Wie kann ein überbestimmtes Gleichungssystem approximiert werden?

Wie kann ein überbestimmtes Gleichungssystem approximiert werden?

Normalengleichung mit anschließender LU-Faktorisierung. oder Cholesky-Faktorisierung oder SVD oder ...

Wann hat A vollen Rang?

Wann hat A vollen Rang?

Wenn die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren linear unabhängig sind oder die Determinante von 0 verschieden ist.

Was ist der Unterschied zwischen Approximation und Interpolation?

Was ist der Unterschied zwischen Approximation und Interpolation?

Polynomgrad bzw. Dimensionen der Matrix $A^{m \times n}$.

- $m = n$: A quadratisch, voller Rang, existiert Inverse, dann eindeutige Lösung. $\Rightarrow$ Interpolation
- $m > n$: System überbestimmt, nicht exakt lösbar. $\Rightarrow$ Approximation.

Was ist der Unterschied zwischen Cholesky-Faktorisierung und QR-Faktorisierung?

Was ist der Unterschied zwischen Cholesky-Faktorisierung und QR-Faktorisierung?

QR-Faktorisierung ist besser konditioniert und stabiler ($\kappa(A)$) als die in der Cholesky-Faktorisierung verwendete Normalengleichung $A^T Ax = A^T b$ ($\kappa(A^T A) = \kappa(A)^2$).

Wie funktioniert LU-Faktorisierung und wie löst man das Gleichungssystem?

Wie funktioniert LU-Faktorisierung und wie löst man das Gleichungssystem?

Faktorisierung von A in untere (L) und obere Dreiecksmatrix (U) mittels Gauß.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \to \dots$$

Zum Lösen dann (1) $Ly = b$ und (2) $Ux = y$ lösen.

Vorwärtssubstitution für (1):

Erstes Element: $y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j) \text{ für } i = 2, \dots, m.$$

Rückwärts für (2):

$x_1 = \frac{y_m}{u_{mm}}$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}(y_i - \sum_{j=i+1}^{m} u_{ij} x_j) \text{ für } i = m-1, \dots, 1.$$

Wann geht der LU-Faktorisierung kaputt?

Wann geht der LU-Faktorisierung kaputt?

Die LU-Faktorisierung scheitert sobald der Algorithmus versucht eine Division durch 0 durchzuführen. Bsp. Matrix: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Wann ist eine Matrix symmetrisch positiv definit?

Wann ist eine Matrix symmetrisch positiv definit?

Eine Matrix ist symmetrisch, wenn gilt, dass $A^T = A$ und positiv definit, wenn gilt, dass $\forall x \neq 0 : x^T A x > 0$.

Wie löst man das Least-Squares Problem mit QR-Faktorisierung?

Wie löst man das Least-Squares Problem mit QR-Faktorisierung?

QR-Faktorisierung $A = QR$, berechne $b' = Q^T b$ und löse $Rx = b'$ durch Rückwärtssubstitution

Was ist eine Basisfunktion?

Was ist eine Basisfunktion?

Eine Basisfunktion beschreibt eine Kurve mit einer endliche Anzahl von Parametern. Die von uns verwendete Basisfunktion ist die Monom-Basis x^i.

Was ist der Grad eines Polynomes?

Was ist der Grad eines Polynomes?

Der Grad eines Polynomes entspricht dessen höchster Potenz.

Welcher Löser muss verwendet werden, wenn A nicht quadratisch ist?

Welcher Löser muss verwendet werden, wenn A nicht quadratisch ist?

Cholesky-Faktorisierung, SVD oder QR-Faktorisierung. Je nach Eigenschaft von A.

Was ist fill-in und wie kommt es zustande?

Was ist fill-in und wie kommt es zustande?

Fill-in bedeutet, dass ein Element $a_{ij} \in A$ 0 ist, jedoch nach der Cholesky-Faktorisierung $l_{ij} \neq 0$ gilt. Das passiert, durch die gebildete Differenz $K - ww^T$. Fill-in tritt deshalb nur innerhalb des Bandes auf, alle Nullen außerhalb des Bandes bleiben erhalten.

Wie kann man LU-Faktorisierung stabiler machen?

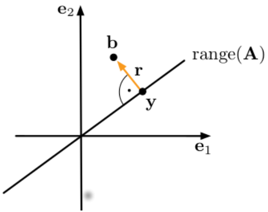
Wie kann man LU-Faktorisierung stabiler machen?

Pivotisierung der Matrix, mittels Permutationsmatrix. Vertausche den maximalen Eintrag a_{ik}^{k} der Spalte mit dem Element auf der Diagonalen a_{kk}^{k}.

Wie leitet man die Normalengleichung her?

Wie leitet man die Normalengleichung her?

Es gibt 3 Herleitungsarten, analytisch durch partielle Ableitungen oder Vektor-Ableitungen oder geometrisch. Die geometrische Herleitung geht vom folgenden aus:



Was ist eine orthogonale Projektion?

Was ist eine orthogonale Projektion?

Entspricht der senkrechten Projektion eines Punktes b auf das Bild einer Matrix A. Beginne mit Projektion von b auf $\langle A \rangle$, mit $\|A\| = 1$, $r = b - b' = (I - AA^T)b$, mit $b' = \left(\sum_{i=1}^{k} A_i A_i^T\right) b = \hat{A}\hat{A}^T b$ und $\hat{A}\hat{A}^T$ als orthogonale Projektion.

Was sind Normalengleichungen und wie sind sie definiert? Welche Dimension hat $A^T A$?

Was sind Normalengleichungen und wie sind sie definiert? Welche Dimension hat $A^T A$?

Die Normalengleichung enthält die Lösung des überbestimmten (inkonsisten) Gleichungssystem $Ax = b$ und ist definiert als $A^T Ax = A^T b$. Dabei hat $A^T A$ die Dimension $n \times n$.

Was ist die Cholesky-Faktorisierung? Wie funktioniert sie?

Was ist die Cholesky-Faktorisierung? Wie funktioniert sie?

Cholesky-Faktorisierung ist ein robuster und effizienter auf s.p.d. Matrizen basierender Löser, der mittels symmetrischer Gauß-Elimination funktioniert.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{w}^T \\ \mathbf{w} & \mathbf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{w} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} - \mathbf{w}\mathbf{w}^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{w}^T \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Dabei wird die Matrix A in die Faktoren L, L^T zerlegt.Dabei wird die Matrix A in die Faktoren L und L^T zerlegt.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & w^T \\ w & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 \\ \frac{w}{\sqrt{a_{11}}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{L}\tilde{L}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a_{11}} & \frac{w^T}{\sqrt{a_{11}}} \\ 0 & I \end{pmatrix} = LL^T$$

Was ist die 2-Norm?

Was ist die 2-Norm?

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

Wie ist die Pseudoinverse definiert?

Wie ist die Pseudoinverse definiert?

$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$, aber auch nur solange die Spalten linear unabhängig sind.

Wie funktioniert die QR-Faktorisierung?

Wie funktioniert die QR-Faktorisierung?

Erst orthonormale Basis $\{q_1, .., q_n\}$ von $range(A)$ konstruieren und anschließend die Vektoren aus A mit der neuen Basis darstellen:
$a_1 = r_1 1q1, ..., a_n = r_{1n}q_1 + ... + r_{nn}q_n$.

Das ergibt in Matrix-Schreibweise: $A = QR$, sodass letztendlich folgt $Ax = b \Leftrightarrow QRx = QQ^T b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$