

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

LA SOBREPAREMETRIZACIÓN EN EL ARIMA: UNA APLICACIÓN A DATOS
COSTARRICENSES

Tesis sometida a la consideración de la Comisión del Programa de Estudios de
Posgrado en Estadística para optar por el grado y título de Maestría Académica en
Estadística

CÉSAR ANDRÉS GAMBOA SANABRIA B12672

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, Costa Rica

DEDICATORIA

Pendiente

AGRADECIMIENTOS

También pendiente

“Esta tesis fue aceptada por la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Estadística de la Universidad de Costa Rica, como requisito parcial para optar al grado y título de Maestría Académica en Estadística”

Ph.D. Álvaro Morales Ramírez

Decano Sistema de Estudios de Posgrado

MSc. Óscar Centeno Mora

Director de Tesis

Ph.D. Gilbert Brenes Camacho

Lector

Ph.D. ShuWei Chou.

Lector

MSc. Johnny Madrigal Pana

Director Programa de Posgrado en Estadística

César Andrés Gamboa Sanabria

Candidato

Índice

DEDICATORIA	I
AGRADECIMIENTOS	II
RESUMEN	1
ABSTRACT	2
1 INTRODUCCIÓN	3
1.1 Antecedentes	3
1.2 La problemática	4
1.3 Objetivos del estudio	4
1.4 Justificación del estudio	5
1.5 Organización del estudio	6
2 MARCO TEÓRICO	7
2.1 Componentes de una serie cronológica	7
2.1.1 La tendencia	8
2.1.2 Componentes estacionales	8
2.1.3 Componente cíclico	8
2.1.4 Componente irregular	8
2.2 Supuestos en el análisis de series cronológicas	9
2.3 Modelos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles	10
2.3.1 Ecuación de Wold	10
2.3.2 Modelos Autorregresivos	11
2.3.3 Modelos de Medias Móviles	12
2.3.4 Metodología Box-Jenkins	12
2.3.5 Modelos ARIMA	13
2.4 Identificación del modelo	13
2.5 Los autocorrelogramas	14
2.6 La sobreparametrización y el análisis combinatorio	15
3 METODOLOGÍA	16
3.1 Introducción	16
3.2 Conceptos y definiciones en el análisis de series cronológicas	17
3.2.1 Definición de una serie cronológica	17
3.2.2 Procedimiento al analizar series cronológicas	17
3.2.3 Estacionaridad	17

3.2.4	La parsimonia	17
3.3	Componentes de una serie cronológica	17
3.3.1	La tendencia	17
3.3.2	Componentes estacionales	17
3.3.3	Componente cíclico	17
3.3.4	Componente irregular	17
3.4	Modelos de series cronológicas	17
3.5	Modelos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles	17
3.5.1	Modelos Autorregresivos	17
3.5.2	Modelos de Medias Móviles	17
3.5.3	Metodología Box-Jenkins	17
3.5.4	Etapas 1 - Identificación	17
3.5.5	Etapas 2 - Estimación y diagnóstico	17
3.5.6	Etapas 3 - Pronóstico	17
3.5.7	Notación de los modelos ARIMA	17
3.5.8	Diferenciación	17
3.6	Análisis de intervención	17
3.7	Validación cruzada	17
3.8	Medidas de rendimiento	17
3.8.1	MFE	17
3.8.2	MAE	17
3.8.3	MAPE	17
3.8.4	MPE	17
3.8.5	MSE	17
3.8.6	SSE	17
3.8.7	SMSE	17
3.8.8	RMSE	17
3.8.9	NMSE	17
3.8.10	AIC	17
3.8.11	AICc	17
3.8.12	BIC	17
3.9	La sobreparametrización	17
3.10	Simulación de series cronológicas	17
3.11	El método propuesto	17
4	RESULTADOS	18
4.1	Introducción	18

4.2	Datos simulados	18
4.2.1	Comparación en datos simulados - Sobreparametrización vs auto.arima . .	18
4.3	Estimaciones en datos costarricenses	18
4.3.1	Tasa de mortalidad infantil interanual	18
4.3.2	Tasa global de fecundidad	18
4.3.3	Mortalidad por causa externa	18
4.3.4	Incentivos salariales del sector público	18
4.3.5	Intereses y comisiones del sector público	18
4.3.6	Demanda eléctrica	18
4.3.7	Comparación en datos reales - Sobreparametrización vs auto.arima	18
4.4	Discusión de los resultados	18
5	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	19
5.1	Introducción	19
5.2	Conclusiones	19
5.3	Recomendaciones	19
6	ANEXOS	20
6.1	La función funcion_1	20
7	REFERENCIAS	21

Índice de cuadros

Índice de figuras

RESUMEN

ABSTRACT

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes

Estimar los valores futuros en un determinado contexto ha producido un aumento en el análisis de los datos referidos en el tiempo, conocido también como series cronológicas. Este tipo de datos se encuentra en diferentes áreas, tanto en investigación académica como en el análisis de datos para la toma de decisiones. En el campo financiero es común hablar de la devaluación del colón con respecto al dólar, cantidad de exportaciones mensuales de un determinado producto o las ventas, entre otros (Hernández, 2011a). Las series cronológicas son particularmente importantes en la investigación de mercados o en las proyecciones demográficas; de manera conjunta apoyan la toma de decisiones para la aprobación presupuestaria en distintas áreas.

En la actualidad, la información temporal es muy relevante: El Banco Mundial¹ cuenta en su sitio web con datos para el análisis de series cronológicas de indicadores de desarrollo, capacidad estadística, indicadores educativos, estadísticas de género, nutrición y población. Kaggle², uno de los sitios más populares relacionados con el análisis de información, ofrece una gran cantidad de datos temporales para realizar competencias relacionadas con las series temporales y determinar los modelos ganadores para una determinada temática³.

Asimismo, los pronósticos (estimación futura de una partícula en una serie temporal) son utilizados por instituciones públicas o del sector privado, centros nacionales o regionales de investigación y organizaciones no gubernamentales dedicadas al desarrollo social. Si las entidades previamente mencionadas cuentan con proyecciones de calidad, la puesta en marcha de sus respectivos planes tendrá un impacto más efectivo.

Los métodos existentes para llevar a cabo un análisis de series cronológicas son diversos, y responden al propio contexto y tipo de datos. Obtener buenos pronósticos o explicar el comportamiento de un fenómeno en el tiempo, siempre será un tema recurrente de investigación. Generar una adecuada estimación es fundamental para obtener un pronóstico de confianza, además resulta importante mencionar que los modelos ARIMA tienen como objetivo explicar las relaciones pasadas de la serie cronológica, para de esta manera conocer el posible comportamiento futuro de la misma (R. J. Hyndman & Athanasopoulos, 2018a).

Al trabajar con la metodología de Box-Jenkins, uno de las etapas a concretar es identificar los parámetros de estimación que gobiernan la serie temporal. Para indagar los términos en el proceso de investigación se ha utilizado la identificación de parámetros mediante autocorrelogramas parciales y

¹<https://databank.worldbank.org/home.aspx>

²Se trata de una subsidiaria de la compañía Google que sirve de centro de reunión para todos aquellos interesados en la ciencia de datos.

³Muchas de ellas incluyen recompensas económicas que van desde los \$500 hasta los \$100,000 para aquellos que logren obtener los mejor pronósticos.

totales. Sin embargo, los autocorrelogramas formados no analizan de forma exhaustiva y óptima los posibles coeficientes que podrían contemplarse la ecuación de Wold. Según su definición matemática, esta posee infinitos coeficientes, por tanto, se debe buscar una alternativa distinta, que opte por aproximar de una mejor manera la identificación de los parámetros estimados, cubriendo un mayor número de posibilidades. Esto se podría obtener mediante un método analítico de sobreparametrización.

1.2 La problemática

La dificultad visual a la hora de identificar un modelo ARIMA radica en que los autocorrelogramas solo aportan una aproximación al proceso que gobierna la serie. De forma complementaria, es común caer en el problema de la subjetividad, pues a pesar de que alguien proponga un patrón que gobierne la serie, otro analista podría tener una interpretación visual diferente del mismo proceso, proponiendo así distintas identificaciones para un mismo proceso. Además, se posee el inconveniente de que algunos métodos de identificación automática del proceso que gobierna la serie subestiman el número de parámetros que se debería de contemplar.

Alternativas como la función `auto.arima()`, que ofrece el paquete `forecast` del lenguaje de programación R⁴ (R. Hyndman & Khandakar, 2008), permite estimar un modelo ARIMA basado en pruebas de raíz unitaria y minimización del AICc (Burnham & Anderson, 2007). Así se obtiene un modelo temporal definiendo las diferenciaciones requeridas en la parte estacional d mediante las pruebas KPSS (Xiao, 2001) o ADF (Fuller, 1995), y la no estacional D utilizando las pruebas OCSB (Osborn, Chui, Smith, & Birchenhall, 2009) o la Canova-Hansen (Canova & Hansen, 1995), seleccionado el orden óptimo para los términos $ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$ para una serie cronológica determinada.

Sin embargo, estas pruebas suelen ignorar diversos términos que bien podrían ofrecer mejores pronósticos; no someten a prueba las posibles especificaciones de un modelo en un rango determinado, sino que realizan aproximaciones analíticas para definir el proceso que gobierna la serie cronológica, dejando así un vacío en el cual se corre el riesgo de no seleccionar un modelo que ofrezca mejores pronósticos. Poner a prueba un mayor número de posibilidades para la especificación de los modelos tiene la ventaja descartar ciertos modelos, y mantener otros con un criterio más científico y una evidencia numérica que despalde esa decisión.

1.3 Objetivos del estudio

El objetivo general de la presente investigación es proponer un algoritmo alternativo más exhaustivo para la selección de modelos ARIMA mediante la sobreparametrización de los términos de la ecuación del ARIMA.

⁴Descarga gratuita en <https://cran.r-project.org/>

Para lograr esto, se pretende:

1. Generar los escenarios de estimación de los distintos modelos ARIMA mediante permutaciones de los términos (p, d, q) y (P, D, Q) para la estimación de los posibles procesos que gobiernan una determinada serie temporal.
2. Aplicar diversos métodos de validación en la estimación de procesos que gobiernan la serie cronológica.
3. Contrastar la precisión de la estimación así como la generación de pronósticos con otros métodos similares, aplicados en datos costarricenses.
4. Integrar el desarrollo de la metodología de análisis de series temporales en una librería del lenguaje estadístico R.

1.4 Justificación del estudio

El accionar de políticas gubernamentales, así como de otro tipo de sectores, se apoyan cada vez más en un acertado análisis de la información temporal. En demografía, uno de los principales temas de investigación son las proyecciones de población; durante una emergencia, conocer la posible cantidad de población que habita una zona es clave para la rápida reacción de las autoridades en el envío de ayuda o en la ejecución de planes de evacuación. Asimismo, los análisis actuariales se ven beneficiados al mejorar sus métodos de pronóstico. Una de sus principales áreas de estudio es la mortalidad, ya que representa un insumo de vital importancia para la planificación y sostenibilidad de los sistemas de pensiones, servicios de salud tanto pública como privada, seguros de vida y asuntos hipotecarios ([Rosero-Bixby, 2018](#)).

La estimación de series de tiempo es una labor común en distintos campos de investigación: el objetivo es poder pronosticar de forma correcta lo que sucederá dentro de los próximos periodos. Métodos actuales como el `auto.arima()` solamente realizan aproximaciones analíticas no óptimas, por lo que suelen omitir procesos que describirían de una mejor manera el comportamiento futuro de una serie cronológica.

Estimar modelos ARIMA considerando diversas permutaciones en sus estimadores, permite mitigar las falencias de otras aproximaciones analíticas que no analizan de forma exhaustiva todos los posibles parámetros a estimar, o escenarios de selección de la mejor serie que gobierne el proceso de interés. El desarrollo y evaluación del método propuesto, la sobreparametrización, mostrará el potencial de esta metodología en la calidad de los pronósticos. El principal aporte de este estudio es brindar evidencia sobre cómo la sobreparametrización puede contribuir a definir la especificación de un modelo ARIMA que genere pronósticos más precisos.

1.5 Organización del estudio

El presente trabajo de investigación consta de cinco capítulos. El primer ofreció una contextualización del uso de las series de tiempo, así como la importancia de poder contar con pronósticos de calidad. Se presentó el objetivo del estudio, así como una breve descripción de la metodología empleada en la aplicación de series temporales, y cómo se planea modificar el método de estimación en los modelos ARIMA. Se concluye esta sección con hechos que justifican la importancia de esta investigación.

El siguiente capítulo consiste en el marco teórico, abarcando aspectos fundamentales de la ecuación de Wold, la metodología Box-Jenkins, la selección de los procesos que gobiernan la serie, la descripción del proceso iterativo, el análisis combinatorio que aborda los escenarios de estimación, entre otros.

El tercer capítulo describe la metodología relacionada al estudio. Se inicia con una descripción global de los conceptos más fundamentales del análisis de series cronológicas, pasando por los componentes fundamentales de las mismas. Se discuten también los supuestos clásicos del análisis de series cronológicas, los distintos tipos de modelos, el análisis de intervención, los métodos de validación y las medidas de rendimiento; aspectos cruciales para obtener un modelo ARIMA vía sobreparametrización. La sección metodológica culmina con la descripción del proceso de simulación que se utilizará, así como la discusión del método propuesto.

El capítulo cuatro consiste en la presentación de los resultados, tanto en los datos simulados como en la aplicación a datos costarricenses y se contrastarán contra los obtenidos por otros métodos como el de la función `auto.arima()`, entre otros.

El último capítulo busca discutir los principales resultados, así como señalar las conclusiones más importantes y ofrecer algunas recomendaciones que orienten futuros estudios relacionados.

2 MARCO TEÓRICO

Los modelos de series cronológicas han sido un importante tema de investigación durante décadas ([De Gooijer & Hyndman, 2006](#)). Su objetivo principal consiste en obtener simplificaciones de la realidad mediante el ajuste de diversos modelos, los cuales se ajustan a datos recolectados a lo largo del tiempo de forma regular. Estos modelos son luego utilizados para generar pronósticos sobre el comportamiento futuro del fenómeno de interés.

Sin embargo, encontrar un modelo que presente un buen comportamiento con respecto a los datos no es tarea fácil, pues deben considerarse diversos aspectos teóricos para obtener un modelo adecuado que logre generar pronósticos realistas y pertinentes para la toma de decisiones ([Rezaee, Aliabadi, Dorestani, & Rezaee, 2020](#)).

Una serie temporal se define como una secuencia de datos observados, cuyas mediciones ocurren de manera sucesiva durante un periodo de tiempo. Los registros de estos datos pueden referirse a una única variable en cuyo caso se dice que es una serie univariada; o bien, pueden registrarse distintas variables para el mismo periodo de tiempo, conocida como serie temporal multivariada. Según [Hipel & McLeod \(1994\)](#), cada observación puede ser continua o discreta, como la temperatura de una ciudad durante el día o las variaciones diarias del precio de un activo financiero, respectivamente; las observaciones continuas, además, pueden ser convertidas a su vez en observaciones discretas.

El presente capítulo consta de seis apartados: El primer apartado abarca los cuatro componentes de una serie cronológica, siendo estos la tendencia y los componentes estacionales, cíclicos e irregulares. Posteriormente, la segunda sección repasa los supuestos fundamentales en el análisis de series cronológicas. Con los elementos más básicos introducidos, el tercer apartado cubre el eje central de esta investigación: Los modelos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles y sus componentes, los modelos autorregresivos y los modelos de medias móviles, así como la metodología Box-Jenkins y el proceso para la identificación de los modelos. En el cuarto apartado se introducen los métodos para la identificación de los modelos. El quinto apartado abarca los componentes relacionados a los autocorrelogramas, la forma más difundida para la selección de modelos y, finalmente, el sexto apartado introduce el principal aporte de este estudio, la sobreparametrización como método para la selección de modelos.

2.1 Componentes de una serie cronológica

En el análisis de series cronológicas existen dos grandes corrientes de estudio: Los componentes inherentes a la serie cronológica y el estudio de las autocorrelaciones. De acuerdo con [Hernández \(2011a\)](#), las series cronológicas poseen cuatro componentes principales: Tendencia, Ciclos, Estacionalidad e Irregularidad. Considerando estos cuatro elementos, las series cronológicas pueden

ser *aditivas*, como se muestra en la ecuación 1, en cuyo caso se asume que los cuatro componentes son independientes entre sí; o *multiplicativa*, donde, por el contrario, los cuatro componentes son independientes, como muestra la ecuación 2.

$$Y(t) = T(t) + S(t) + C(t) + I(t) \quad (1)$$

$$Y(t) = T(t) \times S(t) \times C(t) \times I(t) \quad (2)$$

Donde Y es la serie cronológica, T es la tendencia, S es la parte estacional, C el componente cíclico, I la parte irregular o aleatoria, y t es el momento en el tiempo. Cada una de sus partes se definen a continuación.

2.1.1 La tendencia

A partir del texto de [Calderón \(2012\)](#), la tendencia general de una serie cronológica se refiere al crecimiento, decrecimiento o lateralización de sus movimientos a lo largo del periodo de estudio. Una tendencia bastante marcada es la del comportamiento poblacional, que con el tiempo su crecimiento suele comportarse de una forma muy similar a una exponencial.

2.1.2 Componentes estacionales

[Calderón \(2012\)](#) también se refiere a los cambios estacionales que se presentan en una serie de tiempo, los cuales se relacionan con las fluctuaciones naturales del fenómeno dentro de una temporada de observaciones. Ejemplos comunes de esto son las condiciones climáticas, consumo de alimentos en fechas festivas, entre otros.

2.1.3 Componente cíclico

Del informe elaborado también por [Calderón \(2012\)](#) se desprende que los periodos cíclicos, por su parte, se refieren a los cambios que se dan en una serie cronológica en el mediano plazo, que son causados por determinados eventos que suelen repetirse. Estos ciclos suelen tener una duración determinada, como es el caso de los índice bursátil S&P 500. Este indicador resume el estado de las 500 empresas más importantes de Estados Unidos, y sus ciclos suelen presentar un auge, seguido por un descenso que, posteriormente, se vuelve una depresión, y que finalmente se convierte en una recuperación a su estado inicial.

2.1.4 Componente irregular

Finalmente, la irregularidad de una serie cronológica, siguiendo a [Calderón \(2012\)](#), se refiere a las fluctuaciones propias de un fenómeno que no pueden ser predichas. Estos cambios no se dan de

manera regular, es decir, no siguen un patrón determinado.

2.2 Supuestos en el análisis de series cronológicas

El análisis de series temporales, según [Hipel & McLeod \(1994\)](#), representa un método para comprender la naturaleza de la serie en cuestión y poder utilizarla para generar pronósticos. Es en este sentido que entran en escena las observaciones recolectadas de la serie, pues ellas son analizadas y sujetas a modelados matemáticos que logren capturar el proceso que gobierna a toda la serie cronológica ([Zhang, 2003](#)). Los pronósticos se generan a partir de este modelo, es decir, pronosticar el futuro, se utilizan las correlaciones con las observaciones pasadas.

En un proceso determinístico, es posible predecir con certeza lo que ocurrirá en el futuro; las series cronológicas, sin embargo, carecen de esta condición. El análisis de series cronológicas asume que las observaciones pueden ajustarse a un determinado modelo estadístico, esto se conoce como un proceso estocástico. Es de esta manera que [Hipel & McLeod \(1994\)](#) sugieren que una serie cronológica puede considerarse como una muestra aleatoria de una serie mucho más grande.

Como una serie de tiempo puede considerarse como un proceso estocástico, éstas se encuentran sujetas a múltiples supuestos. El más fundamental de ellos es que todas las observaciones son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) siguiendo una distribución aproximadamente Normal, con una media y variancia dadas. Lo anterior es contrario al uso de las observaciones pasadas para pronosticar el futuro, por lo que este supuesto, según [Cochrane \(1997\)](#), no es exacto pues una serie de tiempo no es exactamente, i.i.d., sino que siguen un patrón medianamente regular en el largo plazo.

Otro concepto de interés en las series cronológicas es el de estacionaridad. De acuerdo con [Agrawal & Adhikari \(2013\)](#), una serie se considera estacionaria cuando su nivel medio y su variancia son aproximadamente las mismas durante todo el periodo, es decir, el tiempo no afecta a estos estadísticos de variabilidad. Este supuesto busca simplificar la identificación del proceso estocástico con el objetivo de obtener un modelo adecuado para generar los pronósticos. Sin embargo, y de una manera similar al supuesto de i.i.d., si una serie cronológica posee tendencias o patrones estacionales hace que esta sea no estacionaria. En la práctica, una serie puede volverse estacionaria al aplicarle transformaciones o diferenciaciones de distinto orden.

El último supuesto, y quizá el que más debate genera, es el criterio de parsimonia. Como mencionan [Zhang \(2003\)](#) y [Hipel & McLeod \(1994\)](#), este principio sugiere que se prioricen modelos sencillos, con pocos parámetros, para representar una serie de datos. Mientras más grande y complicado sea el modelo, mayor será el riesgo de sobre ajuste, lo que implica que el ajuste sea muy bueno en el conjunto de datos con que se generó el modelo, pero que los pronósticos generados sean pobres ante nuevos conjuntos de datos. Este problema, sin embargo, se presenta al considerar un único modelo

con muchos parámetros; pero si se consideran varios modelos y estos son sometidos a distintos criterios, puede obtenerse un modelo sobreparametrizado que ofrezca buenos pronósticos.

2.3 Modelos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles

Hay dos grandes grupos de modelos lineales de series cronológicas: Los modelos Autorregresivos (AR) (Lee, s. f.) y los modelos de Medias Móviles (MA) (Box, Jenkins, & Reinsel, 1994). La combinación de estos dos grandes grupos forman los Modelos Autorregresivos de Medias Móviles (ARMA) (Hipel & McLeod, 1994) y los modelos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles (ARIMA), siendo este último de particular interés en esta investigación.

Los modelos ARIMA son los de uso más extendido en el análisis de series cronológicas. Se fundamentan en las autocorrelaciones pasadas, y contempla un proceso iterativo para identificar un posible proceso óptimo a partir de una clase general de modelos. El teorema de Wold (Surhone, Timpledon, & Marseken, 2010) sugiere que todo proceso estacionario puede ser determinado de una forma específica y cuya ecuación posee, en realidad, infinitos coeficientes, pero que debe ser reducido a una cantidad finita para luego evaluar su ajuste sometiéndolo a diferentes pruebas y medidas de rendimiento.

2.3.1 Ecuación de Wold

Según Sargent (1979), cualquier proceso estacionario puede ser representado mediante la ecuación 3:

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \kappa_t \quad (3)$$

donde $\forall \psi_j \in \mathbb{R}, \psi_0 = 1, \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, y ε_t representa un ruido blanco i.i.d., es decir, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$; además, κ_t es el componente lineal determinístico de forma tal que $cov(\kappa_t, \varepsilon_{t-j} = 0)$, lo cual implica que este componente determinístico es independiente de la suma infinita de los choques pasados.

De lo anterior, si se omite la parte determinística κ_t de 3, el remanente es la suma ponderada infinita, lo cual implica que si se conocen los ponderadores ψ_j , y si además se conoce σ_ε^2 , es posible obtener una representación para cualquier proceso estacionario; este concepto es conocido como *media móvil infinita*.

Sabiendo que $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, se tiene que ε_t tiene media 0, es decir, está centrado en este valor. De esta manera el ruido blanco es por definición un proceso centrado, lo cual implica que la suma ponderada infinita está centrada en sí misma. De esta manera, la representación de Wold de un proceso x_t supone que se suman los choques pasados más un componente determinístico que no es otro que el valor esperado del proceso: $\kappa_t = m$, donde m es una constante cualquiera. Así, la

ecuación 3 puede sustuirse por:

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + m \quad (4)$$

y de 4 puede verificarse que,

$$E(x_t) = E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + m\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j E(\varepsilon_{t-j}) + m = m \quad (5)$$

La principal consecuencia del teorema de Wold es que, si se conocen los ponderadores ψ_j , y además σ_ε^2 es ruido blanco es posible conocer el proceso por medio del cual se rige la serie cronológica. Esto permite realizar cualquier previsión, denotada por \hat{X}_{T+h} para el proceso de interés x_T en el momento $T+h$ para una muestra cualquiera de T observaciones de x_t . De acuerdo con Sargent (1979), basado en el teorema de Wold, la mejor previsión posible para un proceso x_t para el momento $T+h$, denotado por \hat{x}_{T+h} , la predicción está dada por:

$$\hat{x}_{T+h} = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{T-j+1} \quad (6)$$

De la ecuación 6 se desprende que el error de previsión asociado está dado por:

$$x_{T+h} - \hat{x}_{T+h} = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{T-h+1} \quad (7)$$

2.3.2 Modelos Autorregresivos

Un modelo autorregresivo de orden p , denotado como $AR(p)$, considera los valores futuros de una serie cronológica como una combinación lineal las p observaciones predecesoras, un componente aleatorio y un término constante. Hipel & McLeod (1994) y Lee (s. f.) emplean la notación de la ecuación 8.

$$y_t = c + \sum_{i=1}^p \varphi_i y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (8)$$

Donde y_t y ε_t corresponden al valor de la serie y al componente aleatorio en el momento actual t , mientras que φ_i , con $i = 1, 2, \dots, p$ son los parámetros del modelo, y c es su término constante, que en ciertas ocasiones se suele omitir para simplificar la notación. Los parámetros de esta clase de modelos suelen estimarse mediante la ecuación de Yule-Walker (Brockwell & Davis, 2009).

2.3.3 Modelos de Medias Móviles

De manera similar a como un $AR(p)$ utiliza los valores pasados para pronosticar los futuros, los modelos de medias móviles de orden q , denotados como $MA(q)$, utilizan los errores pasados de las variables independientes. Estos modelos se describen mediante la ecuación 9.

$$y_t = \mu + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad (9)$$

Donde μ representa el valor medio de la serie cronológica y cada valor de $\theta_j (j = 1, 2, \dots, q)$ son los parámetros del modelo. Como los $MA(q)$ utilizan los errores pasados de la serie cronológica, se asume que estos son i.i.d. centrados en cero y con una variancia constante, siguiendo una distribución aproximadamente Normal, con lo cual este tipo de modelos pueden considerarse como una regresión lineal entre una observación determinada y los términos de error que le preceden ([Agrawal & Adhikari, 2013](#)).

2.3.4 Metodología Box-Jenkins

La combinación de un $AR(p)$ y un $MA(q)$, descritos en las ecuaciones 8 y 9 respectivamente, como se mencionó al inicio de esta sección, generan los modelos autorregresivos de medias móviles, $ARMA(p, q)$, representados mediante la ecuación 10.

$$y_t = c + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \varphi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad (10)$$

[Cochrane \(1997\)](#) menciona que los modelos $ARMA(p, q)$ suelen manipularse mediante lo que se conoce como operador de rezagos, denotado como $Ly_t = y_{t-1}$. Esto significa que en un $AR(p)$ se tiene que $\varepsilon_t = \varphi(L)y_t$, mientras que en $MA(q)$ se tiene que $y_t = \theta(L)\varepsilon_t$, y por consiguiente en un $ARMA(p, q)$ se tiene $\varphi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t$. Por lo tanto, de lo anterior se desprende que $\varphi(L) = 1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i L^i$, y que $\theta(L) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j L^j$.

Los modelos $ARMA$, sin embargo, solamente pueden ser utilizados en series cronológicas cuyo proceso es estacionario. Esto, en la práctica, es poco común, pues una serie de tiempo a menudo posee tendencias y ciertos patrones estacionales y, además, como menciona [Hamzaçebi \(2008\)](#), presentan procesos no estacionarios por naturaleza. Esta condición hace necesaria la introducción de una generalización de los modelos $ARMA$, la cual se conoce como los modelos $ARIMA$ ([Box, Jenkins, & Reinsel, 1994](#)).

2.3.5 Modelos ARIMA

Partiendo de una serie con un proceso no estacionario, es posible aplicar transformaciones o diferenciaciones (d) a los datos con el objetivo de convertirlos en un proceso estacionario. Utilizar la notación de rezagos descrita anteriormente, según [Flaherty & Lombardo \(2000\)](#), permite plantear un modelo $ARIMA(p, d, q)$ como se describe en la ecuación 11.

$$\varphi(L)(1-L)^d y_t = \theta(L)\varepsilon_t \left(1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i L^i\right) (1-L)^d y_t = \left(1 + \sum_{j=1}^q \theta_j L^j\right) \varepsilon_t \quad (11)$$

Donde los términos p , d y q son positivos y mayores a cero y corresponden al modelo autorregresivo, a la diferenciación y al modelo de medias móviles, respectivamente. El componente d es el número de diferenciaciones, si $d = 0$ se tiene un modelo ARMA, y $d \geq 1$ representa el número de diferenciaciones; en la mayoría de casos $d = 1$ suele ser suficiente. Así, un $ARIMA(p, 0, 0) = AR(p)$, $ARIMA(0, 0, q) = MA(q)$, y un $ARIMA(0, 1, 0) = y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$, es decir, un modelo de caminata aleatoria.

Como sugieren [Box, Jenkins, & Reinsel \(1994\)](#), lo anterior puede generalizarse aún más al considerar los efectos estacionales de la serie cronológica. Si se considera una serie cronológica con observaciones mensuales, una diferenciación de primer orden es igual a la diferencia entre una observación y la observación correspondiente al mismo mes pero del año anterior; es decir, si el periodo estacional es de $s = 12$ meses, entonces esta diferencia estacional aplicada a un $ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_S$ es calculada mediante $z_t = y_t - y_{t-s}$.

De esta manera, el método de [Box, Jenkins, & Reinsel \(1994\)](#) inicia con el análisis exploratorio de la serie cronológica, teniendo un interés particular en identificar si hay presencia de factores no estacionarios en la misma. Si en efecto se cuenta con una serie no estacionaria, ésta debe volverse estacionaria mediante algún tipo de transformación, típicamente el logaritmo natural. Con la serie ya transformada, se busca identificar el proceso que gobierna la serie. La forma clásica de hacer esto es mediante los gráficos de autocorrelación y autocorrelación parcial. Cuando se logra identificar un proceso que se adecue más a la serie cronológica, se deben realizar los diagnósticos para evaluar la calidad del ajuste del modelo, así como las medidas de rendimiento referentes a los pronósticos que genera el modelo estimado hasta un horizonte determinado.

2.4 Identificación del modelo

Los métodos más clásicos para la identificación del proceso que gobierna a una serie cronológica son las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, las cuales sirven de indicador acerca de qué tan relacionadas están las observaciones unas de otras. Estas funciones ofrecen indicios sobre el orden de los términos para los modelos $AR(p)$, $MA(q)$ y para la diferenciación y, por ende, para la

identificación de un modelo *ARIMA* (R. J. Hyndman & Athanasopoulos, 2018b).

Para medir la relación lineal entre dos variables cuantitativas es común utilizar el coeficiente de correlación r de Pearson (Benesty & Chen, 2009), el cual se define para dos variables X e Y como se muestra en la ecuación 12.

$$r_{X,Y} = \frac{E(XY)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} \quad (12)$$

Este mismo concepto puede aplicarse a las series cronológicas para comparar el valor de la misma en el tiempo t , con su valor en el tiempo $t - 1$, es decir, se comparan las observaciones consecutivas Y_t con Y_{t-1} . Esto también es aplicable a no solo una observación rezagada (Y_{t-1}), sino también con múltiples rezagos (Y_{t-2}), (Y_{t-3}), \dots , (Y_{t-n}). Para esto se hace uso del coeficiente de autocorrelación.

El coeficiente de autocorrelación (*ACF* por sus siglas en inglés) recibe su nombre debido a que se utiliza el coeficiente de correlación para pares de observaciones $r_{Y_t, Y_{t-1}}$ de la serie cronológica. Al conjunto de todas las autocorrelaciones se le llama función de autocorrelación.

La función de autocorrelación parcial⁵, como menciona Hernández (2011b), busca medir la asociación lineal entre las observaciones Y_t y Y_{t-k} , descartando los efectos de los rezagos $1, 2, \dots, k - 1$.

Cuando se tiene el modelo *ARIMA* debidamente identificado, es importante realizar los pronósticos. Sin embargo, estos pronósticos no son imperativos, sino que se debe evaluar su calidad con las llamadas medidas de rendimiento. Estas mediciones son hechas comparando el pronóstico y su diferencia con el valor real. Existen múltiples medidas de rendimiento, Adhikari, K, & Agrawal (2013) menciona entre ellas el *MAE*, *MAPE*, *RMSE*, *MASE*, *AIC*, *AICc* y el *BIC*.

2.5 Los autocorrelogramas

El uso del *ACF* y el *PACF* se suele aplicar de manera visual. Sin embargo, hacer usos de estos elementos implica considerar múltiples condiciones. En el caso de la identificación del orden de la diferenciación:

- Si la serie posee autocorrelaciones positivas en un amplio número de rezagos, entonces es posible que se requiera un orden más alto en el valor de d .
- Si la autocorrelación en $t - 1$ es menor o igual a cero, o si las autocorrelaciones resultan ser muy bajas y sin seguir algún patrón en particular, entonces no se requiere un alto orden para la diferenciación.
- Una desviación estándar baja suele ser indicador de un orden adecuado de integración.
- Si no se utiliza ninguna diferenciación, se asume que la serie cronológica es estacionaria.

Aplicar una diferenciación asume que la serie cronológica posee una media constante, mientras

⁵ *PACF* por sus siglas en inglés

que dos diferenciaciones sugiere que la tendencia varía en el tiempo.

Para la identificación de los términos p y q :

- Si la *PACF* de la serie cronológica diferenciada muestra una diferencia marcada y si, además, la autocorrelación en $t - 1$ es positiva, entonces debe considerarse aumentar el valor de p .
- Si la *PACF* de la serie cronológica diferenciada muestra una diferencia marcada y si, además, y la autocorrelación en $t - 1$ es negativa, entonces debe considerarse aumentar el valor de q .
- Los términos p y q pueden cancelar sus efectos entre sí, por lo que si se cuenta con un modelo *ARMA* más mixto que parece adaptarse bien a los datos, puede deberse también a que p o q deben ser menores.
- Si la suma de los coeficientes del modelo *AR* es muy cercana a la unidad, es necesario reducir la cantidad de términos en uno y aumentar el orden de la diferenciación en uno.
- Si la suma de los coeficientes del modelo *MA* es muy cercana a la unidad, es necesario reducir la cantidad de términos en uno y disminuir el orden de la diferenciación en uno.

Tener en consideración estos y otros posibles criterios para la identificación del proceso que gobierna la serie cronológica puede fácilmente volverse algo subjetivo, pues dos personas diferentes pueden llegar a dar distintas interpretaciones a las visualizaciones de los autocorrelogramas. Estas interpretaciones pueden sesgar la identificación de los modelos y, además, no considerar otros escenarios para los términos de un modelo *ARIMA*; para solventar esto es necesario considerar un abanico más amplio de opciones que a su vez elimine el criterio subjetivo del observador, lo cual se puede lograr al considerar múltiples permutaciones de términos, es decir, empleando la sobreparametrización.

2.6 La sobreparametrización y el análisis combinatorio

La identificación visual mediante los autocorrelogramas puede llevar a decisiones erradas acerca del proceso que gobierna la serie cronológica. Una alternativa es considerar estimaciones procesos de ordenes bajos, como un *ARMA*(1,1) y poco a poco ir incorporando términos, este proceso de revisión permite encontrar los puntos en que agregar un coeficiente más al modelo no aporta ninguna mejora en los resultados del pronóstico, y así considerar únicamente aquellos modelos que tengan coeficientes con un aporte estadísticamente significativo. Este procedimiento es conocido como sobreparametrización. Dependiendo de la cantidad de observaciones y del rango con que se trabajen los coeficientes, la comparación de los modelos puede volverse muy extensa y complicada, razón por la cual resulta imperativo generar un procedimiento sistemático que logre seleccionar el mejor modelo con base en sus medidas de ajuste y rendimiento del modelo.

3 METODOLOGÍA

3.1 Introducción

La aplicación de las series cronológicas tiene tres objetivos: 1) el análisis exploratorio de la serie en cuestión, 2) estimar modelos de proyección, y 3) generar pronósticos para los posibles valores futuros que tomará el problema en cuestión. Asimismo, existen múltiples formas de proceder mediante la etapa de estimación, como lo son los métodos de suavizamiento exponencial ([Brown, 1956](#)), modelos de regresión para series temporales ([Kedem & Fokianos, 2005](#)), redes neuronales secuenciales aplicadas a datos longitudinales ([Tadayon & Iwashita, 2020](#)), estimaciones bayesianas ([Jammalamadaka, Qiu, & Ning, 2018](#)), y finalmente, los procesos autorregresivos integrados de medias móviles o ARIMA por sus siglas en inglés ([Box, Jenkins, & Reinsel, 1994](#)), siendo estos últimos el foco de interés en este estudio.

Un proceso ARIMA es caracterizado por dos funciones: la autocorrelación y la autocorrelación parcial; mediante la comparación de dichas funciones se busca la identificación del proceso que describa de manera adecuada el comportamiento de una serie cronológica.

En la búsqueda de un modelo adecuado entre varios candidatos, se llevan a cabo comparaciones de medidas de bondad de ajuste y de precisión. Se consideran temporalidades mensuales, bimensuales, trimestrales o cuatrimestrales, mediante un proceso de selección fundamentada en las permutaciones de todos los parámetros de un modelo ARIMA hasta un rango determinado, considerando la inclusión semiautomática de intervenciones en periodos específicos y la validación cruzada para evaluar la calidad de las particiones de la base de datos en conjuntos para entrenar y probar el rendimiento del modelo. Dichas pruebas sirven de insumo para utilizar un método de consenso entre ellas y seleccionar el modelo más adecuado mediante la sobreparametrización: se comparan todos los posibles en un intervalo específico de términos definiendo una diferenciación adecuada para la serie y permutando hasta un máximo definido para los términos autorregresivos y de medias móviles especificados para así seleccionar la especificación que ofrezca mejores resultados al momento de pronosticar valores futuros de la serie cronológica.

3.2 Conceptos y definiciones en el análisis de series cronológicas

3.2.1 Definición de una serie cronológica

3.2.2 Procedimiento al analizar series cronológicas

3.2.3 Estacionaridad

3.2.4 La parsimonia

3.3 Componentes de una serie cronológica

3.3.1 La tendencia

3.3.2 Componentes estacionales

3.3.3 Componente cíclico

3.3.4 Componente irregular

3.4 Modelos de series cronológicas

3.5 Modelos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles

3.5.1 Modelos Autorregresivos

3.5.2 Modelos de Medias Móviles

3.5.3 Metodología Box-Jenkins

3.5.4 Etapa 1 - Identificación

3.5.5 Etapa 2 - Estimación y diagnóstico

3.5.6 Etapa 3 - Pronóstico

3.5.7 Notación de los modelos ARIMA

3.5.8 Diferenciación

3.6 Análisis de intervención

3.7 Validación cruzada

3.8 Medidas de rendimiento

3.8.1 MFE

3.8.2 MAE

3.8.3 MAPE

3.8.4 MPE

3.8.5 MSE

4 RESULTADOS

4.1 Introducción

El método propuesto se probará comparándose con los resultados de seis series con distintas temporalidades: mortalidad infantil, mortalidad por causa externa, nacimientos, demanda eléctrica, intereses y comisiones del sector público e incentivos salariales del sector público.

4.2 Datos simulados

4.2.1 Comparación en datos simulados - Sobreparametrización vs auto.arima

4.3 Estimaciones en datos costarricenses

En el campo demográfico, por ejemplo, las estadísticas vitales son sistematizadas y divulgadas año tras año, por tanto, revelan los cambios acontecidos durante este periodo. Esta información junto con la proveniente de los censos de población constituye la base para construir los diferentes índices, tasas y otros indicadores que revelan la situación demográfica del país, información de gran relevancia para la planificación nacional, regional y local en diversos campos. Uno de estos principales campos de acción es la salud pública, para la cual la tasa de mortalidad infantil se considera uno de los indicadores prioritarios dado que refleja no solo las condiciones de salud de la población infante, sino también los niveles de desarrollo del país, pues depende de la calidad de la atención de la salud, principalmente de la prenatal y perinatal, así como de las condiciones de saneamiento. Por tanto, su continuo monitoreo es fundamental para diseñar, implementar y evaluar políticas de salud pública orientadas a disminuir y erradicar aquellas que son prevenibles ([INEC, 2017](#)).

4.3.1 Tasa de mortalidad infantil interanual

4.3.2 Tasa global de fecundidad

4.3.3 Mortalidad por causa externa

4.3.4 Incentivos salariales del sector público

4.3.5 Intereses y comisiones del sector público

4.3.6 Demanda eléctrica

4.3.7 Comparación en datos reales - Sobreparametrización vs auto.arima

4.4 Discusión de los resultados

5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Introducción

5.2 Conclusiones

5.3 Recomendaciones

6 ANEXOS

6.1 La función `funcion__1`

Código 1: Una función

```
funcion_1 <- function(x,y){  
  x+y  
}
```

7 REFERENCIAS

- Adhikari, R., K. A. R., & Agrawal, R. K. (2013). *An Introductory Study on Time Series Modeling and Forecasting* (pp. 42-45). Recuperado de <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1302/1302.6613.pdf>
- Agrawal, R., & Adhikari, R. (2013). An introductory study on time series modeling and forecasting. *Nova York: CoRR*.
- Benesty, J., & Chen, Y. and C., J. and Huang. (2009). Pearson Correlation Coefficient. En *Noise Reduction in Speech Processing* (pp. 37-38). https://doi.org/10.1007/978-3-642-00296-0_5
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Recuperado de <https://books.google.co.cr/books?id=sRzvAAAAMAAJ>
- Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (2009). *Time Series: Theory and Methods*. En *Springer Series en Statistics* (p. 239). Recuperado de https://books.google.co.cr/books?id=_DeYu_EhVzUC
- Brown, R. (1956). *Exponential Smoothing for Predicting Demand*. Recuperado de <https://www.industrydocuments.ucsf.edu/docs/jzlc0130>
- Burnham, K. P., & Anderson, D. R. (2007). *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach*. Recuperado de <https://books.google.co.cr/books?id=IWUKBwAAQBAJ>
- Calderón, C. E. (2012). Estadística para Estudiantes de Administración de Empresas de la Universidad Nacional del Callao. *Editorial San Marcos, 2da Edición, Lima Perú*. Recuperado de https://unac.edu.pe/documentos/organizacion/vri/cdcitra/Informes_Finales_Investigacion/IF_JUNIO_2012/IF_CALDERON%20TOYA_FCA/capitulo%208.pdf
- Canova, F., & Hansen, B. E. (1995). Are Seasonal Patterns Constant over Time? A Test for Seasonal Stability. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3), 237-252. Recuperado de <http://www.jstor.org/stable/1392184>
- Cochrane, J. H. (1997). *Time Series for Macroeconomics and Finance*. Recuperado de <http://econ.lse.ac.uk/staff/wdenhaan/teach/cochrane.pdf>
- De Gooijer, J. G., & Hyndman, R. J. (2006). 25 years of time series forecasting. *International Journal of Forecasting*, 22(3), 443-473. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2006.01.001>
- Flaherty, J., & Lombardo, R. (2000, enero). *Modelling Private New Housing Starts in Australia*. Recuperado de http://www.prres.net/papers/Flaherty_Modelling_Private_New_Housing_Starts_In_Australia.pdf
- Fuller, W. A. (1995). *Introduction to Statistical Time Series*. Recuperado de <https://books.google.co.cr/books?id=wyRhjmAPQIYC>
- Hamzağebi, C. (2008). Improving Artificial Neural Networks' Performance in Seasonal Time Series Forecasting. *Inf. Sci.*, 178(23), 4550-4559. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2008.07.024>

- Hernández, O. (2011a). *Introducción a las Series Cronológicas* (1.^a ed.). Recuperado de <http://www.editorial.ucr.ac.cr/ciencias-naturales-y-exactas/item/1985-introduccion-a-las-series-cronologicas.html>
- Hernández, O. (2011b). *Introducción a las Series Cronológicas*. Recuperado de <http://www.editorial.ucr.ac.cr/ciencias-naturales-y-exactas/item/1985-introduccion-a-las-series-cronologicas.html>
- Hipel, K. W., & McLeod, A. I. (1994). *Time Series Modelling of Water Resources and Environmental Systems*. Recuperado de <https://books.google.co.cr/books?id=t1zG8OUbgdG>
- Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G. (2018a). *Forecasting: principles and practice*. Recuperado de https://books.google.co.cr/books?id=_bBhDwAAQBAJ
- Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G. (2018b). *Forecasting: principles and practice*. Recuperado de https://books.google.co.cr/books?id=_bBhDwAAQBAJ
- Hyndman, R., & Khandakar, Y. (2008). Automatic Time Series Forecasting: The forecast Package for R. *Journal of Statistical Software, Articles*, 27(3), 1-22. <https://doi.org/10.18637/jss.v027.i03>
- INEC. (2017). *Población, nacimientos, defunciones y matrimonios*. Recuperado de http://inec.cr/sites/default/files/documentos-biblioteca-virtual/repoblacv2017_0.pdf
- Jammalamadaka, S. R., Qiu, J., & Ning, N. (2018). *Multivariate Bayesian Structural Time Series Model*. Recuperado de <https://arxiv.org/pdf/1801.03222.pdf>
- Kedem, B., & Fokianos, K. (2005). *Regression Models for Time Series Analysis*. Recuperado de <https://books.google.co.cr/books?id=8r0qE35wt44C>
- Lee, J. (s. f.). Univariate time series modeling and forecasting (Box-Jenkins Method). *Econ 413, lecture 4*.
- Osborn, D. R., Chui, A. P. L., Smith, J., & Birchenhall, C. (2009). *Seasonality and the order of integration for consumption*. Recuperado de http://www.est.uc3m.es/esp/nueva_docencia/comp_col_get/lade/tecnicas_prediccion/OCSB_OxBull1988.pdf
- Rezaee, Z., Aliabadi, S., Dorestani, A., & Rezaee, N. J. (2020). Application of Time Series Models in Business Research: Correlation, Association, Causation. *Sustainability*, 12(12), 4833.
- Rosero-Bixby, L. (2018). *Producto C para SUPEN. Proyección de la mortalidad de Costa Rica 2015-2150*. Recuperado de CCP-UCR website: <http://srv-website.cloudapp.net/documents/10179/999061/Nota+t>
- Sargent, T. J. (1979). *Macroeconomic Theory*. Recuperado de <https://books.google.co.cr/books?id=X6u7AAAAIAAJ>
- Surhone, L. M., Timpledon, M. T., & Marseken, S. F. (2010). *Wold Decomposition*. Recuperado de <https://books.google.co.cr/books?id=7cSqcQAACAAJ>
- Tadayon, M., & Iwashita, Y. (2020). *Comprehensive Analysis of Time Series Forecasting Using Neural Networks*. Recuperado de <https://arxiv.org/pdf/2001.09547.pdf>

- Xiao, Z. (2001). Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against an Autoregressive Unit Root Alternative. *Journal of Time Series Analysis*, 22(1), 87-105. <https://doi.org/10.1111/1467-9892.00213>
- Zhang, G. (2003). Time series forecasting using a hybrid ARIMA and neural network model. *Neurocomputing*, 50, 159-175.