# Lógica y Programación

Lógica Proposicional: Corrección y Completitud

# Corrección y completitud

¿Cuál es la relación entre la sintaxis y la semántica de PROP?

### Sintaxis

- Conjunto de fórmulas $\phi$ tal que $\vdash \phi$ es un secuente válido

### Semántica

- Conjunto de fórmulas $\phi$ tal que $v \vDash \phi$, para toda valuación $v$ (i.e. tautologías).

### Corrección

$\vdash \phi$ secuente válido $\phi$ tiene una prueba implica que $\phi$ es tautología

### Completitud

$\phi$ tautología implica que $\vdash \phi$ es secuente válido $\phi$ tiene una prueba.

# Valuaciones

- Valuación: función $v : \mathcal{V} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ que asigna valores de verdad a las variables proposicionales
- Satisfactibilidad: $v$ satisface $A$ si $v \vDash A$ donde:

$$
\begin{array}{rcl}
v \vDash p & \textit{sii} & v(p) = \mathbf{T} \\
v \vDash \neg\phi & \textit{sii} & v \nvDash \phi \ (i.e. \text{ no } v \vDash \phi) \\
v \vDash \phi \vee \psi & \textit{sii} & v \vDash \phi \text{ o } v \vDash \psi \\
v \vDash \phi \wedge \psi & \textit{sii} & v \vDash \phi \text{ y } v \vDash \psi \\
v \vDash \phi \to \psi & \textit{sii} & v \nvDash \phi \text{ o } v \vDash \psi \\
v \vDash \phi \leftrightarrow \psi & \textit{sii} & (v \vDash \phi \text{ sii } v \vDash \psi)
\end{array}
$$

## Tautologías y satisfactibilidad

Una proposición $A$ es

- una tautología si $v \vDash A$ para toda valuación $v$
- satisfactible si existe una valuación $v$ tal que $v \vDash A$
- insatisfactible si no es satisfactible

# Consecuencia semántica (semantic entailment)

## Consecuencia semántica

Para $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \psi$ fórmulas de la lógica proposicional,

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \psi$$

cuando toda valuación $v$ que satisface todas las premisas (esto es $v \vDash \phi_i$ para todo $i \in 1..n$) también satisface la conclusión ($v \vDash \psi$).

## Ejemplos

- $p \wedge q \vDash p$
- $\neg q, p \vee q \vDash p$
- $p \vee q \nvDash q$
- $p \vDash q \vee \neg q$

# Corrección y completitud (Generalizado)

- Conviene generalizar los enunciados de corrección y completitud
- Motivo: Facilita su demostración

**Corrección**

$\vdash \phi$ secuente válido implica que $\phi$ es tautología

**Completitud**

$\phi$ tautología implica que $\vdash \phi$ es secuente válido.

**Corrección (generalizada)**

$\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$ secuente válido implica que $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \phi$

**Completitud (generalizada)**

$\psi_1, \ldots, \psi_n \models \phi$ implica que $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$ es secuente válido.

Corrección

Completitud

# Corrección

**Teorema**

Si $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ entonces $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \psi$

Demostración:

- Por inducción en la estructura de la prueba
- Procedemos analizando por casos la última regla aplicada en la prueba
- Arrancamos con el caso base
- Caso base) La prueba consiste únicamente de la regla Hyp: $\psi = \phi_i$ para algún $i$. Como $v \vDash \phi_i$ por hipótesis, tenemos que $v \vDash \psi$.

sigue...

# Corrección

continuación

- Caso $\wedge i$) $\psi = \eta_1 \wedge \eta_2$ con $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \eta_1$ (1) y $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \eta_2$ (2).
  - Por HI en (1) $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \eta_1$.
  - Por HI en (2) $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \eta_2$.

  Por def. de consecuencia semántica, para toda valuación $v$ que satisface las premisas $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$,
  - $v \vDash \eta_1$
  - $v \vDash \eta_2$

  Luego $v \vDash \eta_1 \wedge \eta_2$ (es decir $v \vDash \psi$) por definición de satisface. Finalmente, $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \psi$.

sigue...

# Corrección

continuación

- Caso $\wedge e_1$) $\psi = \eta_1$ con $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \eta_1 \wedge \eta_2$. Aplicando HI,
$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \eta_1 \wedge \eta_2.$$
Por definición de consecuencia semántica, si $v$ satisface todas las premisas, entonces
$$v \vDash \eta_1 \wedge \eta_2.$$
Luego, $v \vDash \eta_1$ (es decir $v \vDash \psi$). Finalmente $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \psi$.
- Caso $\wedge e_2$) análogo anterior.

sigue...

# Corrección

continuación

- Caso $\vee e$) $\psi = \chi$ con
  (1) $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \eta_1 \vee \eta_2$
  (2) $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \eta_1 \vdash \chi$
  (3) $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \eta_2 \vdash \chi$.

  Usando hipótesis inductiva en (1-3), tenemos que
  (4) $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \eta_1 \vee \eta_2$
  (5) $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \eta_1 \vDash \chi$
  (6) $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \eta_2 \vDash \chi$.

  Por (3), sabemos que para toda valuación $v$ que satisface las premisas, $v \vDash \eta_1 \vee \eta_2$. Luego $v \vDash \eta_1$ o $v \vDash \eta_2$
  - Si $v \vDash \eta_1$, por (5) $v \vDash \chi$ y luego $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \chi$.
  - Si $v \vDash \eta_2$, por (6) $v \vDash \chi$ y luego $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \chi$.

  En los dos casos $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \psi$ (porque $\psi = \chi$).

restantes casos como práctica

# Comentarios adicionales sobre corrección

- Resultado es esperado
- Muestra que las reglas lógica del sistema de Deducción Natural para PROP son "razonables"
- Beneficio adicional: se puede usar para probar que una fórmula no es demostrable
  - $\vdash p$ no es un secuente válido (¿Por qué?)

Corrección

Completitud

# Completitud

**Completitud**

$\psi_1, \dots, \psi_n \vDash \phi$ implica que $\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \phi$ es secuente válido.

- Estrategia: vamos a probar el contrarecíproco

**Completitud (definición equivalente a la anterior)**

$\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \phi$ no es secuente válido implica que $\psi_1, \dots, \psi_n \nvDash \phi$.

Recordar:

- "$\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \phi$ no es secuente válido" significa que no hay una prueba de $\phi$ a partir de las hipótesis $\psi_1, \dots, \psi_n$.
- "$\psi_1, \dots, \psi_n \nvDash \phi$" significa que existe una valuación $v$ tal que $v \vDash \psi_i$, para toda $i \in 1..n$ pero $v \nvDash \phi$.

# Nociones preliminares

**Conjunto consistente de fórmulas**

$\Gamma$ se dice consistente si $\Gamma \nvdash \bot$.

- $\Gamma$ es consistente si no se puede derivar una contradicción a partir de él

Ejemplos:

- $\{p, q \to r\}$ es consistente (¿Cómo lo pruebo?)
- $\{p, q, q \to \neg p\}$ no es consistente

# Nociones preliminares

## Recordamos la definición de satisfactibilidad de un conjunto de fórmulas

- $\Gamma$ un conjunto de fórmulas

**Definición**

$\Gamma$ tiene un modelo (o es satisfactible) si existe una valuación $v$ tal que

$$v \models \phi, \text{ para toda } \phi \in \Gamma$$

Ejemplos:

- $\{p, q \to r\}$ tiene un modelo (¿Ejemplo de valuación?)
- $\{p, q, q \to \neg p\}$ no tiene un modelo

# Completitud: $\Gamma \nvdash \phi$ implica $\Gamma \not\models \phi$

Demostración requiere dos lemas:

L1. Si $\Gamma \nvdash \phi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente

L2. Si $\Gamma$ es consistente, entonces tiene modelo

## La prueba

Supongamos que $\Gamma \nvdash \phi$

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente (por L1)

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ tiene modelo (por L2)

$\Longrightarrow$ $\exists v$ tal que $\forall\psi \in \Gamma \cup \{\neg\phi\}$, $v \models \psi$ (def. de tener modelo)

$\Longrightarrow$ $\exists v$ tal que $v \not\models \phi$ y $\forall\psi \in \Gamma$, $v \models \psi$ (def. de $\models$)

$\Longrightarrow$ $\Gamma \not\models \phi$ (def. de consecuencia semántica). $\square$

# Prueba del L1

Si $\Gamma \nvdash \phi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente

**Prueba**

Por contrarecíproco.

Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es inconsistente.

$\Rightarrow$ $\Gamma, \neg\phi \vdash \bot$.

$\Rightarrow$ Hay una prueba de $\bot$ a partir de $\Gamma, \neg\phi$:

$$\begin{array}{c} \Gamma, \neg\phi \\ \vdots \\ \bot \end{array}$$

$\Rightarrow$ La usamos para otra de $\phi$ a partir de $\Gamma$:

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c} \neg\phi^{n} \\ \vdots \\ \bot \end{array}}}{\phi}\ PBC, n$$

$\Rightarrow$ $\Gamma \vdash \phi$ $\square$

# Sobre L2 – Primero una observación

**L2**

Si $\Gamma$ es consistente, entonces tiene modelo

- Vale la vuelta también: Si $\Gamma$ tiene modelo, es consistente

**Prueba de la vuelta**

Por el absurdo.

$\Gamma \vdash \perp$

$\Longrightarrow$ Sea $v$ tal que $\forall \phi \in \Gamma$, $v \models \phi$ ($v$ existe porque $\Gamma$ tiene modelo)

$\Longrightarrow$ Por Teorema de Corrección, $v$ debería satisfacer $\perp$.

$\Longrightarrow$ ¡Ninguna $v$ verifica $v \models \perp$!

$\Longrightarrow$ $\Gamma \not\vdash \perp$. $\square$

# Prueba del L2: Si $\Gamma$ es consistente, entonces tiene modelo

Objetivo

- Definir $v$ tal que $\forall \phi \in \Gamma,\ v \vDash \phi$

Consideraciones:

- Hay que definir $v$ sobre las variables proposicionales
- Si $p \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$
- Si $\neg p \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}$.
- ¿Si $p \notin \Gamma$ y $\neg p \notin \Gamma$? ¿Podemos definir, digamos, $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$?
  - Considerar $\Gamma = \{q, q \to \neg p\}$ y $v(q) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$ y $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$.

Observación 1

- Primero "completar" $\Gamma$ con todas sus consecuencias lógicas
  - $Th(\Gamma) = \{q, q \to \neg p, \neg p, q \wedge \neg p \ldots\}$
  - En general $Th(\Gamma) = \{\phi \mid \Gamma \vdash \phi\}$

# Prueba del L2: Si $\Gamma$ es consistente, entonces tiene modelo

¿Alcanza con completar $\Gamma$ con sus consecuencias lógicas para poder definir $v$?

- No.
- Considerar $\Gamma = \{q, q \to \neg p\}$
- ¿$r$ es consecuencia lógica de $\Gamma$? Es decir, ¿$\Gamma \vdash r$? No.
- ¿$\neg r$ es consecuencia lógica de $\Gamma$? Es decir, ¿$\Gamma \vdash \neg r$? No.
- Entonces ni $r$ ni $\neg r$ van a aparecer en $Th(\Gamma)$
- Problema: ¿cómo definimos $v$ en $r$?

Observación 2

- Podemos usar L1 y agregarlo ($r$ o $\neg r$) a $\Gamma$ conservando consistencia

# Prueba del L2: Si $\Gamma$ es consistente, entonces tiene modelo

- Vamos a definir una técnica que se encarga de atender ambas observaciones a la vez:
  - Agrega las consecuencias lógicas y además
  - Agrega las fórmulas que no son consecuencia lógica y que no generan inconsistencias
- Permite obtener la extensión consistente maximal de $\Gamma$ y se escribe $\Gamma^*$
- Nuestro plan de prueba de L2 ahora será:
  1. Dado $\Gamma$, obtenemos $\Gamma^*$
  2. A partir de $\Gamma^*$ obtenemos una valuación $v$
  3. Probamos que $v$ satisface a todas las fórmulas de $\Gamma$

# Conjunto consistente maximal

$\Gamma$ es consistente maximal si

1. $\Gamma$ es consistente
2. Si $\Gamma \subseteq \Gamma'$ y $\Gamma'$ consistente, entonces $\Gamma' = \Gamma$

Observación

- (2) puede reemplazarse equivalentemente por:

$$\text{Si } \Gamma \subset \Gamma', \text{ entonces } \Gamma' \text{ es inconsistente}$$

## Ejemplo

$\Gamma = \{\phi \mid v \models \phi\}$ para una valuación $v$ cualquiera dada.

- Es consistente por vuelta de L2 (si tiene modelo es consistente)
- Si $\Gamma \subset \Gamma'$, entonces $\Gamma'$ es inconsistente (¿por qué?)

# Lema de saturación

**Lema**

$\Gamma$ consistente está contenido en un conjunto consistente maximal $\Gamma^*$

## Prueba

- Sea $\phi_0, \phi_1, \ldots$ la lista de todas las fórmulas de PROP
- Definimos una secuencia de conjuntos de fórmulas

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \\ \Gamma_{n+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\phi_n\} & \text{si } \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \text{ es consistente} \\ \Gamma_n & \text{sino} \end{cases} \end{aligned}$$

- Luego definimos

$$\Gamma^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \{\Gamma_i \mid i \geq 0\}$$

- Es claro que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$
- Veremos que $\Gamma^*$ es consistente maximal

sigue...

# Lema de saturación

**Lema**

$\Gamma$ consistente está contenido en un conjunto consistente maximal $\Gamma^*$

**Prueba (continuación)**

Cada $\Gamma_n$ es consistente (trivial)

$\Longrightarrow$ $\Gamma^*$ es consistente. Se muestra por el absurdo

$\Longrightarrow$ $\Gamma^*$ es consistente maximal

Asumir $\Delta$ consistente tal que $\Gamma^* \subseteq \Delta$ y $\psi \in \Delta$

$\Longrightarrow$ Existe $m$ tal que $\psi = \phi_m$

$\Longrightarrow$ Como $\Gamma_m \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta$, $\Gamma_m \cup \{\phi_m\}$ consistente

$\Longrightarrow$ $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\phi_m\}$ y por ende $\phi_m \in \Gamma^*$ $\square$

# Finalmente: Prueba de L2

**L2**

Si $\Gamma$ es consistente, entonces tiene modelo

## Prueba

- Por lema de saturación existe $\Gamma^*$ consistente maximal que incluye a $\Gamma$
- Definimos:

$$v(p_i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathbf{T} & \text{si } p_i \in \Gamma^* \\ \mathbf{F} & \text{sino} \end{cases}$$

- Probamos que $v \vDash \phi$ sii $\phi \in \Gamma^*$
- Concluimos que $v \vDash \phi$ para todo $\phi \in \Gamma$ $\square$

# Resumen de resultados

- Caracterización sintáctica y semántica de verdades universales

$$\vdash \qquad\qquad \models$$

- Ambas coinciden

**Corrección**

$\phi$ tiene una prueba implica que $\phi$ es tautología

**Completitud**

$\phi$ tautología implica que $\phi$ tiene una prueba.