

Was ist der implizite Euler? (HEAT)

Was ist der implizite Euler? (HEAT)

$$u[i,j,t+1] = u[i,j,t] + \delta t \cdot \Delta u[i,j,t+1]$$

Vorteil: stabil für jeden Zeitschritt, **Nachteil:** hoher Rechenaufwand

Wann geht der LU-Faktorisierung kaputt?

Wann geht der LU-Faktorisierung kaputt?

Die LU-Faktorisierung scheitert sobald der Algorithmus versucht eine Division durch 0 durchzuführen. Bsp. Matrix: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Was ist eine Basisfunktion?

Was ist eine Basisfunktion?

Eine Basisfunktion beschreibt eine Kurve mit einer endliche Anzahl von Parametern. Die von uns verwendete Basisfunktion ist die Monom-Basis x^j .

Wie ist die Pseudoinverse definiert?

Wie ist die Pseudoinverse definiert?

$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$, aber auch nur solange die Spalten linear unabhängig sind.

Was sind finite Differenzen?

Was sind finite Differenzen?

$$\text{Vorwärtsdiff. } f'[i] \approx \frac{f[i+1] - f[i]}{h}$$

$$\text{Rückwärtsdiff. } f'[i] \approx \frac{f[i] - f[i-1]}{h}$$

$$\text{Zentrale Diff. } f'[i] \approx \frac{f[i+1] - f[i-1]}{2h}$$

$$\Delta u[i,j,t] = \frac{u[i-1,j,t] + u[i+1,j,t] + u[i,j-1,t] + u[i,j+1,t] - 4u[i,j,t]}{h^2}$$

Was ist die Idee der Konditionierung?

Was ist die Idee der Konditionierung?

Das Problem als Funktion modellieren, welche bei Eingabe x Ausgabe $f(x)$ liefert. Ein Problem ist gut konditioniert, wenn eine kleine Perturbation in x auch nur eine kleine Perturbation in $f(x)$ bewirkt. Umgekehrt sollte klar sein.

Was ist der Unterschied zwischen

$$\triangle u[i,j,t], -\triangle u[i,j,t]?$$

Was ist der Unterschied zwischen

$\Delta u[i, j, t]$, $-\Delta u[i, j, t]$?

$\Delta u[i, j, t]$: Nachbarn addiert und dann das Zentrum 4-mal abziehen.

$-\Delta u[i, j, t]$: Zentrum mit 4 multiplizieren und dann die Nachbarn abziehen.

Wann ist eine Matrix symmetrisch positiv definit?

Wann ist eine Matrix symmetrisch positiv definit?

Eine Matrix ist symmetrisch, wenn gilt, dass $A^T = A$ und positiv definit, wenn gilt, dass $\forall x \neq 0 : x^T A x > 0$.

Wie kann man LU-Faktorisierung stabiler machen?

Wie kann man LU-Faktorisierung stabiler machen?

Pivotisierung der Matrix, mittels Permutationsmatrix. Vertausche den maximalen Eintrag a_{ik}^k der Spalte mit dem Element auf der Diagonalen a_{kk}^k .

**Wie kann ein überbestimmtes Gleichungssystem
approximiert werden?**

Wie kann ein überbestimmtes Gleichungssystem approximiert werden?

Normalengleichung mit anschließender LU-Faktorisierung. oder Cholesky-Faktorisierung oder SVD oder ...

Was ist die 2-Norm?

Was ist die 2-Norm?

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

Was sind Normalengleichungen und wie sind sie definiert? Welche Dimension hat $A^T A$?

Was sind Normalengleichungen und wie sind sie definiert? Welche Dimension hat $A^T A$?

Die Normalengleichung enthält die Lösung des überbestimmten (inkonsistenten) Gleichungssystem $Ax = b$ und ist definiert als $A^T Ax = A^T b$. Dabei hat $A^T A$ die Dimension $n \times n$.

Wie werden A und b aufgestellt?

Wie werden A und b aufgestellt?

b beinhaltet die Werte y_i der gegebenen Punkte. In A werden die Basisfunktionen gespeichert, also zB. Monome (wie Übung) werden in der ersten Zeile die $x_1^{0 \dots n}$ und in den Spalten $x_{1..n}$ gespeichert. Somit steht in der i -ten Zeile und j -ten Spalte der Eintrag x_{i+1}^j .

Was ist eine orthogonale Projektion?

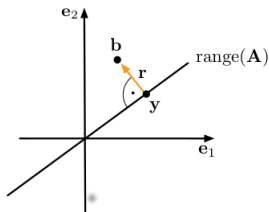
Was ist eine orthogonale Projektion?

Entspricht der senkrechten Projektion eines Punktes b auf das Bild einer Matrix A . Beginne mit Projektion von b auf $\langle A \rangle$, mit $\|A\| = 1$, $r = b - b' = (I - AA^T)b$, mit $b' = (\sum_{i=1}^k A_i A_i^T) b = \hat{A} \hat{A}^T b$ und $\hat{A} \hat{A}^T$ als orthogonale Projektion.

Wie leitet man die Normalengleichung her?

Wie leitet man die Normalengleichung her?

Es gibt 3 Herleitungsarten, analytisch durch partielle Ableitungen oder Vektor-Ableitungen oder geometrisch. Die geometrische Herleitung geht vom folgenden aus:



Wie stellt man das lineare Gleichungssystem für die Laplace-Gleichung auf?

Wie stellt man das lineare Gleichungssystem für die Laplace-Gleichung auf?

Jeder Punkt im Gitter ist eine Unbekannte, die berechnet werden muss. Wir haben also bei einem $(N \times N)$ Gitter $(N-2) \times (N-2)$ Unbekannte (Randpunkte verändern sich nicht). Dies führt zu einem $(N-2)^2 \times (N-2)^2$ Gleichungssystem $-Lu = b$. u ist ein Spaltenvektor in dem die neuen Werte u für das Gitter stehen. Die Reihenfolge, in der die Gitterpunkte in u stehen, führt zu einer Index Abbildung: $u_k = u(i, j)$ mit $k = \text{idx}(i, j) = (i-1) + (j-2) \cdot (N-2)$. Für die Matrix L gilt: $l_{kk} = 4, l_{kl} = -1/h^2$, wenn (\bar{i}, \bar{j}) Nachbarn von i, j und $l = \text{idx}(\bar{i}, \bar{j})$ sonst $l_{kl} = 0$.

Wie funktioniert LU-Faktorisierung und wie löst man das Gleichungssystem?

Wie funktioniert LU-Faktorisierung und wie löst man das Gleichungssystem?

Faktorisierung von A in untere (L) und obere Dreiecksmatrix (U) mittels Gauß.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \dots$$

Zum Lösen dann (1) $Ly = b$ und (2) $Ux = y$ lösen.

Vorwärtssubstitution für (1):

Erstes Element: $y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right) \text{ für } i = 2, \dots, m.$$

Rückwärts für (2):

$$x_1 = \frac{y_m}{u_{mm}}$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^m u_{ij} x_j \right) \text{ für } i = m-1, \dots, 1.$$

Wann hat A vollen Rang?

Wann hat A vollen Rang?

Wenn die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren linear unabhängig sind oder die Determinante von 0 verschieden ist.

Warum sollte man manchmal ein Polynom kleineren Grades finden wollen?

Warum sollte man manchmal ein Polynom kleineren Grades finden wollen?

Durch ein Polynom kleineren Grades können verrauschte Daten besser approximiert werden.

Was sagt die Heat-Equation aus?

Was sagt die Heat-Equation aus?

Die Heat-Equation beschreibt den Fluss von Wärme in Richtung der Nachbarn.

Was passiert mit den Randpunkten? (HEAT)

Was passiert mit den Randpunkten? (HEAT)

Die Randpunkte bleiben konstant.

Was ist der Unterschied zwischen Approximation und Interpolation?

Was ist der Unterschied zwischen Approximation und Interpolation?

Polynomgrad bzw. Dimensionen der Matrix $A^{m \times n}$.

$m = n$: A quadratisch, voller Rang, existiert Inverse, dann eindeutige Lösung. \Rightarrow Interpolation

$m > n$: System überbestimmt, nicht exakt lösbar. \Rightarrow Approximation.

Wie löst man das Least-Squares Problem mit QR-Faktorisierung?

Wie löst man das Least-Squares Problem mit QR-Faktorisierung?

QR-Faktorisierung $A = QR$, berechne $b' = Q^T b$ und löse $Rx = b'$ durch Rückwärtssubstitution

Welcher Löser muss verwendet werden, wenn A nicht quadratisch ist?

Welcher Löser muss verwendet werden, wenn A nicht quadratisch ist?

Cholesky-Faktorisierung, SVD oder QR-Faktorisierung. Je nach Eigenschaft von A .

ist? **Was bedeutet es, wenn ein Problem gut konditioniert**

Was bedeutet es, wenn ein Problem gut konditioniert ist?

Ein Problem ist gut konditioniert, wenn eine kleine Perturbation in x auch nur eine kleine Perturbation in $f(x)$ bewirkt. Umgekehrt sollte klar sein. Die Perturbationen werden in relativen Änderungsraten gemessen mit: $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$, $\frac{\|f(x+\delta x)-f(x)\|}{\|f(x)\|}$.

Was ist der explizite Euler? (HEAT)

Was ist der explizite Euler? (HEAT)

Berechne $v[i,j] = t \Delta u = \dot{u}$ und anschließend

$$u[i,j,t+1] = u[i,j,t] + \delta t \cdot \Delta u[i,j,t]$$

Vorteil: schnell und einfach zu implementieren, **Nachteil:** instabil bei großen Zeitsprüngen, da δt nicht mehr konvergiert, der Fehler stark zunimmt und somit keine Lösung mehr möglich ist.

Was besagt Diskretisierung?

Was besagt Diskretisierung?

Grundlegende Idee: Versuch eine Kurve mit einer endlichen Anzahl an Parametern zu beschreiben. Die Kurve wird mittels Basisfunktion φ_j und Koeffizienten f_j dargestellt:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n f_j \varphi_j(x).$$

Was ist der Unterschied zwischen Cholesky-Faktorisierung und QR-Faktorisierung?

Was ist der Unterschied zwischen Cholesky-Faktorisierung und QR-Faktorisierung?

QR-Faktorisierung ist besser konditioniert und stabiler ($\kappa(A)$) als die in der Cholesky-Faktorisierung verwendete Normalengleichung $A^T A x = A^T b$ ($\kappa(A^T A) = \kappa(A)^2$).

Wie sieht die Heat-Equation aus?

Wie sieht die Heat-Equation aus?

$$\dot{u} = \Delta u$$

Wie funktioniert die QR-Faktorisierung?

Wie funktioniert die QR-Faktorisierung?

Erst orthonormale Basis $\{q_1, \dots, q_n\}$ von $\text{range}(A)$ konstruieren und anschließend die Vektoren aus A mit der neuen Basis darstellen:

$$a_1 = r_{11}q_1, \dots, a_n = r_{1n}q_1 + \dots + r_{nn}q_n.$$

Das ergibt in Matrix-Schreibweise: $A = QR$, sodass letztendlich folgt $Ax = b \Leftrightarrow QRx = QQ^T b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$