Lógica y Programación

Introducción

2025c1

Docentes

- **Teóricas:** Cristian Sottile
- **Prácticas:** Ariel Silva

Email docentes

`lds-doc-lyp@listas.unq.edu.ar`

Lista de mail

`lds-est-lyp@listas.unq.edu.ar`

Bibliografía

- Michael Huth y Mark Ryan, Logic in computer science. Modelling and Reasoning about Systems, Cambridge University Press, 2004.
- Dirk Van Dalen, Logic and Structure, Series Universitext, Springer, 4th edition, 2008.
- Steve Reeves y Michael Clarke, Logic for computer science, Addison-Wesley, 1990.
- Michael Genesereth y Eric Kao (Synthesis Lectures on Computer Science), Introduction to Logic, Morgan & Claypool Publishers, 2012.

Por qué estudiar lógica

- Queremos lenguajes para modelar situaciones
- Queremos poder razonar y argumentar
- Queremos poder hacer esto formalmente
- y vamos a entender más sobre la computación y sus raíces

Sección 1

Lógica proposicional

Lógica proposicional (PROP) - sintaxis

- símbolos

$$\neg\ ,\ \wedge\ ,\ \vee\ ,\ \rightarrow\ ,\ \leftrightarrow\ ,\ (,\ )$$

Lógica proposicional (PROP) - sintaxis

- símbolos

$$\neg\ ,\ \wedge\ ,\ \vee\ ,\ \rightarrow\ ,\ \leftrightarrow\ ,\ (,\ )$$

- variables proposicionales (infinitas)

$$p\ ,\ q\ ,\ r\ ,\ \ldots$$

Lógica proposicional (PROP) - sintaxis

- símbolos

$$\neg\ ,\ \wedge\ ,\ \vee\ ,\ \rightarrow\ ,\ \leftrightarrow\ ,\ (,\ )$$

- variables proposicionales (infinitas)

$$p\ ,\ q\ ,\ r\ ,\ \ldots$$

- fórmulas
  - combinaciones apropiadas de símbolos y variables proposicionales
  - Ejemplo de combinación inapropiada: $(\wedge p(($

Lógica proposicional (PROP) - sintaxis

Fórmulas

1. cualquier variable proposicional es una fórmula

Lógica proposicional (PROP) - sintaxis

Fórmulas

1. cualquier variable proposicional es una fórmula
2. si ϕ es una fórmula, $(\neg\phi)$ es una fórmula

Lógica proposicional (PROP) - sintaxis

Fórmulas

1. cualquier variable proposicional es una fórmula
2. si ϕ es una fórmula, $(\neg\phi)$ es una fórmula
3. si ϕ y ψ son fórmulas, $(\phi \wedge \psi)$ es una fórmula

Lógica proposicional (PROP) - sintaxis

Fórmulas

1. cualquier variable proposicional es una fórmula
2. si ϕ es una fórmula, $(\neg\phi)$ es una fórmula
3. si ϕ y ψ son fórmulas, $(\phi \wedge \psi)$ es una fórmula
4. si ϕ y ψ son fórmulas, $(\phi \vee \psi)$ es una fórmula

Lógica proposicional (PROP) - sintaxis

Fórmulas

1. cualquier variable proposicional es una fórmula
2. si ϕ es una fórmula, $(\neg\phi)$ es una fórmula
3. si ϕ y ψ son fórmulas, $(\phi \wedge \psi)$ es una fórmula
4. si ϕ y ψ son fórmulas, $(\phi \vee \psi)$ es una fórmula
5. si ϕ y ψ son fórmulas, $(\phi \rightarrow \psi)$ es una fórmula

Lógica proposicional (PROP) - sintaxis

Fórmulas

1. cualquier variable proposicional es una fórmula
2. si ϕ es una fórmula, $(\neg\phi)$ es una fórmula
3. si ϕ y ψ son fórmulas, $(\phi \wedge \psi)$ es una fórmula
4. si ϕ y ψ son fórmulas, $(\phi \vee \psi)$ es una fórmula
5. si ϕ y ψ son fórmulas, $(\phi \rightarrow \psi)$ es una fórmula
6. si ϕ y ψ son fórmulas, $(\phi \leftrightarrow \psi)$ es una fórmula

- Las fórmulas son un ejemplo de un conjunto inductivo
- Vienen provistos de
  - Esquema de prueba para probar propiedades sobre ellos (inducción estructural)
  - Esquema de recursión para definir funciones sobre el conjunto (recursión estructural)
- No es tema primario del curso, pero lo veremos de pasada

Lógica proposicional - sintaxis

Ejemplos

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \quad (p \vee p)$$

- ¿Y estas expresiones son fórmulas?
$$p(\wedge q),\ \neg p$$
- Convenciones de notación
  - Precedencia: $\wedge$ y $\vee$ ligan más fuerte que $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$, $\neg$ liga más fuerte que el los demás
  - Omisión de paréntesis más externos y los de negaciones

Semántica clásica

- Consiste en asignarle valores de verdad a las fórmulas
- El conjunto de valores de verdad es
$$\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$
- Dos enfoques para darle semántica a las fórmulas de PROP
  1. Tablas de verdad
  2. Valuaciones
- Son equivalentes

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	
F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	
T	**F**	
F	**T**	
F	**F**	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	
F	**T**	
F	**F**	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \land \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	
F	**F**	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	**T**	
T	**F**	
F	**T**	
F	**F**	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	
F	**T**	
F	**F**	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	
F	**F**	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**F**

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \to \psi)$
T	**T**	
T	**F**	
F	**T**	
F	**F**	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \rightarrow \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	
F	**T**	
F	**F**	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \rightarrow \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	
F	**F**	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \rightarrow \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \to \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \rightarrow \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \leftrightarrow \psi)$
T	**T**	
T	**F**	
F	**T**	
F	**F**	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \rightarrow \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \leftrightarrow \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	
F	**T**	
F	**F**	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \to \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \leftrightarrow \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	
F	**F**	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \rightarrow \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \leftrightarrow \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	

Tablas de verdad

Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, conocemos el valor de verdad de la fórmula

ϕ	$(\neg\phi)$
T	**F**
F	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**F**

ϕ	ψ	$(\phi \rightarrow \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

ϕ	ψ	$(\phi \leftrightarrow \psi)$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**T**

Ejemplo: tabla de verdad para $((p \wedge q) \to r)$

p	q	r	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \to r)$
T	**T**	**T**		
T	**T**	**F**		
T	**F**	**T**		
T	**F**	**F**		
F	**T**	**T**		
F	**T**	**F**		
F	**F**	**T**		
F	**F**	**F**		

Ejemplo: tabla de verdad para $((p \wedge q) \to r)$

p	q	r	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \to r)$
T	**T**	**T**	**T**	
T	**T**	**F**	**T**	
T	**F**	**T**	**F**	
T	**F**	**F**	**F**	
F	**T**	**T**	**F**	
F	**T**	**F**	**F**	
F	**F**	**T**	**F**	
F	**F**	**F**	**F**	

Ejemplo: tabla de verdad para $((p \wedge q) \to r)$

p	q	r	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \to r)$
T	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**T**	
T	**F**	**T**	**F**	
T	**F**	**F**	**F**	
F	**T**	**T**	**F**	
F	**T**	**F**	**F**	
F	**F**	**T**	**F**	
F	**F**	**F**	**F**	

Ejemplo: tabla de verdad para $((p \wedge q) \to r)$

p	q	r	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \to r)$
T	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**T**	**F**	
T	**F**	**F**	**F**	
F	**T**	**T**	**F**	
F	**T**	**F**	**F**	
F	**F**	**T**	**F**	
F	**F**	**F**	**F**	

Ejemplo: tabla de verdad para $((p \wedge q) \rightarrow r)$

p	q	r	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \rightarrow r)$
T	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**T**
F	**T**	**T**	**F**	**T**
F	**T**	**F**	**F**	**T**
F	**F**	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**F**	**F**	**T**

Ejemplo

Escribir la siguiente frase como una fórmula de lógica proposicional.

"Si Juan está cursando y no conoce a nadie entonces Juan todavía no tiene grupo"

Ejemplo

Escribir la siguiente frase como una fórmula de lógica proposicional.

"Si Juan está cursando y no conoce a nadie entonces Juan todavía no tiene grupo"

Solución 1:

p = Juan está cursando
q= Juan no conoce a nadie
r= Juan no tiene grupo

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Ejemplo

Escribir la siguiente frase como una fórmula de lógica proposicional.

"Si Juan está cursando y no conoce a nadie entonces Juan todavía no tiene grupo"

Solución 1:

$p =$ Juan está cursando
$q=$ Juan no conoce a nadie
$r=$ Juan no tiene grupo

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Solución 2:

$p =$ Juan está cursando
$q=$ Juan conoce a alguien
$r=$ Juan tiene grupo

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$$

Valuaciones

- Una valuación es una función $v : \mathcal{V} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ que asigna valores de verdad a las variables proposicionales
- Una valuación satisface una proposición ϕ si $v \models \phi$ donde:

$$
\begin{array}{rcl}
v \models p & \textit{sii} & v(p) = \mathbf{T} \\
v \models \neg\phi & \textit{sii} & v \not\models \phi \ (\textit{i.e.}\ \text{no}\ v \models \phi) \\
v \models \phi \vee \psi & \textit{sii} & v \models \phi \ \text{o}\ v \models \psi \\
v \models \phi \wedge \psi & \textit{sii} & v \models \phi \ \text{y}\ v \models \psi \\
v \models \phi \to \psi & \textit{sii} & v \not\models \phi \ \text{o}\ v \models \psi \\
v \models \phi \leftrightarrow \psi & \textit{sii} & (v \models \phi \ \text{sii}\ v \models \psi)
\end{array}
$$

Tautologías y satisfactibilidad

Dadas fórmulas ϕ y ψ

- ϕ es lógicamente equivalente a ψ cuando $v \models \phi$ sii $v \models \psi$ para toda valuación v

Una fórmula ϕ es

- una tautología si $v \models \phi$ para toda valuación v
- satisfactible si existe una valuación v tal que $v \models \phi$
- insatisfactible si no es satisfactible

Un conjunto de fórmulas S es

- satisfactible si existe una valuación v tal que para todo $\phi \in S$, se tiene $v \models \phi$
- insatisfactible si no es satisfactible

Ejemplos

Tautologías

- $p \to p$
- $\neg\neg p \to p$
- $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

Fórmulas insatisfactibles

- $(\neg p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q) \land p$
- $(p \to q) \land p \land \neg q$

Tautologías e insatisfactibilidad

Teorema

Una fórmula ϕ es una tautología sii $\neg\phi$ es insatisfactible

Demostración.

$\rightarrow$. Si ϕ es tautología, para toda valuación v, $v \models \phi$. Entonces, $v \not\models \neg\phi$ (i.e. v no satisface $\neg\phi$).

$\leftarrow$. Si $\neg\phi$ es insatisfactible, para toda valuación v, $v \not\models \neg\phi$. Luego $v \models \phi$. $\square$

Observación

Este resultado sugiere un método indirecto para probar que una fórmula ϕ es una tautología, a saber probar que $\neg\phi$ es insatisfactible

Relación entre tablas de verdad y valuaciones

- Filas de una tabla se corresponden con las valuaciones

	p	q	r	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \to r)$
v_1	**T**	**T**	**T**		
v_2	**T**	**T**	**F**		
v_3	**T**	**F**	**T**		
v_4	**T**	**F**	**F**		
v_5	**F**	**T**	**T**		
v_6	**F**	**T**	**F**		
v_7	**F**	**F**	**T**		
v_8	**F**	**F**	**F**		

- ¿Cuántas valuaciones diferentes existen para una fórmula de n variables?

Relación entre tablas de verdad y valuaciones

- Filas de una tabla se corresponden con las valuaciones

	p	q	r	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \rightarrow r)$
v_1	**T**	**T**	**T**	**T**	
v_2	**T**	**T**	**F**	**T**	
v_3	**T**	**F**	**T**	**F**	
v_4	**T**	**F**	**F**	**F**	
v_5	**F**	**T**	**T**	**F**	
v_6	**F**	**T**	**F**	**F**	
v_7	**F**	**F**	**T**	**F**	
v_8	**F**	**F**	**F**	**F**	

- ¿Cuántas valuaciones diferentes existen para una fórmula de n variables?

Relación entre tablas de verdad y valuaciones

- Filas de una tabla se corresponden con las valuaciones

	p	q	r	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \to r)$
v_1	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
v_2	**T**	**T**	**F**	**T**	
v_3	**T**	**F**	**T**	**F**	
v_4	**T**	**F**	**F**	**F**	
v_5	**F**	**T**	**T**	**F**	
v_6	**F**	**T**	**F**	**F**	
v_7	**F**	**F**	**T**	**F**	
v_8	**F**	**F**	**F**	**F**	

- ¿Cuántas valuaciones diferentes existen para una fórmula de n variables?

Relación entre tablas de verdad y valuaciones

- Filas de una tabla se corresponden con las valuaciones

	p	q	r	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \to r)$
v_1	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
v_2	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**
v_3	**T**	**F**	**T**	**F**	
v_4	**T**	**F**	**F**	**F**	
v_5	**F**	**T**	**T**	**F**	
v_6	**F**	**T**	**F**	**F**	
v_7	**F**	**F**	**T**	**F**	
v_8	**F**	**F**	**F**	**F**	

- ¿Cuántas valuaciones diferentes existen para una fórmula de n variables?

Relación entre tablas de verdad y valuaciones

- Filas de una tabla se corresponden con las valuaciones

	p	q	r	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \rightarrow r)$
v_1	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
v_2	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**
v_3	**T**	**F**	**T**	**F**	**T**
v_4	**T**	**F**	**F**	**F**	**T**
v_5	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**
v_6	**F**	**T**	**F**	**F**	**T**
v_7	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**
v_8	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**

- ¿Cuántas valuaciones diferentes existen para una fórmula de n variables?

Semántica trivaluada

- Supongamos que contamos con un símbolo relacional $==$ que nos permite comparar números reales
- ¿Valor de verdad de las siguientes fórmulas?

$$1 == 1 \qquad (1+1) == 2 \qquad 0{,}5 == 2/4$$

- ¿Y esta?

$$1/0 == 2$$

Semántica trivaluada

Pasos para determinar si $e_1 == e_2$ es verdadero o falso

1. Obtener el número real r_1 denotado por e_1
2. Obtener el número real r_2 denotado por e_2
3. Comparar r_1 con r_2 para determinar si son iguales o no

Consideremos

$$1/0 == 2$$

Semántica trivaluada

Pasos para determinar si $e_1 == e_2$ es verdadero o falso

1. Obtener el número real r_1 denotado por e_1
2. Obtener el número real r_2 denotado por e_2
3. Comparar r_1 con r_2 para determinar si son iguales o no

Consideremos

$$1/0 == 2$$

- Trabado en paso 1
- Expresión $1/0$ no denota ningún número
- $1/0 == 2$ no es ni verdadera ni falsa porque no contamos con los números a comparar
- Le damos un valor especial: $\perp$ (indefinido)

Semántica trivaluada - ejemplo en Gobstones

```
function esFin()
{
     Sacar(Azul)
     return (True)
}
program
{
     if (esFin() && False)
        { Poner(Rojo) }
       else
        { Poner(Azul) }
}
```

- ¿Qué hace?

Semántica trivaluada - ejemplo en Gobstones

```
function esFin()
{
     Sacar(Azul)
     return (True)
}
program
{
     if (esFin() && False)
        { Poner(Rojo) }
       else
        { Poner(Azul) }
}
```

- ¿Qué hace?
- ¿Qué valor tiene `esFin() && False`?

Orden de evaluación

- En semántica trivaluada el orden de evaluación es importante
- Si $p \wedge q$ se evalúa de izquierda derecha la tabla de $\wedge$ es:

p	q	$p \wedge q$
F	**F**	**F**
F	**T**	**F**
T	**F**	**F**
T	**T**	**T**
F	$\perp$	**F**
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	**F**	$\perp$
$\perp$	**T**	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

- Otras opciones: (1) de derecha a izquierda o (2) paralela.

Evaluaciones alternativas de la conjunción

- Otras opciones: (1) de derecha a izquierda o (2) paralela.

p	q	$p \land q$
F	**F**	**F**
F	**T**	**F**
T	**F**	**F**
T	**T**	**T**
F	$\perp$	$\perp$
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	**F**	**F**
$\perp$	**T**	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

p	q	$p \land q$
F	**F**	**F**
F	**T**	**F**
T	**F**	**F**
T	**T**	**T**
F	$\perp$	$\perp$
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	**F**	$\perp$
$\perp$	**T**	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

- Correlación con circuito corto y circuito largo

Sección 2

Forma normal conjuntiva

Forma normal conjuntiva (FNC)

- Un Literal es una variable proposicional p o su negación $\neg p$
- Una fórmula ϕ está en FNC si es una conjunción

$$\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k$$

  donde cada ψ_i es una disyunción

$$\chi_{i,1} \vee \ldots \vee \chi_{i,n_i}$$

  y cada $\chi_{i,j}$ es un literal
- Una FNC es una "conjunción de disyunciones de literales"

Forma normal conjuntiva

Ejemplos

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

Forma normal conjuntiva

Ejemplos

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ está en FNC
- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg\neg q)$

Forma normal conjuntiva

Ejemplos

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ está en FNC
- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg\neg q)$ no está en FNC
- $(p \wedge q) \vee p$

Forma normal conjuntiva

Ejemplos

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ está en FNC
- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg\neg q)$ no está en FNC
- $(p \wedge q) \vee p$ no está en FNC

Pasar a FNC

¿Podemos transformar cualquier fórmula a FNC?

Pasar a FNC

¿Podemos transformar cualquier fórmula a FNC?

Teorema

Para toda fórmula ϕ puede hallarse una fórmula ϕ' en FNC que es lógicamente equivalente a ϕ.

- Sí, en cuatro pasos de conversión.
  1. Eliminar el sí y sólo sí.
  2. Eliminar la implicación.
  3. Pasar a forma normal negada.
  4. Pasar a forma normal conjuntiva.

Eliminar el sí y sólo sí

Lema

Toda fórmula es lógicamente equivalente a otra en la que no aparece el conectivo $\leftrightarrow$.

Demostración.

- Se aplica exahustivamente la equivalencia lógica que existe entre $\phi \leftrightarrow \psi$ y $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$.
- Reemplazando cada ocurrencia de $\phi \leftrightarrow \psi$ por $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$
- La fórmula queda escrita en términos de $\to, \wedge, \vee, \neg$ $\square$

Eliminar la implicación

Lema

Toda fórmula es lógicamente equivalente a otra en la que no aparece el conectivo $\rightarrow$.

Demostración.

- Se aplica exahustivamente la equivalencia lógica que existe entre $\phi \rightarrow \psi$ y $\neg\phi \vee \psi$
- Reemplazando cada ocurrencia de $\phi \rightarrow \psi$ por $\neg\phi \vee \psi$
- La fórmula queda escrita en términos de $\wedge, \vee, \neg$ $\square$

Forma normal negada

El conjunto de fórmulas en forma normal negada (NNF) se define como:

1. p y $\neg p$ están en NNF para toda variable proposicional p.
2. Si $\phi, \psi \in \mathrm{NNF}$, entonces $(\phi \vee \psi), (\phi \wedge \psi) \in \mathrm{NNF}$.

- Este es otro ejemplo de un conjunto inductivo

Forma normal negada

Lema

Toda fórmula es lógicamente equivalente a otra en NNF.

Demostración.

Se aplican exahustivamente las equivalencias lógicas que existen entre

$$\begin{array}{rcl} \neg(\phi \wedge \psi) & \text{y} & \neg\phi \vee \neg\psi \\ \neg(\phi \vee \psi) & \text{y} & \neg\phi \wedge \neg\psi \\ \neg\neg\phi & \text{y} & \phi \end{array}$$

$\square$

Ejemplo

$\neg((p \vee q) \wedge (q \to p))$

Pasar NNF a FNC

Dada ϕ en NNF, definimos una función que denota la FNC de ϕ:

$$FNC(\phi)$$

- Recordar que en NNF las negaciones aparecen sólo delante de variables proposicionales

ϕ		FNC
literal	$\Longrightarrow$	$FNC(\phi) = \phi$.
$\phi_1 \wedge \phi_2$	$\Longrightarrow$	$FNC(\phi) = FNC(\phi_1) \wedge FNC(\phi_2)$.
$\phi_1 \vee \phi_2$	$\Longrightarrow$	¿$FNC(\phi) = FNC(\phi_1) \vee FNC(\phi_2)$ es correcto?

Pasar NNF a FNC

Dada ϕ en NNF, definimos una función que denota la FNC de ϕ:

$$FNC(\phi)$$

- Recordar que en NNF las negaciones aparecen sólo delante de variables proposicionales

ϕ		FNC
literal	$\Longrightarrow$	$FNC(\phi) = \phi$.
$\phi_1 \wedge \phi_2$	$\Longrightarrow$	$FNC(\phi) = FNC(\phi_1) \wedge FNC(\phi_2)$.
$\phi_1 \vee \phi_2$	$\Longrightarrow$	¿$FNC(\phi) = FNC(\phi_1) \vee FNC(\phi_2)$ es correcto?

  - No. Sólo vale si ϕ_1 y ϕ_2 son disjunciones de literales.
  - Sino, una contiene una conjunción. Ej. $FNC(\phi_1) = \xi_1 \wedge \xi_2$
  - Podemos utilizar la ley distributiva

$$\begin{array}{lcl} \psi \vee (\xi_1 \wedge \xi_2) & \text{sii} & (\psi \vee \xi_1) \wedge (\psi \vee \xi_2) \\ (\xi_1 \wedge \xi_2) \vee \psi & \text{sii} & (\xi_1 \vee \psi) \wedge (\xi_2 \vee \psi) \end{array}$$

Notación conjuntista para FNC

Considerar la FNC (recordar que cada $\chi_{i,j}$ es una literal)

$$\underbrace{(\chi_{1,1} \vee \ldots \vee \chi_{1,n_1})}_{\phi_1} \wedge \ldots \wedge \underbrace{(\chi_{k,1} \vee \ldots \vee \chi_{k,n_k})}_{\phi_k}$$

- Dado que tanto $\vee$ como $\wedge$
  1. son conmutativos: $(\phi \vee \psi) \quad \text{sii} \quad (\psi \vee \phi)$
  2. son asociativos: $((\phi \vee \psi) \vee \chi) \quad \text{sii} \quad (\phi \vee (\psi \vee \chi))$
  3. son idempotentes: $(\phi \vee \phi) \quad \text{sii} \quad \phi$

  Podemos asumir que
  1. Cada ϕ_i es distinta
  2. Cada $\chi_{i,j}$ dentro de cada ϕ_i también

Notación conjuntista para FNC

Consecuentemente para una FNC podemos usar la notación

$$\{C_1, \ldots, C_n\}$$

donde cada C_i es un conjunto de literales

$$\{\chi_{i1}, \ldots, \chi_{im_i}\}$$

Es decir

$$\{\{\chi_{11}, \ldots, \chi_{1m_1}\}, \ldots, \{\chi_{n1}, \ldots, \chi_{nm_n}\}\}$$

Ejemplo

La FNC $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ se anota

$$\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}\}$$