第七讲　　套利定价理论与风险收益多因素模型

学习目标

- **基本要求：**
  - ✓ 掌握：**套利定价理论以及如何进行套利。**
  - ✓ 熟悉：证券收益单因素、多因素模型的构造；
  - ✓ 了解：多因素证券市场线的导出及意义；充分分散化组合的风险收益特点；
- **重点难点：**如何理解无套利条件与因素模型相结合解释期望收益和风险的关系是套利定价理论的核心；多因素模型与多因素证券市场线的关系；负风险溢价的含义；套利联合头寸构建方法。

马科维茨组合优化的缺陷

- 需要估计海量的参数。
- 协方差矩阵的估计可能存在内部的不一致性。

Asset	Standard Deviation (%)	Correlation Matrix		
		A	B	C
A	20	1.00	0.90	0.90
B	20	0.90	1.00	0.00
C	20	0.90	0.00	1.00

Suppose that you construct a portfolio with weights −1.00; 1.00; 1.00, for assets A; B; C, respectively, and calculate the portfolio variance. You will find that the portfolio variance appears to be negative (−200). This of course is not possible because portfolio

单指数模型的设定

- 模型设定如下：

$$R_i(t) = \alpha_i + \beta_i R_M(t) + e_i(t)$$

- 单只股票的预期超额收益率：

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i E(R_M)$$

单指数模型中的分散投资

- 投资组合的收益率是各个证券收益率的加权平均：

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i R_M + e_i)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\right)R_M + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i$$

单指数模型的设定

- 收益率的方差和协方差：

$$\begin{aligned}
\text{Total risk} &= \text{Systematic risk} + \text{Firm-specific risk} \\
\sigma_i^2 &= \beta_i^2\sigma_M^2 + \sigma^2(e_i) \\
\text{Covariance} &= \text{Product of betas} \times \text{Market-index risk} \\
\text{Cov}(r_i, r_j) &= \beta_i\beta_j\sigma_M^2 \\
\text{Correlation} &= \text{Product of correlations with the market index} \\
\text{Corr}(r_i, r_j) &= \frac{\beta_i\beta_j\sigma_M^2}{\sigma_i\sigma_j} = \frac{\beta_i\sigma_M^2\beta_j\sigma_M^2}{\sigma_i\sigma_M\sigma_j\sigma_M} = \text{Corr}(r_i, r_M) \times \text{Corr}(r_j, r_M)
\end{aligned}$$

Comparing Equations 8.11 and 8.12, we see that the portfolio has a sensitivity to the market given by

$$\beta_P = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i \tag{8.13}$$

which is the average of the individual β_is. It has a nonmarket return component of

$$\alpha_P = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \tag{8.14}$$

which is the average of the individual alphas, plus the zero mean variable

$$e_P = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e_i \tag{8.15}$$

which is the average of the firm-specific components. Hence the portfolio's variance is

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2\sigma_M^2 + \sigma^2(e_P) \tag{8.16}$$

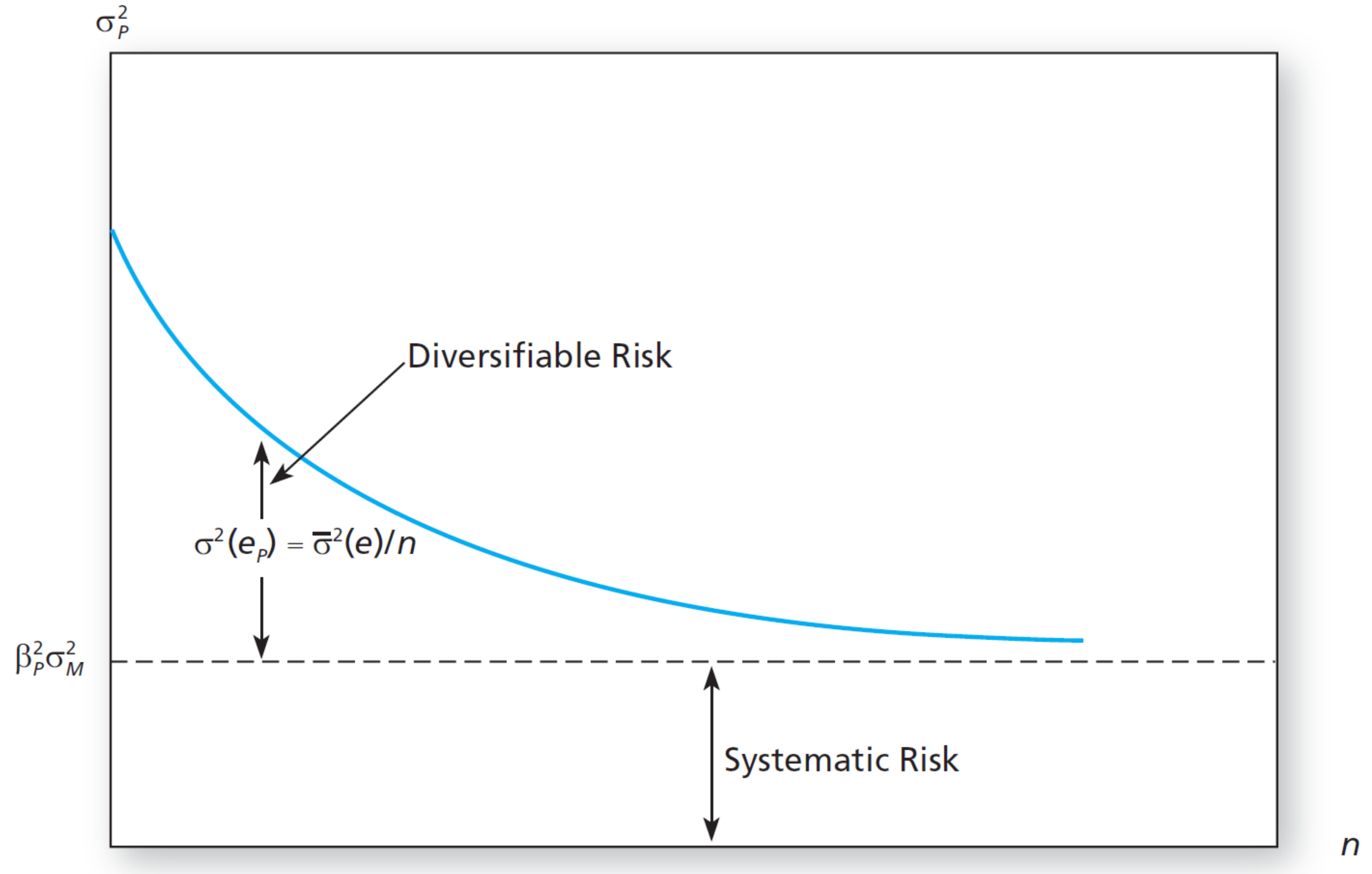

Figure 8.1 The variance of an equally weighted portfolio with risk coefficient β_P in the single-factor economy

模型的估计

- 惠普公司的证券特征线（Security Characteristic Line, SCL）：

$$R_{HP}(t) = \alpha_{HP} + \beta_{HP} R_{S\&P500}(t) + e_{HP}(t)$$

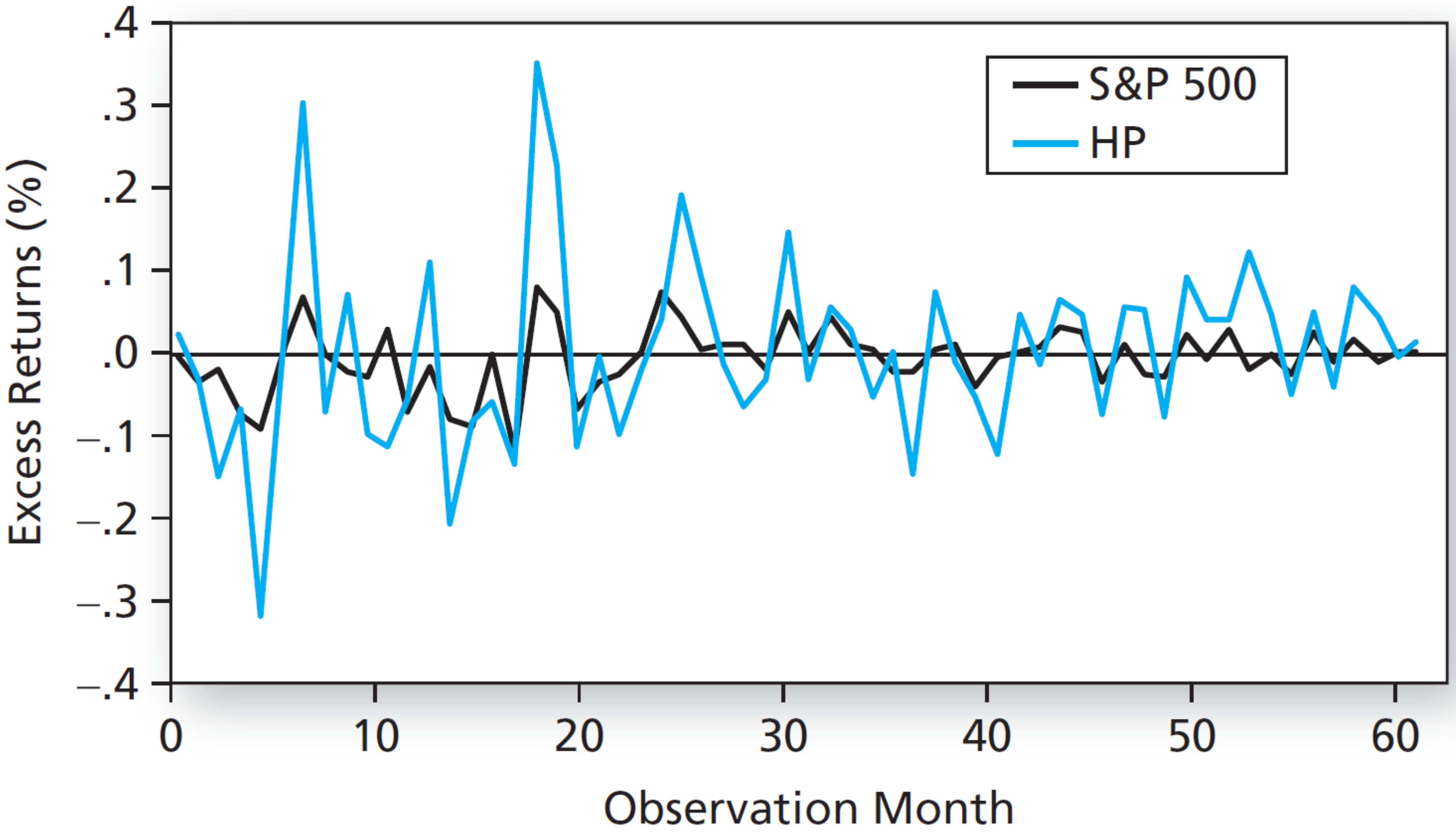

Figure 8.2 Excess returns on HP and S&P 500

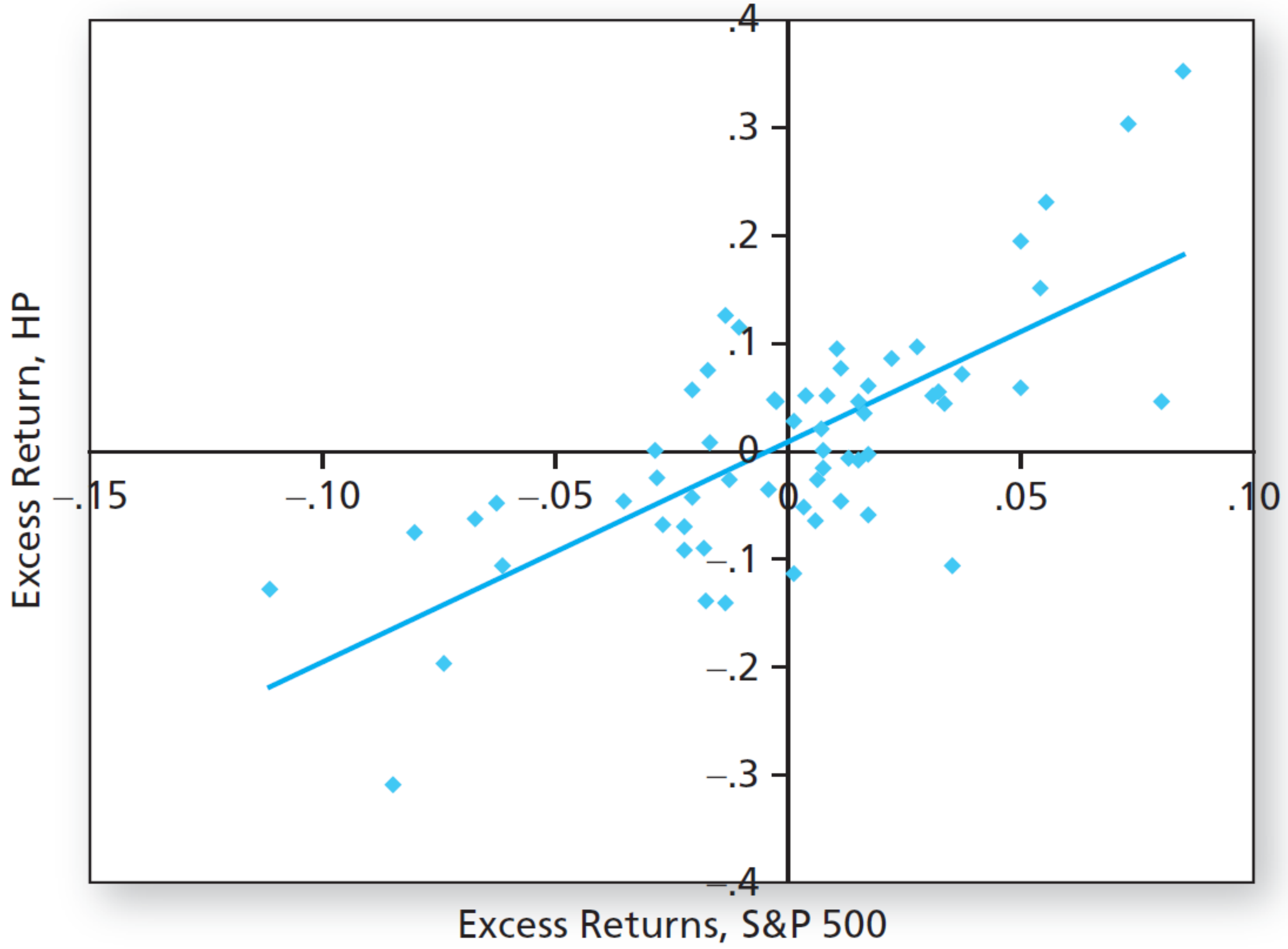

Figure 8.3 Scatter diagram of HP, the S&P 500, and the security characteristic line (SCL) for HP

Table 8.1

Excel output: Regression statistics for the SCL of Hewlett-Packard

Regression Statistics				
Multiple *R*	.7238			
R-square	.5239			
Adjusted *R*-square	.5157			
Standard error	.0767			
Observations	60			
ANOVA				
	df	**SS**	**MS**	
Regression	1	.3752	.3752	
Residual	58	.3410	.0059	
Total	59	.7162		
	Coefficients	**Standard Error**	***t*-Stat**	***p*-Value**
Intercept	0.0086	.0099	0.8719	.3868
S&P 500	2.0348	.2547	7.9888	.0000

证券收益的因素模型

- 单因素模型
- 多因素模型

单因素模型

$$r_i = E(r_i) + \beta_i F + e_i$$

r_i= 资产收益

β_i= 因素敏感度、因子载荷、因子贝塔

F = 宏观经济因素的扰动项

e_i= 公司特有的扰动项（零期望值）

多因素模型

- 使用多个因素来解释证券收益。
  - 例如：国内生产总值、预期通货膨胀、利率。
  - 使用多元回归来估计每个因素的贝塔值或因子载荷。

多因素模型

$$r_i = E(r_i) + \beta_{iGDP}GDP + \beta_{iIR}IR + e_i$$

r_i = 证券i的收益

β_{GDP} = 对GDP的因素敏感度

β_{IR} = 对利率的因素敏感度

e_i = 公司特有的扰动项

套利定价理论

- 前提假设
- 无套利原理

套利定价理论：前提假设

- Stephen Ross 的套利定价理论（APT），依赖于三个关键性的假设：

1. 证券的收益率可以由因子模型来刻画；
2. 市场上有足够多的证券品种，可以构造组合消除特质风险；
3. 证券市场均衡时不存在无风险套利机会。

充分分散的投资组合

- 充分分散的投资组合：
  - 组合的风险主要来自于系统风险，企业特定的风险相比之下可以忽略。

$$r_p = E(r_p) + \beta_p F + e_p$$

$$\beta_p = \sum w_i \beta_i ; \quad E(r_p) = \sum w_i E(r_i)$$

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_F^2 + \sigma^2(e_p)$$

- 当组合足够分散的时候，$\sigma^2(e_p)$ 变得很小。

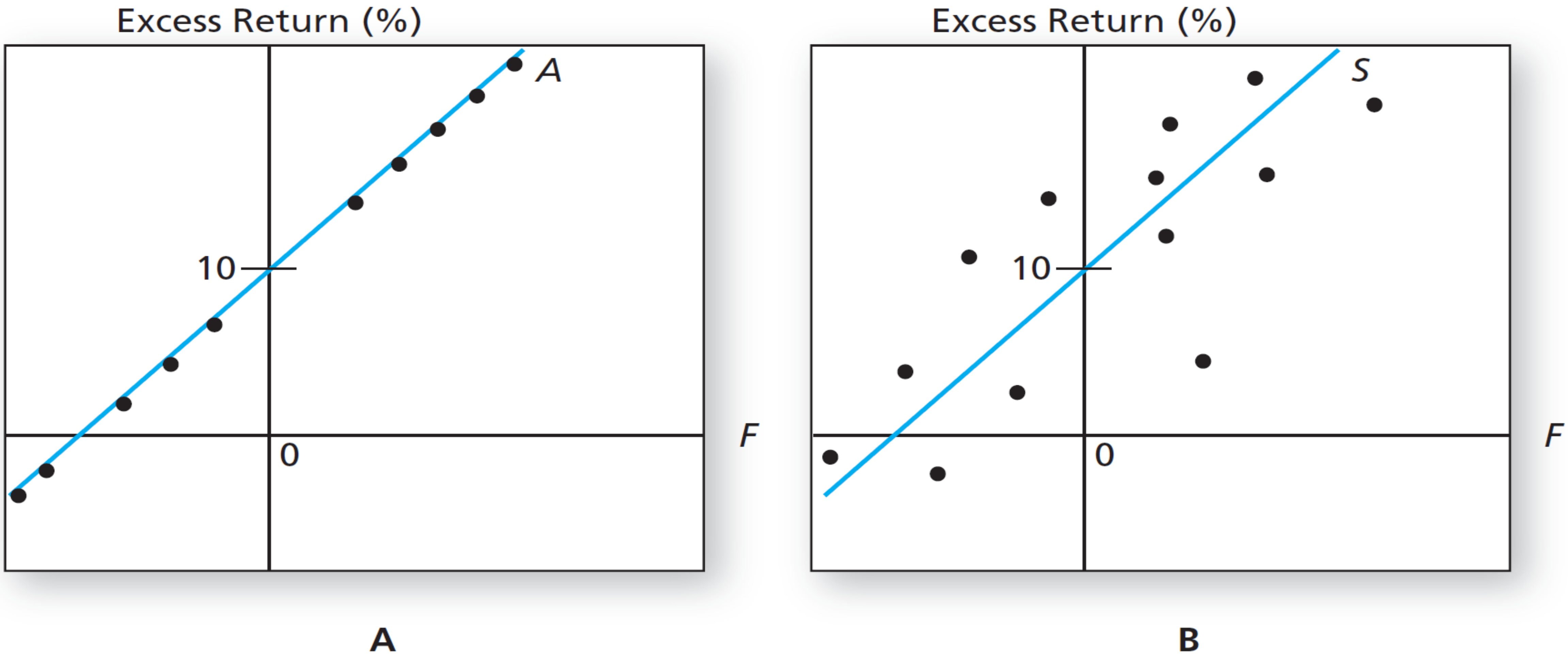

Figure 10.1 Excess returns as a function of the systematic factor. ***Panel A,*** Well-diversified portfolio *A*. ***Panel B,*** Single stock (*S*).

无套利原理

- 套利机会（An Arbitrage Opportunity）：

  投资者能够构造一个投资组合，初始投入资金为零，同时获得无风险的利润。

- 一价定律（Law of One Price）：

  如果两种资产在未来带给持有人的收益完全相同，那么它们的市场价格一定相等。

无套利原理

- 一价定律是市场中套利者实行套利行为的结果。
- 投资人无论其风险厌恶程度如何，都希望持有尽可能多的无风险套利的投资组合。他们的套利行为将会导致资产价格迅速调整，消除套利机会。
- 因此，在一个充满理性投资人的市场中，市场达到均衡时，不存在无风险套利机会。

无套利原理

- APT 中的套利行为和组合理论中的组合优化行为，存在重要的差异：
  - 市场出现套利机会时，每个投资人都**愿意持有无穷多的无风险套利组合**，因此市场价格的调整并不需要很多套利者，也不需要太长时间。
  - 组合理论中，如果市场未达到均衡，投资人都**只是根据自己的风险偏好有限度地**调整自己的组合。
- 无套利原理的结论比组合优化理论的结论更强有力。
- 现实生活中，套利的概念有更宽泛的含义，并不一定是指期初投资为零的无风险的投资组合。

无风险套利

- 前面的分析说明，对充分分散的投资组合，一定有：

$$E(R_p)=\beta_p E(R_M)$$

- 这和CAPM的证券市场线是同样的含义，但是这里的结论来自于无套利原理。

无风险套利

- 另外一个更直观的分析方法，可以得到相同的结论：
- 假设 A 组合、 B 组合Beta值相同，都等于1。

$$E(R_A) = 10\%, \qquad E(R_B) = 8\%$$

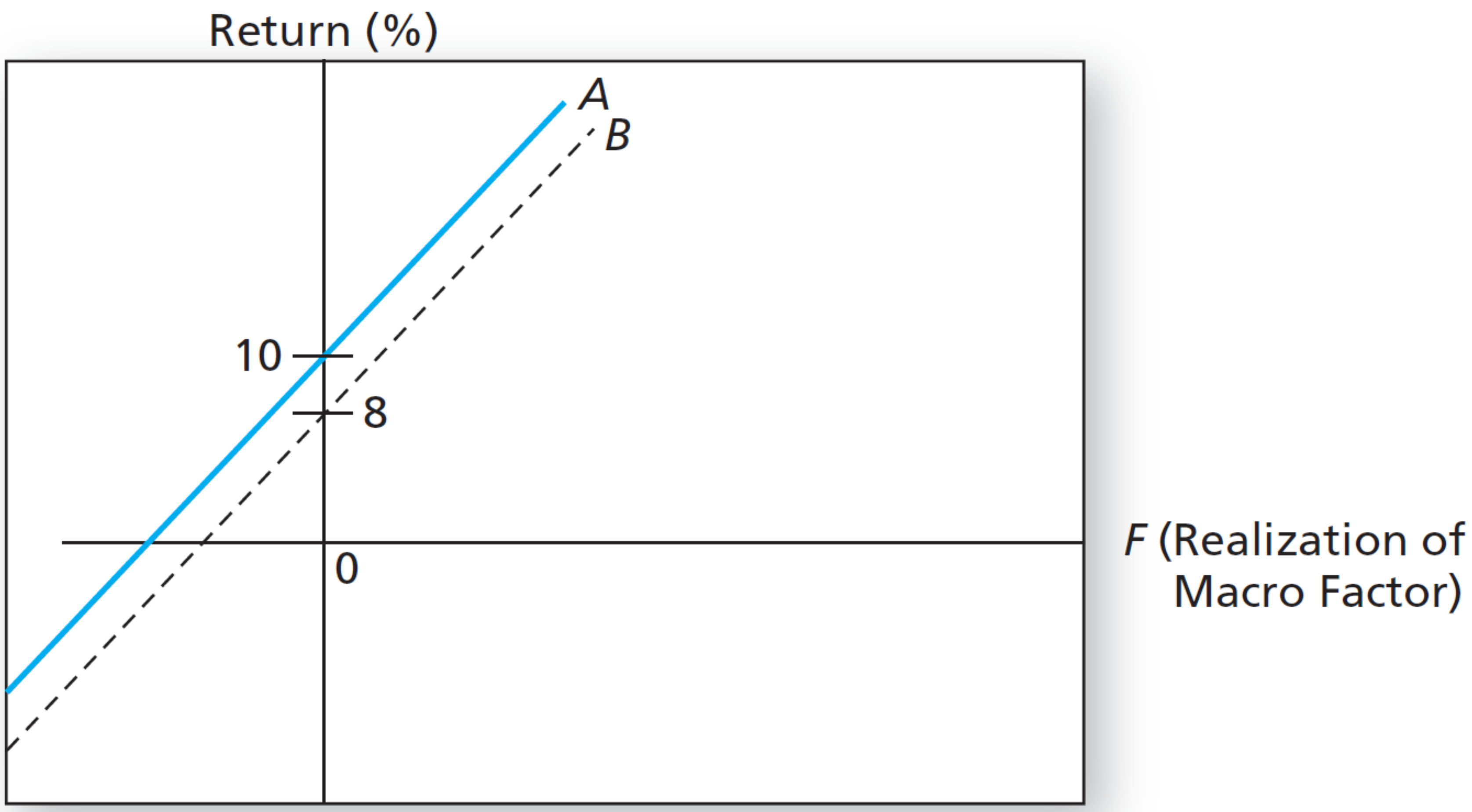

Figure 10.2 Returns as a function of the systematic factor: an arbitrage opportunity

比较 APT 和 CAPM

- APT 的结论建立在充分分散的投资组合的基础之上。对于分散程度不高的投资组合，比如积极管理型基金，相应的结论只是近似成立。
- CAPM 要求所有投资人按照组合理论的路径进行优化。APT 只要求市场中存在部分套利者，因此 APT 的结论更加稳健。
- CAPM 要求一个无法观测的市场组合，尽管在模型假设之下，其证券市场线的结论严格成立，但是当我们用股票指数代替市场组合的时候，其结论也会产生偏差。

基于多因素模型的 APT

- 一种资产的收益率可能同时受到多种宏观因素的影响，比如GDP增长率、利率、通货膨胀率、大宗商品价格等等。
- 将模型扩展到两个因子：

$$R_i = E(R_i) + \beta_{i1}F_1 + \beta_{i2}F_2 + e_i$$

- 引入纯因子组合的概念：一个充分分散的投资组合，对某个因子的Beta值等于1，对其他因子的Beta值都等于零。

假设有两个纯因子组合，预期收益率分别为E(r1)=10%， E(r2)=12%，市场无风险利率为4%。有一个分散化的投资组合A，在第一个因子上的β值为0.5，第二因子上的β值为0.75。
请根据套利定价理论，分别计算投资组合A的风险溢价和预期收益率。

$$E(R_A) = \beta_{p1}[E(r_1 - r_f)] + \beta_{p2}[E(r_2 - r_f)]$$

$$E(r_A) = r_f + \beta_{p1}[E(r_1 - r_f)] + \beta_{p2}[E(r_2 - r_f)]$$

$$E(R_A) = 0.5 \times (10 - 4) + 0.75 \times (12 - 4) = 9\%$$

$$E(r_A) = 4 + 0.5 \times (10 - 4) + 0.75 \times (12 - 4) = 13\%$$

基于多因素模型的 APT

- 充分分散的投资组合的风险溢价，等于每一个纯因子组合的风险溢价，与相应Beta值乘积的总和。
- 可以构造一个 Q 组合，和A组合有一样的Beta值，则两者的风险溢价一定相同，否则就存在套利机会。

- 如果投资组合A的预期收益率是12%，如何进行套利？

1. 构造一个新的投资组合Q，在第一个因子上的权重为0.5，第二个因子上的权重为0.75，在无风险资产上的权重为-0.25，则Q和A的β相同。但根据多因素模型，Q的预期收益率为13%。
2. 卖出1美元的投资组合A，买入投资组合Q，能够实现1%的无风险收益。

Fama-French 三因子模型

- Fama 和 French 根据美国股市的历史数据的分析，提出三因子模型：

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_{iM} R_{Mt} + \beta_{i\mathrm{SMB}} \mathrm{SMB}_t + \beta_{i\mathrm{HML}} \mathrm{HML}_t + e_{it} \quad (10.12)$$

where

SMB = Small Minus Big, i.e., the return of a portfolio of small stocks in excess of the return on a portfolio of large stocks.

HML = High Minus Low, i.e., the return of a portfolio of stocks with a high book-to-market ratio in excess of the return on a portfolio of stocks with a low book-to-market ratio.

本讲小结

- ✓ 指数模型
- ✓ 套利定价理论

课堂练习

1. 考虑两个因素的经济中，一个充分分散化的资产组合*A*，无风险利率为6%。两个风险因素的风险溢价分别为4%和3%。如果资产组合*A*对因素1的贝塔值为1.2，对因素2的贝塔值为0.8，其期望收益率为多少？
2. 假设$E(r_M)=10\%$，$r_f=4\%$，有一充分分散的投资组合，其β为1／3，期望收益率为5%，是否存在套利机会？若存在，套利策略是什么？计算出这种策略在零净投资的条件下无风险收益的结果。

课堂练习

- **已知可能的经济状况以及A、B、C和市场指数M的预期收益率分布如下：**

可能的经济状况	概 率 Ps(%)	预期收益率（%）			
		r_a	r_b	r_C	r_M
宽松货币政策	40	7	4	6	5
紧缩货币政策	60	3	2	1	2

如果Xa=0.1，请尝试计算Xc和Xb的值，分析A、B、C可否构建出一个套利组合？如果能构建一个套利组合，应采用什么策略？