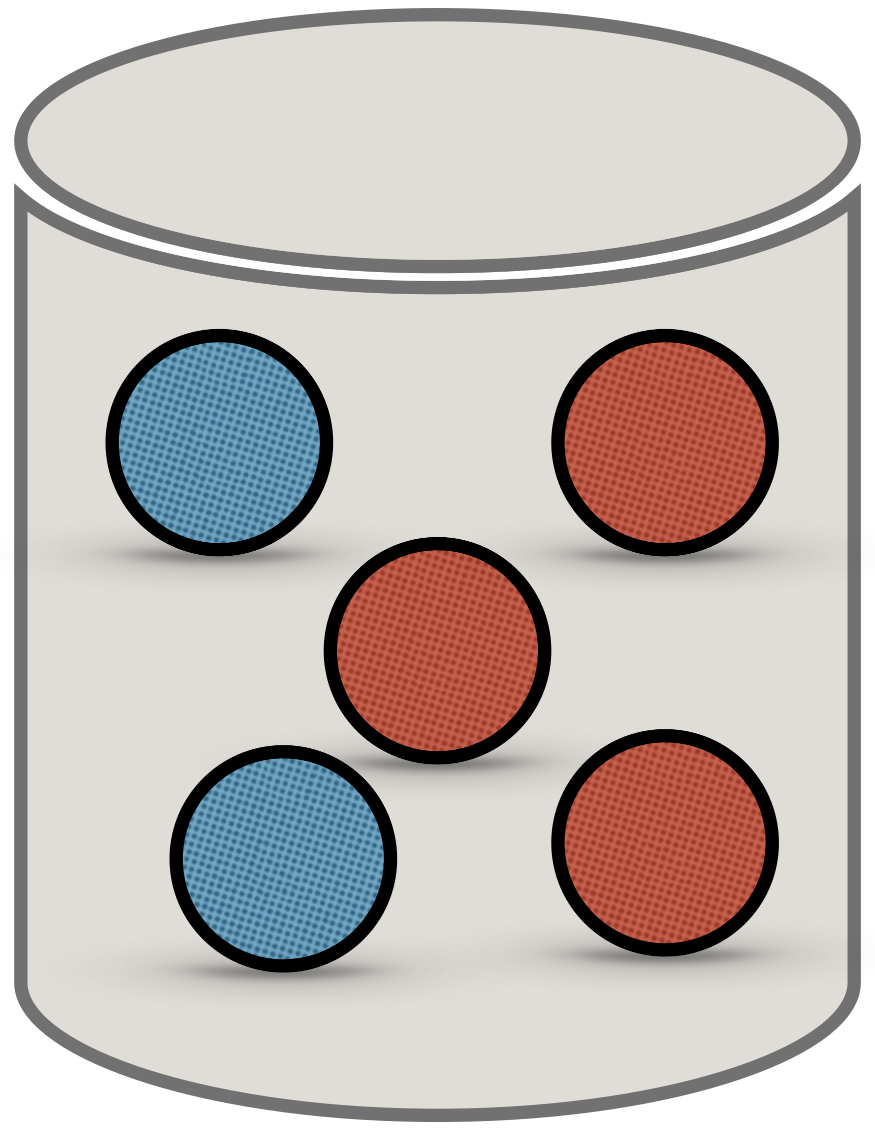
Eventos dependientes e independientes

Eventos dependientes e independientes

- Una serie de eventos **independientes** ocurren cuando el resultado de un evento no afecta el resultado de otro evento.
- Ejemplo: tirar una moneda dos veces. La probabilidad en cualquiera de las tiradas sigue siendo 1/2 para sello.
- Un evento **dependiente** ocurre cuando el resultado del un evento anterior afecta la probabilidad de un evento posterior.
- Consideremos por ejemplo simple un jarro con canicas.

Eventos

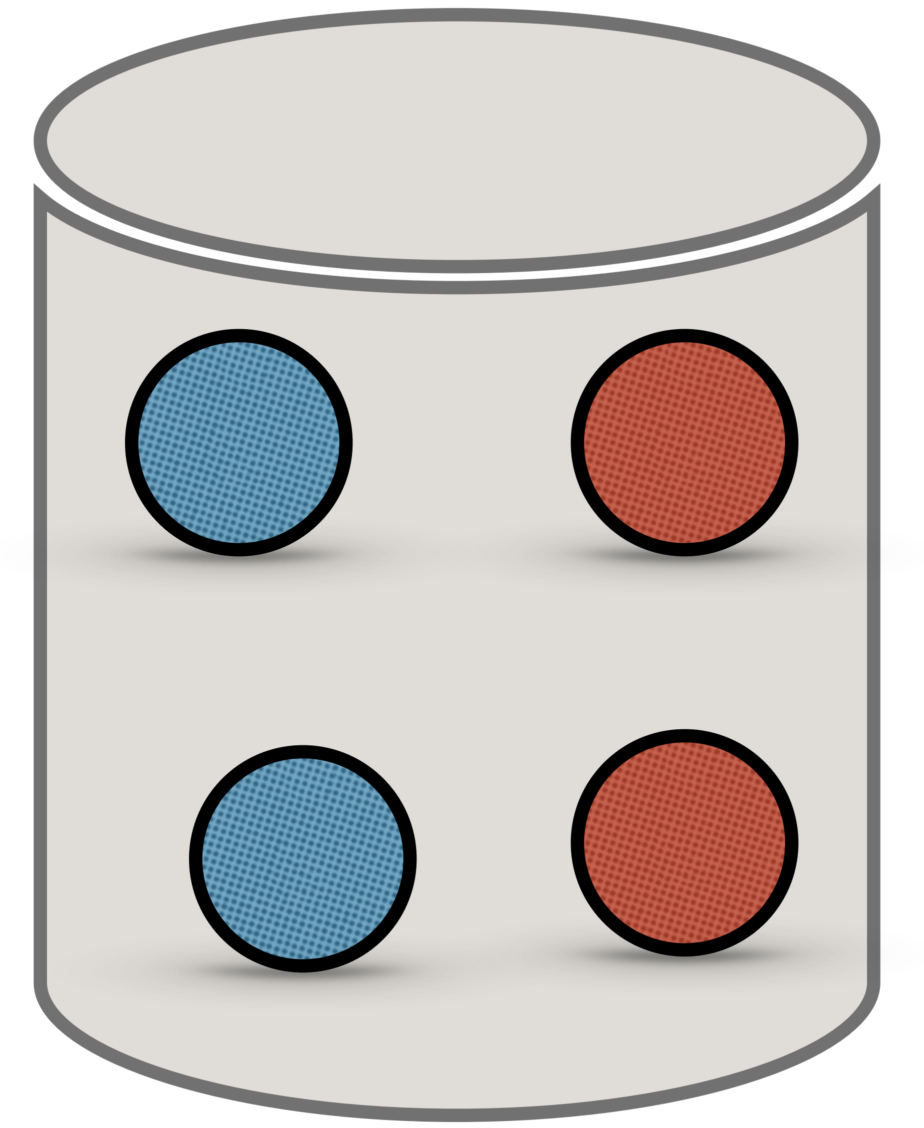
Eventos dependientes



- Consideramos eventos donde se toma una canica, sin reemplazo, i.e., sin devolverla en el frasco después de tomarla.
- **¿Si se toman dos canicas del frasco, cuál es la probabilidad de que ambas sean rojas?**
- El color obtenido del primer intento afecta la probabilidad de obtener un color en el segundo intento.
- En el primer intento, la probabilidad de obtener una canica roja es simple $P(R_1) = \dfrac{3}{5}$.

Eventos

Eventos dependientes (Probabilidad condicional)



- La probabilidad de tomar una segunda canica roja **dada que la primera canica tomada fue roja** se denota por:
- $P(R_2 | R_1)$
- Esto es llamado una **probabilidad condicional.**
- Después de remover una canica roja en el primer intento entonces la probabilidad de la segunda es:
- $P(R_2 | R_1) = \frac{2}{4}$

$$P(R_1 \cap R_2)$$

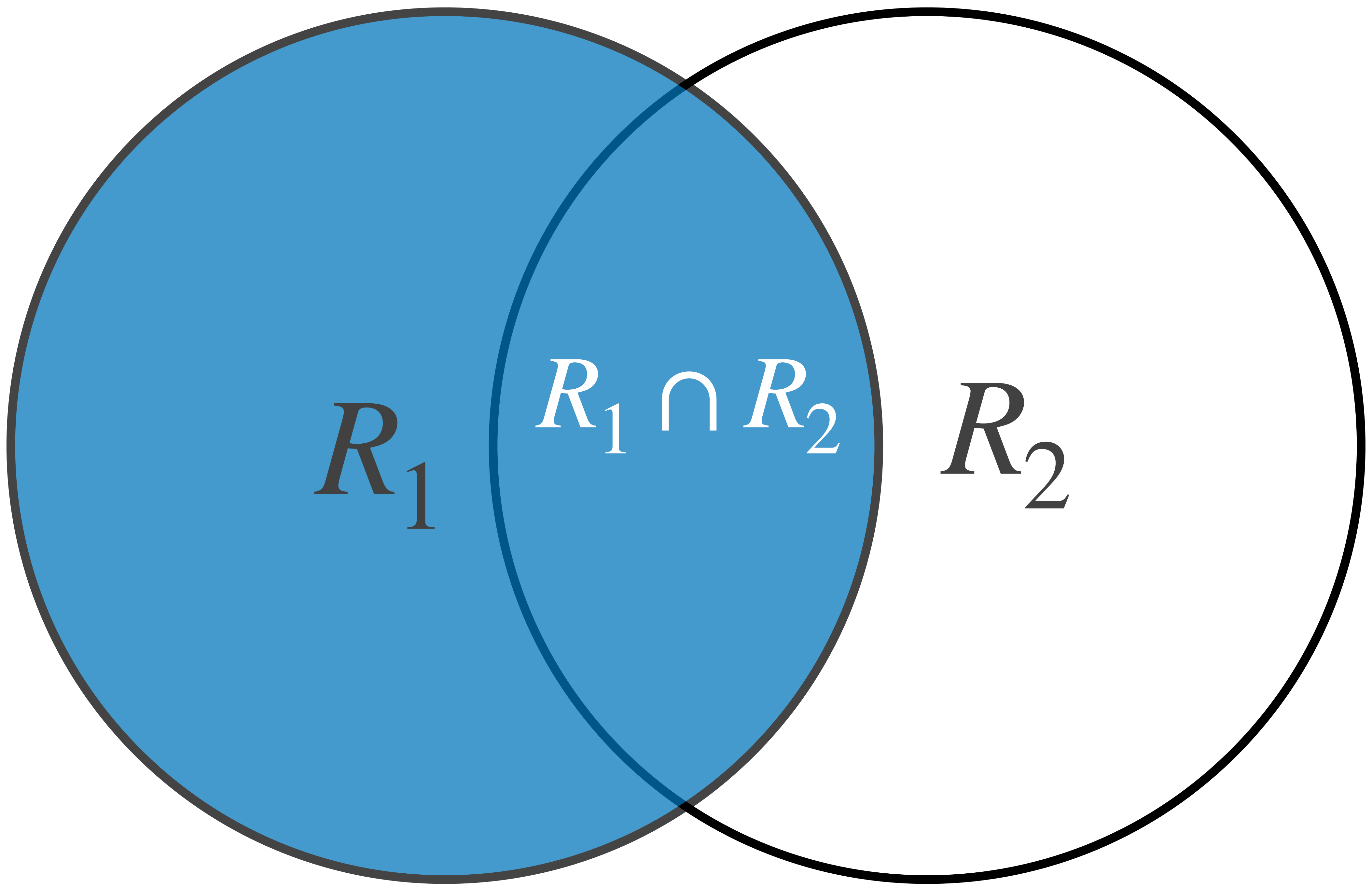
Eventos

Eventos dependientes (Probabilidad condicional)

- Al considerar esto, sabemos que R_1 ya ocurrió, lo que quiere decir que **nuestro espacio muestral se reduce** de lo que ya teníamos antes a sólo aquellos resultados presentes en R_1.

- En este caso las posibilidades del segundo se ven alteradas, y podemos ver que la probabilidad de tener una canica roja en el segundo intento estaría dado por:

- $\dfrac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1)} = P(R_2 \mid R_1)$



Eventos dependientes

Probabilidad condicional

- De lo anterior, podemos hacer un despeje.

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2 | R_1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = 0.3$$

- Si R_2 fuera independiente de $R_1 \Rightarrow P(R_2 | R_1) = P(R_2)$

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2)$$

- En general, la probabilidad de tener dos eventos que son dependientes está dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) \qquad ; \qquad P(B | A) = P(B)$$

- Se puede extender a varios eventos

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(C | A \cap B)$$

Probabilidad condicional

Regla general de la multiplicación

- En general, la probabilidad de tener dos eventos que son dependientes está dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

- Se puede extender a varios eventos

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid A \cap B)$$

- En el caso de tener sólo eventos independientes, esto se reduce a la regla especial de la multiplicación.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

4. **(10 puntos)** Si una pareja planea tener 6 hijos, ¿Cuál es la probabilidad de tener **al menos** un varón $P(x \geq 1)$? Recuerda que cada intento es un evento independiente.

Tengo 6 eventos, (independientes)

$$P(H \geq 1) = 1 - P(M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap M_5 \cap M_6)$$

$$P(M_1 \cap H_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap M_5 \cap M_6) = P(M_1)P(H_2)P(M_3)P(M_4)P(M_5)P(M_6)$$

5. **(10 puntos)** Un dado (de 6 lados) es rodado 5 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que de las cinco tiradas, **exactamente cuatro de ellas resulte en 6**? Recordar que los 6's pueden resultar en diferente orden.

Tengo 5 eventos, (independientes)

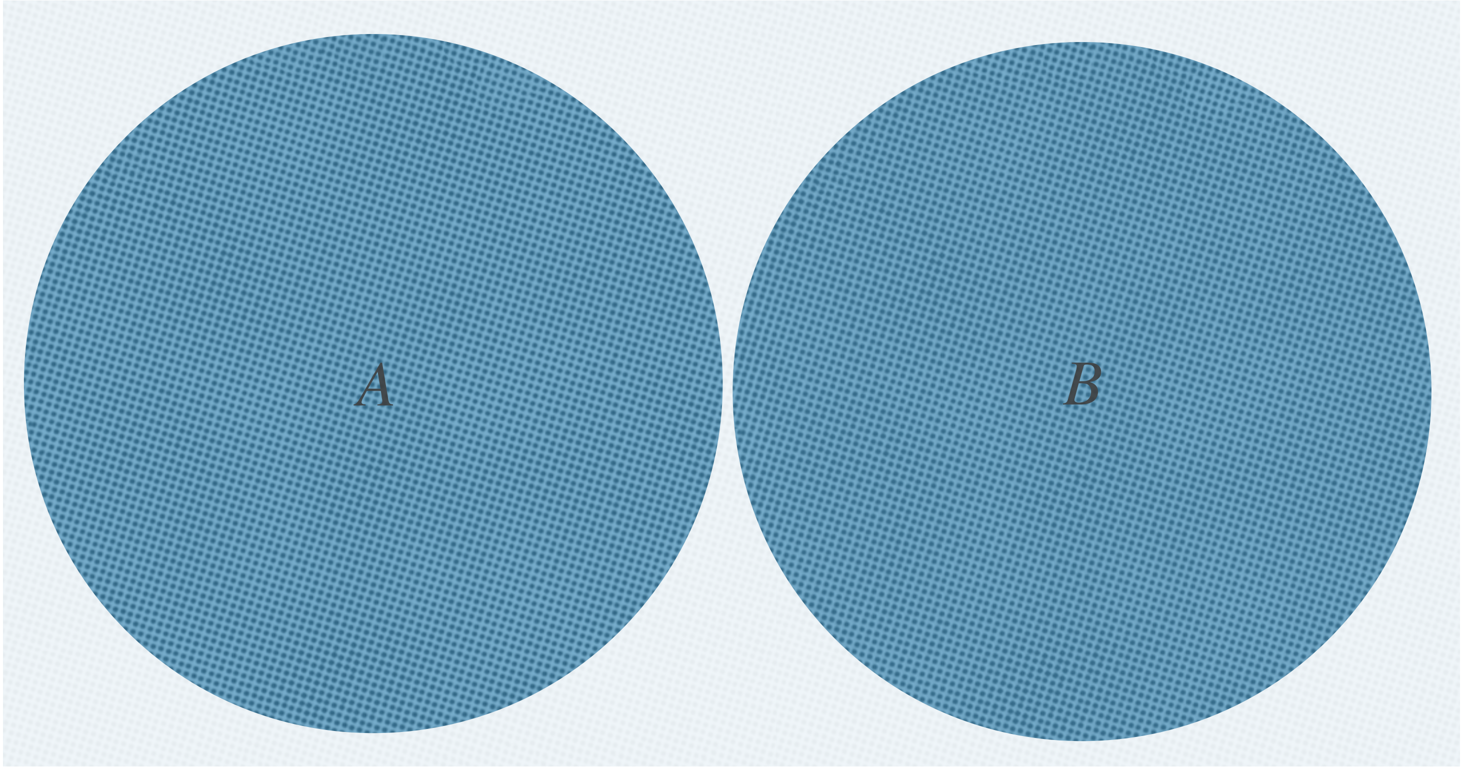
$${}_1C_5 \, P(6 \cap 6 \cap 6 \cap 6 \cap \bar{6})$$

Probabilidad

Regla general de adición (eventos mutuamente excluyentes)

- Los eventos mutualmente excluyentes son eventos que no pueden ocurrir al mismo tiempo.
- Para eventos independientes mutualmente excluyentes la regla de adición también se puede simplificar, puesto que $A \cap B = 0$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

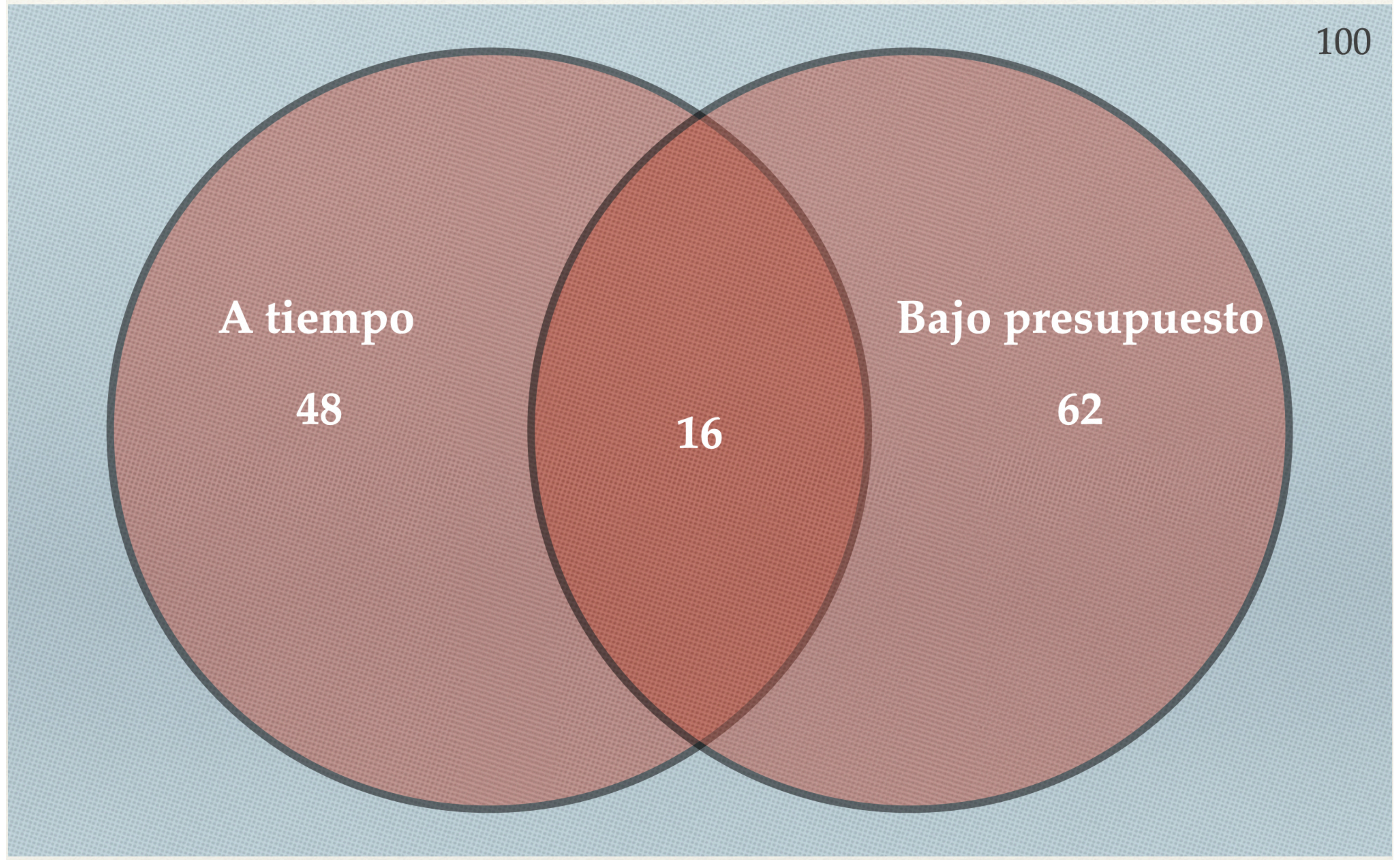


$$P(A = a\ tiempo) = 48/100$$
$$P(B = presupuesto\ bajo) = 62/100$$
$$P(A \cap B) = 16/100$$
$$P(B|A) = \frac{16/100}{48/100} = \frac{16}{48}$$

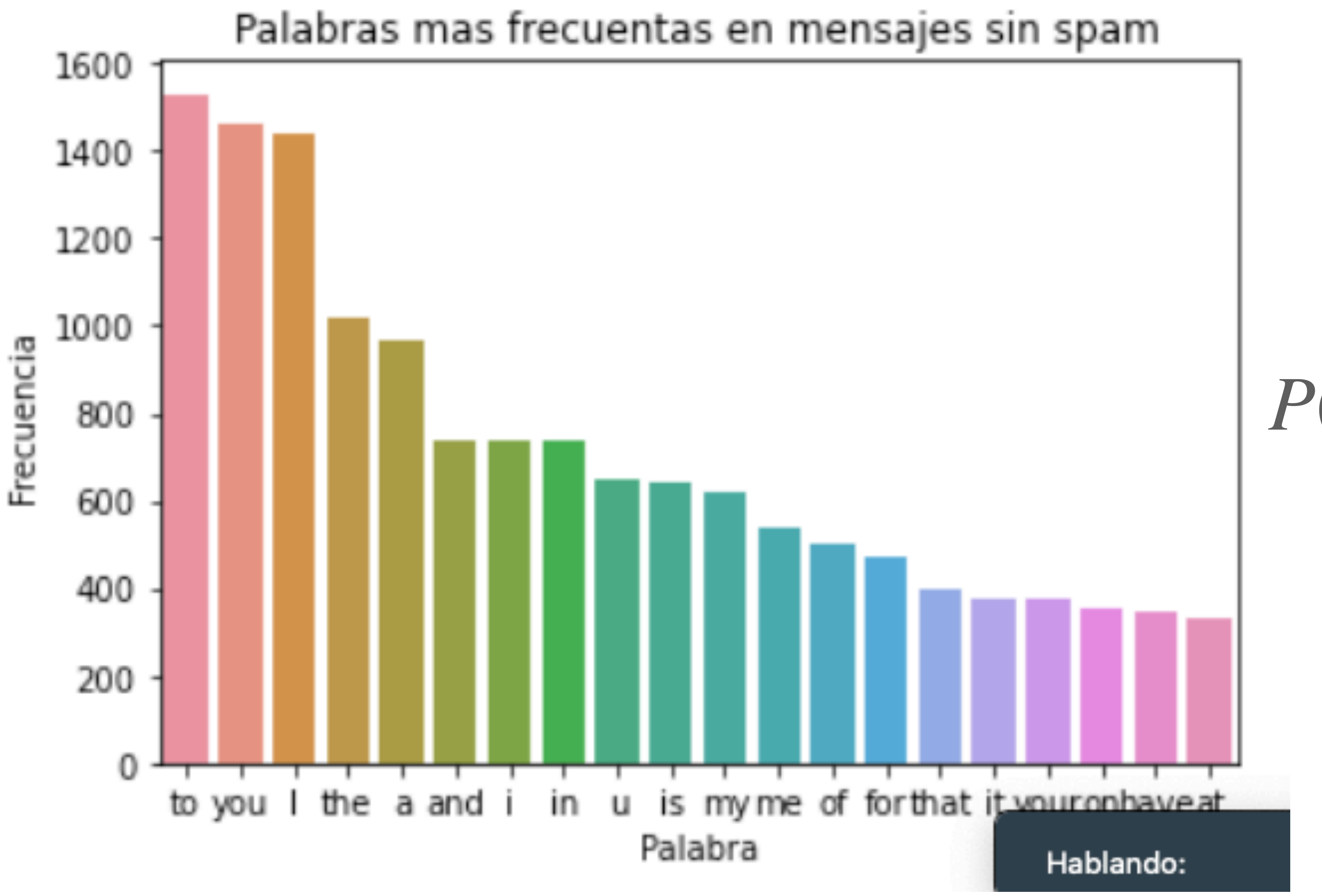
$$\frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1)} = P(R_2|R_1)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{48}{100} + \frac{62}{100} - \frac{16}{100} = \frac{110}{100} - \frac{16}{100} = \frac{94}{100} = 0.94$$

- Una compañía encuentra en sus datos que de cada 100 proyectos, 48 son completados a tiempo, 62 son terminados con menor presupuesto y 16 son completados a tiempo y con menor presupuesto.
- Dado que un proyecto es terminado a tiempo, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido bajo un menor presupuesto?
- $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- ¿Cuál es la probabilidad de que un proyecto sea acabado a tiempo o dentro de un presupuesto?
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{48}{100} + \dfrac{62}{100} - \dfrac{16}{100} = \dfrac{110}{100} - \dfrac{16}{100} = \dfrac{94}{100} = 0.94$

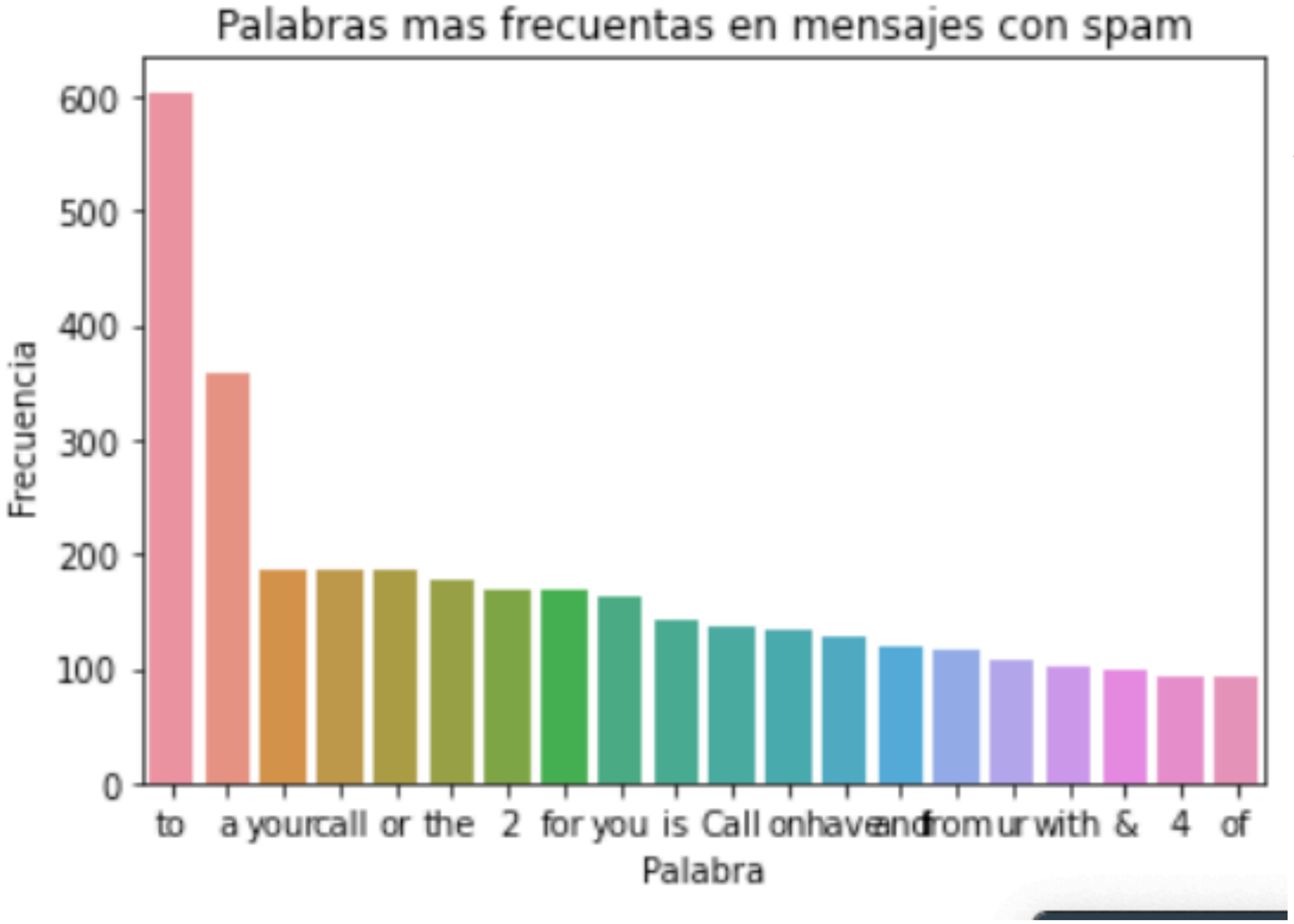


Teorema de Bayes



$$P(\text{to} \mid \text{ham}) = 0.004$$

$$P(\text{spam} \mid \text{to do}) \propto P(\text{spam}) * P(\text{to} \mid spam) * P(\text{do} \mid spam)$$

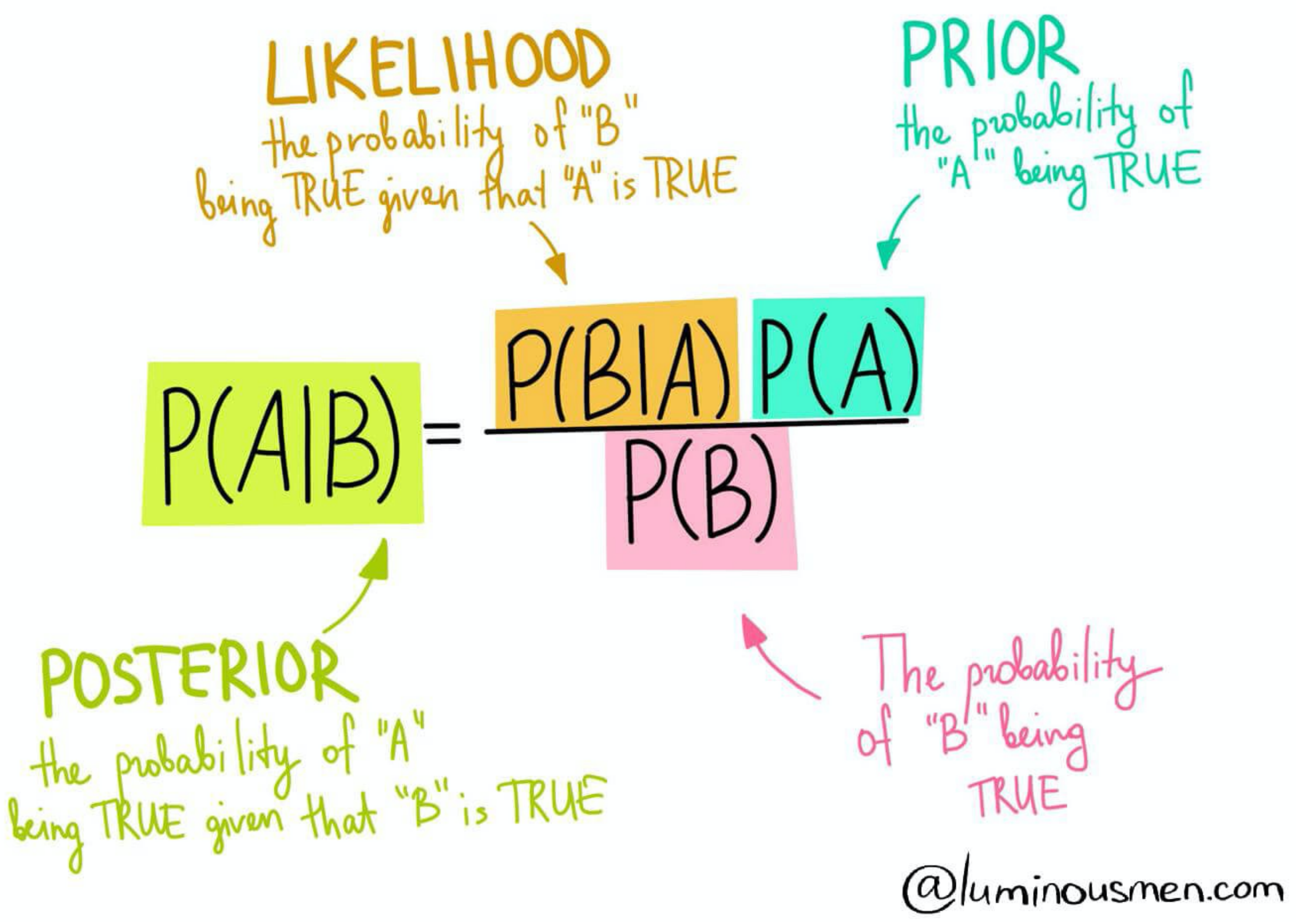


$$P(\text{to} \mid \text{spam}) = 0.0007$$

Teorema de Bayes

Overview

- Sea A el evento de sufrir de la enfermedad, y B el evento de dar un test positivo, sabemos $P(B \mid A)$ pero lo que queremos calcular es $P(A \mid B)$. O sea, queremos la probabilidad de que uno sufra de la enfermedad cuando ya se conoce que el test es positivo.

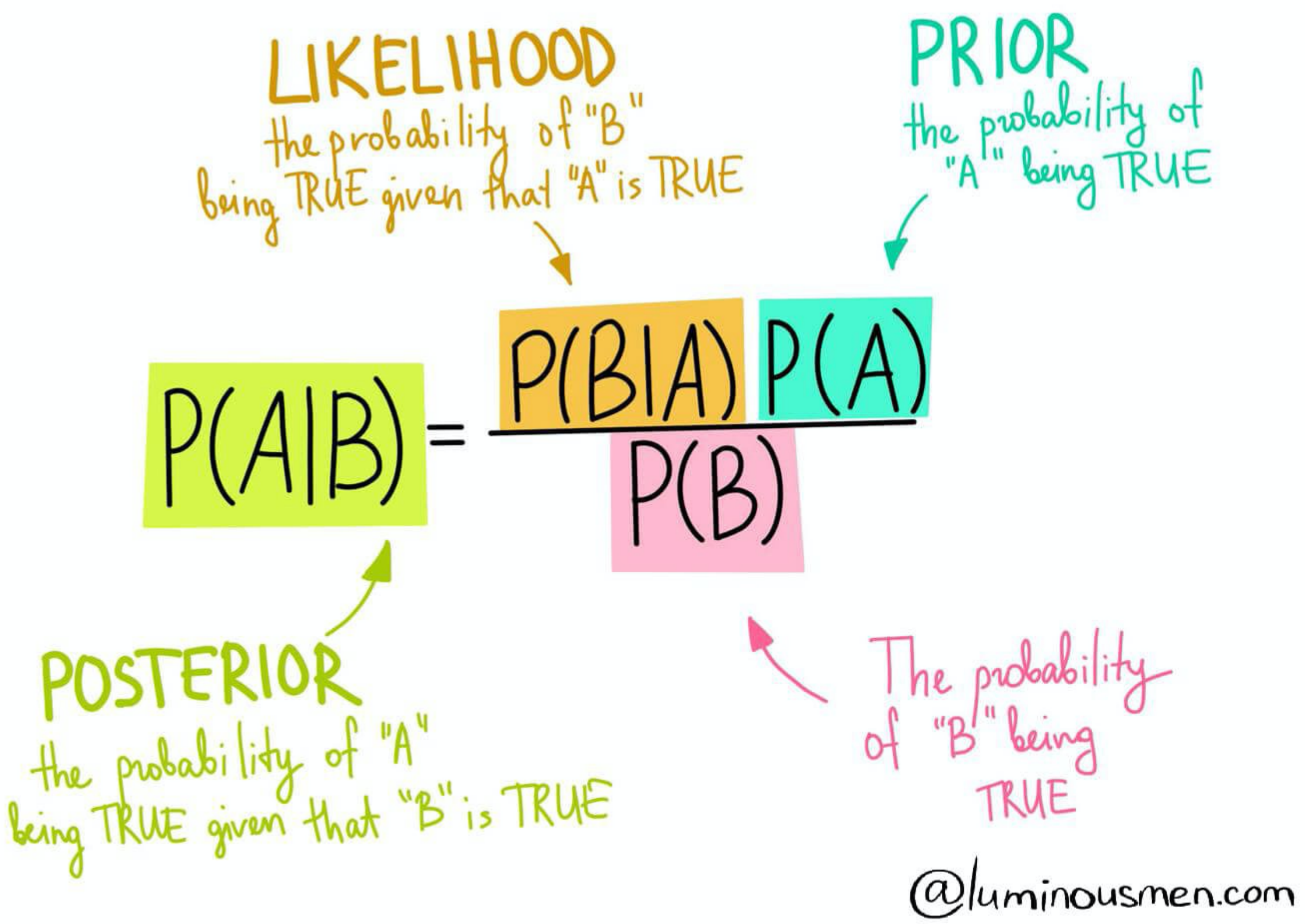


- Ya conocemos como se calcula una probabilidad condicional.
- $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, suponiendo que $P(B) > 0$.
- En el mismo caso, se tiene que:
- $P(B \mid A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, suponiendo que $P(A) > 0$.

Teorema de Bayes

Overview

- Sea A el evento de sufrir de la enfermedad, y B el evento de dar un test positivo, sabemos $P(B \mid A)$ pero lo que queremos calcular es $P(A \mid B)$. O sea, queremos la probabilidad de que uno sufra de la enfermedad cuando ya se conoce que el test es positivo.



- Lo que podemos hacer es relacionar las probabilidades condicional mediante una sustitución.
- $P(A \mid B) = \dfrac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$, suponiendo que $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$.
- Este es el **teorema de Bayes**, utilizado para calcular la probabilidad de un parámetro, dado un determinado evento.

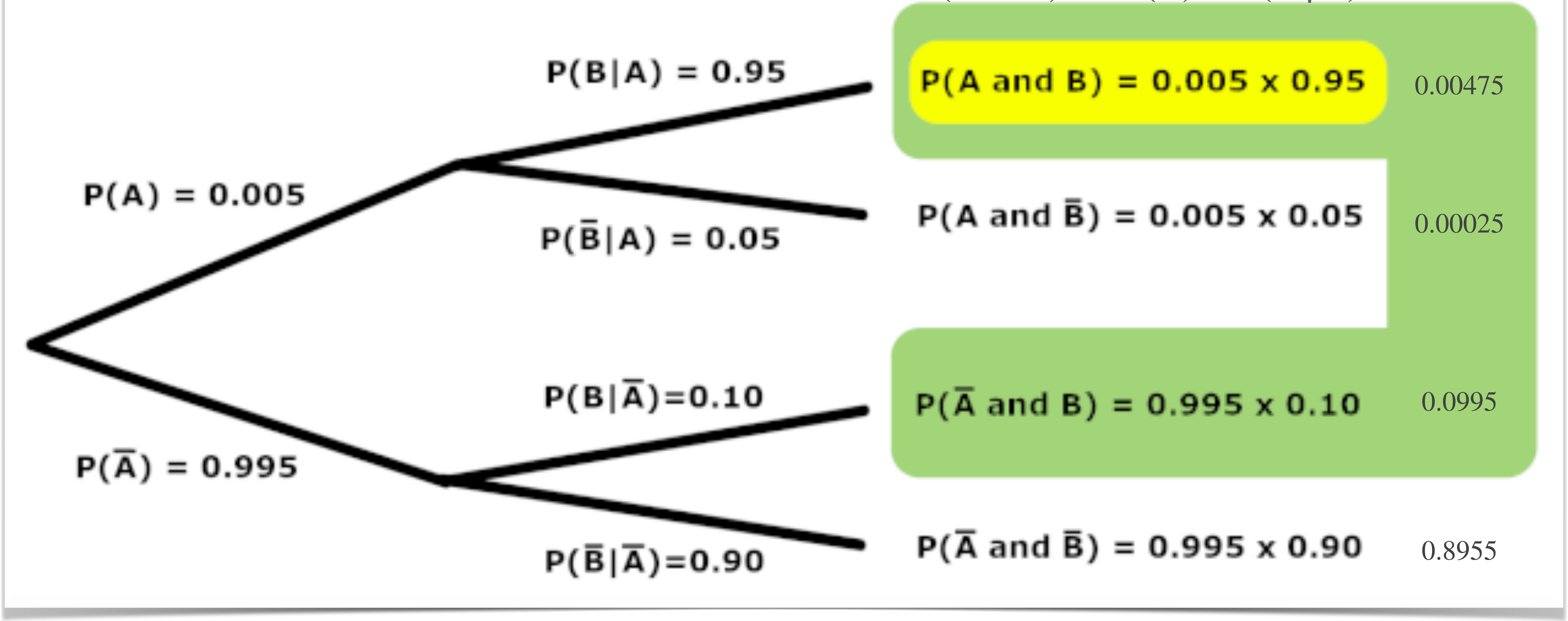
Teorema de Bayes

$$P(A \mid B)$$

Diagramas de árbol

https://towardsdatascience.com/bayes-theorem-clearly-explained-with-visualization-5083ea5e9b14

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B \mid A)$$

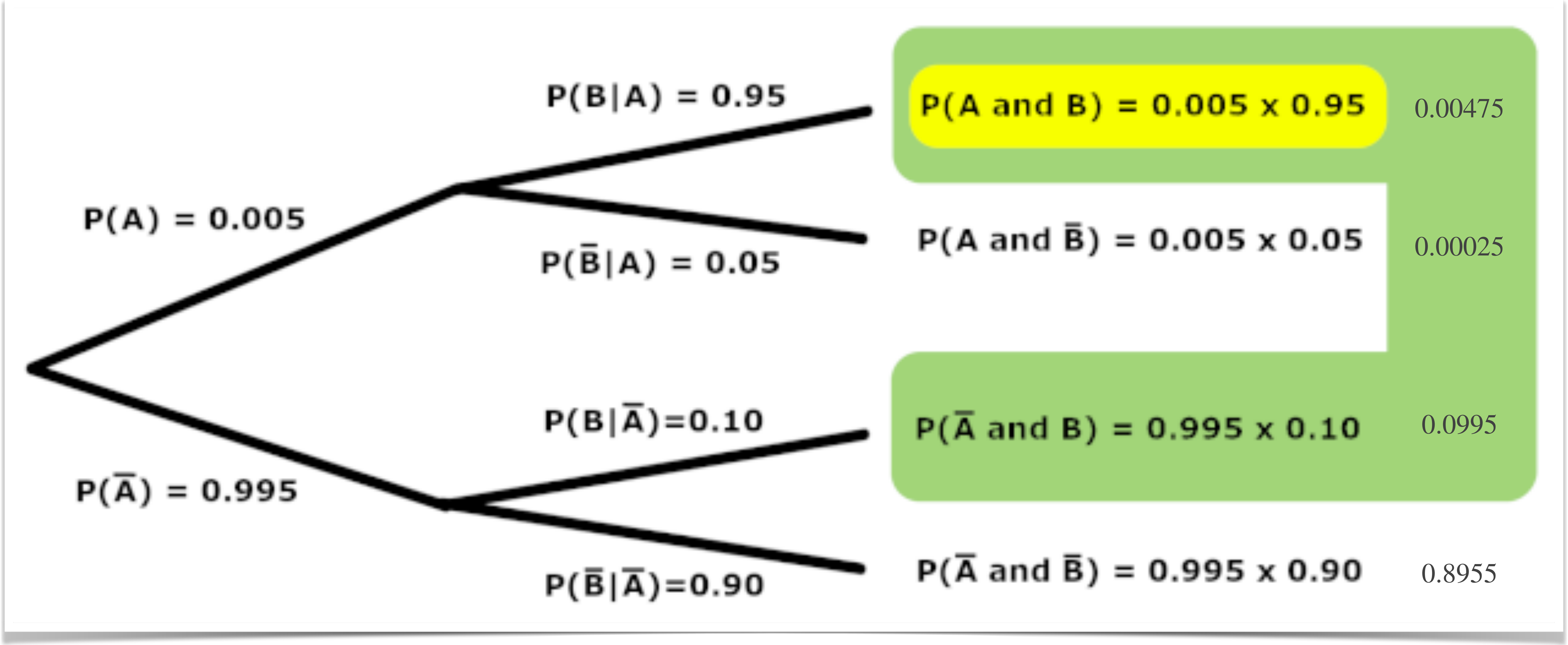


$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) P(A)}{P(B)}$$ **Teorema de Bayes**

Teorema de Bayes

Diagramas de árbol

https://towardsdatascience.com/bayes-theorem-clearly-explained-with-visualization-5083ea5e9b14

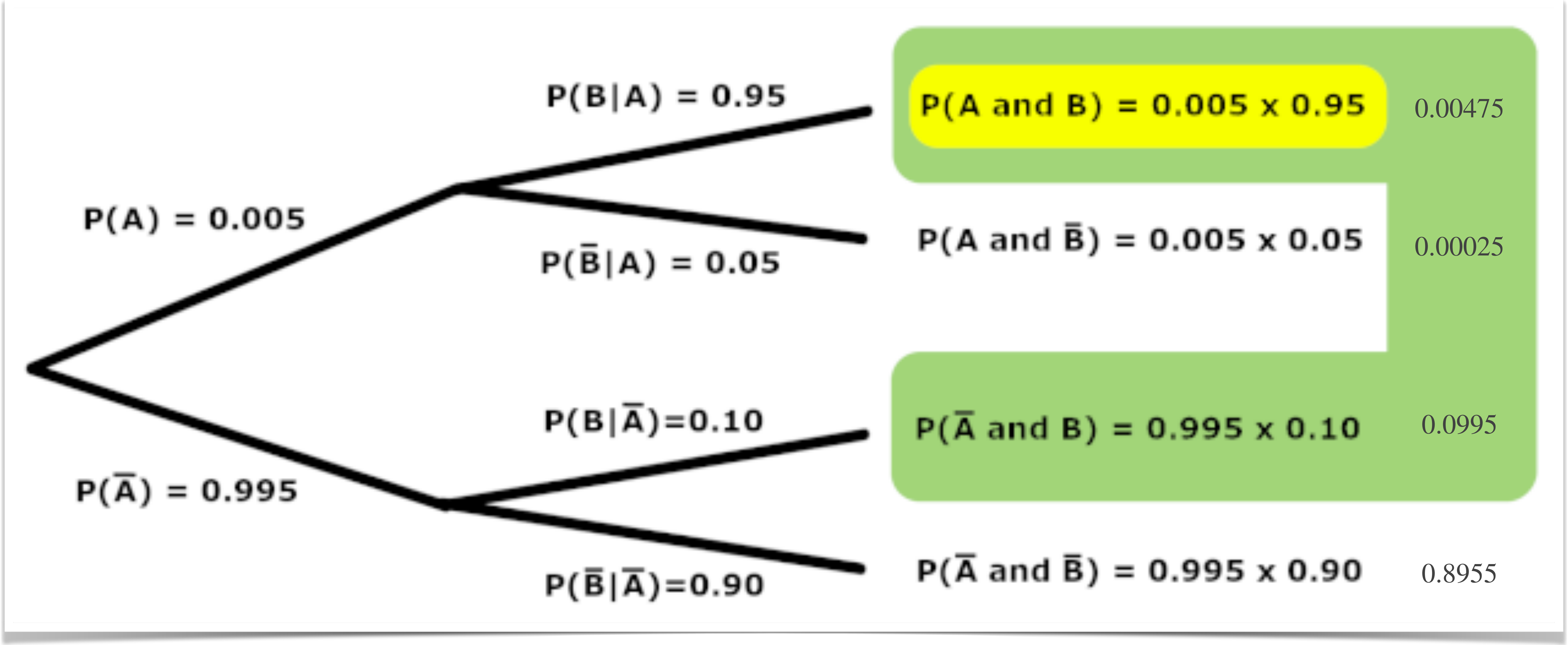


- Para encontrar la probabilidad $P(A \mid B)$, nos enfocamos en los casos donde B se sabe que es positivo (test positivo) (En verde).

Teorema de Bayes

Diagramas de árbol

https://towardsdatascience.com/bayes-theorem-clearly-explained-with-visualization-5083ea5e9b14



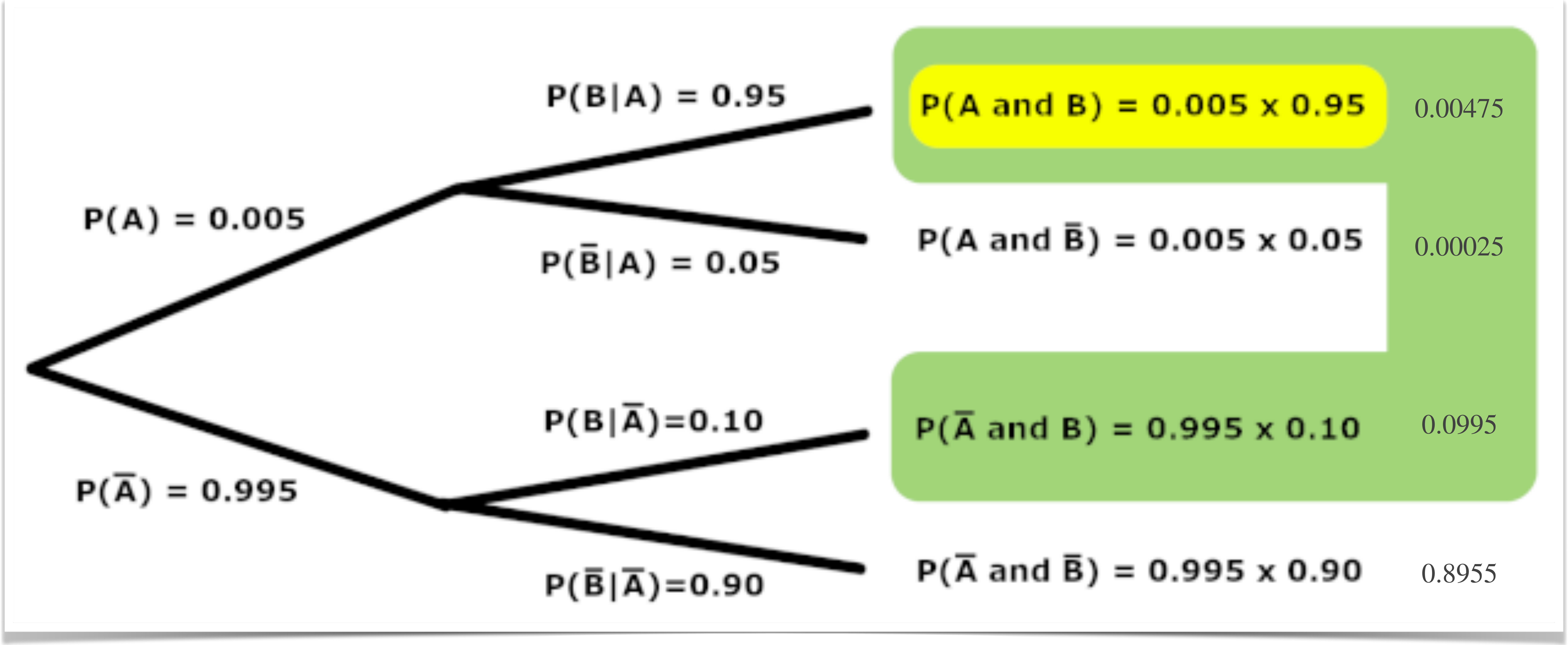
$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A)P(B\,|\,A)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B\,|\,A)}{P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)}$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = = P(A) \cdot P(B\,|\,A) + P(\bar{A}) \cdot P(B\,|\,\bar{A})$$

Teorema de Bayes

Diagramas de árbol

https://towardsdatascience.com/bayes-theorem-clearly-explained-with-visualization-5083ea5e9b14



$$P(A\,|\,B) = \frac{P(B\,|\,A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B\,|\,A)P(A)}{P(B\,|\,A)P(A) + P(B\,|\,\bar{A})P(\bar{A})}$$

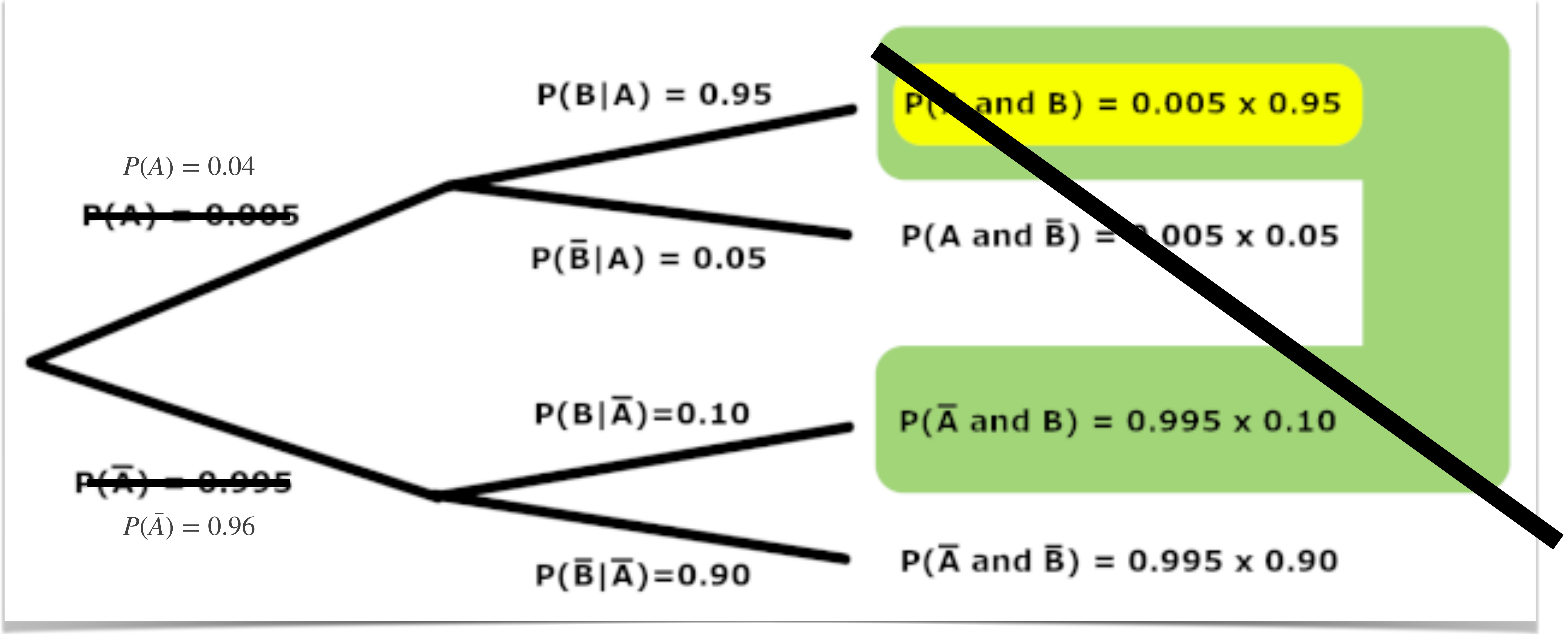
Teorema de Bayes

Diagramas de árbol

- Para nuestro caso particular:
- $$P(enfermedad \,|\, test) = \frac{(0.005)(0.95)}{(0.005)(0.95) + (0.995)(0.10)} \sim 0.04$$
- Es es contra intuitivo, demasiado bajo, pero viene del hecho de que la enfermedad es de por sí rara en la población. 99.5% del set de personas que sufren de la enfermedad es en comparación aún más pequeño que el 0.5% más grande de personas que no la tienen.

Teorema de Bayes

Diagramas de árbol (Segunda ronda). Actualización de información.



- Para nuestro caso particular:
- $$P(enfermedad\,|\,test) = \frac{(0.04)(0.95)}{(0.04)(0.95) + (0.96)(0.10)} \sim 0.28$$
- En la segunda instancia, valores de entrada para el evento A son actualizados.

Teorema de Bayes

General

- En general, el teorema de Bayes es definido por:
- $$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)}$$
- Donde se asume que los eventos A1 y A2 son independientes y exhaustivos.
- Aunque claro, puede haber más eventos independientes
- $$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)}$$

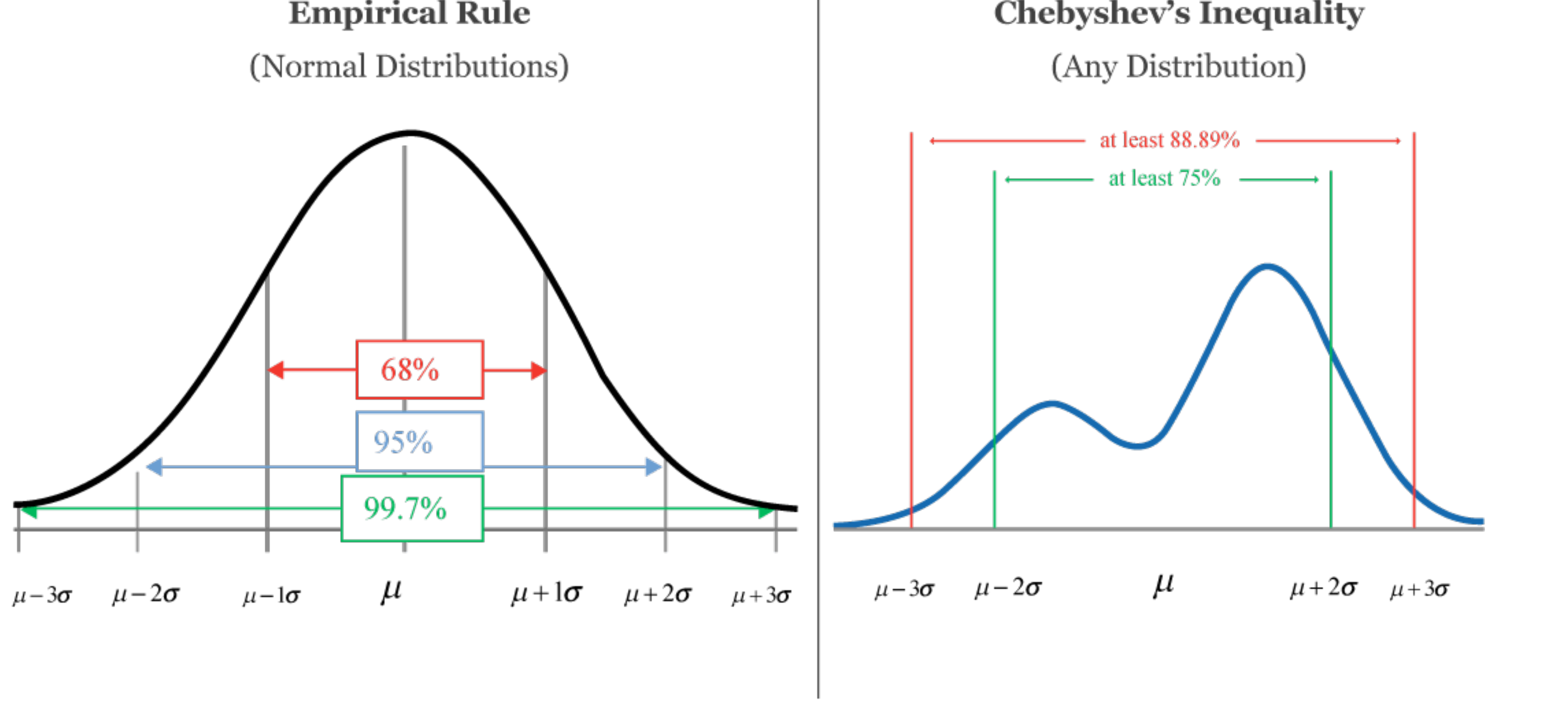
Estadística y probabilidad

Ciencia de datos

- Machine learning is statistical learning.
- Métodos en ML realizan predicciones basadas en:
  - Datos de una muestra (datos de entrenamiento)
  - Estadísticos (parámetros de un modelo)
  - Modelos de probabilidad (Información previa, condicionales, distribuciones, etc.
- Un uso robusto de probabilidad y estadística es un prerequisito para ML.

4. **(20 puntos)** Un set de observaciones $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ tiene una media de 50 y una desviación estándar de 7. Según el teorema de Chebyshev, escribir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas,

- Al menos 75 % de las observaciones se encuentran entre 36 y 64.
- Al menos 80 % de las observaciones se encuentran entre 34 y 66.
- Al menos 88.9 % de las observaciones se encuentran entre 31 y 73.
- Menos de 15 % de las observaciones se encuentran por debajo de 15.



- T. Chebyshev -> la proporción dentro de k desviaciones estándar (de cualquier distribución) es de al menos $p_{\text{dentro}} \leq 1 - \dfrac{1}{k^2}$.
- $\mu = 50; \quad \sigma = 7$
- 36 unidades corresponden a $\dfrac{36 - 50 \text{ unidades}}{7} = \dfrac{-14}{7} = -2$ desviaciones estándar.
- 64 unidades, $\dfrac{64 - 50 \text{ unidades}}{7} = \dfrac{14}{7} = 2$, también corresponde a 2 desviaciones estándar de la media.
- $\dfrac{15 - 50 \text{ unidades}}{7} = \dfrac{-35}{7} = -5$

5. **(15 puntos)** Un dado (de 6 lados) es rodado 5 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que de las cinco tiradas, **exactamente cuatro de ellas resulte en 6**? Recordar que los 6's pueden resultar en diferente orden.

- Tengo 5 eventos (cada tirada). Digamos que lo represento con **6**
- $P(\bar{6} \cap 6 \cap 6 \cap 6 \cap 6) = P(\bar{6}) \times P(6) \times P(6) \times P(6) \times P(6) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$
- $= \frac{5}{6} \times (\frac{1}{6})^4$
- $P(6 \cap \bar{6} \cap 6 \cap 6 \cap 6)$, ${}_4C_5 = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5$
- $5 \times \frac{5}{6} \times (\frac{1}{6})^4 =_n C_k q^{n-k} p^k$

k=2	**75%**		
3	88.89%		
4	93.6%		
5	96%		

6. **(20 puntos)** El set de datos **Gender Purchase.csv** muestra registros de clientes de un producto particular, en el que se muestra la variable de género del cliente y si compró o no el producto. Sea A el evento de ser de un género y B el evento de haber comprado el producto, calcular las distintas probabilidades (e.g.$P(A), P(B), P(B|A), P(A|B)$, y complementos) y construir un diagrama de árbol que muestre cada una de ellas, según este set de datos. Verificar que la suma de las probabilidades de cada una de las ramas (es decir $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$) sea igual a 1.

Defino dos eventos:

A = evento de ser hombre

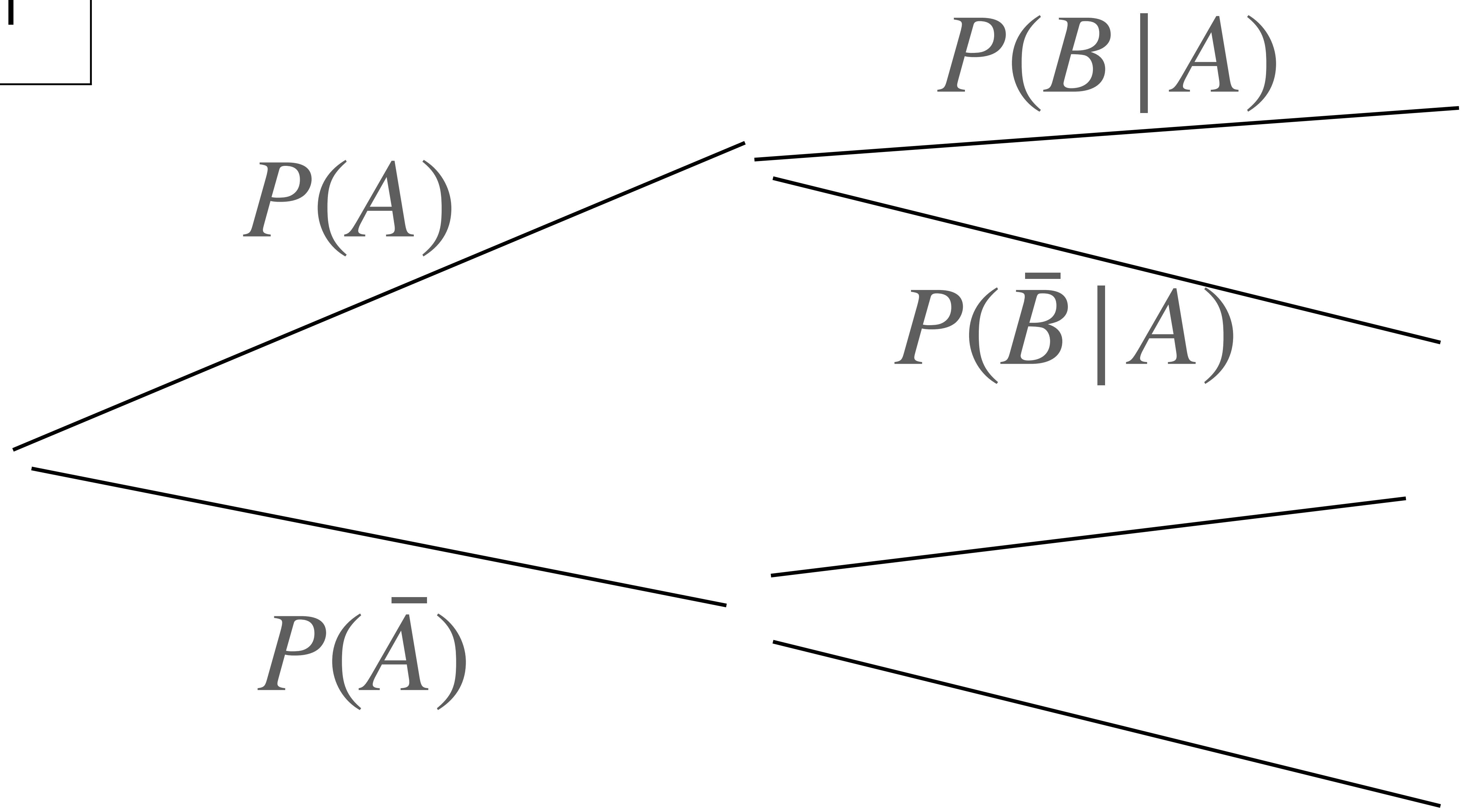
B = evento de compra

	No	Yes	
Female	106	159	265
Male	125	121	246
	231	280	511

$$P(A) = \frac{246}{511}; \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{265}{511}$$

$$P(B|A) = \frac{121}{246} \quad P(B|\bar{A}) = \frac{159}{265}$$

$$P(A \cap B) = \frac{121}{511}$$



$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{246}{511}\frac{121}{246} = \frac{121}{511}$$