Lógica y Programación

Deducción Natural para lógica proposicional

Verdades universales

- Fórmulas cuyo valor de verdad no depende de cómo se interpretan
  - En PROP son las tautologías
- Contamos con una caracterización semántica de las tautologías
  - Aquellas cuyas tablas de verdad tienen **T** en todas las filas
- Nos interesa tener una caracterización sintáctica
  - Conjunto de fórmulas que se puedan probar en un sistema deductivo
- Beneficio adicional de sistema deductivo:
  - analizar formas argumentativas
  - pruebas como objeto de estudio

Sistema deductivo basado en reglas de prueba

Reglas de prueba (*proof rules*)

- Permitan deducir una fórmula (conclusión) a partir de ciertas otras (premisas)

$$\frac{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n}{\psi}\ \textit{Nombre}$$

  - $\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n$: premisas
  - ψ: conclusión

Prueba

- Se construye aplicando sucesivamente reglas de prueba a premisas y conclusiones obtenidas previamente

Pruebas

Un primer ejemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p}\ Hyp \qquad \dfrac{}{q}\ Hyp}{p \wedge q}\ \wedge i \qquad \dfrac{}{r}\ Hyp}{(p \wedge q) \wedge r}\ \wedge i$$

- Prueba de $(p \wedge q) \wedge r$ a partir de p, q y r
- *Hyp* y $\wedge i$ son los nombres de las reglas que se usan en la prueba

Secuente

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$$

- denota que a partir del conjunto de fórmulas $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ podemos obtener una prueba de ψ
- un secuente es válido si podemos construir una prueba

Secuente

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$$

- denota que a partir del conjunto de fórmulas $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ podemos obtener una prueba de ψ
- un secuente es válido si podemos construir una prueba

Ejemplo

$$p, q, r \vdash (p \land q) \land r \text{ prueba ya vista}$$

Secuente

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$$

- denota que a partir del conjunto de fórmulas $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ podemos obtener una prueba de ψ
- un secuente es válido si podemos construir una prueba

Ejemplo

$p, q, r \vdash (p \wedge q) \wedge r$ prueba ya vista
$p \wedge q \to r,\ p,\ \neg r\ \vdash\ \neg q$

Secuente

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$$

- denota que a partir del conjunto de fórmulas $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ podemos obtener una prueba de ψ
- un secuente es válido si podemos construir una prueba

Ejemplo

$p, q, r \vdash (p \wedge q) \wedge r$ prueba ya vista
$p \wedge q \rightarrow r,\ p,\ \neg r\ \vdash\ \neg q$
$p,\ q \vdash p\ \wedge \neg q$

Importancia de la elección de las reglas

- Deben permitir construir sólo pruebas que constituyan una argumentación válida
  - Deberían impedir probar secuentes tales como

$$p,\ q \vdash p \wedge \neg q$$

- Deberían permitir inferir todas las fórmulas que se desprenden de las premisas

Regla de la hipótesis

Hipótesis

$$\frac{}{\phi}\ \textit{Hyp}$$

- Si ϕ es premisa, puede probar ϕ
- Permite probar el secuente $p \vdash p$
- Se usa en combinación con las demás reglas
- A veces se omite la raya y la referencia al nombre de la regla

Reglas para la conjunción

Introducción de la conjunción

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge i$$

Reglas para la conjunción

Introducción de la conjunción

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \land \psi} \land i$$

Eliminación de la conjunción

$$\frac{\phi \land \psi}{\phi} \land e_1 \qquad\qquad \frac{\phi \land \psi}{\psi} \land e_2$$

Ejemplo de prueba

Secuente a probar: $p, \; q, \; r \; \vdash (p \wedge q) \wedge r$

$$\dfrac{\dfrac{p \qquad q}{p \wedge q}\,\wedge i \qquad r}{(p \wedge q) \wedge r}\,\wedge i$$

1	p	premisa
2	q	premisa
3	r	premisa
4	$p \wedge q$	$\wedge i \; 1, 2$
5	$(p \wedge q) \wedge r$	$\wedge i \; 4, 3$

- Izquierda: Prueba en estilo Gentzen
- Derecha: Prueba en estilo Fitch
- Usaremos ambas
- Observar que esta prueba hace uso de la regla de la hipótesis (pero no se escribe)

Otro ejemplo de pruebas

Ejemplo: $p \wedge q,\ r\ \vdash q \wedge r$

$$\dfrac{\dfrac{p \wedge q}{q}\wedge e_2 \qquad r}{q \wedge r}\wedge i$$

1	$p \wedge q$	premisa
2	r	premisa
3	q	$\wedge e_2$ 1
4	$q \wedge r$	$\wedge i$ 3, 2

Reglas para la doble negación

Introducción de la doble negación

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg i$$

No es primitiva, puede ser derivada (ver más adelante)

Eliminación de la doble negación

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg e$$

Reglas para la doble negación

Ejemplo: $p,\ \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$

$$\dfrac{\dfrac{p}{\neg\neg p}\,{\neg\neg i} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\neg(q \wedge r)}{q \wedge r}\,{\neg\neg e}}{r}\,{\wedge e_2}}{\neg\neg p \wedge r}\,{\wedge i}$$

1	p	premisa
2	$\neg\neg(q \wedge r)$	premisa
3	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 1
4	$q \wedge r$	$\neg\neg e$ 2
5	r	$\wedge e_2$ 4
6	$\neg\neg p \wedge r$	$\wedge i$ 3, 5

Reglas para la eliminación de la implicación

Ejemplo

$$p \equiv \text{llovió}$$
$$p \rightarrow q \equiv \text{Si llovió, está mojado}$$

De estas dos premisas queremos concluir *está mojado* (q)

Reglas para la eliminación de la implicación

Ejemplo

$$p \equiv \text{llovió}$$
$$p \rightarrow q \equiv \text{Si llovió, está mojado}$$

De estas dos premisas queremos concluir *está mojado* (q)

Eliminación de la implicación

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow e$$

Notar que dada una implicación, para inferir la conclusión debemos saber que vale su premisa

Reglas para la eliminación de la implicación

Ejemplo: $p,\ p \to (q \to r), p \to q \vdash r$

Reglas para la eliminación de la implicación

Ejemplo: $p,\ p \to (q \to r), p \to q \vdash r$

$$\dfrac{\dfrac{p \qquad p \to q}{q}\to e \qquad \dfrac{p \qquad p \to (q \to r)}{q \to r}\to e}{r}\to e$$

Introducción de la implicación

Introducción de la implicación

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c} \phi^{n} \\ \vdots \\ \psi \end{array}}}{\phi \to \psi} \to i, n$$

- ϕ es una suposición temporaria que nos permite probar ψ.
- ϕ es la primera fórmula en el recuadro y ψ es la última.
- Se suele darle una etiqueta a ϕ (en este caso, un número n).
- los recuadros pueden anidarse.

Ejemplos

Ejemplo: $\vdash p \wedge q \to p$

$$\dfrac{\boxed{\dfrac{\dfrac{}{(p \wedge q)^1}\;Hyp}{p}\;\wedge e_1}}{p \wedge q \to p}\;\to_i, 1$$

Ejemplos

Ejemplo: $\vdash p \land q \to p$

$$\dfrac{\boxed{\dfrac{\dfrac{}{(p \land q)^1}\;Hyp}{p}\;\land e_1}}{p \land q \to p}\;\to_i, 1$$

Ejemplo: $\vdash p \land q \to q \land p$

$$\dfrac{\boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(p \land q)^1}\;Hyp}{q}\;\land e_2 \qquad \dfrac{\dfrac{}{(p \land q)^1}\;Hyp}{p}\;\land e_1}{q \land p}\;\land i}}{p \land q \to q \land p}\;\to_i, 1$$

Otro ejemplo

Ejemplo: $\vdash p \rightarrow p$

1	$\boxed{p}$	premisa
2	$p \rightarrow p$	$\rightarrow i$ $1-1$

Otro ejemplo

Ejemplo: $\vdash p \rightarrow p$

1	p	premisa
2	$p \rightarrow p$	$\rightarrow i$ $1-1$

- El hecho de que el conjunto de premisas es vacío indica que la prueba de $p \rightarrow p$ no depende de ninguna premisa.

Otro ejemplo

Ejemplo: $\vdash p \to p$

1	$\boxed{p}$	premisa
2	$p \to p$	$\to i$ $1-1$

- El hecho de que el conjunto de premisas es vacío indica que la prueba de $p \to p$ no depende de ninguna premisa.

Siempre se puede transformar una prueba para $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ en una prueba para $\vdash \phi_1 \to (\phi_2 \to (\ldots \to (\phi_n \to \psi))))$ aplicando n veces $\to i$ en el siguiente orden $\phi_n, \phi_{n-1}, \ldots, \phi_1$.

Modus tollens

- Permite eliminar la implicación en el caso en que sabemos que la conclusión es falsa
  - Si vale $p \rightarrow q$ y $\neg q$, podemos decir algo respecto de p?

Modus tollens

- Permite eliminar la implicación en el caso en que sabemos que la conclusión es falsa
  - Si vale $p \to q$ y $\neg q$, podemos decir algo respecto de p?
  - Notar que si p fuese verdadero, entonces por $\to e$, q debería ser verdadero, lo que contradice el hecho de que vale $\neg q$.
  - En este caso podemos concluir que vale $\neg p$.

Modus tollens

- Permite eliminar la implicación en el caso en que sabemos que la conclusión es falsa
  - Si vale $p \to q$ y $\neg q$, podemos decir algo respecto de p?
  - Notar que si p fuese verdadero, entonces por $\to e$, q debería ser verdadero, lo que contradice el hecho de que vale $\neg q$.
  - En este caso podemos concluir que vale $\neg p$.
- No es una regla primitiva (vamos a ver que se puede obtener como combinación de otras)

Modus tollens

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}\ MT$$

Modus tollens

Ejemplo: $p,\ \neg r, p \to (q \to r) \vdash \neg q$

$$\dfrac{\dfrac{p \qquad p \to (q \to r)}{q \to r}\,{\to}e \qquad \neg r}{\neg q}\,MT$$

Teoremas

Teorema

Llamamos teorema a toda fórmula lógica ϕ tal que el secuente $\vdash \phi$ es válido.

Ejercicio

Mostrar que $(q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$ es un teorema

Reuso de fórmulas que aparecen previamente en la prueba

Example: $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

1	p	premisa
2	q	premisa
3	p	copia 1
4	$q \rightarrow p$	$\rightarrow i$ $2-3$
5	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\rightarrow i$ $1-4$

Reuso de fórmulas que aparecen previamente en la prueba

Las fórmulas que se prueban dentro de los recuadros no pueden usarse fuera (su alcance es el recuadro)

Uso inválido de una fórmula previa

1	p	premisa
2	$p \rightarrow p$	$\rightarrow i$ $1-1$
3	p	copia 1

USO INCORRECTO DE COPIA

De hecho $\vdash p$ no es válido.

Reglas para la disyunción

Introducción de la o

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee i_1 \qquad\qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi} \vee i_2$$

Reglas para la disyunción

Introducción de la o

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee i_1 \qquad\qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\ \vee i_2$$

Eliminación de la o

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi^{n}\\ \vdots \\ \chi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi^{m}\\ \vdots \\ \chi\end{array}}}{\chi}\ \vee e, n, m$$

no se pueden utilizar fórmulas probadas dentro de un recuadro en el otro!!!

Reglas para la disyunción

Ejemplo: $p \vee q \vdash q \vee p$

1	$p \vee q$	premisa
2	p	premisa
3	$q \vee p$	$\vee i_2$ 2
4	q	premisa
5	$q \vee p$	$\vee i_1$ 4
6	$q \vee p$	$\vee e$ $1, 2-3, 4-5$

Contradicción

Contradicción

Una contradicción es una expresión de la forma $\phi \wedge \neg\phi$ o $\neg\phi \wedge \phi$

- Vamos a denotar una contradicción con $\perp$
- Cualquier fórmula puede ser derivada a partir de una contradicción

Contradicción

Contradicción

Una contradicción es una expresión de la forma $\phi \land \neg\phi$ o $\neg\phi \land \phi$

- Vamos a denotar una contradicción con $\bot$
- Cualquier fórmula puede ser derivada a partir de una contradicción

Eliminación de contradicción

$$\frac{\bot}{\phi}\ \bot e$$

Pensar que $\phi \land \neg\phi \vdash \psi$ se corresponde con $\vdash \phi \land \neg\phi \to \psi$

Reglas para la negación

Eliminación de la negación

$$\frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\ \neg e$$

Introducción de la negación

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi^{n} \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ \neg i, n$$

Reglas para la negación

Ejemplo: $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$

Reglas para la negación

Ejemplo: $p \to \neg p \vdash \neg p$

1	$p \to \neg p$	premisa
2	p	premisa
3	$\neg p$	$\to e$ 1, 2
4	$\perp$	$\neg e$ 2, 3
5	$\neg p$	$\neg i$ 2 – 4

Reglas derivadas: *Modus tollens*

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}\ MT$$

Reglas derivadas: *Modus tollens*

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}\ MT$$

$$\begin{array}{lll}
1 & \phi \to \psi & \text{premisa} \\
2 & \neg\psi & \text{premisa} \\
\hline
3 & \phi & \text{premisa} \\
4 & \psi & \to e\ 1,3 \\
5 & \bot & \neg e\ 2,4 \\
\hline
6 & \neg\phi & \neg i\ 3-5
\end{array}$$

Reglas derivadas: $\neg\neg i$

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg i$$

Reglas derivadas: $\neg\neg i$

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg i$$

1	ϕ	premisa
2	$\neg\phi$	premisa
3	$\perp$	$\neg e$ 1, 2
4	$\neg\neg\phi$	$\neg i$ 2 – 3

Reglas derivadas: Reducción al absurdo

PBC (Proof by contradiction)

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{l}\neg\phi^{n}\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\phi}\ \textcolor{green}{PBC, n}$$

Reglas derivadas: Reducción al absurdo

PBC (Proof by contradiction)

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l}\neg\phi^{n}\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\phi}\ \text{PBC}, n$$

1	$\neg\phi \to \bot$	dada
2	$\neg\phi$	premisa
3	$\bot$	$\to e$ 1, 2
4	$\neg\neg\phi$	$\neg i$ 2 – 3
5	ϕ	$\neg\neg e$ 2 – 3

Reglas derivadas: Principio del tercero excluído

LEM (Law of the excluded middle)

Tertium non datur: la disyunción de una proposición y su negación es siempre verdadera.

$$\frac{}{\phi \vee \neg\phi}\ \mathit{LEM}$$

Reglas derivadas: Principio del tercero excluído

LEM (Law of the excluded middle)

Tertium non datur: la disyunción de una proposición y su negación es siempre verdadera.

$$\frac{}{\phi \vee \neg\phi}\ LEM$$

1	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	premisa
2	ϕ	premisa
3	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee i_1$ 2
4	$\bot$	$\neg e$ 3, 1
5	$\neg\phi$	$\neg i$ 2 – 4
6	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee i_2$ 5
7	$\bot$	$\neg e$ 6, 1
8	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$\neg i$ 1 – 7
9	$(\phi \vee \neg\phi)$	$\neg\neg e$ 8

Reglas derivadas: Principio del tercero excluído

Ejemplo: $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$

Reglas derivadas: Principio del tercero excluído

Ejemplo: $p \to q \vdash \neg p \vee q$

1	$p \to q$	premisa
2	$\neg p \vee p$	LEM
3	$\neg p$	premisa
4	$\neg p \vee q$	$\vee i_1$ 3
5	p	premisa
6	q	$\to e$ 1, 5
7	$\neg p \vee q$	$\vee i_2$ 6
8	$\neg p \vee q$	$\vee e$ 2, 3 – 4, 5 – 7

Reglas básicas (1/2)

	Introducción	Eliminación
Hyp	$\dfrac{}{\phi}\ \mathit{Hyp}$	
$\wedge$	$\dfrac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \wedge i$	$\dfrac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ \wedge e_1 \qquad \dfrac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge e_2$
$\vee$	$\dfrac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee i_1 \qquad \dfrac{\psi}{\phi \vee \psi}\ \vee i_2$	$\dfrac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi^n \\ \vdots \\ \chi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi^m \\ \vdots \\ \chi\end{array}}}{\chi}\ \vee e, n, m$
$\rightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi^n \\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\phi \rightarrow \psi}\ \rightarrow i, n$	$\dfrac{\phi \qquad \phi \rightarrow \psi}{\psi}\ \rightarrow e$

Reglas básicas (2/2)

	Introducción	Eliminación
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi^{n}\\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ \neg i, n$	$\dfrac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\ \neg e$
$\bot$		$\dfrac{\bot}{\phi}\ \bot e$
$\neg\neg$		$\dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg e$

Reglas derivadas

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg i \qquad\qquad \frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}\ MT$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l}\neg\phi^{n}\\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\phi}\ PBC, n \qquad\qquad \frac{}{\phi \lor \neg\phi}\ LEM$$