

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

LA SOBREPARAMETRIZACIÓN EN EL ARIMA: UNA APLICACIÓN A
DATOS COSTARRICENSES

Tesis sometida a la consideración de la Comisión del Programa de Estudios de
Posgrado en Estadística para optar por el grado y título de Maestría Académica en
Estadística

CÉSAR ANDRÉS GAMBOA SANABRIA B12672

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, Costa Rica

2022

DEDICATORIA

Pendiente

AGRADECIMIENTOS

También pendiente

“Esta tesis fue aceptada por la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Estadística de la Universidad de Costa Rica, como requisito parcial para optar al grado y título de Maestría Académica en Estadística”

Ph.D. Álvaro Morales Ramírez
Decano Sistema de Estudios de Posgrado

MSc. Óscar Centeno Mora
Director de Tesis

Ph.D. Gilbert Brenes Camacho
Lector

Ph.D. ShuWei Chou.
Lector

MSc. Johnny Madrigal Pana
Director Programa de Posgrado en Estadística

César Andrés Gamboa Sanabria
Candidato

Índice

DEDICATORIA	I
AGRADECIMIENTOS	II
RESUMEN	1
ABSTRACT	2
1 INTRODUCCIÓN	3
1.1 Antecedentes	3
1.2 El problema	4
1.3 Objetivos del estudio	4
1.4 Justificación del estudio	5
1.5 Organización del estudio	6
2 MARCO TEÓRICO	7
2.1 Componentes de una serie cronológica	8
2.1.1 La tendencia-ciclo	10
2.1.2 Componentes estacionales	12
2.1.3 Componente irregular	13
2.2 Supuestos en el análisis de series cronológicas	14
2.3 Identificación del modelo	16
2.4 Modelos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles	18
2.4.1 Ecuación de Wold	18
2.4.2 Metodología Box-Jenkins	20
2.4.3 Modelos Autorregresivos	20
2.4.4 Modelos de Medias Móviles	20
2.4.5 Modelos ARIMA	21
2.5 Los autocorrelogramas	22
2.6 La sobreparametrización y el análisis combinatorio	27
3 METODOLOGÍA	29
3.1 Materiales	29
3.1.1 Tasa de mortalidad infantil interanual	29
3.1.2 Mortalidad por causa externa	33
3.1.3 Incentivos salariales del sector público	36
3.1.4 Intereses y comisiones del sector público	38
3.1.5 Herramientas analíticas y procedimiento de simulación	41

3.2	Métodos	44
3.2.1	Análisis exploratorio	44
3.2.2	Partición de los datos	44
3.2.3	Estimación del mejor modelo según la función auto.arima()	44
3.2.4	Estimación del mejor modelo con sobreparametrización	45
3.2.5	Estimación de un modelo ARIMA estándar	47
3.2.6	Análisis de los errores	47
3.2.7	Pronósticos	47
3.2.8	Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento	47
3.2.8.1	AIC	47
3.2.8.2	AICc	47
3.2.8.3	BIC	48
3.2.8.4	MAE	48
3.2.8.5	MASE	48
3.2.8.6	RMSE	48
4	RESULTADOS	49
4.1	Análisis exploratorio	49
4.1.1	Datos simulados	49
4.1.1.1	ARIMA(1,0,0)	49
4.1.1.2	ARIMA(1,0,1)	51
4.1.1.3	ARIMA(2,0,3)	53
4.1.1.4	ARIMA(4,0,2)	55
4.1.1.5	ARIMA(0,0,1)(0,1,1)	57
4.1.1.6	ARIMA(2,1,4)(3,0,3)	59
4.1.2	Tasa de mortalidad infantil interanual	61
4.1.3	Mortalidad por causa externa	63
4.1.4	Incentivos salariales	65
4.1.5	Intereses y comisiones del sector público	67
4.2	Partición de los datos	69
4.3	Estimación del mejor modelo según la función auto.arima()	71
4.3.1	Datos simulados	71
4.3.2	Datos reales	71
4.4	Estimación del mejor modelo con sobreparametrización	71
4.4.1	Datos simulados	72
4.4.2	Datos reales	72
4.5	Estimación de un modelo ARIMA estándar	73

4.5.1	Datos simulados	74
4.5.2	Datos reales	74
4.6	Análisis de los errores	74
4.6.1	Datos simulados	75
4.6.1.1	Errores de los modelos estimados con auto.arima()	75
4.6.1.2	Errores de los modelos estimados con sobreparametrización	79
4.6.1.3	Errores de los modelos estimados con un modelo ARIMA estándar	82
4.6.2	Datos reales	86
4.6.2.1	Errores de los modelos estimados con auto.arima()	86
4.6.2.2	Errores de los modelos estimados con sobreparametrización	88
4.6.2.3	Errores de los modelos estimados con un modelo ARIMA estándar	91
4.7	Pronósticos	93
4.7.1	Datos simulados	93
4.7.2	Datos reales	97
4.8	Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento	99
4.8.1	Datos simulados	99
4.8.2	Datos reales	100
5	CONCLUSIONES	101
6	ANEXOS	106
6.1	Función de sobreparametrización	106
6.2	Función de simulación de series cronológicas	111
7	REFERENCIAS	113

Índice de cuadros

1	Coeficientes del proceso original y los estimados con auto.arima()	72
2	Coeficientes de los modelos ajustados con a las series reales con auto.arima()	72
3	Coeficientes del proceso original y los estimados con sobreparametrización	73
4	Coeficientes de los modelos ajustados con a las series reales con sobreparametrización	73
5	Coeficientes del proceso original y los estimados con un ARIMA estándar	74
6	Coeficientes de los modelos ajustados con a las series reales con un ARIMA estándar	75
7	Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados a partir de un ARIMA(1,0,0)	99
8	Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados a partir de un ARIMA(1,0,1)	100

9	Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados a partir de un ARIMA(2,0,3)	100
10	Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados a partir de un ARIMA(4,0,2)	100
11	Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados a partir de un ARIMA(0,0,1)(0,1,1)	101
12	Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados a partir de un ARIMA(2,1,4)(3,0,3)	101
13	Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados para la TMII	101
14	Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados para la TMCE	102
15	Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados para la serie de incentivos salariales del sector público	102
16	Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados para la serie de intereses y comisiones del sector público	102

Índice de figuras

1	Número de matrimonios en Costa Rica para el periodo 1978-1983	9
2	Número de turistas en Costa Rica para el periodo 1991-2000	10
3	Tendencia del número de matrimonios en Costa Rica para el periodo 1978-1983 . .	11
4	Índice bursatil NASDAQ-100 para el periodo enero 1990 - junio 2021	12
5	Componente aleatorio de la serie de matrimonios en Costa Rica para el periodo 1978-1983	13
6	Componente aleatorio de la serie de matrimonios en Costa Rica para el periodo 1978-1983	14
7	Número anual de graduados de la Universidad de Costa Rica para el periodo 1965-2002	23
8	Función de autocorrelación simple de la serie de graduados de la UCR	24
9	Función de autocorrelación parcial de la serie de graduados de la UCR	24
10	Serie diferenciada de graduados de la Universidad de Costa Rica para el periodo 1965-2002	25
11	Función de autocorrelación simple de la serie diferenciada de graduados de la UCR	26

12	Función de autocorrelación parcial de la serie diferenciada de graduados de la UCR	26
13	Tasa de Mortalidad Infantil Interanual 1989 - 2017	31
14	Tasa de Mortalidad Infantil Interanual 1989 - 2017 según periodos	32
15	Descomposición de la TMII en el periodo 2000 - 2017	33
16	Mortalidad por causa externa 2000 - 2017	34
17	Mortalidad por causa externa 2000 - 2017 según mes	35
18	Descomposición de las defunciones por causa externa en el periodo 2000-2017	36
19	Incentivos salariales en el sector público 2007 - 2018	37
20	Incentivos salariales en el sector público 2007 - 2018 según mes	37
21	Descomposición de la serie de Incentivos salariales en el periodo 2007 - 2018	38
22	Intereses y comisiones del sector público en el periodo 2007-2018	39
23	Intereses y comisiones del sector público en el periodo 2007-2018 según mes	40
24	Descomposición de la serie de Incentivos salariales en el periodo 2007 - 2018	41
25	Valores de referencia para la simulación de series cronológicas	43
26	Series cronológicas simuladas	43
27	Tendencia de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(1,0,0)	50
28	Autocorrelación de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(1,0,0)	50
29	Autocorrelación parcial de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(1,0,0)	51
30	Tendencia de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(1,0,1)	52
31	Autocorrelación de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(1,0,1)	52
32	Autocorrelación parcial de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(1,0,1)	53
33	Tendencia de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(2,0,3)	54
34	Autocorrelación de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(2,0,3)	54
35	Autocorrelación parcial de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(2,0,3)	55
36	Tendencia de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(4,0,2)	56
37	Autocorrelación de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(4,0,2)	56
38	Autocorrelación parcial de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(4,0,2)	57
39	Tendencia de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(0,0,1)(0,1,1)	58
40	Autocorrelación de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(0,0,1)(0,1,1)	58
41	Autocorrelación parcial de los datos simulados a partir de un proceso ARI- MA(0,0,1)(0,1,1)	59
42	Tendencia de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(2,1,4)(3,0,3)	60
43	Autocorrelación de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(2,1,4)(3,0,3)	60
44	Autocorrelación parcial de los datos simulados a partir de un proceso ARI- MA(2,1,4)(3,0,3)	61
45	Tendencia de los datos diferenciados de la TMII	62

46	Autocorrelación de los datos diferenciados de la TMII	62
47	Autocorrelación parcial de los datos diferenciados de la TMII	63
48	Tendencia de los datos diferenciados de la mortalidad por causa externa	64
49	Autocorrelación de los datos diferenciados de la mortalidad por causa externa	64
50	Autocorrelación parcial de los datos diferenciados de la mortalidad por causa externa	65
51	Tendencia de los datos diferenciados de la serie de incentivos salariales	66
52	Autocorrelación de los datos diferenciados de la serie de incentivos salariales	66
53	Autocorrelación parcial de los datos diferenciados de la serie de incentivos salariales	67
54	Tendencia de los datos diferenciados de la serie de intereses y comisiones del sector público	68
55	Autocorrelación de los datos diferenciados de la serie de intereses y comisiones del sector público	68
56	Autocorrelación parcial de los datos diferenciados de la serie de intereses y comisiones del sector público	69
57	Partición de los datos en los conjuntos de entrenamiento y validación para las series de tiempo simuladas	70
58	Partición de los datos en los conjuntos de entrenamiento y validación para las series de tiempo reales	70
59	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,0,0) estimado con auto.arima() para los datos generados con un ARIMA(1,0,0)	76
60	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(0,0,1) estimado con auto.arima() para los datos generados con un ARIMA(1,0,1)	76
61	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(2,0,2) estimado con auto.arima() para los datos generados con un ARIMA(2,0,3)	77
62	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(2,0,3) estimado con auto.arima() para los datos generados con un ARIMA(4,0,2)	77
63	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(0,0,1)(0,1,1) estimado con auto.arima() para los datos generados con un ARIMA(0,0,1)(0,1,1)	78
64	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(2,0,4)(0,0,2) estimado con auto.arima() para los datos generados con un ARIMA(2,1,4)(3,0,3)	78
65	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,0,0) estimado con sobreparametrización para los datos generados con un ARIMA(1,0,0)	79
66	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(0,0,1) estimado con sobreparametrización para los datos generados con un ARIMA(1,0,1)	80
67	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(5,1,1) estimado con sobreparametrización para los datos generados con un ARIMA(2,0,3)	80

68	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(4,0,2) estimado con sobreparametrización para los datos generados con un ARIMA(4,0,2)	81
69	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(0,0,1)(0,1,1) estimado con sobreparametrización para los datos generados con un ARIMA(0,0,1)(0,1,1)	81
70	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(2,1,3)(0,1,3) estimado con sobreparametrización para los datos generados con un ARIMA(2,1,4)(3,0,3)	82
71	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1) estimado con los datos generados con un ARIMA(1,0,0)	83
72	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1) estimado con los datos generados con un ARIMA(1,0,1)	83
73	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1) estimado con los datos generados con un ARIMA(2,0,3)	84
74	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1) estimado con los datos generados con un ARIMA(4,0,2)	84
75	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1)(1,1,1) estimado con los datos generados con un ARIMA(0,0,1)(0,1,1)	85
76	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1)(1,1,1) estimado con los datos generados con un ARIMA(2,1,4)(3,0,3)	85
77	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(2,1,0)(0,0,1) estimado con auto.arima() para la tasa de mortalidad infantil interanual	86
78	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1) estimado con auto.arima() para la tasa de mortalidad por causa externa	87
79	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(0,0,1)(1,1,0) estimado con auto.arima() para los incentivos salariales	87
80	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(0,0,1)(0,1,0) estimado con auto.arima() para los intereses y comisiones del sector público	88
81	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(4,1,0)(4,1,0) estimado con sobreparametrización para la tasa de mortalidad infantil interanual	89
82	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(2,0,1)(0,1,1) estimado con sobreparametrización para la tasa de mortalidad por causa externa	89
83	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(2,1,0)(1,2,0) estimado con sobreparametrización para los incentivos salariales	90
84	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(0,1,2)(0,1,0) estimado con sobreparametrización para los intereses y comisiones del sector público	90
85	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1)(1,1,1) para la tasa de mortalidad infantil interanual	91

86	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1)(1,1,1) para la tasa de mortalidad por causa externa	92
87	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1)(1,1,1) para los incentivos salariales	92
88	Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1)(1,1,1) para los intereses y comisiones del sector público	93
89	Pronóstico de los datos generados mediante un ARIMA(1,0,0) según el método de estimación	94
90	Pronóstico de los datos generados mediante un ARIMA(1,0,1) según el método de estimación	94
91	Pronóstico de los datos generados mediante un ARIMA(2,0,3) según el método de estimación	95
92	Pronóstico de los datos generados mediante un ARIMA(4,0,2) según el método de estimación	95
93	Pronóstico de los datos generados mediante un ARIMA(0,0,1)(0,1,1) según el método de estimación	96
94	Pronóstico de los datos generados mediante un ARIMA(2,1,4)(3,0,3) según el método de estimación	96
95	Pronóstico de la TMII según el método de estimación	97
96	Pronóstico de la Tasa de mortalidad por causa externa (TMCE) según el método de estimación	98
97	Pronóstico de la serie de incentivos salariales del sector público según el método de estimación	98
98	Pronóstico de la serie de intereses y comisiones del sector público según el método de estimación	99

RESUMEN

Estimar modelos de series cronológicas es una labor ampliamente extendida en múltiples campos de la investigación y su objetivo último es generar pronósticos de la forma más precisa posible dentro de un horizonte determinado. Existe una amplia gama de modelos que puede utilizarse con este fin, entre ellos están los modelos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles (*ARIMA*), e incluso existen diversos métodos de estimación automática o semi-automática para esta rama de la estadística.

A pesar de esto, encontrar un modelo que posea un buen ajuste a los datos no es tarea fácil, pues deben considerarse diversos aspectos teóricos, prácticos, y de la temática de estudio para así obtener un modelo adecuado que genere pronósticos realistas y pertinentes para la toma de decisiones dentro de lo posible.

EN esta investigación se propone hacer uso de la sobreparametrización en conjunto con el método de permutaciones del análisis combinatorio para someter a prueba una espectro más amplio de posibles modelos *ARIMA*. En las selección de modelos ARIMA los métodos más tradicionales como los correlogramas u otros, no suelen cubrir muchas alternativas para definir la cantidad de coeficientes a estimar en el modelo, lo cual representa un método de estimación que no es el mejor, por esto, la presente tesis propone una metodología para obtener pronósticos más precisos en comparación a los métodos tradicionales.

Se realiza un ejercicio de simulación de series cronológicas para ajustar modelos *ARIMA* con la función `auto.arima()`, la sobreparametrización y un modelo *ARIMA* de orden bajo a partir los datos generados y cuatro series de tiempo reales utilizando una partición del 80 % para entrenar los modelos y el restante 20 % para validación de los pronósticos. La calidad de los resultados de cada modelo se mide mediante medidas de bondad de ajuste y de rendimiento.

Entre los principales resultados se concluye que al tener datos que vienen de un proceso con bajo número de parámetros, el uso de la sobreparametrización logra captar de buena manera el comportamiento de la serie en comparación a las otras alternativas más utilizadas y, además, cuando el proceso que gobierna la serie es de un mayor grado, la metodología propuesta, al considerar un mayor espectro paramétrico, es capaz de capturar de mejor forma el comportamiento de la serie y conseguir pronósticos con una precisión mayor al de los métodos más tradicionales.

ABSTRACT

Estimating time series models is a widely extended task in multiple fields of research, and its final goal is to forecast as accurately as possible within a given horizon. A wide range of models can be used for this purpose, including the Autoregressive Integrated Moving Average models (*ARIMA*), and there are even various automatic or half-automatic estimation methods for this topic.

Despite this, finding a model that has an excellent fit to the data is not an easy task since it must have theoretical, practical, and thematic aspects to obtain an adequate model that generates realistic and relevant forecasts for decision-making.

In this research, the use of overparameterization is proposed with combinatorial analysis to test a broader spectrum of possible *ARIMA* models. In the selection of ARIMA models, the most traditional methods such as correlograms or others, do not usually cover many alternatives to define the number of coefficients to be estimated in the model, which represents an estimation method that is not the best, for this reason, the present thesis proposes a methodology to obtain more accurate forecasts compared to traditional methods.

A time-series simulation exercise is performed to fit *ARIMA* models with the `auto.arima()` function, overparameterization, and a low order *ARIMA* model from the generated data and four local time series using a partition of 80 % to train the models and the remaining 20 % for forecast validation. The quality of the results of each model is checked with the goodness of fit and accuracy measures.

Among the main results, it is concluded that data that comes from a lower process, the overparameterization, has a good fit compared to traditional methods. In addition, when the data has a higher process, the proposed methodology, by considering a larger parametric spectrum, can fit the time series and reach forecasts with greater precision than more traditional methods.

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes

Estimar los valores futuros en un determinado contexto ha producido un aumento en el análisis de los datos referidos en el tiempo, conocido también como series cronológicas. Este tipo de datos se encuentra en diferentes áreas, tanto en investigación académica como en el análisis de datos para la toma de decisiones. En el campo financiero es común hablar de la devaluación del colón con respecto al dólar, cantidad de exportaciones mensuales de un determinado producto o las ventas, entre otros (Hernández, 2011). Las series cronológicas son particularmente importantes en la investigación de mercados o en las proyecciones demográficas; de manera conjunta apoyan la toma de decisiones para la aprobación presupuestaria en distintas áreas.

En la actualidad, la información temporal es muy relevante: El Banco Mundial¹ cuenta en su sitio web con datos para el análisis de series cronológicas de indicadores de desarrollo, capacidad estadística, indicadores educativos, estadísticas de género, nutrición y población. Kaggle², uno de los sitios más populares relacionados con el análisis de información, ofrece una gran cantidad de datos temporales para realizar competencias relacionadas con las series temporales y determinar los modelos ganadores para una determinada temática³.

Asimismo, los pronósticos (estimación futura de una partícula en una serie temporal) son utilizados por instituciones públicas o del sector privado, centros nacionales o regionales de investigación y organizaciones no gubernamentales dedicadas al desarrollo social. Si las entidades previamente mencionadas cuentan con proyecciones de calidad, la puesta en marcha de sus respectivos planes tendrá un impacto más efectivo.

Los métodos existentes para llevar a cabo un análisis de series cronológicas son diversos, y responden al propio contexto y tipo de datos. Obtener buenos pronósticos o explicar el comportamiento de un fenómeno en el tiempo, siempre será un tema recurrente de investigación. Generar una adecuada estimación es fundamental para obtener un pronóstico de confianza. Es importante resaltar que las técnicas de proyección ARIMA tienen como objetivo explicar las relaciones pasadas de la serie cronológica, para de esta manera conocer el posible comportamiento futuro de la misma (R. J. Hyndman & Athanasopoulos, 2018a).

Al trabajar con la metodología de Box-Jenkins, uno de las etapas a concretar es identificar los parámetros de estimación que gobiernan la serie temporal. Para indagar los términos en el proceso de investigación se suele utilizar la identificación de parámetros mediante autocorrelogramas parciales

¹<https://databank.worldbank.org/home.aspx>

²Se trata de una subsidiaria de la compañía Google que sirve de centro de reunión para todos aquellos interesados en la ciencia de datos.

³Muchas de ellas incluyen recompensas económicas que van desde los \$500 hasta los \$100,000 para aquellos que logren obtener los mejor pronósticos.

y totales. Sin embargo, los autocorrelogramas formados no analizan de forma exhaustiva y óptima los posibles coeficientes que podrían contemplarse la ecuación de Wold. Según su definición matemática, esta posee infinitos coeficientes, y la aproximación mediante los autocorrelogramas no es una forma exacta de aproximar el proceso que gobierna la serie. Por lo tanto, se debe buscar una alternativa distinta, que opte por aproximar de una mejor manera la identificación de los parámetros estimados, cubriendo un mayor número de posibilidades. Una alternativa al problema de aproximar los parámetros del proceso que gobierna la serie cronológica puede ser la sobreparametrización.

1.2 El problema

La dificultad visual a la hora de identificar un modelo ARIMA radica en que los autocorrelogramas solo aportan una aproximación al proceso que gobierna la serie. De forma complementaria, es común caer en el problema de la subjetividad, pues a pesar de que alguien proponga un patrón que gobierne la serie, otro analista podría tener una interpretación visual diferente del mismo proceso, proponiendo así distintas identificaciones para un mismo proceso. Además, se posee el inconveniente de que algunos métodos de identificación automática del proceso que gobierna la serie subestiman el número de parámetros que se debería de contemplar.

Alternativas como la función `auto.arima()`, que ofrece el paquete `forecast` del lenguaje de programación R⁴ (R. Hyndman & Khandakar, 2008), permite estimar un modelo ARIMA basado en pruebas de raíz unitaria y minimización del AICc (Burnham & Anderson, 2007). Así se obtiene un modelo temporal definiendo las diferenciaciones requeridas en la parte estacional d mediante las pruebas KPSS (Xiao, 2001) o ADF (Fuller, 1995), y la no estacional D utilizando las pruebas OCSB (Osborn, Chui, Smith, & Birchenhall, 2009) o la Canova-Hansen (Canova & Hansen, 1995), seleccionando el orden óptimo para los términos $ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$ para una serie cronológica determinada.

Sin embargo, estas pruebas suelen ignorar diversos términos que bien podrían ofrecer mejores pronósticos; no someten a prueba las posibles especificaciones de un modelo en un rango determinado, sino que realizan aproximaciones analíticas para definir el proceso que gobierna la serie cronológica, dejando así un vacío en el cual se corre el riesgo de no seleccionar un modelo que ofrezca mejores pronósticos. Poner a prueba un mayor número de posibilidades para la especificación de los modelos tiene la ventaja de descartar ciertos modelos, y mantener otros con un criterio más científico y una evidencia numérica que respalde esa decisión.

1.3 Objetivos del estudio

El objetivo general de la presente investigación es proponer un algoritmo alternativo más exhaustivo para la selección de modelos ARIMA mediante la sobreparametrización de los términos de la

⁴Descarga gratuita en <https://cran.r-project.org/>

ecuación del ARIMA.

Para lograr esto, se pretende:

1. Generar los escenarios de estimación de los distintos modelos ARIMA mediante permutaciones de los términos (p, d, q) y (P, D, Q) para la estimación de los posibles procesos que gobiernan una determinada serie temporal.
2. Aplicar diversos métodos de validación en la estimación de procesos que gobiernan la serie cronológica.
3. Contrastar la precisión de la estimación así como la generación de pronósticos con otros métodos similares, aplicados en datos costarricenses.
4. Integrar el desarrollo de la metodología de análisis de series temporales en una librería del lenguaje estadístico R.

1.4 Justificación del estudio

El uso correcto de las series temporales se puede apreciar en distintos contextos. El accionar de políticas gubernamentales, así como de otro tipo de sectores, se apoyan cada vez más en un acertado análisis de la información temporal. En demografía, uno de los principales temas de investigación son las proyecciones de población; durante una emergencia, conocer la posible cantidad de población que habita una zona es clave para la rápida reacción de las autoridades en el envío de ayuda o en la ejecución de planes de evacuación. Asimismo, los análisis actuariales se ven beneficiados al mejorar sus métodos de pronóstico. Una de sus principales áreas de estudio es la mortalidad, ya que representa un insumo de vital importancia para la planificación y sostenibilidad de los sistemas de pensiones, servicios de salud tanto pública como privada, seguros de vida y asuntos hipotecarios ([Rosero-Bixby, 2018](#)).

La estimación de series de tiempo es una labor común en distintos campos de investigación: el objetivo es poder pronosticar de forma correcta lo que sucederá dentro de los próximos períodos. Métodos actuales como el `auto.arima()` solamente realizan aproximaciones analíticas no óptimas, por lo que suelen omitir procesos que describirían de una mejor manera el comportamiento futuro de una serie cronológica.

Estimar modelos ARIMA considerando diversas permutaciones en sus estimadores, permite mitigar las falencias de otras aproximaciones analíticas que no analizan de forma exhaustiva todos los posibles parámetros a estimar, o escenarios de selección de la mejor serie que gobierne el proceso de interés. El desarrollo y evaluación del método propuesto, la sobreparametrización, mostrará el potencial de esta metodología en la calidad de los pronósticos. El principal aporte de este estudio es brindar evidencia sobre cómo la sobreparametrización puede contribuir a definir la especificación

de un modelo ARIMA que genere pronósticos más precisos.

1.5 Organización del estudio

El presente trabajo de investigación consta de cinco capítulos. El primer ofreció una contextualización del uso de las series de tiempo, así como la importancia de poder contar con pronósticos de calidad. Se presentó el objetivo del estudio, así como una breve descripción de la metodología empleada en la aplicación de series temporales, y cómo se planea modificar el método de estimación en los modelos ARIMA. Se concluye esta sección con hechos que justifican la importancia de esta investigación.

El siguiente capítulo consiste en el marco teórico, abarcando aspectos fundamentales de las series temporales: la ecuación de Wold, la metodología Box-Jenkins, la selección de los procesos que gobiernan la serie, la descripción del proceso iterativo, el análisis combinatorio que aborda los escenarios de estimación, entre otros.

El tercer capítulo describe la metodología relacionada al estudio. Se inicia con una descripción global de los conceptos más fundamentales del análisis de series cronológicas, pasando por los componentes fundamentales de las mismas. Se discuten también los supuestos clásicos del análisis de series cronológicas, los distintos tipos de modelos, el análisis de intervención, los métodos de validación y las medidas de rendimiento; aspectos cruciales para obtener un modelo ARIMA vía sobreparametrización. La sección metodológica culmina con la descripción del proceso de simulación que se utilizará, así como la discusión del método propuesto.

El capítulo cuatro consiste en la presentación de los resultados, tanto en los datos simulados como en la aplicación a datos costarricenses y se contrastarán contra los obtenidos por otros métodos como el de la función `auto.arima()` y un modelo estándar como el $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)_s$.

El capítulo de conclusión/discusión busca discutir los principales resultados, así como señalar las conclusiones más importantes y ofrecer algunas recomendaciones que orienten futuros estudios relacionados.

2 MARCO TEÓRICO

Las series cronológicas han sido un importante tema de investigación durante décadas ([De Gooijer & Hyndman, 2006](#)). Su objetivo principal consiste en obtener simplificaciones de la realidad mediante el ajuste de diversos modelos, los cuales se ajustan a datos recolectados a lo largo del tiempo de forma periódica.

Sin embargo, encontrar un modelo que presente un buen comportamiento con respecto a los datos no es sencillo, pues deben considerarse diversos aspectos teóricos, prácticos, y de la temática de estudio para así obtener un modelo adecuado que logre generar pronósticos realistas y pertinentes para la toma de decisiones ([Rezaee, Aliabadi, Dorestani, & Rezaee, 2020](#)).

Una serie temporal se define como una secuencia de datos observados, cuyas mediciones ocurren de manera sucesiva durante un periodo de tiempo. Los registros de estos datos pueden referirse a una única variable en cuyo caso de dice que es una serie univariada. Según [Hipel & McLeod \(1994\)](#), cada observación puede ser continua o discreta, como la temperatura de una ciudad durante el día o las variaciones diarias del precio de un activo financiero, respectivamente; las observaciones continuas, además, pueden ser convertidas a su vez en observaciones discretas. De esta manera, una serie de tiempo puede considerarse una muestra aleatoria, pues para un determinado tiempo t , que se considera el momento actual, la serie tiene tres momentos: el pasado, que son los rezagos denotados como $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-k}$, el momento presente, denotado como Y_t , y los pronósticos, denotados como $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, Y_{t+h}$; así, una serie temporal univariada, con lapsos equidistantes entre los tiempos, puede representarse como $Y_{t-k}, \dots, Y_{t-2}, Y_{t-1}, Y_t, Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, Y_{t+h}$.

A partir de lo anterior, la serie cronológica se compone de dos partes: la estocástica, que contiene una parte conocida (sistématica) y susceptible de predecir y de una parte totalmente desconocida o aleatoria; y una parte determinística, que representa una ecuación matemática sin error, dado que no posee más que ese componente determinístico, se trata de una variable que está determinada o fija y que no cambia de una muestra a otra. De esta manera, puede concluirse que una serie cronológica cuenta con dos características fundamentales: Los valores se encuentran ordenados cronológicamente y, además, existe una dependencia o correlación entre los valores de dicha serie de tiempo; de no presentarse estas dos condiciones, no se estaría en presencia de una serie cronológica. Así, puede decirse que las series de tiempo se enfocan en tres grandes objetivos que serán detallados en secciones posteriores: la descripción de la serie, la adecuación de un modelo o técnica estocástica, y el pronóstico para hasta un horizonte h determinado; el análisis de la serie debe preguntarse sobre el tipo de serie que se está analizando, el tipo de datos y el periodo de referencia utilizado para ajustar el modelo que servirá para realizar los pronósticos.

Existen múltiples formas de proceder mediante la etapa de estimación, como lo son los métodos

de suavizamiento exponencial (Brown, 1956), modelos de regresión para series temporales (Kedem & Fokianos, 2005), redes neuronales secuenciales aplicadas a datos longitudinales (Tadayon & Iwashita, 2020), estimaciones bayesianas (Jammalamadaka, Qiu, & Ning, 2018), y finalmente, los procesos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles o ARIMA por sus siglas en inglés (Box, Jenkins, & Reinsel, 1994), siendo estos últimos el foco de interés en este estudio. Los modelos ARIMA se enfocan en considerar las relaciones pasadas de un serie cronológica asociando los datos de las correlaciones totales y parciales. La forma de abordar una serie de tiempo utilizando los modelos ARIMA consiste, de forma muy general, en hacer una descripción de la serie para corroborar que se trate de una serie estacionaria y, de no serlo, someterla a procesos matemáticos para asegurar esta condición. Posteriormente, se realiza una identificación del posible proceso que gobierna la serie cronológica para luego estimar el modelo del orden seleccionado, sometiendo este a diversas pruebas de bondad de ajuste y rendimiento para finalmente verificar la calidad de los pronósticos obtenidos. El sustento teórico de cada una de estas será discutido a lo largo de este capítulo, que se compone de seis apartados. El primer apartado abarca los cuatro componentes de una serie cronológica. La segunda sección repasa los supuestos fundamentales en el análisis de series cronológicas. Con los elementos más básicos introducidos, el tercer apartado cubre el eje central de esta investigación: Los modelos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles y sus componentes, los modelos autorregresivos y los modelos de medias móviles, así como la metodología Box-Jenkins y el proceso para la identificación de los modelos. En el cuarto apartado se introducen los métodos para la identificación de los modelos. El quinto apartado abarca los componentes relacionados a los autocorrelogramas, la forma más difundida para la selección de modelos y, finalmente, el sexto apartado introduce el principal aporte de este estudio, la sobreparametrización como método selección de casos.

2.1 Componentes de una serie cronológica

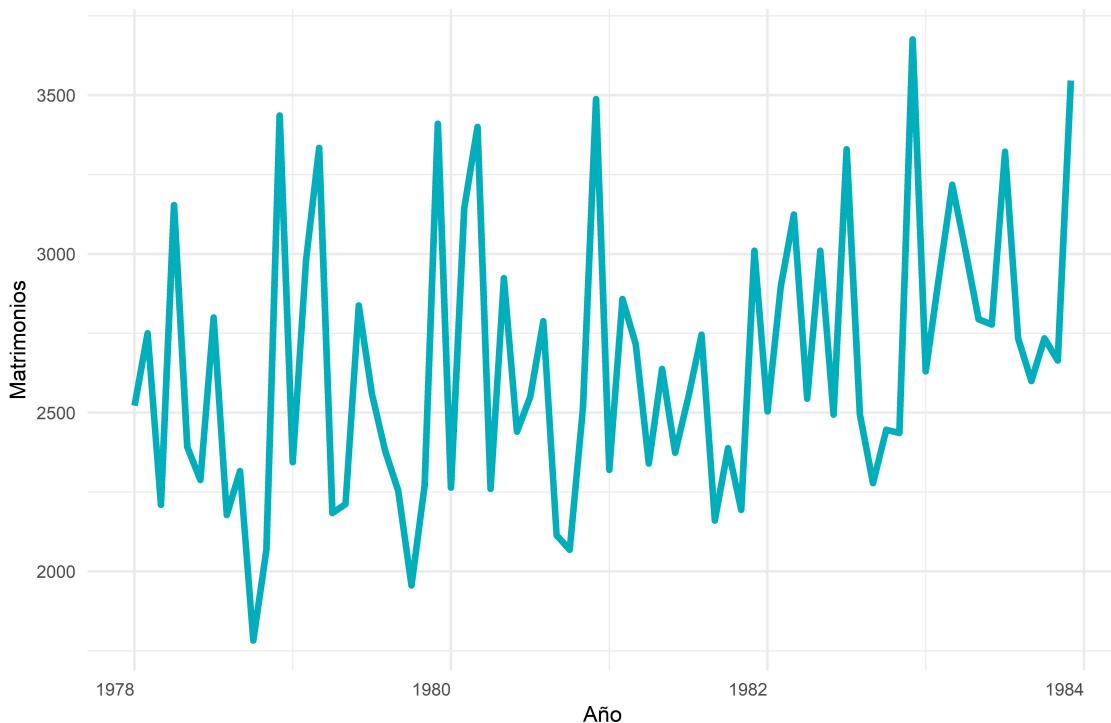
En el análisis de series cronológicas existen dos grandes corrientes de estudio: Los componentes inherentes a la serie cronológica y el estudio de las autocorrelaciones. Según el primer enfoque, de acuerdo con Hernández (2011), las series cronológicas poseen tres componentes principales: Tendencia-ciclos, Estacionalidad e Irregularidad. Considerando estos tres elementos, las series cronológicas pueden ser *aditivas*, como se muestra en la ecuación 1, en cuyo caso se asume que los tres componentes son independientes entre sí; o *multiplicativa*, donde, por el contrario, los tres componentes no son independientes, como muestra la ecuación 2.

$$Y(t) = T(t) + S(t) + I(t) \quad (1)$$

$$Y(t) = T(t) \times S(t) \times I(t) \quad (2)$$

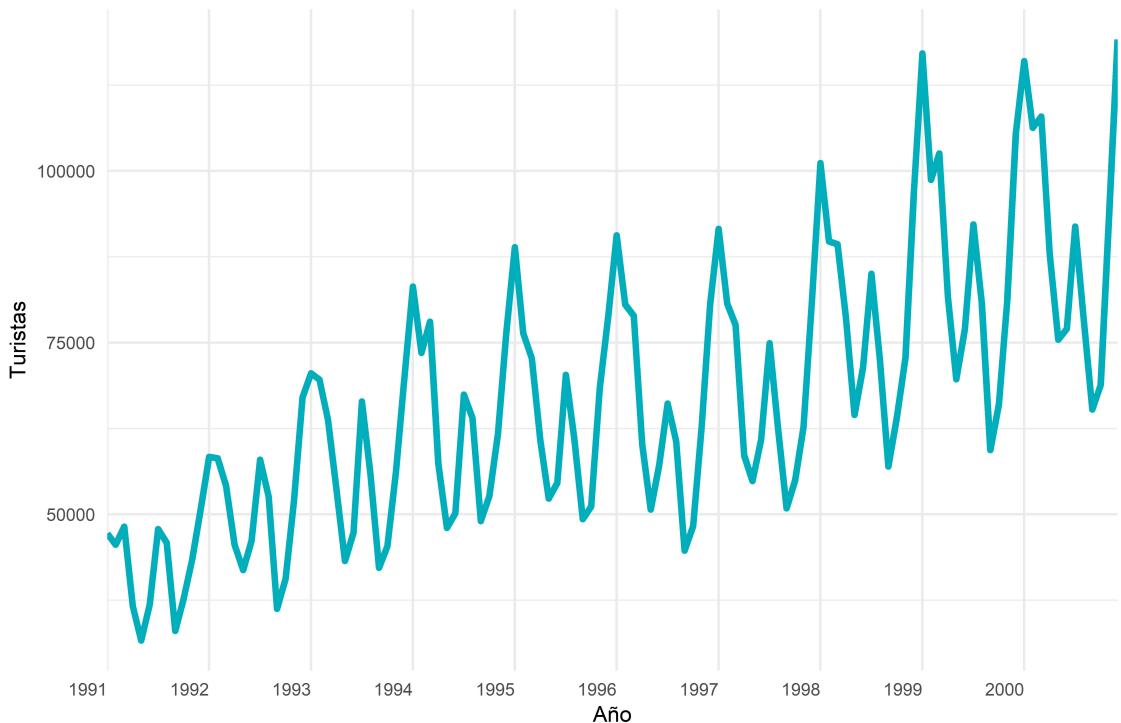
Donde Y es la serie cronológica, T es la tendencia-ciclo, S es la parte estacional, I la parte irregular o aleatoria, y t es el momento en el tiempo. Esta perspectiva clásica del análisis de series de tiempo permite realizar un análisis descriptivo del comportamiento de la serie en cuestión; cada una de sus partes se definen en posteriores apartados. De manera visual, una serie cronológica aditiva posee un comportamiento similar al mostrado en la figura 1, mientras que un comportamiento multiplicativo puede apreciarse en la figura 2.

Figura 1: Número de matrimonios en Costa Rica para el periodo 1978-1983



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de la Unidad de Estadísticas Demográficas - INEC Costa Rica.

Figura 2: Número de turistas en Costa Rica para el periodo 1991-2000



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de la Unidad de Estadísticas Demográficas - INEC Costa Rica.

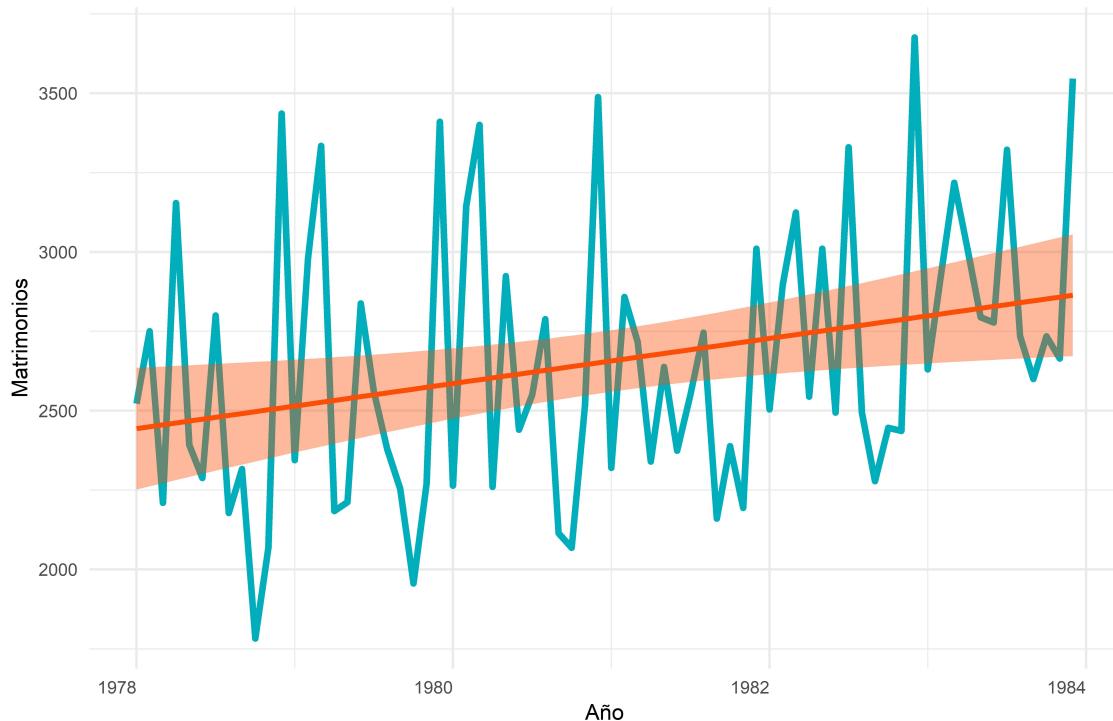
2.1.1 La tendencia-ciclo

A partir del texto de [Calderón \(2012\)](#), la tendencia general de una serie cronológica se refiere al crecimiento, decrecimiento o lateralización de sus movimientos a lo largo del periodo de estudio. La descomposición clásica de la tendencia-ciclo de este componente se mantiene constante de un periodo al siguiente y se obtiene a partir de una media móvil de m periodos (\bar{y}_m). De esta manera la forma matemática de la tendencia-ciclo para una serie cronológica se muestra en la ecuación 3.

$$T(t) = \begin{cases} 2\bar{y}_m, & \text{si } m \text{ es par} \\ \bar{y}_m, & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases} \quad (3)$$

Un ejemplo es la serie cronológica del número de matrimonios en Costa Rica para el periodo 1978-1983, que con el tiempo su crecimiento suele comportarse de una forma creciente tal y como muestra la figura 3.

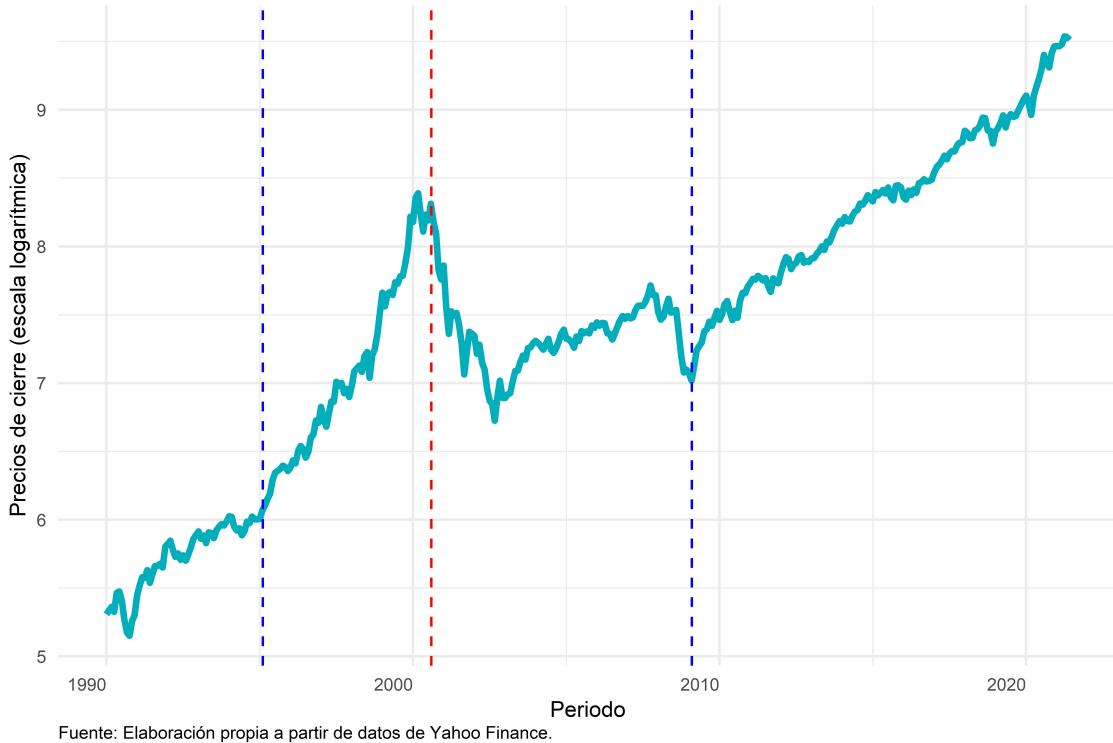
Figura 3: Tendencia del número de matrimonios en Costa Rica para el periodo 1978-1983



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de la Unidad de Estadísticas Demográficas - INEC Costa Rica.

Del informe elaborado también por [Calderón \(2012\)](#) se desprende que los periodos cíclicos, por su parte, se refieren a los cambios que se dan en una serie cronológica en el mediano-largo plazo, que son causados por determinados eventos que suelen repetirse. Estos ciclos suelen tener una duración determinada, como es el caso de los índice bursátil NASDAQ-100. Este indicador resume el estado los 100 valores de las compañías más importantes del sector de la industria de la tecnología, y sus ciclos suelen presentar un auge, seguido por un descenso que, posteriormente, se vuelve una depresión, y que finalmente se convierte en una recuperación a su estado inicial. La figura [4](#) muestra como el índice NASDAQ-100 inicia un auge alrededor de enero de 1995 (primera línea azul punteada), para luego experimentar una fuerte caída a partir de junio del año 2000 (línea roja punteada) y posteriormente iniciar un periodo de recuperación en enero del año 2009 (segunda línea azul punteada).

Figura 4: Índice bursatil NASDAQ-100 para el periodo enero 1990 - junio 2021



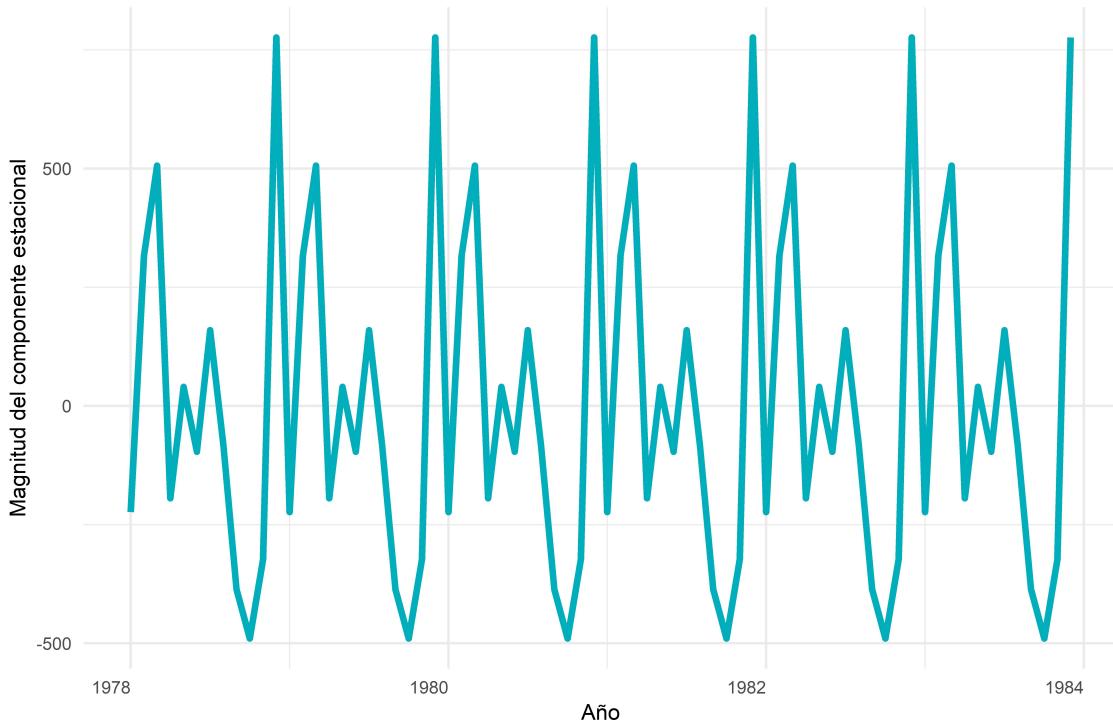
2.1.2 Componentes estacionales

Calderón (2012) también se refiere a los cambios estacionales que se presentan en una serie de tiempo, los cuales se relacionan con las fluctuaciones naturales del fenómeno dentro de una temporada de observaciones. Visualmente los efectos estacionales puede apreciarse en la figura 2, en donde los picos más altos de turistas siempre se ubican entre los meses de diciembre y enero. Matemáticamente, el componente estacional puede definirse como se indica en la ecuación 4:

$$S(t) = \bar{y}_{st} - \bar{y}_k; \quad \begin{cases} \bar{y}_{st} = \frac{\sum \bar{y}_s}{n} \\ \bar{y}_k = \frac{\sum y_k}{n-m} \\ \bar{y}_s = \sum_{j=1}^s y_{kj} \\ y_k = y_t - \bar{y}_{mc_t} \\ \bar{y}_{mc_t} = \frac{\bar{y}_{m_t} + \bar{y}_{m_{t-1}}}{2} \\ \bar{y}_{m_t} = \frac{\sum_{t=1}^m y_t}{m} \end{cases} \quad (4)$$

donde m representa la cantidad de periodos y s la frecuencia estacional. Gráficamente, el componente estacional se muestra en la figura 5.

Figura 5: Componente aleatorio de la serie de matrimonios en Costa Rica para el periodo 1978-1983

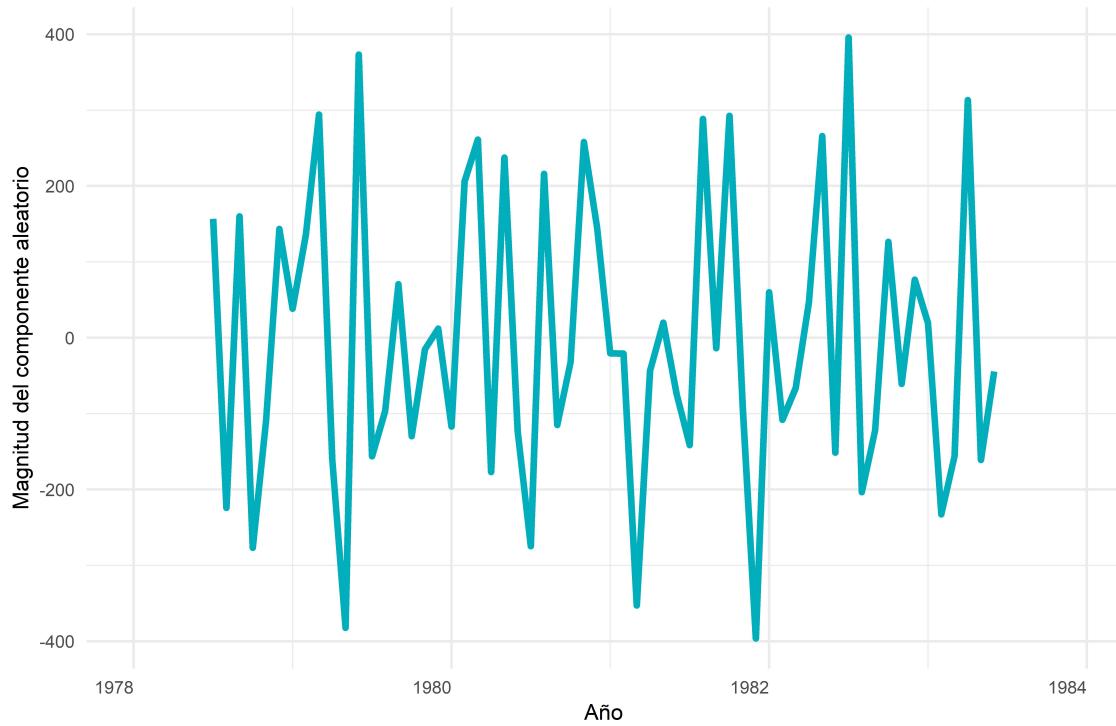


2.1.3 Componente irregular

Finalmente, la irregularidad de una serie cronológica, siguiendo a Calderón (2012), se refiere a las fluctuaciones propias de un fenómeno que no pueden ser predichas. Estos cambios no se dan de manera regular, es decir, no siguen un patrón determinado. Matemáticamente su descomposición se obtiene a partir de los otros componentes así como de la propia serie cronológica $y(t)$, tal y como se muestra en la ecuación 5. Visualmente, la magnitud del componente aleatorio se muestra en la figura 6

$$I(t) = \begin{cases} y(t) - T(t) - S(t), & \text{si la serie es aditiva} \\ \frac{y(t)}{T(t)S(t)}, & \text{si la serie es multiplicativa} \end{cases} \quad (5)$$

Figura 6: Componente aleatorio de la serie de matrimonios en Costa Rica para el periodo 1978-1983



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de la Unidad de Estadísticas Demográficas - INEC Costa Rica.

2.2 Supuestos en el análisis de series cronológicas

El análisis de series temporales, según [Hipel & McLeod \(1994\)](#), representa un método para comprender la naturaleza de la serie en cuestión y poder utilizarla para generar pronósticos. Es en este sentido que entran en escena las observaciones recolectadas de la serie, pues ellas son analizadas y sujetas a modelados matemáticos que logren capturar el proceso que gobierna a toda la serie cronológica ([Zhang, 2003](#)).

En un proceso determinístico, es posible predecir con certeza lo que ocurrirá en el futuro; las series cronológicas, sin embargo, carecen de esta condición. El análisis de series cronológicas asume que las observaciones pueden ajustarse a un determinado modelo estadístico, esto se conoce como un proceso estocástico. Es de esta manera que [Hipel & McLeod \(1994\)](#) sugieren que una serie cronológica puede considerarse como una muestra aleatoria de una serie mucho más grande. Este componente no determinístico es lo que define a un procesos estocástico (aleatorio) como un conjunto de variables aleatorias ordenadas en el tiempo ([Elmabrouk, s. f.](#)). De acuerdo con [Ramírez \(2007\)](#), una forma de definir un proceso estocástico Y_t es mediante los momentos poblacionales de primer y segundo orden tal y como se define en la ecuación 6.

$$Y_t : \begin{cases} E(Y_t) = \mu_t, \forall t \\ V(Y_t) = \sigma_t^2, \forall t \\ COV(T_t, Y_s) = E[(Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_s)], \forall t, s \end{cases} \quad (6)$$

Lo anterior implica que la media, la varianza y la covarianza dependen del tiempo. De esto se desprende además que existen dos tipos de procesos estocásticos: estacionarios y no estacionarios. De acuerdo con [Agrawal & Adhikari \(2013\)](#), una serie se considera estacionaria cuando su nivel medio y su variancia son aproximadamente las mismas durante todo el periodo, es decir, el tiempo no afecta a estos estadísticos de variabilidad. Este supuesto busca simplificar la identificación del proceso estocástico con el objetivo de obtener un modelo adecuado para generar los pronósticos. De acuerdo con ([Elmabrouk, s. f.](#)), se dice que una serie cronológica Y_t es fuertemente estacionaria si satisface las siguientes tres condiciones:

- 1.** La media de Y_t se mantiene constante e el tiempo.
- 2.** La variabilidad de Y_t se mantiene constante en el tiempo y además es finita.
- 3.** La covarianza entre Y_t y Y_{t-k} únicamente depende de la distancia entre t y $t - k$.

Un proceso estocástico es débilmente estacionario si alguna de las tres condiciones previas no se cumple, en particular la última. Si una serie cronológica posee tendencias o patrones estacionales hace que esta sea no estacionaria. En la práctica, una serie puede volverse estacionaria al aplicarle transformaciones o diferenciaciones de distinto orden.

Como una serie de tiempo puede considerarse como un proceso estocástico, éstas se encuentran sujetas a múltiples supuestos. El más fundamental de ellos es que todas las observaciones son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.), que según [Evans & Rosenthal \(2005\)](#), un conjunto de variables aleatorias Y_1, \dots, Y_n son independientes e idénticamente distribuidas si el conjunto es independiente y además cada una de las n variables sigue la misma distribución, que usualmente se define como una distribución aproximadamente Normal, con una media y variancia dadas. Este supuesto puede dividirse según el tipo de variable aleatoria:

- 1.:** Si el conjunto de variables Y_1, \dots, Y_n pertenecen a una distribución discreta, cada función de probabilidad es idéntica, de manera que $p_{y_1}(y) = p_{y_2}(y) = \dots = p_{y_n}(y) \equiv p(y)$, y además $p_{y_1, \dots, y_n}(y_1, \dots, y_n) = p_{y_1}(y_1)p_{y_2}(y_2) \cdots p_{y_n}(y_n) = p(y_1)p(y_2) \cdots p(y_n)$.
- 2.:** Si el conjunto de variables Y_1, \dots, Y_n pertenecen a una distribución continua, cada función de probabilidad es idéntica, de manera que $f_{y_1}(y) = f_{y_2}(y) = \dots = f_{y_n}(y) \equiv f(y)$, y además $f_{y_1, \dots, y_n}(y_1, \dots, y_n) = f_{y_1}(y_1)f_{y_2}(y_2) \cdots f_{y_n}(y_n) = f(y_1)f(y_2) \cdots f(y_n)$.

Lo anterior es contrario al uso de las observaciones pasadas para pronosticar el futuro, por lo que

este supuesto, según [Cochrane \(1997\)](#), no es exacto pues una serie de tiempo no es exactamente, i.i.d., sino que siguen un patrón medianamente regular en el largo plazo.

El último supuesto, y quizá el que más debate genera, es el criterio de parsimonia. Como mencionan [Zhang \(2003\)](#) y [Hipel & McLeod \(1994\)](#), este principio sugiere que se prioricen modelos sencillos, con pocos parámetros, para representar una serie de datos. Mientras más grande y complicado sea el modelo, mayor será el riesgo de sobre ajuste, lo que implica que el ajuste sea muy bueno en el conjunto de datos con que se generó el modelo, pero que los pronósticos generados sean pobres ante nuevos conjuntos de datos. Este problema, sin embargo, se presenta al considerar un único modelo con muchos parámetros; pero si se consideran varios modelos y estos son sometidos a distintos criterios, puede obtenerse un modelo sobreparametrizado que ofrezca buenos pronósticos.

2.3 Identificación del modelo

Los métodos más clásicos para la identificación del proceso que gobierna a una serie cronológica son las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, las cuales sirven de indicador acerca de qué tan relacionadas están las observaciones unas de otras. Estas funciones ofrecen indicios sobre el orden de los términos para los modelos $AR(p)$, $MA(q)$ y para la diferenciación y, por ende, para la identificación de un modelo $ARIMA$ ([R. J. Hyndman & Athanasopoulos, 2018b](#)).

Para medir la relación lineal entre dos variables cuantitativas es común utilizar el coeficiente de correlación r de Pearson ([Benestry & Chen, 2009](#)), el cual se define para dos variables X e Y como se muestra en la ecuación 7.

$$r_{X,Y} = \frac{E(XY)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} \quad (7)$$

Este mismo concepto puede aplicarse a las series cronológicas para comparar el valor de la misma en el tiempo t , con su valor en el tiempo $t - 1$, es decir, se comparan las observaciones consecutivas Y_t con Y_{t-1} . Esto también es aplicable a no solo una observación rezagada (Y_{t-1}), sino también con múltiples rezagos (Y_{t-2} , (Y_{t-3}) , \dots , (Y_{t-n})). Para esto se hace uso del coeficiente de autocorrelación.

El coeficiente de autocorrelación (*ACF* por sus siglas en inglés) recibe su nombre debido a que se utiliza el coeficiente de correlación para pares de observaciones $r_{Y_t, Y_{t-1}}$ de la serie cronológica. Al conjunto de todas las autocorrelaciones se le llama función de autocorrelación.

La función de autocorrelación parcial⁵, busca medir la asociación lineal entre las observaciones Y_t y Y_{t-k} , es decir, la correlación entre dos observaciones distintas separadas por k períodos, descartando los efectos de los rezagos $1, 2, \dots, k-1$; esta correlación puede obtenerse a partir de

⁵ *PACF* por sus siglas en inglés

la ecuación 7, que al adaptarse a dos observaciones de la misma serie cronológica se obtiene el resultado de ecuación 8.

$$r_{Y_t, Y_{t-k}} = \frac{E(Y_t Y_{t-k})}{\sigma_{Y_t} \sigma_{Y_{t-k}}} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{ti} - \bar{Y}_t) (Y_{t-k,i} - \bar{Y}_{t-k})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_{ti} - \bar{Y}_t)^2 \sum_{i=1}^n (Y_{t-k,i} - \bar{Y}_{t-k})^2}} \quad (8)$$

De lo anterior se deduce entonces que unas k observaciones previas pueden utilizarse para obtener el valor de la serie cronológica en el momento t , como muestra la ecuación 9.

$$y_t = \phi_{k1}y_{t-1} + \phi_{k2}y_{t-2} + \cdots + \phi_{kk}y_{t-k} + u_t, k = 1, 2, \dots, K \quad (9)$$

Los valores de cada término ϕ_{kk} , asumiendo que pertenecen a un proceso estacionario, suelen estimarse mediante la ecuación de Yule-Walker ([Brockwell & Davis, 2009](#)), cuya forma más general se muestra en la ecuación 10.

$$\gamma_i = E[\phi_{k1}y_{t-1}y_{t-i} + \phi_{k2}y_{t-2}y_{t-i} + \cdots + \phi_{kn}y_{t-n}y_{t-i} + u_ty_{t-i}] = \phi_{k1}\gamma_{i-1} + \phi_{k2}\gamma_{i-2} + \cdots + \phi_{kn}\gamma_{n-i} \quad (10)$$

Al considerar la ecuación en términos de la función de autocorrelación se obtiene lo siguiente:

$$\rho_i = \phi_{k1}\rho_{i-1} + \phi_{k2}\rho_{i-2} + \cdots + \phi_{kn}\rho_{n-i} + \cdots \quad (11)$$

Alternando los distintos valores de k a partir de la ecuación 11, se obtiene el sistema de ecuaciones mostrado en 12.

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_{k1} + \phi_{k2}\rho_1 + \cdots + \phi_{kn}\rho_{n-1} + \cdots \\ \rho_2 &= \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2} + \cdots + \phi_{kn}\rho_{n-2} + \cdots \\ \rho_3 &= \phi_{k1}\rho_2 + \phi_{k2}\rho_1 + \cdots + \phi_{kn}\rho_{n-3} + \cdots \\ &\vdots \\ \rho_k &= \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \cdots + \phi_{kn}\rho_{n-k} + \cdots \end{aligned} \quad (12)$$

Como resultado del sistema de ecuaciones mostrado en 12, es posible hacer un replanteamiento en forma de un sistema matricial del cuál las autocorelaciones parciales pueden obtenerse a partir del despeje del vector Φ en 13.

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Cuando se tiene el modelo ARIMA debidamente identificado, es importante realizar los pronósticos. Sin embargo, estos pronósticos no son imperativos, sino que se debe evaluar su calidad con las llamadas medidas de rendimiento. Estas mediciones son hechas comparando el pronóstico y su diferencia con el valor real. Existen múltiples medidas de rendimiento, [Adhikari, K, & Agrawal \(2013\)](#) menciona entre ellas el *MAE*, *MAPE*, *RMSE*, *MASE*, *AIC*, *AICc* y el *BIC*.

2.4 Modelos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles

Hay dos grandes grupos de modelos lineales de series cronológicas: Los modelos Autorregresivos (AR) ([Lee, s. f.](#)) y los modelos de Medias Móviles (MA) ([Box et al., 1994](#)). La combinación de estos dos grandes grupos forman los Modelos Autorregresivos de Medias Móviles (ARMA) ([Hipel & McLeod, 1994](#)) y los modelos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles (ARIMA), siendo este último de particular interés en esta investigación.

Los modelos ARIMA son los de uso más extendido en el análisis de series cronológicas. Se fundamentan en las autocorrelaciones pasadas, y contempla un proceso iterativo para identificar un posible proceso óptimo a partir de una clase general de modelos. El teorema de Wold ([Surhone, Timpledon, & Marseken, 2010](#)) sugiere que todo proceso estacionario puede ser determinado de una forma específica y cuya ecuación posee, en realidad, infinitos coeficientes, pero que debe ser reducido a una cantidad finita para luego evaluar su ajuste sometiéndolo a diferentes pruebas y medidas de rendimiento.

2.4.1 Ecuación de Wold

Según [Sargent \(1979\)](#), cualquier proceso estacionario puede ser representado mediante la ecuación 14:

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \kappa_t \quad (14)$$

donde $\forall \psi_j \in \mathbb{R}, \psi_0 = 1, \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, y ε_t representa un ruido blanco i.i.d., es decir, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$; además, κ_t es el componente lineal determinístico de forma tal que $cov(\kappa_t, \varepsilon_{t-j}) = 0$, lo cual implica que este componente determinístico es independiente de la suma infinita de los choques pasados.

De lo anterior, si se omite la parte determinística κ_t de 14, el remanente es la suma ponderada

infinita, lo cual implica que si se conocen los ponderadores ψ_j , y si además se conoce σ_ε^2 , es posible obtener una representación para cualquier proceso estacionario; este concepto es conocido como *media móvil infinita*.

Sabiendo que $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, se tiene que ε_t tiene media 0, es decir, está centrado en este valor. De esta manera el ruido blanco es por definición un proceso centrado, lo cual implica que la suma ponderada infinita está centrada en sí misma. De esta manera, la representación de Wold de un proceso x_t supone que se suman los choques pasados más un componente determinístico que no es otro que el valor esperado del proceso: $\kappa_t = m$, donde m es una constante cualquiera. Así, la ecuación 14 puede sustuirse por:

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + m \quad (15)$$

y de 15 puede verificarse que,

$$E(x_t) = E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + m\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j E(\varepsilon_{t-j}) + m = m \quad (16)$$

La principal consecuencia del teorema de Wold es que, si se conocen los ponderadores ψ_j , y además σ_ε^2 es ruido blanco es posible conocer el proceso por medio del cual se rige la serie cronológica. Esto permite realizar cualquier previsión, denotada por \hat{X}_{T+h} para el proceso de interés x_T en el momento $T + h$ para una muestra cualquiera de T observaciones de x_t . De acuerdo con Sargent (1979), basado en el teorema de Wold, la mejor previsión posible para un proceso x_t para el momento $T + h$, denotado por \hat{x}_{T+h} , la predicción está dada por:

$$\hat{x}_{T+h} = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{T-j+1} \quad (17)$$

De la ecuación 17 se desprende que el error de previsión asociado está dado por:

$$x_{T+h} - \hat{x}_{T+h} = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{T-h+1} \quad (18)$$

De esta manera, la ecuación de Wold se convierte en una representación base para representar a una serie cronológica que está gobernada por un determinado proceso, y que al no ser conocido, resulta necesario contar con una herramienta para su aproximación.

2.4.2 Metodología Box-Jenkins

La combinación de un $AR(p)$ y un $MA(q)$, descritos en las ecuaciones 20 y 21 respectivamente, como se mencionó al inicio de esta sección, generan los modelos autorregresivos de medias móviles, $ARMA(p, q)$, representados mediante la ecuación 19.

$$y_t = c + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \varphi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad (19)$$

Cochrane (1997) menciona que los modelos $ARMA(p, q)$ suelen manipularse mediante lo que se conoce como operador de rezagos, denotado como $L y_t = y_{t-1}$. Esto significa que en un $AR(p)$ se tiene que $\varepsilon_t = \varphi(L)y_t$, mientras que en $MA(q)$ se tiene que $y_t = \theta(L)\varepsilon_t$, y por consiguiente en un $ARMA(p, q)$ se tiene $\varphi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t$. Por lo tanto, de lo anterior se desprende que $\varphi(L) = 1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i L^i$, y que $\theta(L) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j L^j$.

Los modelos $ARMA$, sin embargo, solamente pueden ser utilizados en series cronológicas cuyo proceso es estacionario. Esto, en la práctica, es poco común, pues una serie de tiempo a menudo posee tendencias y ciertos patrones estacionales y, además, como menciona Hamzaçebi (2008), presentan procesos no estacionarios por naturaleza. Esta condición hace necesaria la introducción de una generalización de los modelos $ARMA$, la cual se conoce como los modelos $ARIMA$ (Box et al., 1994).

2.4.3 Modelos Autorregresivos

Un modelo autorregresivo de orden p , denotado como $AR(p)$, considera los valores futuros de una serie cronológica como una combinación lineal las p observaciones predecesoras, un componente aleatorio y un término constante. Hipel & McLeod (1994) y Lee (s. f.) emplean la notación de la ecuación 20.

$$y_t = c + \sum_{i=1}^p \varphi_i y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (20)$$

Donde y_t y ε_t corresponden al valor de la serie y al componente aleatorio en el momento actual t , mientras que φ_i , con $i = 1, 2, \dots, p$ son los parámetros del modelo, y c es su término constante, que en ciertas ocasiones se suele omitir para simplificar la notación.

2.4.4 Modelos de Medias Móviles

De manera similar a como un $AR(p)$ utiliza los valores pasados para pronosticar los futuros, los modelos de medias móviles de orden q , denotados como $MA(q)$, utilizan los errores pasados de las variables independientes. Estos modelos se describen mediante la ecuación 21.

$$y_t = \mu + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad (21)$$

Donde μ representa el valor medio de la serie cronológica y cada valor de $\theta_j (j = 1, 2, \dots, q)$ son los parámetros del modelo. Como los $MA(q)$ utilizan los errores pasados de la serie cronológica, se asume que estos son i.i.d. centrados en cero y con una variancia constante, siguiendo una distribución aproximadamente Normal, con lo cual este tipo de modelos pueden considerarse como una regresión lineal entre una observación determinada y los términos de error que le preceden ([Agrawal & Adhikari, 2013](#)).

2.4.5 Modelos ARIMA

Partiendo de una serie con un proceso no estacionario, es posible aplicar transformaciones o diferenciaciones (d) a los datos con el objetivo de convertirlos en un proceso estacionario. Utilizar la notación de rezagos descrita anteriormente, según [Flaherty & Lombardo \(2000\)](#), permite plantear un modelo $ARIMA(p, d, q)$ como se describe en la ecuación 22.

$$\varphi(L)(1 - L)^d y_t = \theta(L) \varepsilon_t \left(1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i L^i \right) (1 - L)^d y_t = \left(1 + \sum_{j=1}^q \theta_j L^j \right) \varepsilon_t \quad (22)$$

Donde los términos p, d y q son positivos y mayores a cero y corresponden al modelo autorregresivo, a la diferenciación y al modelo de medias móviles, respectivamente. El componente d es el número de diferenciaciones, si $d = 0$ se tiene un modelo ARMA, y $d \geq 1$ representa el número de diferenciaciones; en la mayoría de casos $d = 1$ suele ser suficiente. Así, un $ARIMA(p, 0, 0) = AR(p)$, $ARIMA(0, 0, q) = MA(q)$, y un $ARIMA(0, 1, 0) = y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$, es decir, un modelo de caminata aleatoria.

Como sugieren [Box et al. \(1994\)](#), lo anterior puede generalizarse aún más al considerar los efectos estacionales de la serie cronológica. Si se considera una serie cronológica con observaciones mensuales, una diferenciación de primer orden es igual a la diferencia entre una observación y la observación correspondiente al mismo mes pero del año anterior; es decir, si el periodo estacional es de $s = 12$ meses, entonces esta diferencia estacional aplicada a un $ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$ es calculada mediante $z_t = y_t - y_{t-s}$.

De esta manera, el método de [Box et al. \(1994\)](#) inicia con el análisis exploratorio de la serie cronológica, teniendo un interés particular en identificar si hay presencia de factores no estacionarios en la misma. Si en efecto se cuenta con una serie no estacionaria, ésta debe volverse estacionaria mediante algún tipo de transformación, típicamente el logaritmo natural. Con la serie ya transformada, se busca identificar el proceso que gobierna la serie. La forma clásica de hacer esto es mediante los gráficos de autocorrelación y autocorrelación parcial. Cuando se logra identificar un

proceso que se adecue más a la serie cronológica, se deben realizar los diagnósticos para evaluar la calidad del ajuste del modelo, así como las medidas de rendimiento referentes a los pronósticos que genera el modelo estimado hasta un horizonte determinado.

2.5 Los autocorrelogramas

El uso del *ACF* y el *PACF* se suele aplicar de manera visual. Sin embargo, hacer usos de estos elementos implica considerar múltiples condiciones. En el caso de la identificación del orden de la diferenciación:

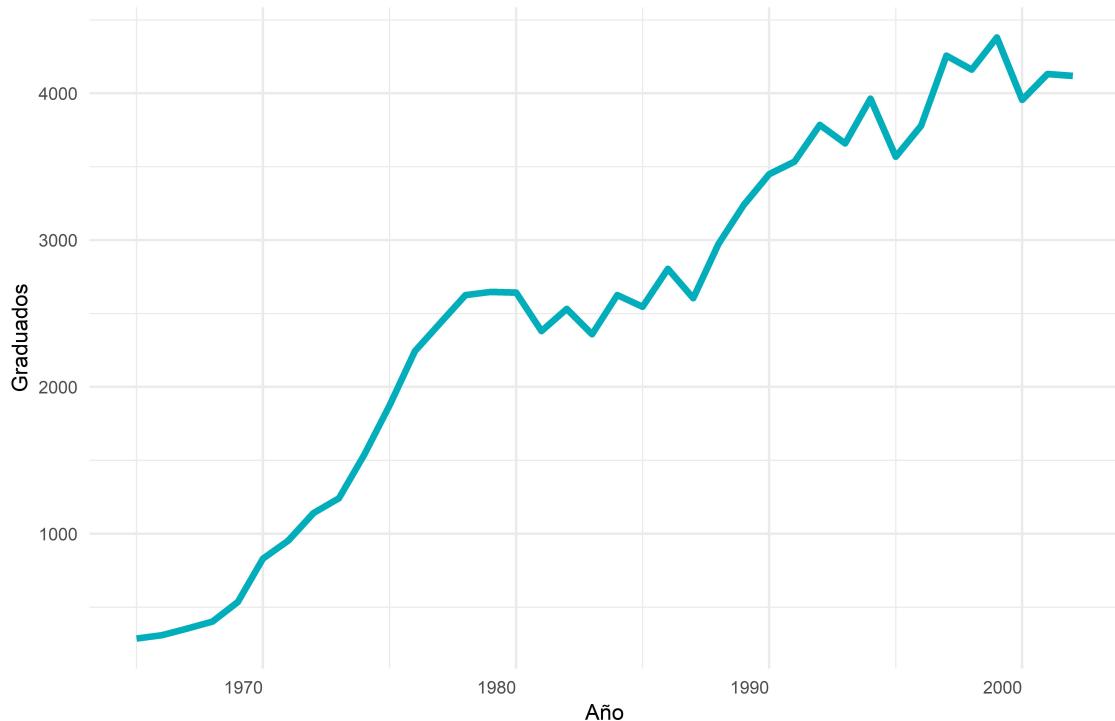
- Si la serie posee autocorrelaciones positivas en un amplio número de rezagos, entonces es posible que se requiera un orden más alto en el valor de d .
- Si la autocorrelación en $t - 1$ es menor o igual a cero, o si las autocorrelaciones resultan ser muy bajas y sin seguir algún patrón en particular, entonces no se requiere un alto orden para la diferenciación.
- Una desviación estándar baja suele ser indicador de un orden adecuado de integración.
- Si no se utiliza ninguna diferenciación, se asume que la serie cronológica es estacionaria. Aplicar una diferenciación asume que la serie cronológica posee una media constante, mientras que dos diferenciaciones sugiere que la tendencia varía en el tiempo.

Para la identificación de los términos p y q :

- Si la *PACF* de la serie cronológica diferenciada muestra una diferencia marcada y si, además, la autocorrelación en $t - 1$ es positiva, entonces debe considerarse aumentar el valor de p .
- Si la *PACF* de la serie cronológica diferenciada muestra una diferencia marcada y si, además, y la autocorrelación en $t - 1$ es negativa, entonces debe considerarse aumentar el valor de q .
- Los términos p y q pueden cancelar sus efectos entre sí, por lo que si se cuenta con un modelo *ARMA* más mixto que parece adaptarse bien a los datos, puede deberse también a que p o q deben ser menores.
- Si la suma de los coeficientes del modelo *AR* es muy cercana a la unidad, es necesario reducir la cantidad de términos en uno y aumentar el orden de la diferenciación en uno.
- Si la suma de los coeficientes del modelo *MA* es muy cercana a la unidad, es necesario reducir la cantidad de términos en uno y disminuir el orden de la diferenciación en uno.

Para ejemplificar el uso de los autocorrelogramas en la identificación de modelos, se presenta en la figura 7 la serie cronológica expuesta por Hernández (2011) de graduados de la Universidad de Costa Rica (UCR) para el periodo 1965-2002.

Figura 7: Número anual de graduados de la Universidad de Costa Rica para el periodo 1965-2002



Fuente: Introducción a las Series Cronológicas, Óscar Hernández.

Tal y como menciona el autor, la serie cronológica posee una clara tendencia creciente a lo largo del tiempo, lo cual sugiere que no se trata de una serie estacionaria. Esto se confirma al analizar las funciones de autocorrelación simple y parcial de la serie cronológica en las figuras 8 y 9; pues la función de autocorrelación no cae rápidamente a cero, sino que posee un descenso más pausado.

Figura 8: Función de autocorrelación simple de la serie de graduados de la UCR

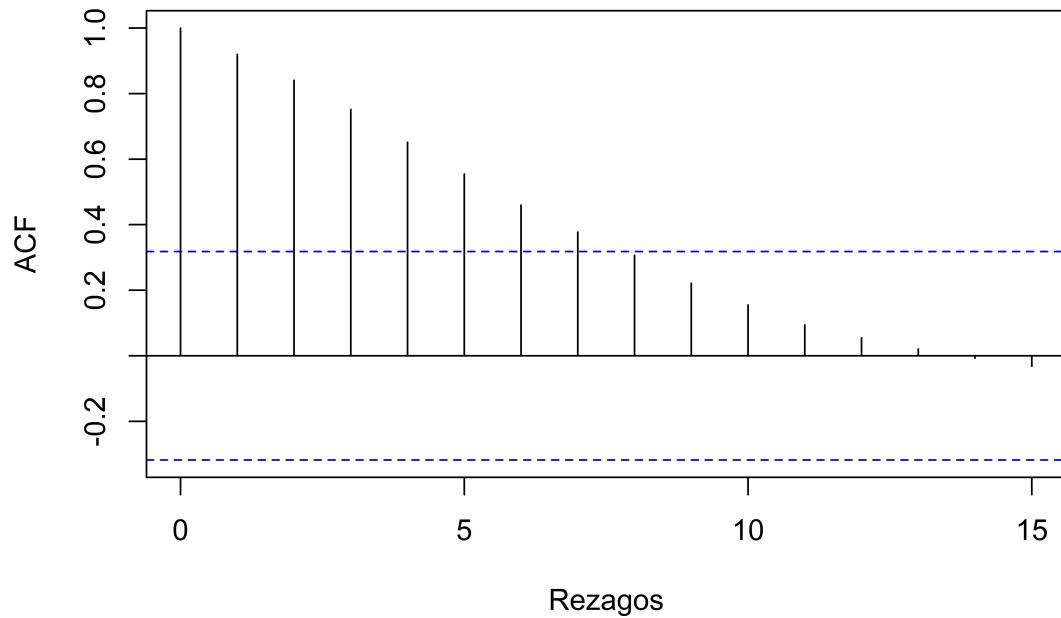
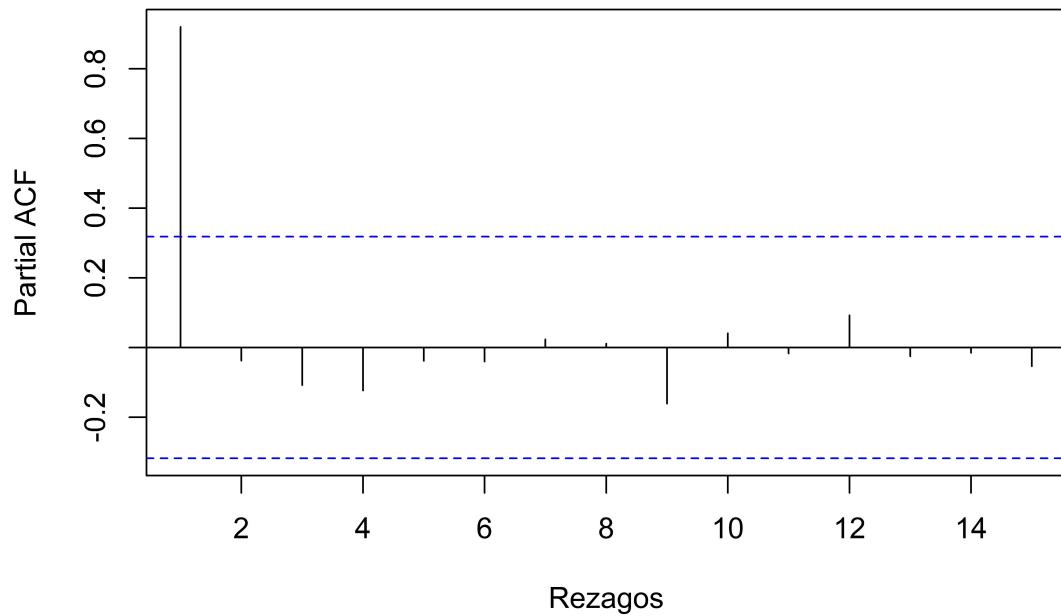


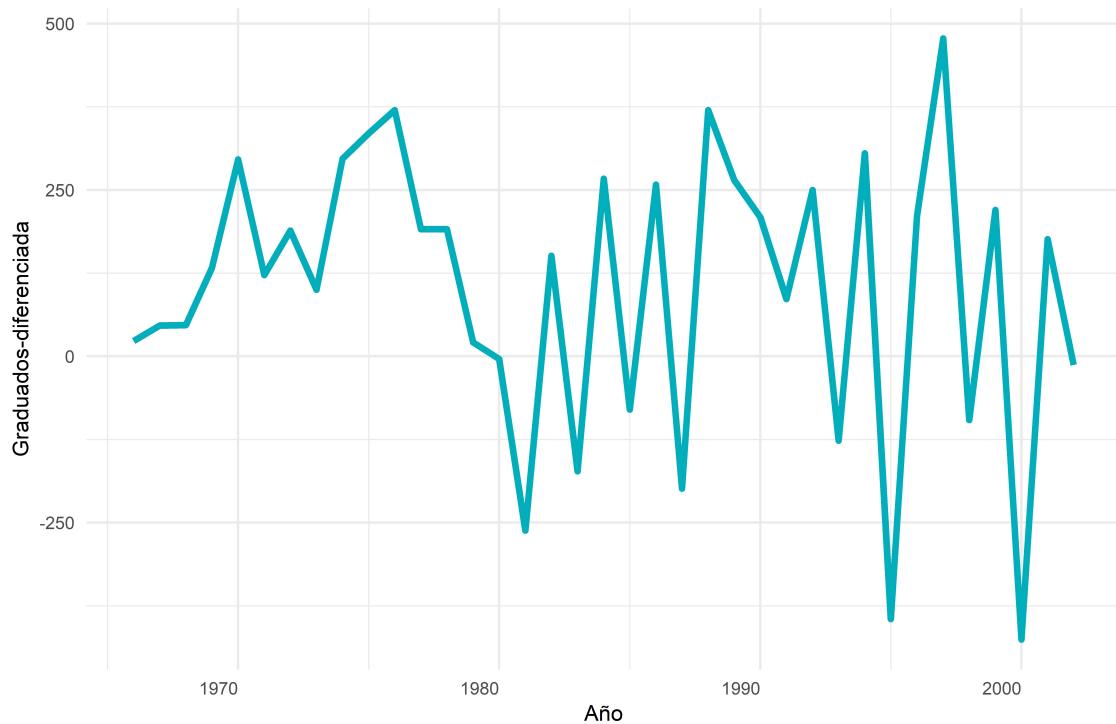
Figura 9: Función de autocorrelación parcial de la serie de graduados de la UCR



Dado que la serie mostrada no es estacionaria, es posible aplicar una diferenciación para hacerla cumplir esta condición, tal y como se muestra en la figura 10. Al analizar la figura 11 se observa

cómo la función de autocorrelación cae rápidamente a cero, lo cual confirma que se posee una serie estacionaria. Posteriormente, para intentar identificar el proceso que gobierna la serie cronológica, puede verse que hay dos barras en la figura 12 y que además la función de autocorrelación de la figura 11 cae rápidamente hacia cero, lo cual sugiere que se está en presencia de un modelo autorregresivo de orden 2.

Figura 10: Serie diferenciada de graduados de la Universidad de Costa Rica para el periodo 1965-2002



Fuente: Introducción a las Series Cronológicas, Óscar Hernández.

Figura 11: Función de autocorrelación simple de la serie diferenciada de graduados de la UCR

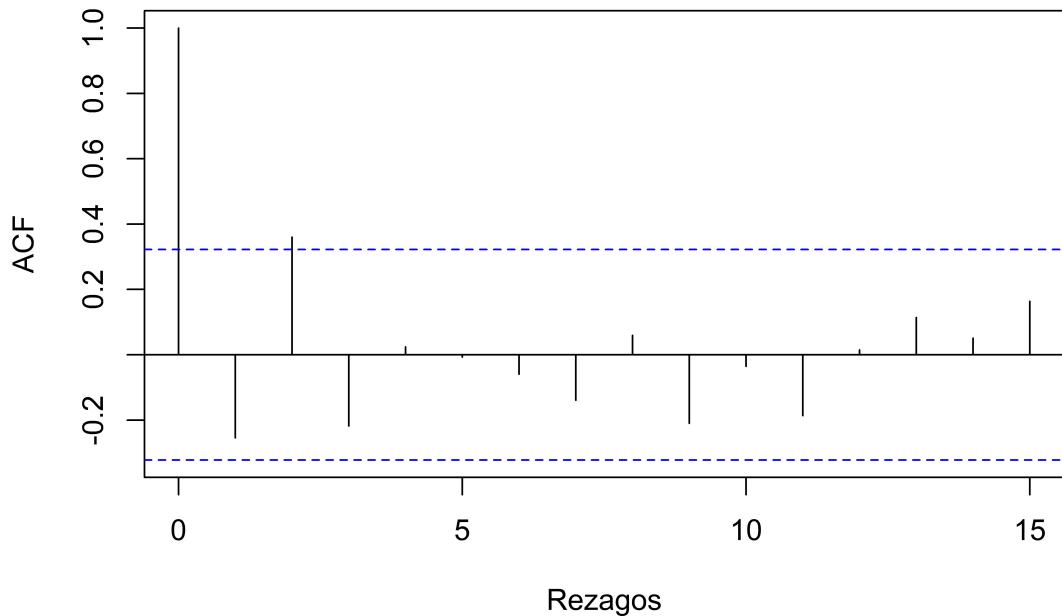
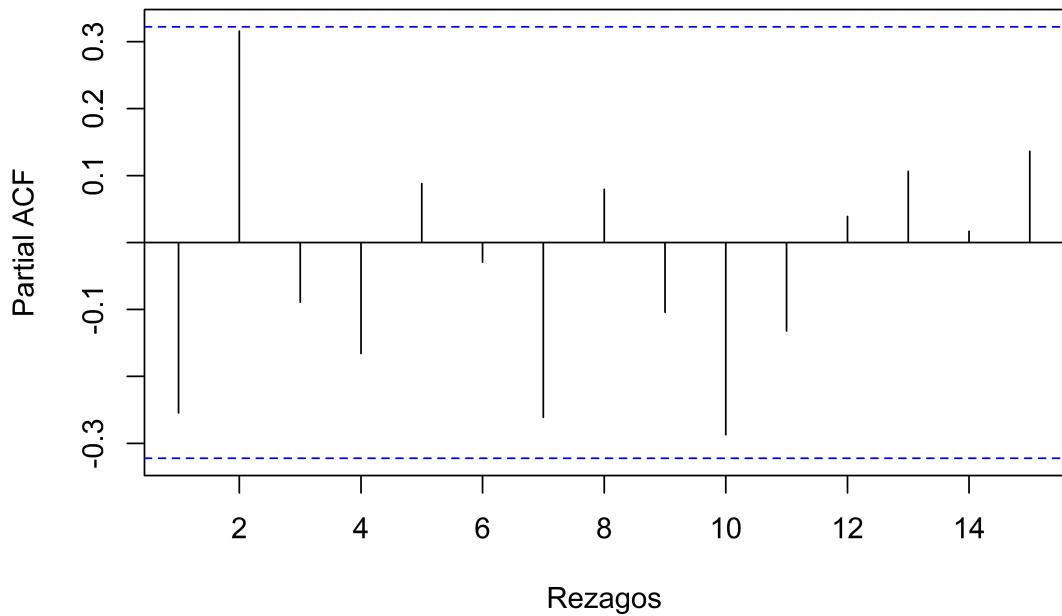


Figura 12: Función de autocorrelación parcial de la serie diferenciada de graduados de la UCR



Tener en consideración estos y otros posibles criterios para la identificación del proceso que gobierna la serie cronológica puede fácilmente volverse subjetivo, pues dos personas diferentes pueden llegar a

dar distintas interpretaciones a las visualizaciones de los autocorrelogramas. Estas interpretaciones pueden sesgar la identificación de los modelos y, además, no considerar otros escenarios para los términos de un modelo *ARIMA*; para solventar esto es necesario considerar un abanico más amplio de opciones que a su vez elimine el criterio subjetivo del observador, lo cual se puede lograr al considerar múltiples permutaciones de términos para contrastar una gran cantidad de modelos, es decir, utilizar la sobreparametrización.

2.6 La sobreparametrización y el análisis combinatorio

La identificación visual mediante los autocorrelogramas puede llevar a decisiones erradas acerca del proceso que gobierna la serie cronológica. Una alternativa es considerar estimaciones procesos de ordenes bajos, como un *ARMA*(1,1) y poco a poco ir incorporando términos, este proceso de revisión permite encontrar los puntos en que agregar un coeficiente más al modelo no aporta ninguna mejora en los resultados del pronóstico, y así considerar únicamente aquellos modelos que tengan coeficientes con un aporte estadísticamente significativo. Este procedimiento es conocido como sobreparametrización. Dependiendo de la cantidad de observaciones y del rango con que se trabajen los coeficientes, la comparación de los modelos puede volverse muy extensa y complicada, razón por la cual resulta imperativo generar un procedimiento sistemático que logre seleccionar el mejor modelo con base en sus medidas de ajuste y rendimiento.

Es aquí donde entra en escena el análisis combinatorio, pues a partir de sus procedimientos es posible conocer la cantidad de modelos que deben ser probados. Resulta pertinente discutir dos principios fundamentales del análisis combinatorio mencionados por [Hernández \(2008\)](#): Uno es el principio de adición, el cual indica que si se tienen dos procedimientos *A* y *B*, los cuales pueden realizarse de k_A y k_B maneras, respectivamente, entonces la cantidad de maneras que se puede realizar uno u otro procedimiento es $k_A + k_B$. Por otro lado se tiene el principio de multiplicación, con el cual, si si el procedimiento *A* se puede realizar de k_A formas distintas, seguido de otro procedimiento *B* que puede realizarse de k_B formas, entonces si a cada forma de realizar el procedimiento *A* se puede asociar a cualquiera de las k_B maneras de realizar el procedimiento *B*, entonces ambos procedimientos pueden realizarse de $k_A \cdot k_B$ formas distintas.

Es a partir de estos dos principios que pueden obtenerse la cantidad de formas distintas que pueden ordenarse m elementos tomando r elementos a la vez. Uno de ellos son las permutaciones, descritos en la ecuación 23, la cual describe la forma de calcular la cantidad de formas distintas que puede ordenarse m elementos tomando r a la vez, donde el orden sí importa, a modo de ejemplo, si se quiere saber la cantidad formas que pueden ordenarse las letras *A*, *B* y *C* tomando dos letras a la vez, se tendría que existen $\frac{3!}{(3-1)!} = 6$ formas distintas, que son *AB*, *AC*, *BC*, *BA*, *CA* y *CB*. De manera similar, se tienen las combinaciones, cuya fórmula se describe en la ecuación 24, que brinda la cantidad de maneras distintas en que pueden ordenarse m elementos tomando r a la vez donde

el orden no importa; es decir, si se desean ordenar las letras A, B y C tomando dos a la vez, se tendrían $\frac{3!}{2!(3-1)!} = 3$ formas distintas, las cuales son AB, AC y BC .

$${}_mP_r = \frac{m!}{(m-r)!} \quad (23)$$

$${}_mC_r = \frac{m!}{r!(m-r)!} \quad (24)$$

Es a partir de esto que la sobreparametrización se utiliza en conjunto con el análisis combinatorio y en particular con el método de permutaciones, pues el orden de la cantidad de coeficientes a estimar en un modelo $ARIMA(p, d, q)$ sí importa, debido a que no es lo mismo estimar un modelo $ARIMA(2, 1, 3)$ que un modelo $ARIMA(3, 1, 2)$. En las elección de modelos ARIMA normalmente los métodos tradicionales como los correlogramas u otros, no suelen abarcar un espectro más amplio de coeficientes, y esto podría representar un método de estimación que no es el mejor, por esto, la presente tesis propone una metodología que mezcla la sobreparametrización con las permutaciones con el objetivo de lograr estimar el mejor modelo $ARIMA$ de una amplia cantidad de posibles candidatos para conseguir pronósticos más precisos en comparación a los métodos tradicionales.

3 METODOLOGÍA

La aplicación de las series cronológicas tiene tres objetivos: 1) el análisis exploratorio de la serie en cuestión, 2) estimar modelos de proyección, y 3) generar pronósticos para los posibles valores futuros que tomará la serie cronológica.

Esta sección aborda la metodología propuesta como método de estimación y pronóstico de series cronológicas. En la búsqueda de un modelo adecuado de entre varios candidatos, se cubren en un primer apartado los materiales a utilizar, así como los métodos, incluyendo el proceso de estimación, el procedimiento de simulación empleado para la verificación del método propuesto, y las medidas de bondad de ajuste y de precisión a utilizar. Se describe en detalle el uso de la sobreparametrización como herramienta para la generación de pronósticos de series cronológicas con temporalidades mensuales, bimensuales, trimestrales, cuatrimestrales o anuales mediante un proceso de selección fundamentada en las permutaciones de todos los parámetros de un modelo ARIMA hasta un rango determinado. Las medidas de precisión y de bondad de ajuste sirven de insumo para utilizar un método de consenso entre ellas y seleccionar el modelo más adecuado mediante la sobreparametrización: se comparan todos los posibles modelos en un intervalo específico de términos definiendo una diferenciación adecuada para la serie y permutando hasta un máximo definido para los términos autorregresivos y de medias móviles especificados para así seleccionar la especificación que ofrezca mejores resultados al momento de pronosticar valores futuros de la serie cronológica.

3.1 Materiales

Se describen a continuación las series cronológicas reales que servirán de insumo para poner a prueba el método propuesto.

3.1.1 Tasa de mortalidad infantil interanual

La Tasa de Mortalidad Infantil (TMI) es uno de los indicadores demográficos más importantes, pues es utilizado como un parámetro de referencia sobre la calidad del sistema de salud, tanto a nivel nacional como regional. Si bien este indicador se construye relacionando las defunciones de menores de un año con el total de nacimientos, también involucra de manera implícita otras condiciones tales como las económicas, sociales y culturales, así como la efectividad en los métodos preventivos y curativos de esta categoría poblacional ([León, 1998](#)). Debido a esto, el fallecimiento de un niño menor de un año se traduce en una falla del sistema de salud, por lo que estos casos son sujetos de estudio con el fin de conocer las causas que desencadenaron el evento.

En algunos países en vías de desarrollo de Asia, África y América Latina, la mortalidad infantil alcanza valores elevados pues la desnutrición, ausencia de asistencia médica y mala calidad de las

condiciones sanitarias son, a diferencia de los países más desarrollados, algo muy común ([Donoso, 2004](#)). En el caso de Costa Rica, la unidad de estadísticas demográficas del Instituto Nacional de Estadística y Censos⁶ (INEC) es el ente encargado de reportar este indicador con el fin de dar seguimiento y control al comportamiento del mismo a lo largo del tiempo con el objetivo de llegar a los niveles más bajos posibles.

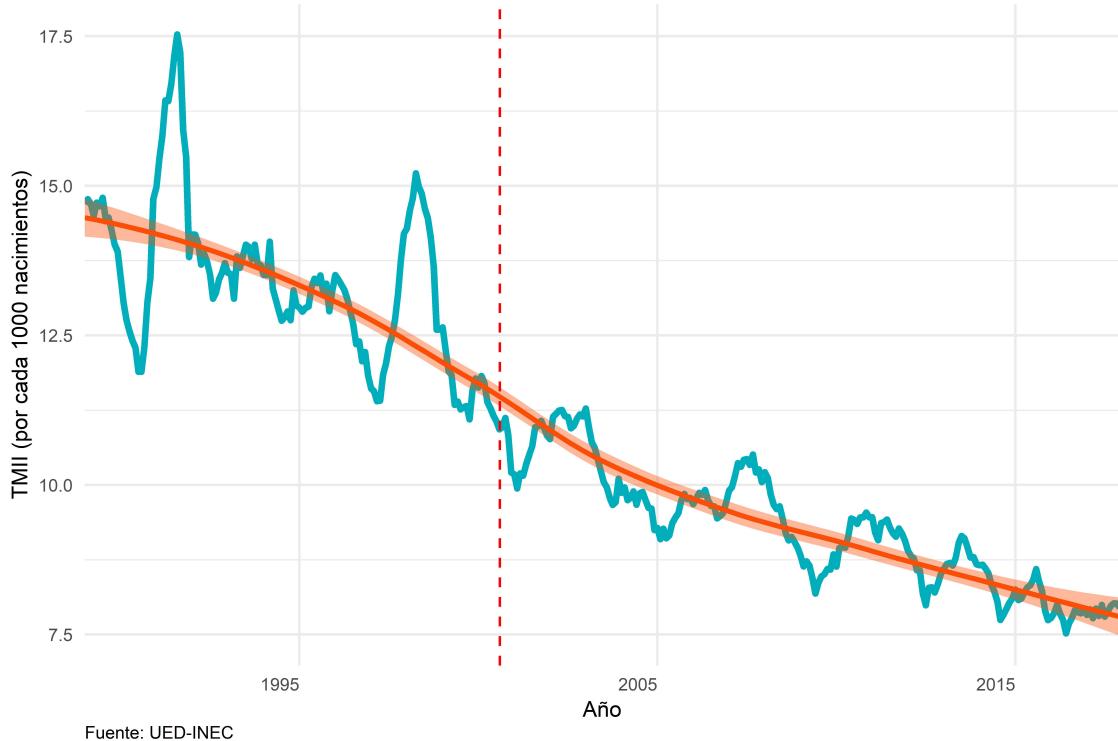
En el INEC, cada mes se publica el boletín de la TMII interanual (TMII), que analiza la TMII de un mes y los 11 meses previos para comparar los períodos correspondientes ([INEC, 2004](#)). Este apartado busca hacer un análisis de la TMII para los 12 períodos desde el año 1989 y hasta 2017, y no de manera mensual simple, pues dada la volatilidad del fenómeno de estudio, hacer un estudio interanual permite analizar de una mejor manera los cambios entre períodos. Es decir, se analizará la TMII desde el período Febrero 1989 – Enero 1990 hasta el período Enero 2017 – Diciembre 2017.

La importancia de este proceso, aparte de servir de parámetro para evaluar el sistema de salud, está en su estrecha relación con las proyecciones de población, pues como se mencionó previamente, la TMII analiza la mortalidad en el grupo de edad de menores de un año, que es el primer grupo al generar tablas de mortalidad, ya sea de la forma clásica o mediante la mortalidad óptima ([Villalón, 2006](#)). Uno de los métodos más conocidos para realizar estas estimaciones es el método de los componentes de cambio demográfico, que son la fecundidad, la mortalidad y la migración. En el caso de la mortalidad, uno de los puntos de partida es la estimación de las tasas de mortalidad por grupos de edad, siendo de particular interés la de menores de cinco años, pues esta a su vez se subdivide en los grupos de menores de un año y el de uno a cuatro años. Conocer el comportamiento de la mortalidad infantil es importante porque es en este grupo de edad en el que pueden existir cambios muy bruscos en la mortalidad y la fecundidad ([Rincon, 2000](#)).

Dado que la medición de la TMII se hace partiendo de un determinado mes y a partir de éste se consideran los 11 meses anteriores, el primer valor de la base de datos fue medido a partir de Enero de 2000, que corresponde al período interanual Febrero 1999 – Enero 2000. Todos los períodos siguientes se muestran en la figura 13.

⁶<http://www.inec.go.cr/>

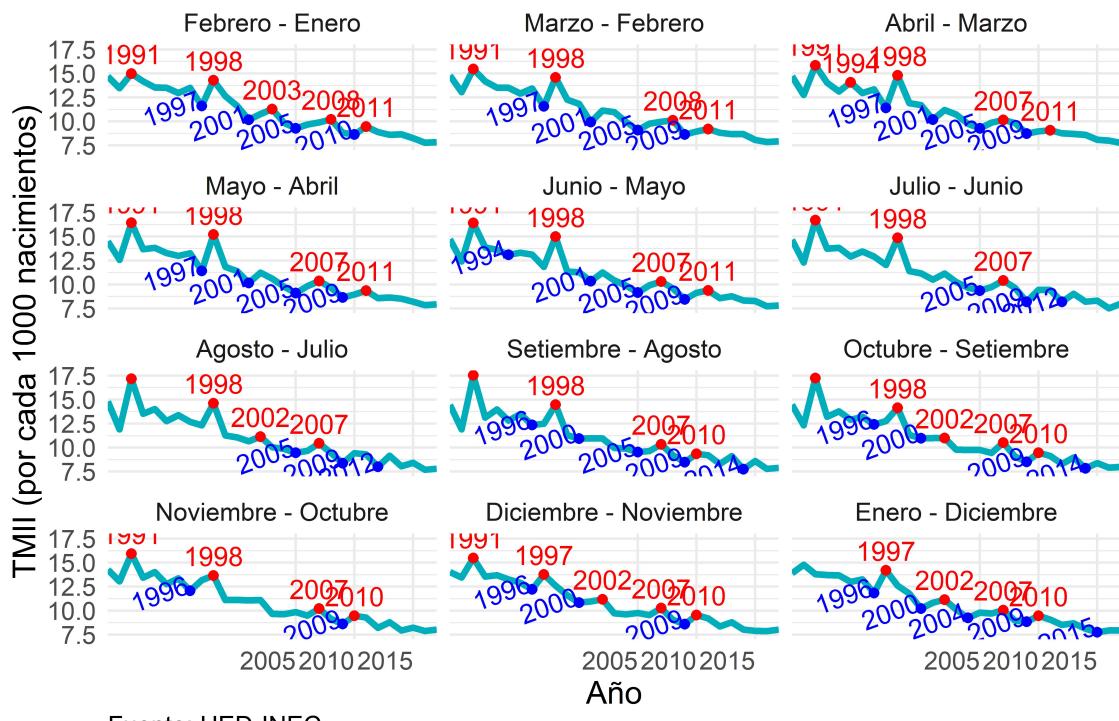
Figura 13: Tasa de Mortalidad Infantil Interanual 1989 - 2017



La serie muestra picos y valles pronunciados a lo largo de todo el periodo. A modo de visualización, se ajustó un suavizamiento de Loess para buscar señales de tendencia y concavidad en los datos temporales. La línea roja punteada se ubica aproximadamente en el mes de Julio del año 2000, pues a partir de ese punto el suavizamiento de Loess muestra un ligero cambio en la concavidad, lo cual sugiere que a partir ese punto será más difícil que la TMII vuelva a alcanzar valores similares a los mostrados al inicio de la serie. Además, al presentarse dos caídas y subidas abruptas en la TMII, esta tiende a estabilizarse.

Mediante un análisis visual, la figura 14 parece respaldar el supuesto de que la mortalidad no posee efectos estacionales determinantes, pues para cada uno de los 12 períodos, en ninguno parecen existir mayores diferencias. El efecto que se mantiene en cada uno de los períodos es el de la tendencia, pues en cada uno ésta sigue descendiendo con el pasar de los años. Este hecho coincide con lo observado en la figura 13.

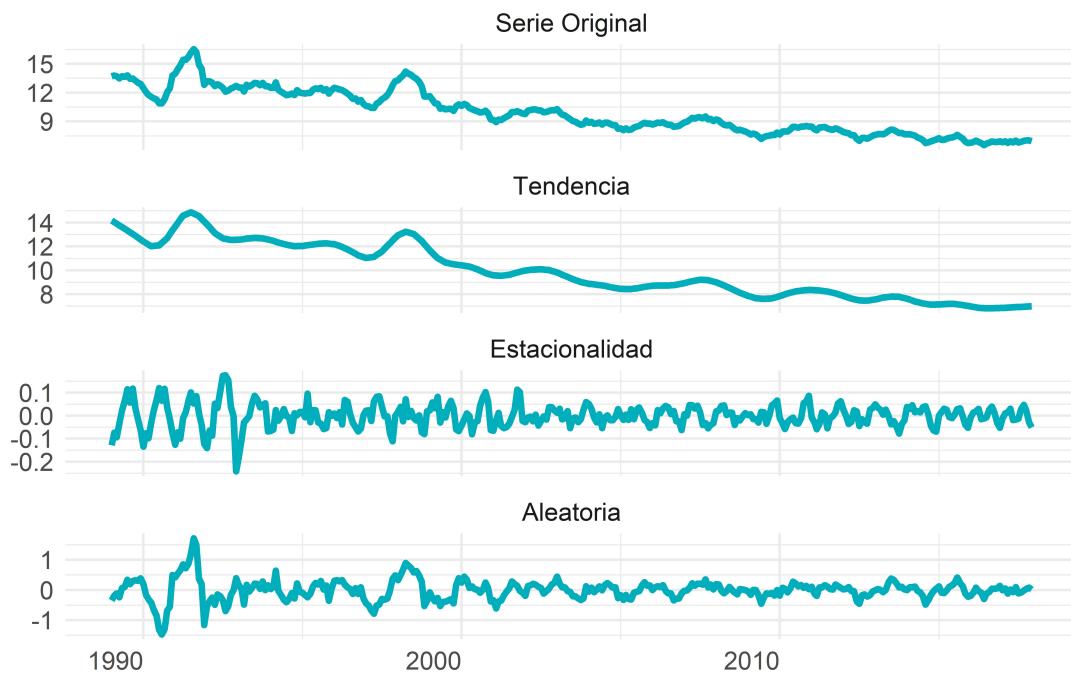
Figura 14: Tasa de Mortalidad Infantil Interanual 1989 - 2017 según períodos



Fuente: UED-INEC

Para hacer la descomposición de la serie se hizo una transformación de Box-Cox con $\lambda = 1$ para aplicarla de manera multiplicativa. Esto se debe a que en la figura 13 pueden observarse cambios considerables en la variabilidad de la serie a lo largo del tiempo. La figura 15 muestra, como se mencionó previamente, una tendencia decreciente y una estacionalidad que no es reiterada a lo largo del tiempo. Además, el componente aleatorio muestra como los errores no son constantes durante todo el período.

Figura 15: Descomposición de la TMII en el periodo 2000 - 2017



Fuente: UED-INEC

3.1.2 Mortalidad por causa externa

La violencia es un acto tan antiguo como el mundo, sin embargo, la evolución de esta en conjunto con el crecimiento de su relación con las defunciones registradas en una población la vuelven un problema de salud pública. En base a la clasificación Internacional de Enfermedades (OPS, 2016) de la de la Organización Mundial de la Salud⁷, las defunciones pueden clasificarse en cuatro grandes grupos, siendo el más importante el de las causas naturales, el cual incluye enfermedades congénitas, cardiopatías u otras relacionadas con la vejez. En menor cuantía se encuentran las causas de muerte ignoradas, las cuales se dan cuando la causa de muerte es desconocida y de intención indeterminada; y de forma similar se encuentran las causas de muerte que se mantienen en estudio, bien sea por parte de la morgue o de algún otro organismo, esta última tiene pocos registros conforme más se retrocede en el tiempo.

El otro gran grupo, aunque considerablemente menor que las causas naturales, son las causas externas, las cuales son objeto de análisis en este apartado. Este grupo puede a su vez ser clasificado en homicidios, suicidios y las muertes accidentales, esta última comprende los accidentes de tránsito, las muertes por caídas, personas ahogadas, víctimas de incendios, terraplenes u otros similares. Aunado a estas categorías se encuentran también las causas indeterminadas, las cuales se diferencian a las ignoradas en que se sabe que se debe a una causa externa pero no se conoce con certeza a cuál categoría pertenece o aún está en investigación, tal es el caso de una persona que fallece debido a

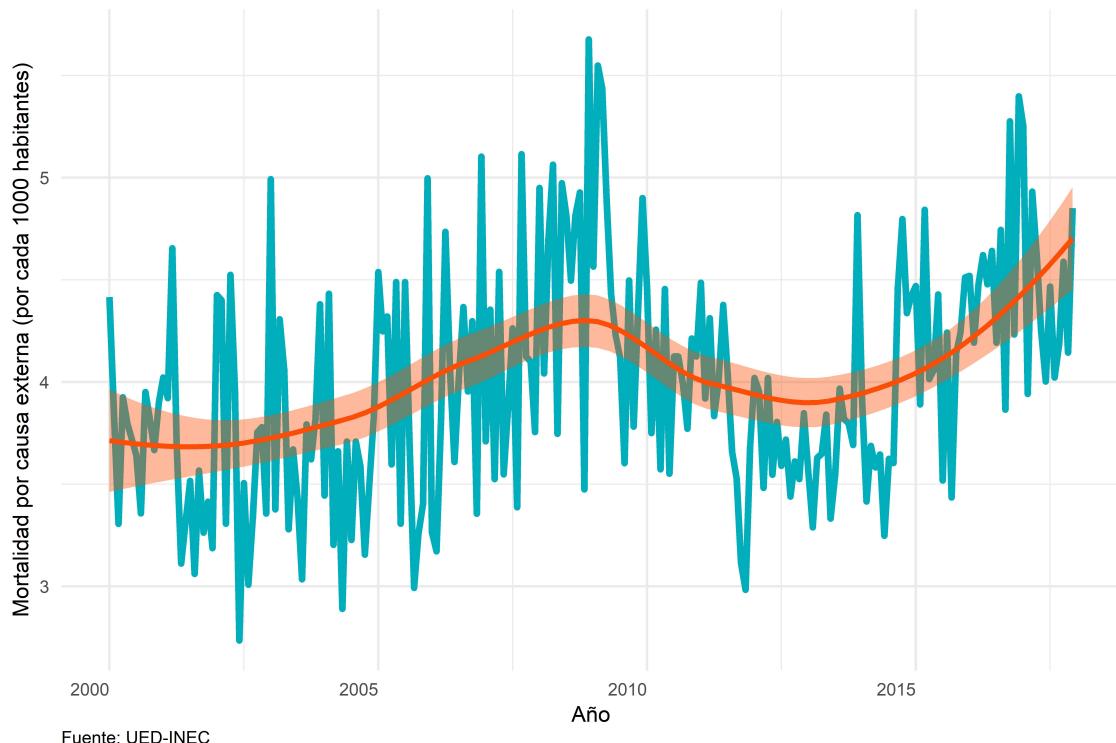
⁷<https://www.paho.org/salud-en-las-americas-2017/?lang=es>

una alta ingesta de drogas o estupefacientes; bien pudo haber consumido intencionalmente hasta morir, lo cual sería un suicidio, o bien el consumo excesivo se debió a un accidente.

En Costa Rica para el año 2011, las muertes por causas externas ocuparon el tercer lugar, siendo solo superadas por las enfermedades del sistema circulatorio, en particular las enfermedades cardiovasculares, y los tumores, ambos casos mostraron una tendencia ascendente ([Nación, 2013](#)). Es debido a los elevados costos económicos y sociales ([Cardona, 2013](#)) que se aborda la imperiosa necesidad comprender el comportamiento de las defunciones debido a las causas externas con el fin de contar con un punto de partida para la elaboración de políticas públicas que busquen reducir al mínimo este tipo de eventos.

Dado que los registros de defunciones por causa externa se realizan diariamente, conviene analizar su comportamiento de manera mensual desde inicios del milenio de una manera más general, dicho comportamiento puede observarse en la figura 16.

Figura 16: Mortalidad por causa externa 2000 - 2017

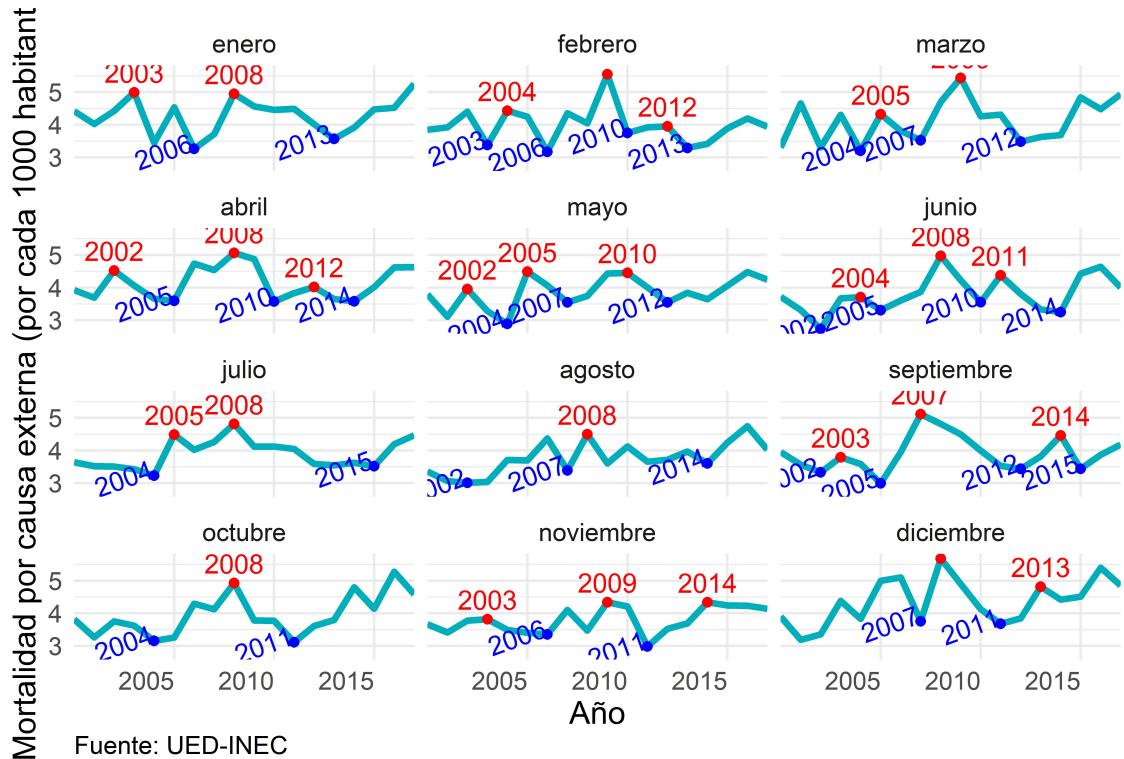


Es importante recalcar que, entre Junio del año 2012 y Diciembre del año 2017, el aumento en la tasa de cambio de la cantidad de defunciones debido a causas externas coincide con el aumento de la flotilla de motocicletas, pues en un período de cinco años esta cifra creció en un 189 % ([Vázquez, 2017](#)). Conviene entonces verificar el comportamiento a lo interno de la serie en referencias a las categorías de las causas externas.

De la figura 17 puede notarse que cada mes tiene sus picos y valles durante cada mes a lo largo

del periodo, siendo los meses de Enero, Abril y Diciembre los que presentaron valores ligeramente más altos entre los años 2000 y 2017.

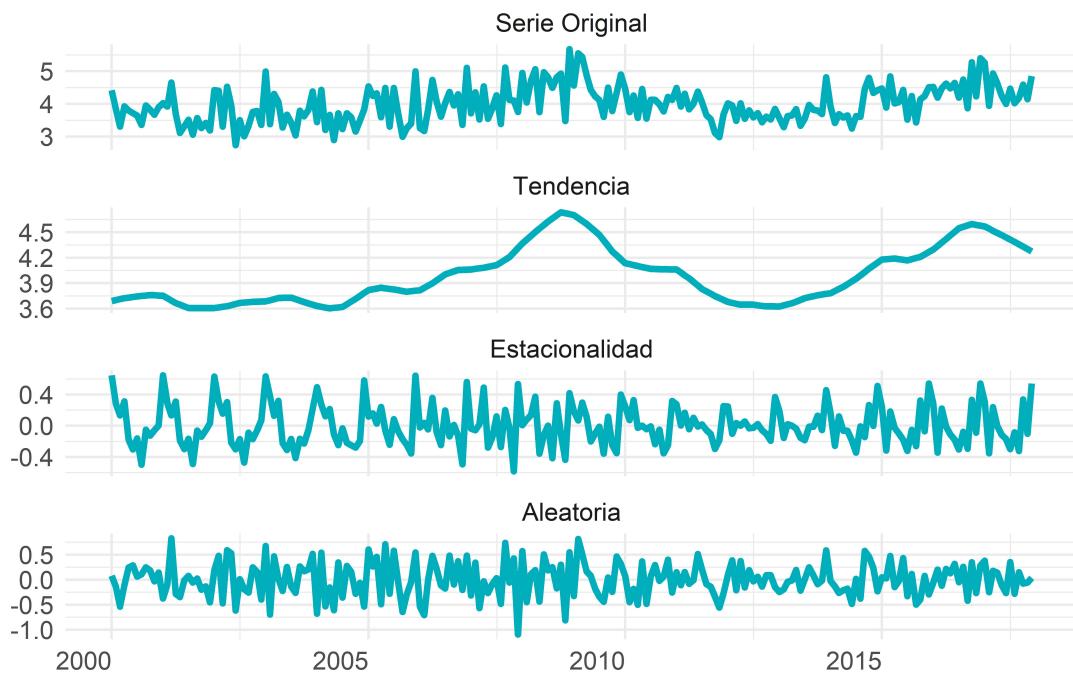
Figura 17: Mortalidad por causa externa 2000 - 2017 según mes



Fuente: UED-INEC

La descomposición de la serie se hará de forma aditiva debido a que en el gráfico 1 no se observan grandes cambios en la variabilidad a lo largo del tiempo. La figura 18 muestra que la tendencia se mantiene casi constante a lo largo del tiempo, mientras que parece haber estacionalidad en ciertos lapsos de la segunda mitad del año. Además, el componente aleatorio muestra como los errores no son constantes a lo largo de todo el período.

Figura 18: Descomposición de las defunciones por causa externa en el periodo 2000-2017



Fuente: UED-INEC

3.1.3 Incentivos salariales del sector público

Los incentivos salariales son retribuciones que de conformidad con la legislación vigente se asignan al servidor por sus características laborales que complementan las remuneraciones básicas. Los incentivos se reconocen tanto a profesionales como a no profesionales, facultados por disposiciones jurídicas que así lo autorizan. Algunos de estos incentivos son: anualidades, dedicación exclusiva, salario escolar, carrera profesional, carrera técnica, zonaje, desarraigado, regionalización, riesgo policial, riesgo penitenciario, riesgo de seguridad y vigilancia, peligrosidad, incentivo didáctico, entre otros. Esta serie cronológica representa los incentivos salariales en millones de colones del sector público de Costa Rica de enero 2007 a junio 2015.

De manera análoga a las secciones anteriores, la figura 19 muestra el comportamiento general de la serie cronológica. al hacer un suavizamiento Loess hay un ligero cambio de concavidad a partir de Julio 2008, lo cual sugiere que a partir de este momento los incentivos salariales vuelvan a alcanzar valores similares a los mostrados al inicio de la serie. La figura 20 muestra cómo hay un crecimiento sostenido de los incentivos en cada mes a lo largo de todo el periodo. Sin embargo, este crecimiento se da a una tasa mucho mayor en la época de fin y principio de año.

Figura 19: Incentivos salariales en el sector público 2007 - 2018

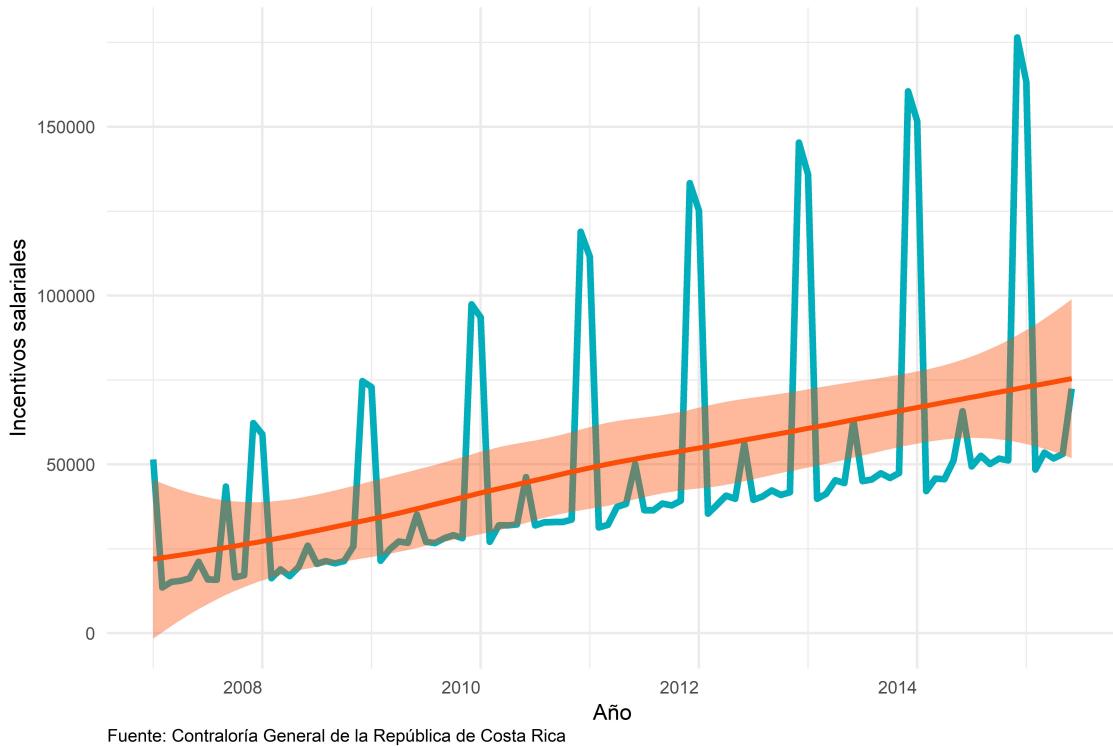
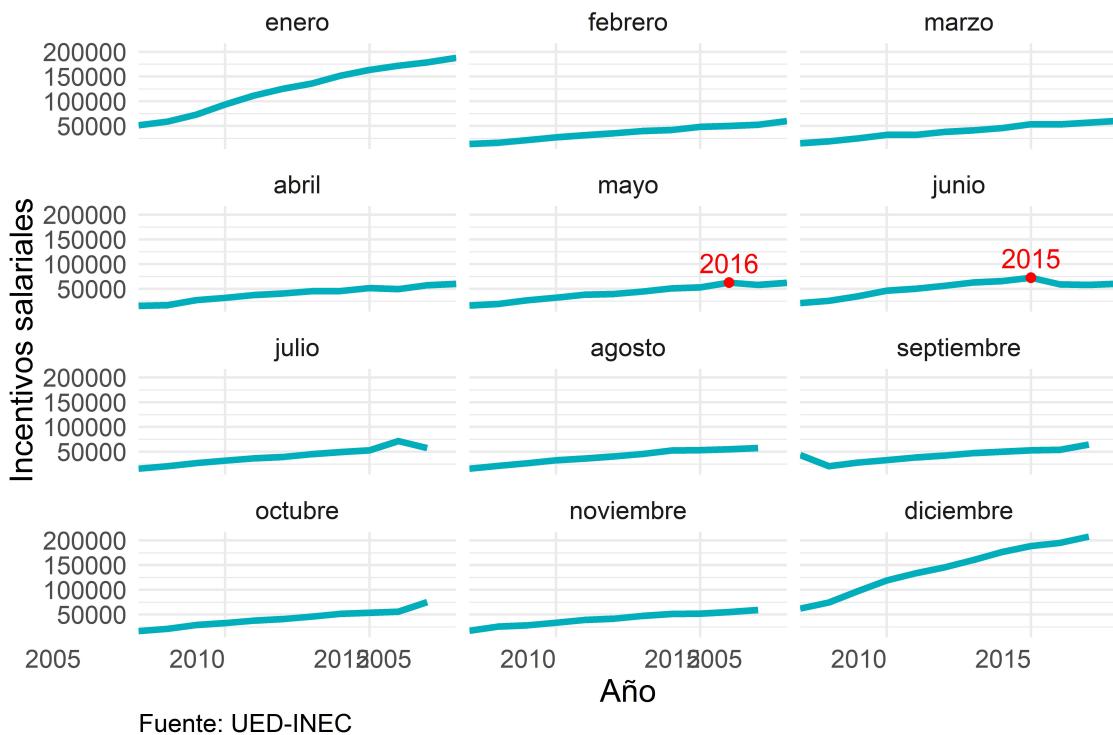


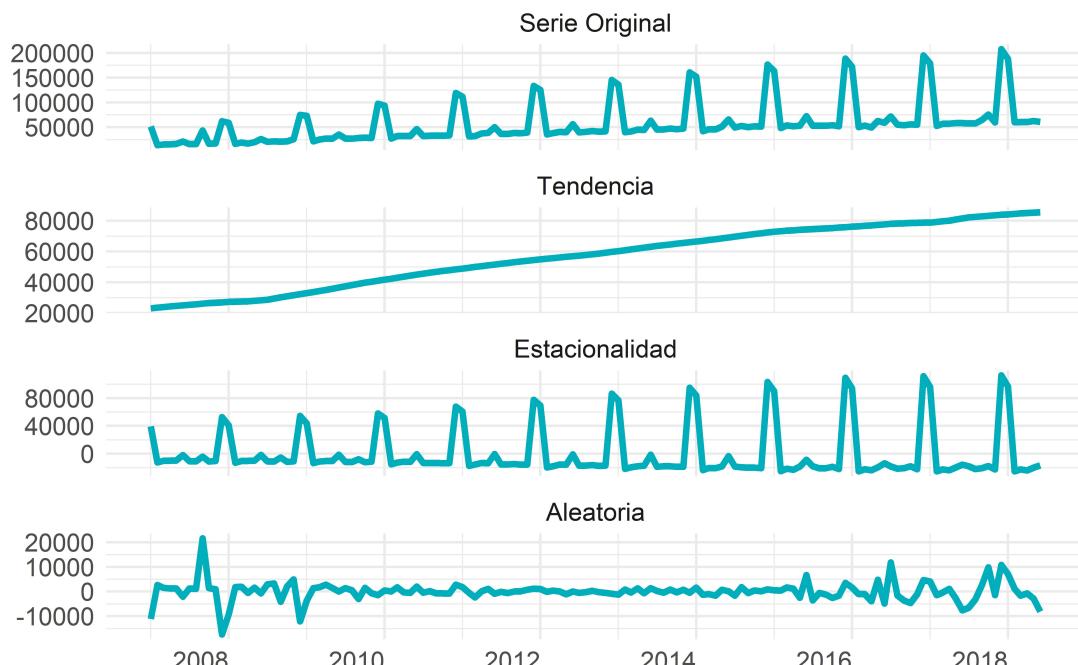
Figura 20: Incentivos salariales en el sector público 2007 - 2018 según mes



En la figura 21 se muestra la descomposición de la serie en sus distintos componentes. Pueden observarse, además de un crecimiento a lo largo del tiempo, los picos y las caídas en la parte

estacional, esto hace referencia a los meses de Diciembre y Enero; cuando no se está en este periodo los incentivos poseen un comportamiento más estable. El componente aleatorio muestra indicios de que la variabilidad de la serie no es homogénea, sino que cambia conforme pasa el tiempo.

Figura 21: Descomposición de la serie de Incentivos salariales en el periodo 2007 - 2018



Fuente: UED-INEC

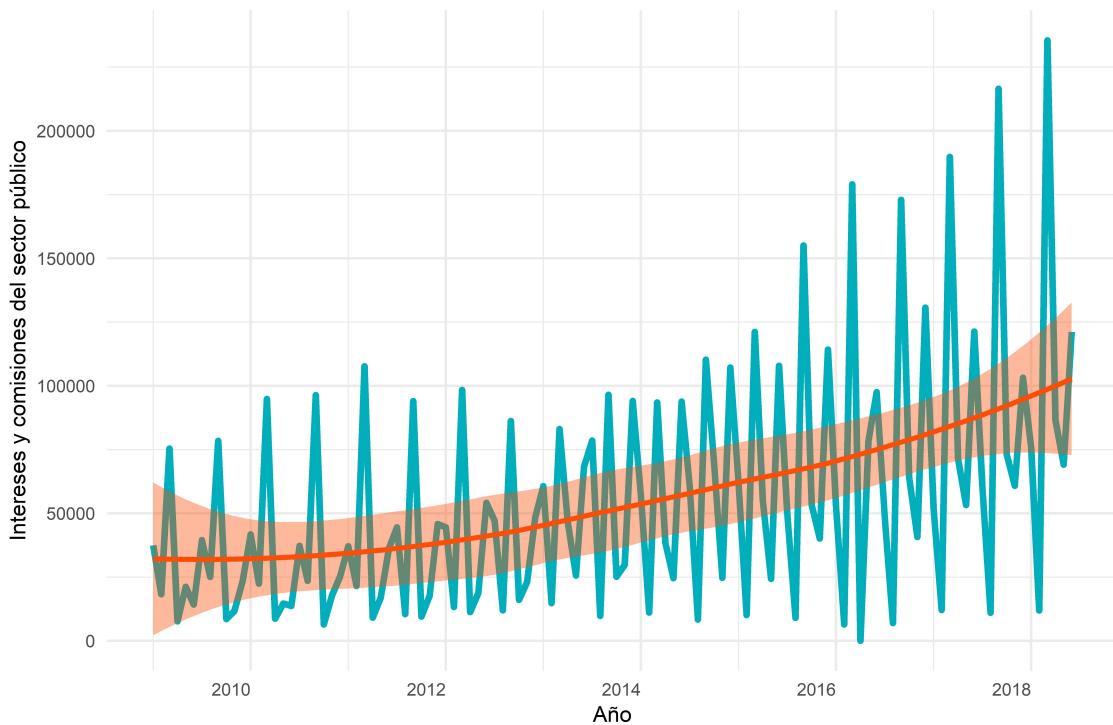
3.1.4 Intereses y comisiones del sector público

Finalmente, se utiliza para este análisis la serie cronológica de los intereses y comisiones del sector público, que comprenden el pago de los intereses de la deuda del gobierno, esto es, las erogaciones de intereses y comisiones destinadas por las instituciones públicas para cubrir el pago a favor de terceras personas, físicas o jurídicas, del sector privado o del sector público, residentes en el territorio nacional o en el exterior, por la utilización en un determinado plazo de recursos financieros provenientes de los conceptos de emisión y colocación de títulos valores, contratación de préstamos directos, créditos de proveedores, depósitos a plazo y a la vista, intereses por deudas de avales asumidos, entre otros pasivos de la entidad tranzados en el país o en el exterior. Incluye el pago por concepto de otras obligaciones contraídas entre las partes, que no provienen de las actividades normales de financiamiento. Además, los intereses y comisiones por las operaciones normales de los bancos comerciales del sector público, así como las diferencias por tipo de cambio por operaciones financieras; y también el pago de intereses moratorios correspondientes a la deuda pública.

Para iniciar el análisis exploratorio de esta serie, la figura 22 muestra que hay un ligero cambio de concavidad a partir de Julio 2010, esto sugiere que a partir de este momento los intereses y comisiones inician una tendencia al alza, la cual se sostiene hasta Junio del 2018. Por su parte,

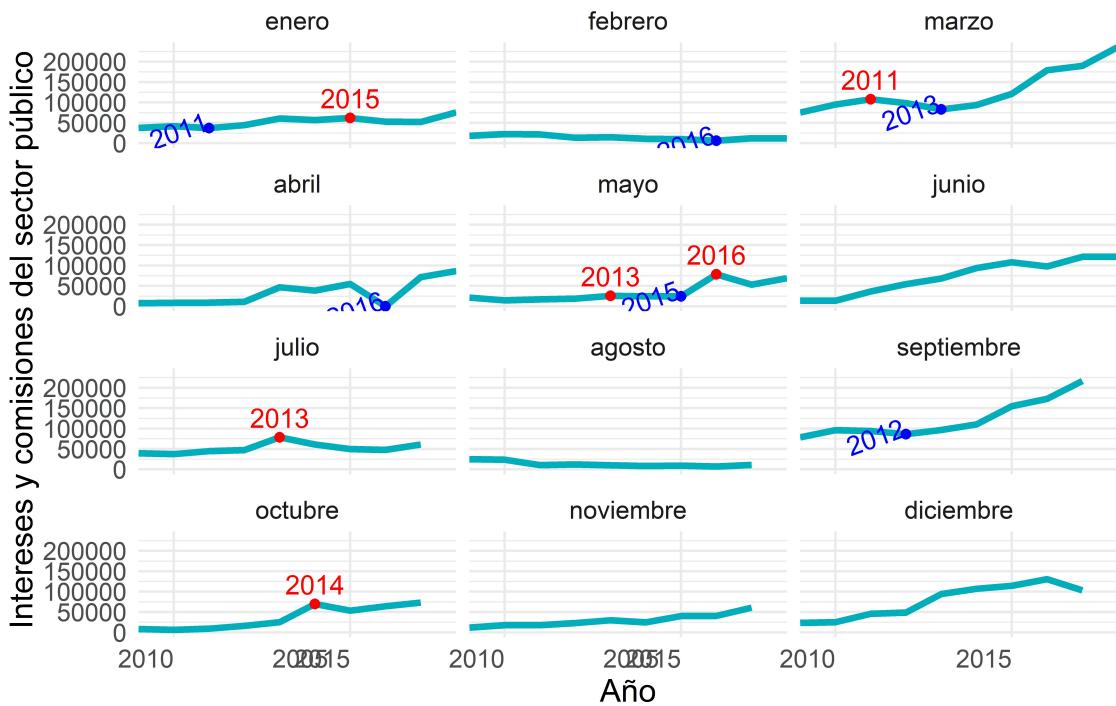
la figura 23 muestra cómo hay un crecimiento sostenido de los intereses y comisiones del sector público al final de cada trimestre durante todo el periodo, mientras que se mantiene casi constante durante los primeros dos meses de cada trimestre. La caída más pronunciada se dio en abril del 2015 mientras que la tasa de crecimiento más rápida parece darse al final del primer trimestre. Además, en la figura 24 se muestra la descomposición de la serie en sus distintos componentes. Puede observarse, además de un crecimiento a lo largo del tiempo posterior a una disminución, los picos y las caídas en la parte estacional, esto en cuanto a los cierres trimestrales previamente mencionados. El componente aleatorio muestra indicios de que la variabilidad de la serie no es homogénea, sino que cambia conforme pasa el tiempo, pues durante un tiempo se mantuvo relativamente estable pero luego presenta algunos cambios.

Figura 22: Intereses y comisiones del sector público en el periodo 2007-2018



Fuente: Contraloría General de la República de Costa Rica

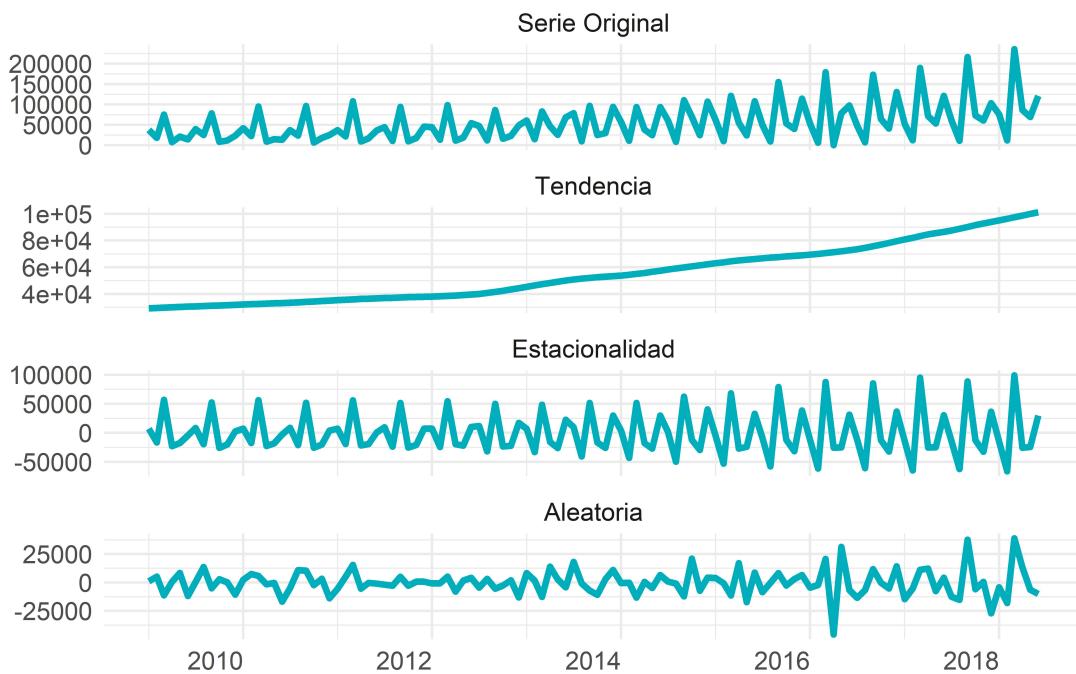
Figura 23: Intereses y comisiones del sector público en el periodo 2007-2018 según mes



Fuente: Contraloría General de la República de Costa Rica

En la figura 24 se muestra la descomposición de la serie en sus distintos componentes. Pueden observarse, además de un crecimiento a lo largo del tiempo posterior a una disminución, los picos y las caídas en la parte estacional. El componente aleatorio muestra indicios de que la variabilidad de la serie no es homogénea, sino que cambia conforme pasa el tiempo, pues durante un tiempo se mantuvo relativamente estable pero luego presenta algunos cambios.

Figura 24: Descomposición de la serie de Incentivos salariales en el periodo 2007 - 2018



Fuente: Contraloría General de la República de Costa Rica

3.1.5 Herramientas analíticas y procedimiento de simulación

Como se ha mencionado en este documento, el lenguaje de programación R ha sido utilizado para los análisis. Específicamente, los paquetes utilizados para la obtención de estos resultados, aparte de los ya mencionados, son `knitr` (Xie, 2014), `kableExtra` (Zhu, 2021), `readxl` (Wickham & Bryan, 2019), `gridExtra` (Auguie, 2017), `ggpubr` (Kassambara, 2020), `ggplot2` (Wickham, 2016), `lubridate` (Golemund & Wickham, 2011), `ggseas` (Ellis, 2018), `ggpmisc` (Aphalo, 2021) y `forecast` (Rob J. Hyndman & Khandakar, 2008).

La metodología propuesta será puesta a prueba en una primera etapa con series cronológicas simuladas a partir de distintos modelos. Los resultados obtenidos al utilizar la sobreparametrización serán contrastados con otros dos métodos: La función `auto.arima()` de R y un modelo ARIMA estándar, que se trata de un $ARIMA(1,1,1)$ en el caso de series no estacionales, y un $ARIMA(1,1,1)(1,1,1)_{12}$ sobre los datos simulados de series mensuales. De forma similar, se comparan los resultados obtenidos mediante la sobreparametrización con los obtenidos utilizando la función `auto.arima()` de R, aplicado a las distintas series cronológicas.

Como parte de esta investigación, es necesario validar la estimación de modelos ARIMA mediante sobreparametrización no solo con datos reales, sino también mediante datos simulados. Para ello es necesario generar series cronológicas que son gobernadas por un proceso determinado y previamente conocido para poder compararlo con los modelos identificados tanto con la sobreparametrización,

como con la función `auto.arima()` y el correspondiente modelo *ARIMA* estándar.

Con este fin, se programó la función que se encuentra en el [Código 2](#) que sigue los siguientes pasos:

1. Se generan valores aleatorios de alguna distribución de probabilidad. Para esta investigación se escogen 100 valores de una distribución Normal con media 10 y varianza 1. Estos valores se resumen en la figura [25](#); donde las regiones azules oscuro representan la densidad de datos entre los percentiles 25 y 75, las líneas punteadas de color naranja marcan la cantidad de desviaciones estándar que los datos se alejan del promedio, y las líneas punteadas de color azul marcan los puntos de corte mínimo, percentiles 25, 50 y 75, y el máximo.
2. Se seleccionan mediante un muestreo simple al azar la cantidad de coeficientes a utilizar en los términos del modelo $ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_S$ que gobiernan la serie. Para esta investigación fueron seleccionados los siguientes procesos: $ARIMA(1, 0, 0)$, $ARIMA(1, 0, 1)$, $ARIMA(2, 0, 3)$, $ARIMA(4, 0, 2)$, $ARIMA(0, 0, 1)(0, 1, 1)$ y $ARIMA(2, 1, 4)(3, 0, 3)$.
3. Para cada uno de los procesos seleccionados, se genera una secuencia de valores en el intervalo $[-1, 1]$ con saltos de 0.1 para posteriormente seleccionar de manera aleatoria el valor que tomarán los coeficientes de cada uno de los procesos mencionados en el punto anterior.
4. Con los valores simulados, la cantidad de parámetros y sus respectivos valores definidos en los puntos anteriores, se ajusta cada uno de los modelos *ARIMA* descritos en el inciso 2..
5. Con cada modelo ajustado, se utiliza la función `simulate.Arima()` para generar 200 observaciones basadas en dichos modelos.

Tras aplicar los pasos anteriores y obtener las correspondientes series cronológicas simuladas, el comportamiento y proceso gobernante de cada una se muestra en la figura [26](#).

Figura 25: Valores de referencia para la simulación de series cronológicas

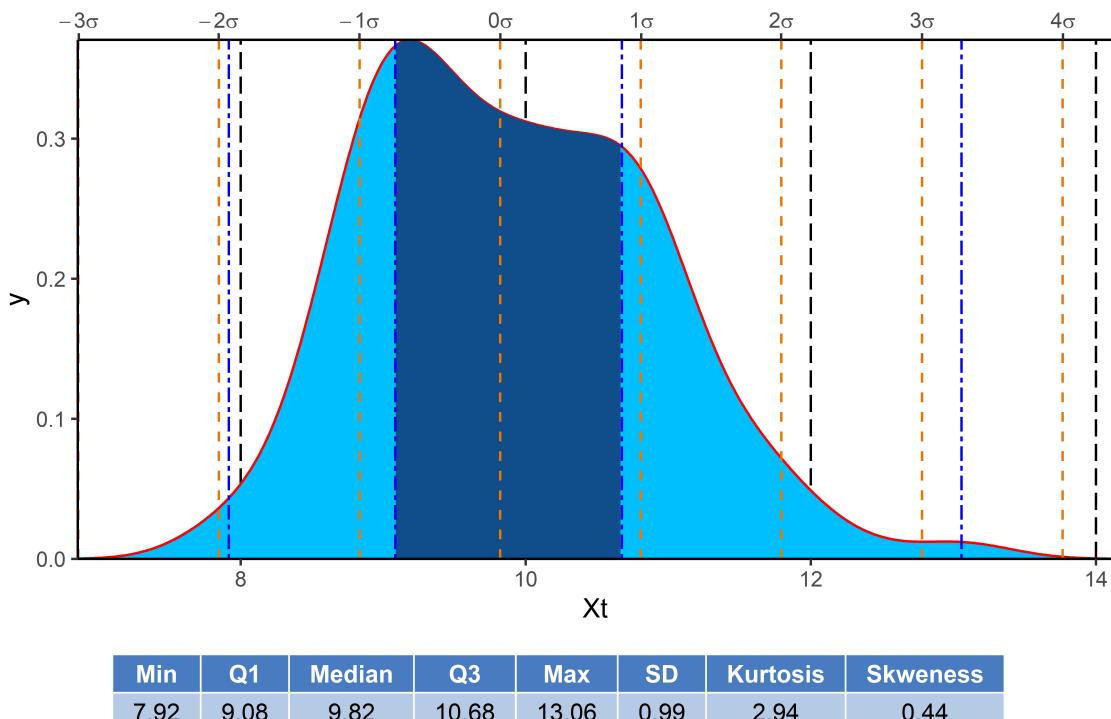
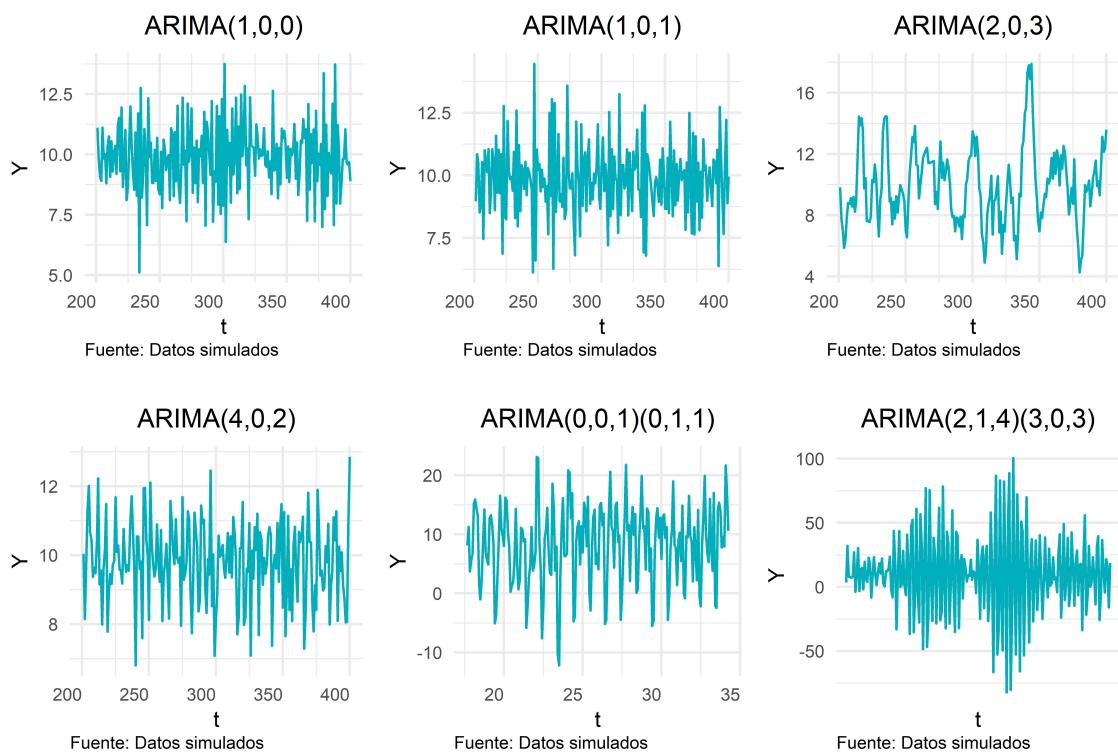


Figura 26: Series cronológicas simuladas



3.2 Métodos

En este apartado se describe el procedimiento a seguir con cada una de las series cronológicas mencionadas previamente, tanto las series simuladas como las reales. Para comprobar el poder predictivo del método propuesto se realiza inicialmente un análisis exploratorio para verificar si las series temporales sujetas a análisis son o no estacionarias, y en caso de no serlo, si requieren algún proceso de diferenciación. Se describe además el proceso de partición de los datos tanto para ajustar los modelos como para validar los pronósticos. Para cada serie de tiempo, se estima el mejor modelo utilizando la función `auto.arima()`, la sobreparametrización y un modelo ARIMA estándar, que puede ser un *ARIMA*(1, 1, 1) para las series no estacionales, o un *ARIMA*(1, 1, 1)(1, 1, 1) en el caso de las series cronológicas estacionales. Una vez obtenidos estos modelos, se analizan los residuales obtenidos. En última instancia, se obtienen los pronósticos y sus medidas de bondad de ajuste y de rendimiento.

3.2.1 Análisis exploratorio

Como fue mencionado en el Marco Teórico, debe corroborarse que la serie cronológica a trabajar posea un comportamiento estacionario y, de no serlo, someterla a procesos matemáticos para asegurar esta condición, estando entre los más comunes la diferenciación o la aplicación del logaritmo natural. Posteriormente, se realiza una identificación del posible proceso que gobierna la serie cronológica al graficar las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, las cuales también sirven para verificar si la serie (transformada o no) es estacionaria.

3.2.2 Partición de los datos

A partir de la serie cronológica que se someterá a análisis, se realiza una partición de los datos para tener dos conjuntos distintos: entrenamiento y validación. El primero servirá precisamente para entrenar y estimar los distintos modelos; mientras que el segundo servirá para validar los pronósticos obtenidos. De manera predeterminada, se utilizará una partición del 80 % de los datos para el conjunto de entrenamiento y un 20 % para los datos de validación, sin embargo, esto puede cambiar de acuerdo al interés propio del(la) investigador(a).

3.2.3 Estimación del mejor modelo según la función `auto.arima()`

Con el correspondiente conjunto de datos de entrenamiento, se utiliza la función `auto.arima()` para encontrar el mejor modelo ARIMA sugerido con este método, que como fue mencionado en la introducción de esta tesis, usa como criterio la minimización del AICc.

3.2.4 Estimación del mejor modelo con sobreparametrización

A partir del mismo conjunto de datos de entrenamiento de la correspondiente serie cronológica, se utiliza la sobreparametrización para encontrar el mejor modelo a partir de distintas permutaciones de la cantidad de coeficientes de los términos p, d, q, P, D, Q , según sea el caso.

La estimación de los modelos y posterior selección de los mismos vía sobreparametrización es un proceso que requiere de distintas etapas. El procedimiento completo fue programado utilizando el lenguaje R y su código se muestra en el [Código 1](#), la cuál fue construida haciendo uso de los paquetes de R `tidyR` ([Wickham & Henry, 2019](#)), `dplyr` ([Wickham, François, Henry, & Müller, 2019](#)) y `parallel` ([R Core Team, 2019](#)), los procesos internos de esta función son descritos a continuación:

- 1.** Una vez que se define la partición que tendrá la serie cronológica, se prosigue con la selección de los escenarios para estimar los modelos de ARIMA. Es en esta instancia en donde se decide en valor máximo de los parámetros p, d, q, P, D, Q del modelo $ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$ que serán sujetos al análisis.
- 2.** Para el caso de series cronológicas no estacionales, los valores P, D y Q son iguales a cero (porque precisamente, no se estiman coeficientes para la parte estacional). Se estiman todas las permutaciones de parámetros p, d, q hasta tener como máximo un modelo $ARIMA(6, 1, 6)$. Para ello se genera una matriz con cada una de estas permutaciones, denominada matriz de valores paramétricos, en donde cada fila representa la especificación del modelo $ARIMA(p, d, q)$ que se va a estimar, tal y como se muestra en [25](#):

$$\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{p, d, q} & \overbrace{P, D, Q} \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 6 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (25)$$

- 3.** De manera análoga, al trabajar con series cronológicas estacionales, se decide trabajar (para una temporalidad determinada, como mensual) hasta un modelo máximo de $ARIMA(4, 1, 4)(4, 1, 4)_{12}$. Así, la matriz de valores paramétricos mostrada en [26](#) posee, en cada línea, una especificación de modelo a estimar:

$$\begin{array}{cc}
 \overbrace{p, d, q} & \overbrace{P, D, Q} \\
 \left[\begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 4 & 1 & 4 & 4 & 1 & 4
 \end{array} \right] & (26)
 \end{array}$$

4. Con la matriz de valores paramétricos, como las mostradas en 25 y 26, se inicia la estimación los modelos en orden ascendente, es decir, del modelo con menos parámetros al que tiene más parámetros. Al estimar un nuevo modelo, se evalúa mediante una prueba t (Stoffer, 2020) para verificar que el nuevo término incorporado al modelo es significativamente distinto de cero, es decir, el nuevo parámetro está generando un impacto en el modelo.
5. Al tratarse de un proceso iterativo, el cálculo puede volverse computacionalmente pesado, es por esta razón que la programación del proceso fue habilitada para realizar procesamiento paralelo y de esta manera reducir el consumo de tiempo en la obtención de resultados.
6. Cuando se han realizado las pruebas de significancia estadística a los modelos, son calculadas las medidas de bondad de ajuste y de rendimiento que se mencionarán más adelante.
7. Tras esto, se aplica un método de concenso para seleccionar el modelo más adecuado. Este criterio consiste en darle una mayor o menor ponderación a los resultados obtenidos con el conjunto de datos de entrenamiento y el de validación. De forma predeterminada se le da una ponderación de 0.8 a los resultados de validación y un 0.2 a los de entrenamiento, esto porque en la práctica, los datos de validación son considerados como datos más recientes y que, mientras más cercanos sean los pronósticos a estos datos, mejores resultados ofrece el modelo seleccionado. El método de concenso es utilizado para obtener un puntaje de cada modelo ARIMA, su cálculo se obtiene de la ecuación 27:

$$\min \left(\sum_i m_i \cdot w_j \right) \quad (27)$$

Donde m_i representa cada una de las medidas de rendimiento y w_j es el valor de ponderación de los conjunto de entrenamiento y validación mencionados anteriormente. El valor más bajo de todos los modelos es el que se define como el modelo más adecuado.

3.2.5 Estimación de un modelo ARIMA estándar

Para contrastar los dos métodos de selección de modelos anteriores (`auto.arima()` y sobreparametrización), se ajusta también un modelo ARIMA más tradicional o estándar. En el caso de las series cronológicas no estacionales se ajusta un modelo $ARIMA(1, 1, 1)$ y en el caso de las series estacionales se ajusta un modelo $ARIMA(1, 1, 1), (1, 1, 1)_S$.

3.2.6 Análisis de los errores

Una vez que se selecciona un modelo de cada tipo (`auto.arima()`, sobreparametrización y ARIMA estándar), se realiza un análisis de los residuos estandarizados, la autorrelación y el supuesto de normalidad de normalidad de los residuales.

3.2.7 Pronósticos

Para cada modelo estimado, se realiza un pronóstico de h periodos hacia el futuro (donde el valor de h es el tamaño de los conjuntos de validación creados para cada serie) para realizar una inspección visual de los resultados previo a hacer una comparación numérica mediante dos formas distintas pero complementarias: las medidas de bondad de ajuste y de rendimiento.

3.2.8 Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento

El objetivo último al estimar un modelo ARIMA es obtener los pronósticos de dicho modelo. Sin embargo, estos pronósticos no pueden asumirse como correctos, sino que se debe evaluar su calidad con las llamadas medidas de bondad de ajuste y de rendimiento, aplicadas a los conjuntos de entrenamiento y validación. Existen múltiples medidas, [Adhikari et al. \(2013\)](#) menciona, entre otras, las siguientes:

3.2.8.1 AIC

Se calcula de la siguiente manera:

$$AIC = -2\log L(\hat{\theta}) + 2k \quad (28)$$

Donde k es el número de parámetros y n el número de datos.

3.2.8.2 AICc

Su forma de cálculo se muestra en la ecuación 29

$$AICc = -2\log L(\hat{\theta}) + 2k + \frac{2k+1}{n-k-1} \quad (29)$$

Donde k es el número de parámetros y n el número de datos.

3.2.8.3 BIC

El último estadístico de bondad de ajuste se calcula como se muestran en la ecuación 30.

$$BIC = -2\log L(\hat{\theta}) + k \cdot \log(n) \quad (30)$$

Donde k es el número de parámetros y n el número de datos.

3.2.8.4 MAE

El error absoluto medio se define mediante la ecuación 31

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t| \quad (31)$$

3.2.8.5 MASE

Esta medida de rendimiento tiene dos casos, uno para series cronológicas no estacionales y otro para series cronológicas estacionales, como se muestra en las ecuaciones 32 y 33.

$$\frac{\frac{1}{J} \sum_j |e_j|}{\frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T |Y_t - Y_{t-1}|} \quad (32)$$

$$\frac{\frac{1}{J} \sum_j |e_j|}{\frac{1}{T-m} \sum_{t=m+1}^T |Y_t - Y_{t-m}|} \quad (33)$$

Donde m es la temporalidad de la serie.

3.2.8.6 RMSE

Es la raíz del error cuadrático medio, como se define en la ecuación 34.

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t|^2} \quad (34)$$

De esta manera, cada una de las series cronológicas (simuladas y reales) serán sometidas a un análisis exploratorio y a una partición de los datos con un 80% para el conjunto de entrenamiento y el restante 20% para validación, esto con el fin de estimar modelos mediante la función `auto.arima()`, la sobreparametrización y un ARIMA estándar para evaluar sus correspondientes y la calidad de los pronósticos obtenidos.

4 RESULTADOS

Este capítulo aborda los principales resultados a partir del procedimiento descrito en la metodología. Cada sección de este capítulo tendrá una subsección donde se aplica cada etapa de análisis a las respectivas series cronológicas.

4.1 Análisis exploratorio

Inicialmente, se analizan las series cronológicas para verificar su comportamiento al ajustar un suavizamiento de Loess para buscar señales de tendencia y concavidad en los datos temporales, y buscar indicios de los procesos que gobiernan dichas series, además someterlas a prueba para verificar que se trate de series cronológicas estacionarias.

4.1.1 Datos simulados

En la figura 26 se mostró el comportamiento general de cada una de las series cronológicas simuladas. Al tratarse de datos simulados se conoce de previo el proceso que gobierna a cada una de las series temporales, por lo que verificar la estacioneridad y obtener los correlogramas sirve para confirmar que los procesos siguen aproximadamente los procesos planteados.

4.1.1.1 ARIMA(1,0,0)

En la figura 27 puede verse como los datos simulados bajo este proceso se comportan de manera aproximadamente estacionaria a lo largo del tiempo sin necesidad de aplicar ninguna transformación a los datos. Además, la figura 28 muestra como las autocorrelaciones caen rápidamente a cero y van disminuyendo, mientras que la figura 29 se corta al inicio, lo que sugiere que se está en presencia de un proceso *ARIMA*(1,0,0), tal y como fue planteado al simular los datos.

Figura 27: Tendencia de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(1,0,0)

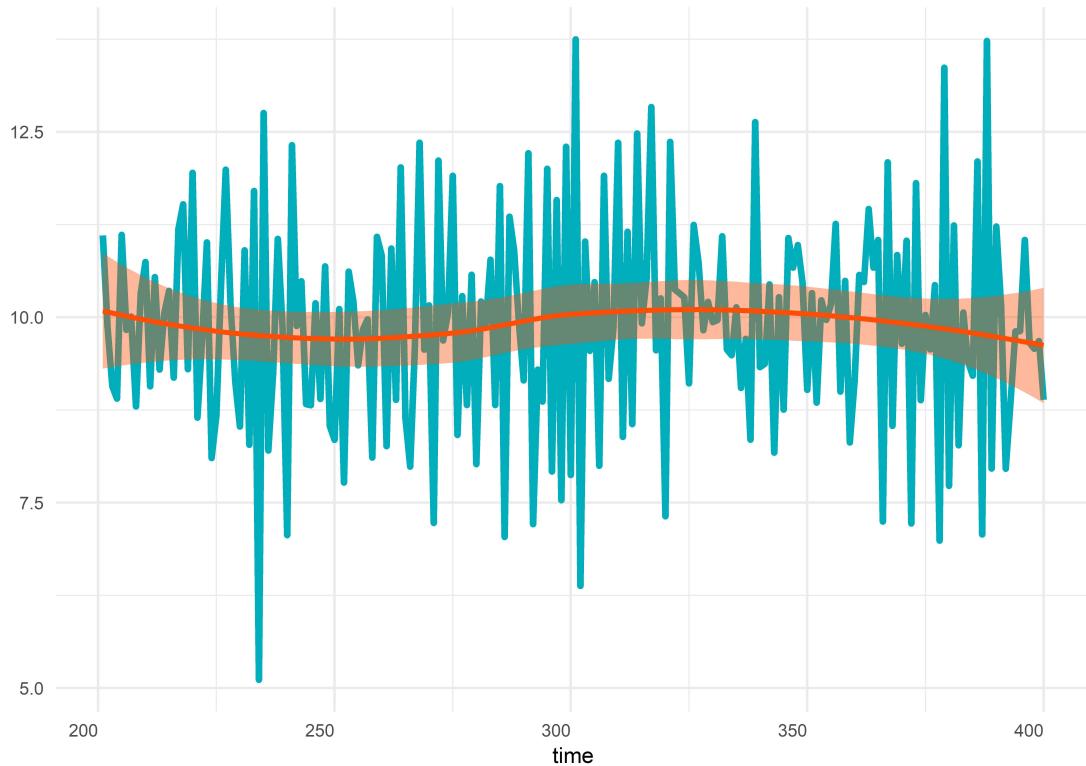


Figura 28: Autocorrelación de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(1,0,0)

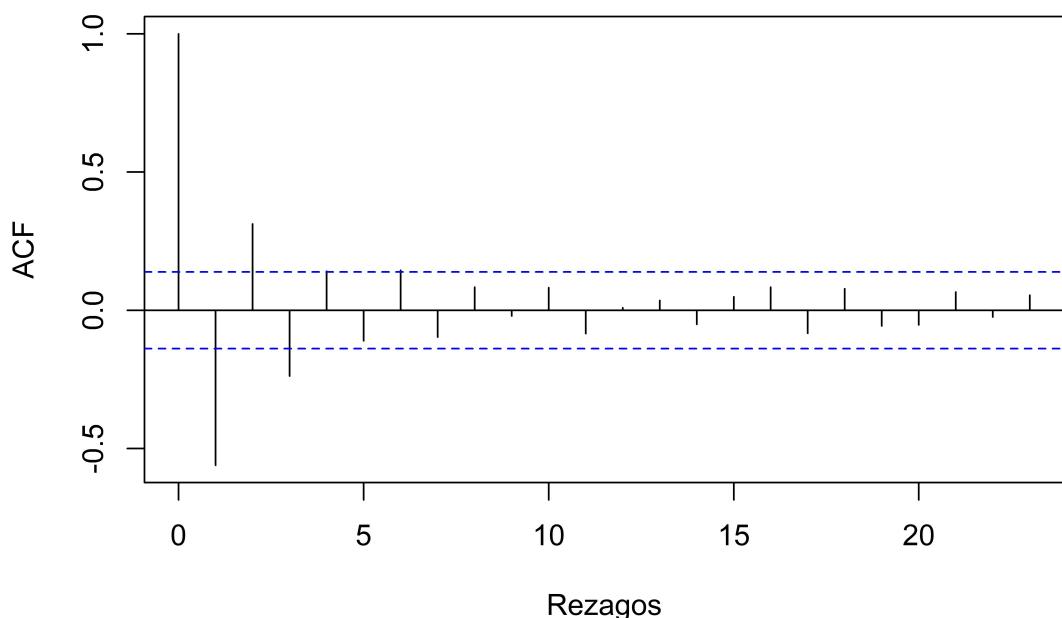
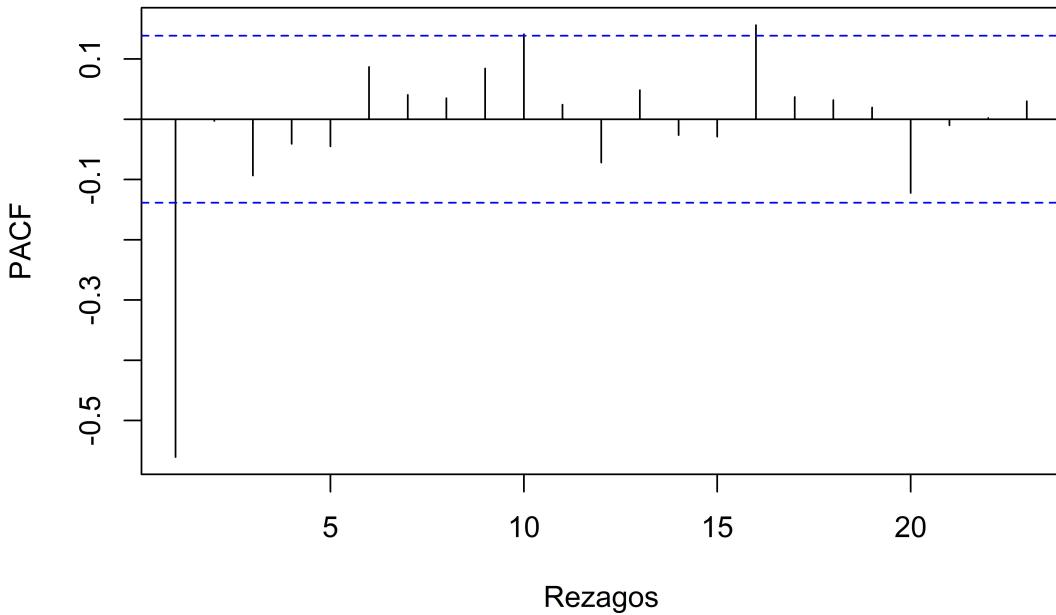


Figura 29: Autocorrelación parcial de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(1,0,0)



4.1.1.2 ARIMA(1,0,1)

En la figura 30 también puede verse como los datos simulados bajo este proceso se comportan de manera aproximadamente estacionaria a lo largo del tiempo sin necesidad de aplicar ninguna transformación a los datos. Además, la figura 31 muestra como las autocorrelaciones van disminuyendo, misma situación que se aprecia en la figura 32, pues también va disminuyendo, lo que sugiere que el posible proceso que gobierna los datos podría tratarse de un *ARIMA*(1, 0, 1), tal y como fue planteado al simular los datos.

Figura 30: Tendencia de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(1,0,1)

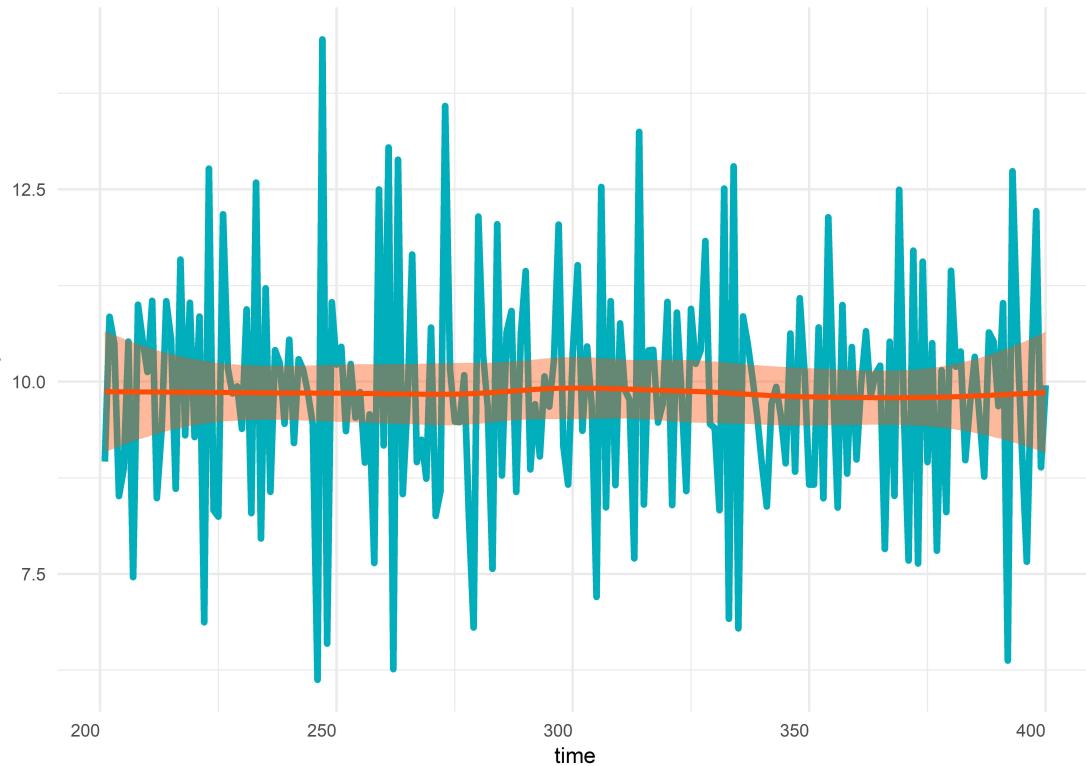


Figura 31: Autocorrelación de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(1,0,1)

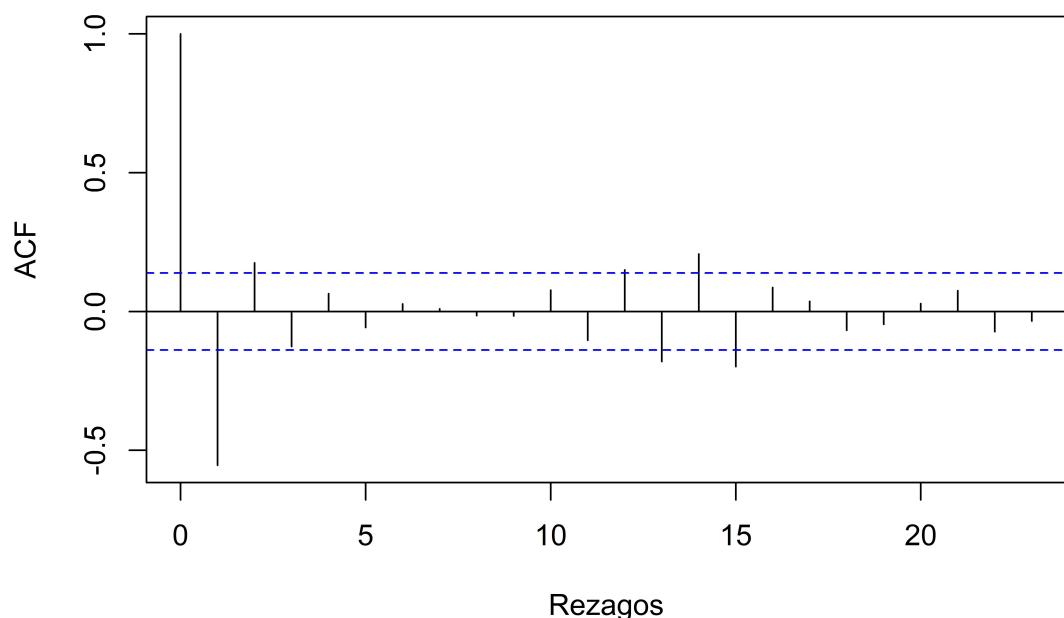
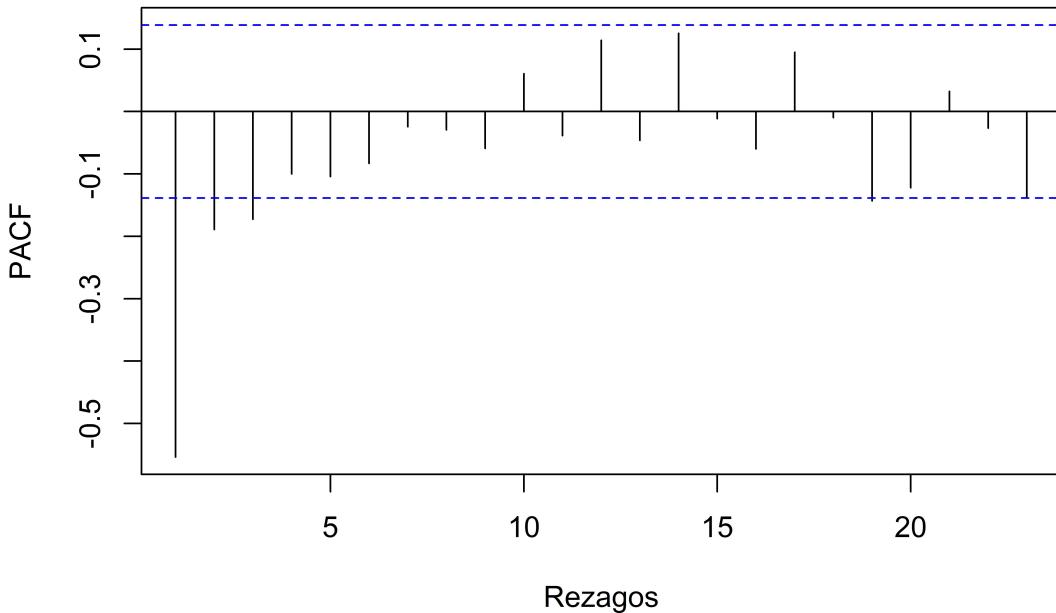


Figura 32: Autocorrelación parcial de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(1,0,1)



4.1.1.3 ARIMA(2,0,3)

En la figura 33 se observa como los datos simulados bajo este proceso no parecen tener ninguna tendencia, si bien podría aplicarse alguna transformación para volverla aún más estacionaria, esto no se considera necesario. La figura 34 muestra como las autocorrelaciones van disminuyendo, misma situación que se aprecia en la figura 35, pues también va disminuyendo, esta situación sugiere que se está en presencia de un proceso $ARMA(p, q)$, por lo que podrían ajustarse varios modelos $ARIMA(p, d, q)$ hasta encontrar el más adecuado.

Figura 33: Tendencia de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(2,0,3)

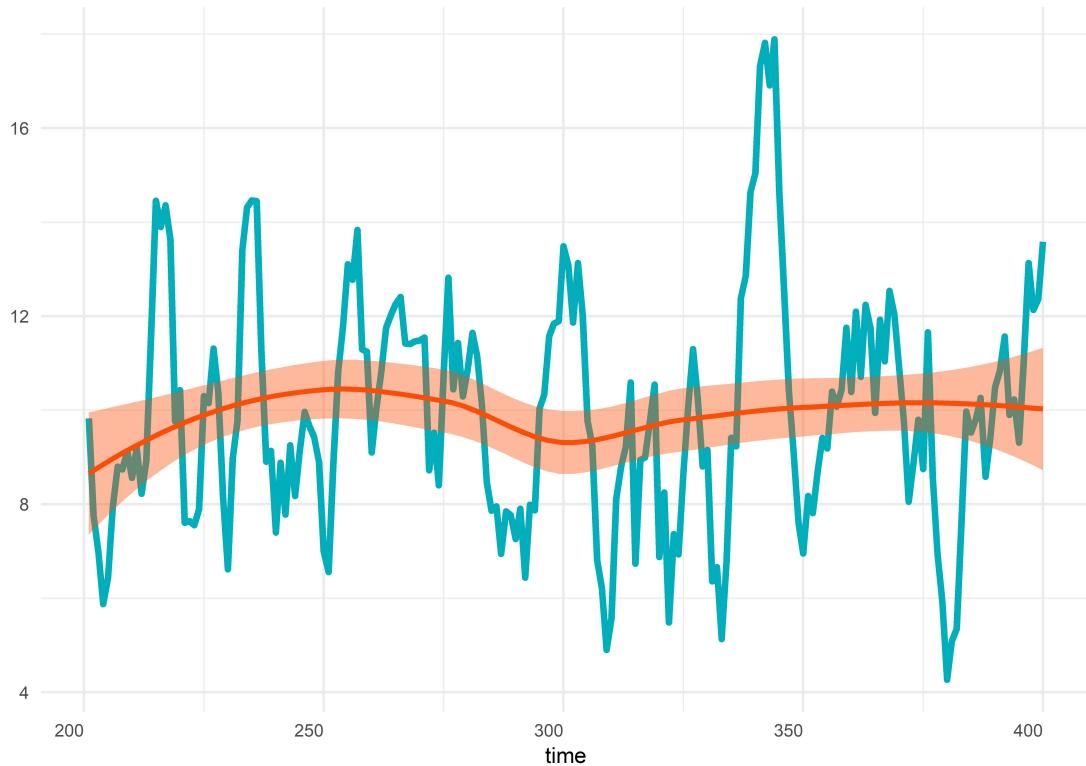


Figura 34: Autocorrelación de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(2,0,3)

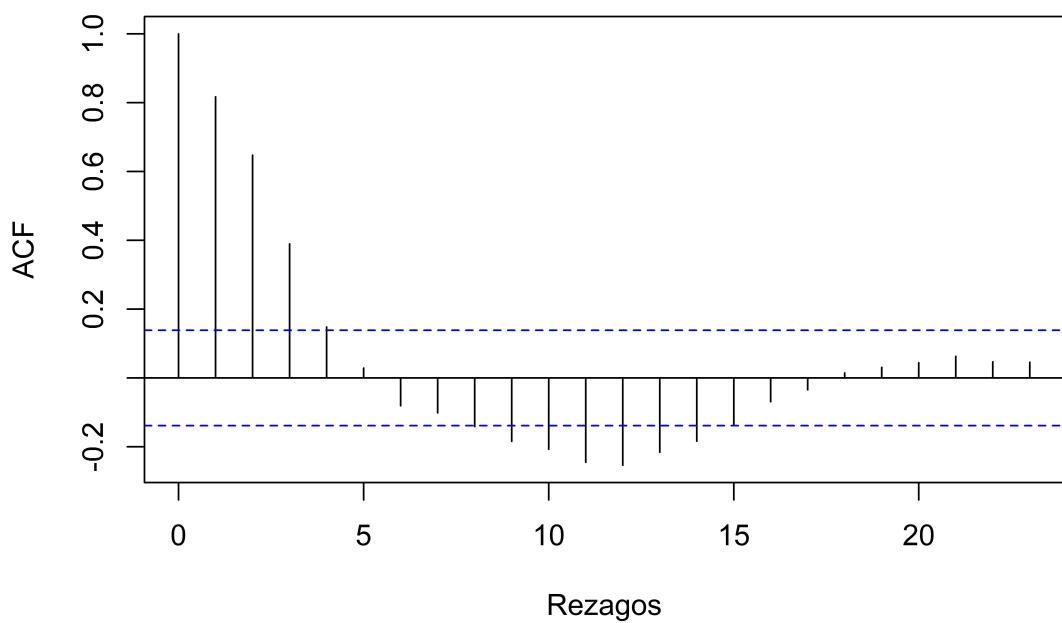
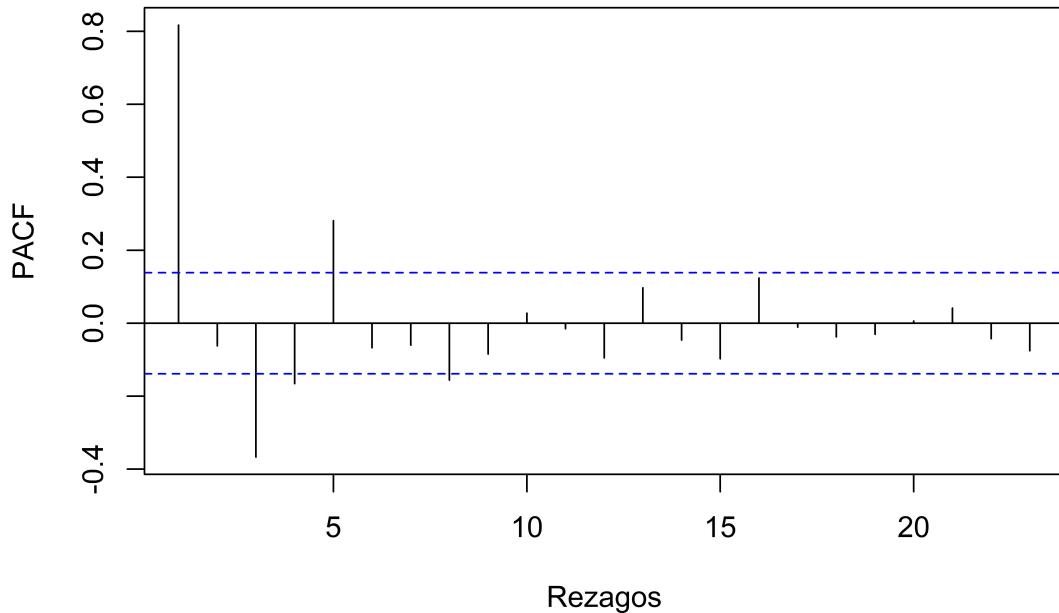


Figura 35: Autocorrelación parcial de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(2,0,3)



4.1.1.4 ARIMA(4,0,2)

En la figura 36 se observa como los datos simulados bajo este proceso tampoco parecen tener ninguna tendencia, por lo que no se considera necesario aplicar ninguna transformación. Las figuras 37 y 38 presentan una situación similar a la anterior, por lo que podrían ajustarse varios modelos $ARIMA(p, d, q)$ hasta encontrar el más adecuado.

Figura 36: Tendencia de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(4,0,2)

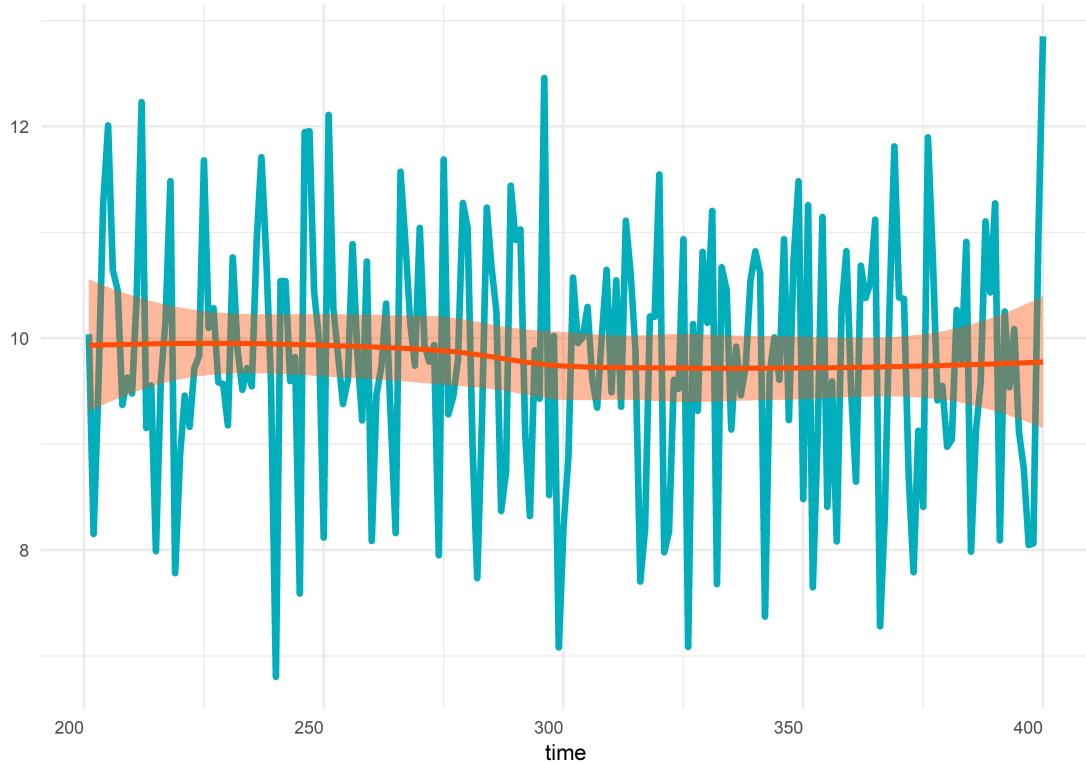


Figura 37: Autocorrelación de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(4,0,2)

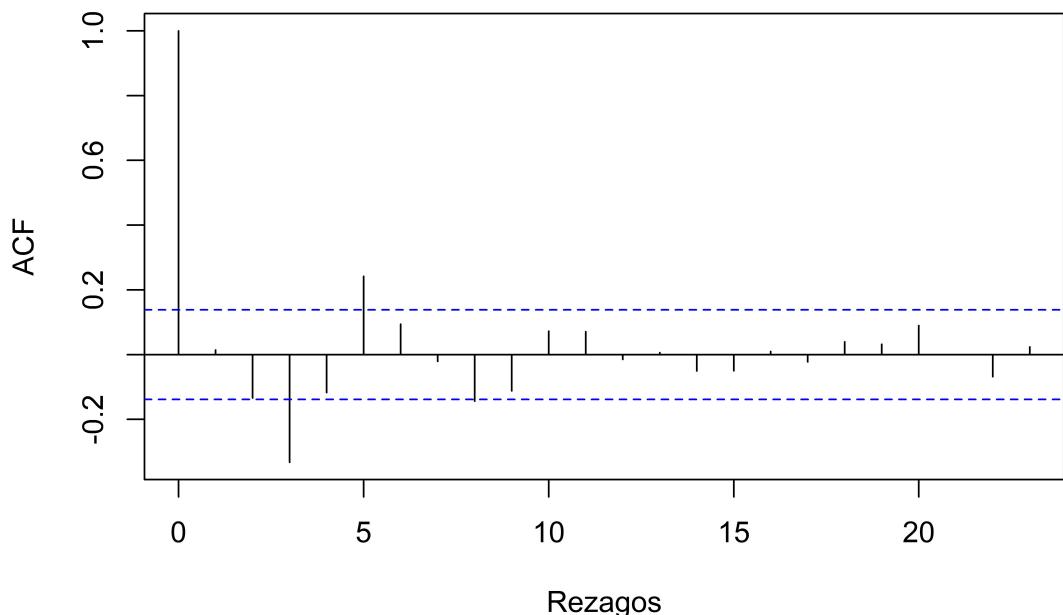
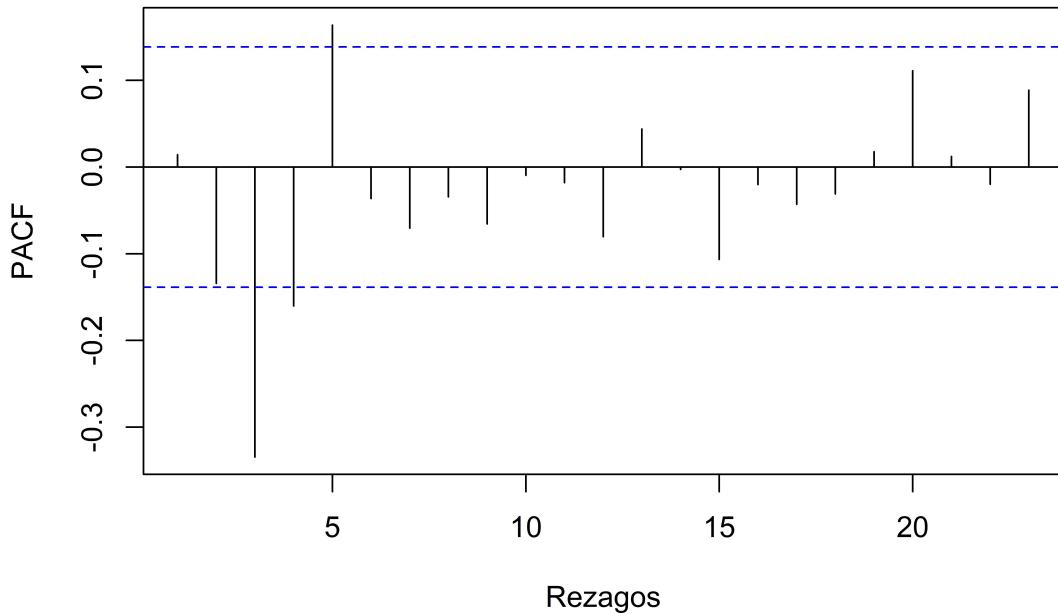


Figura 38: Autocorrelación parcial de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(4,0,2)



4.1.1.5 ARIMA(0,0,1)(0,1,1)

En la figura 39 los datos parecen ser aproximadamente estacionarios; una transformación no es estrictamente necesaria, pero puede aplicarse para corregir ligeramente la parte estacional. Las figuras 40 y 41, sugieren estar en presencia de un proceso estacional cada 12 periodos, por lo que la estimación de modelos *ARIMA* de bajo nivel podría ser suficiente..

Figura 39: Tendencia de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(0,0,1)(0,1,1)

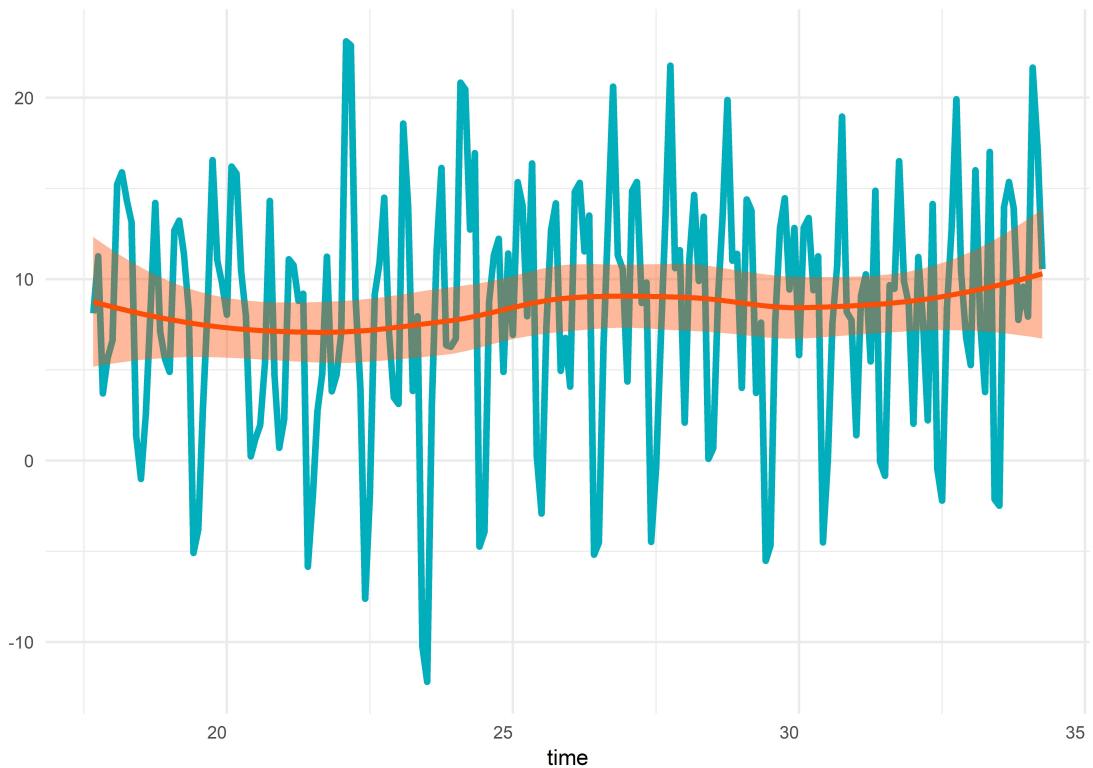


Figura 40: Autocorrelación de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(0,0,1)(0,1,1)

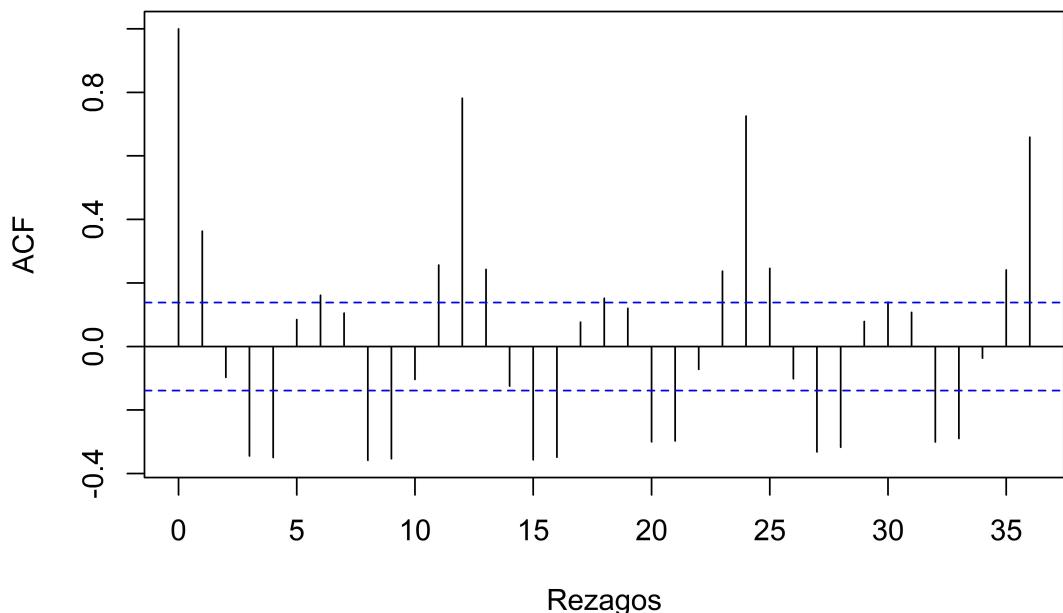
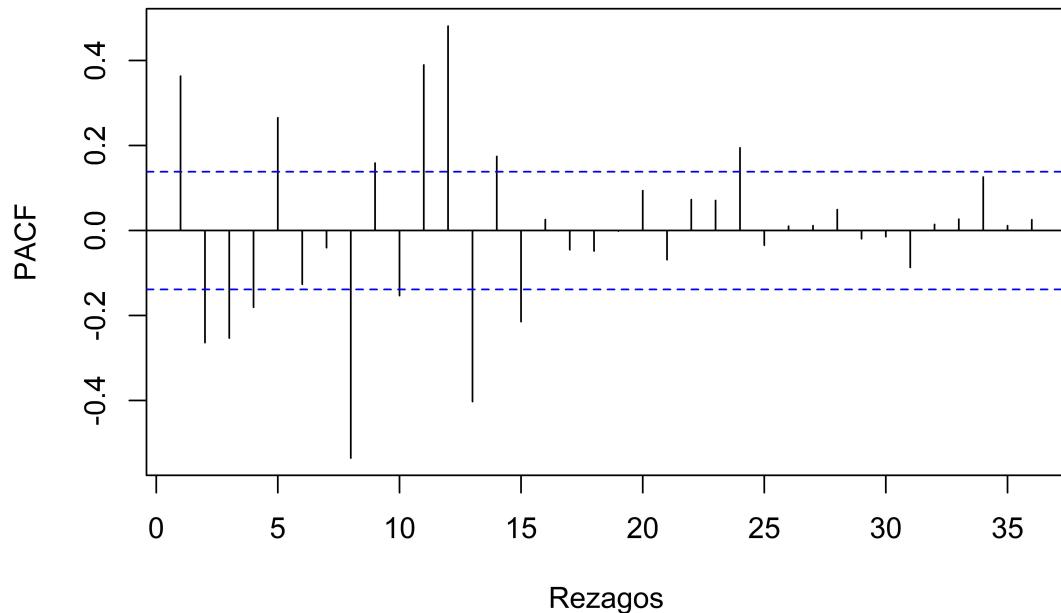


Figura 41: Autocorrelación parcial de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(0,0,1)(0,1,1)



4.1.1.6 ARIMA(2,1,4)(3,0,3)

En la figura 42 lucen estacionarios, pues su media se mantiene muy constante a lo largo del tiempo. Las figuras 43 y 44 por su lado sugieren la presencia de procesos estacionales cada 12 periodos tal y como fueron simulados los datos, pero no es claro identificar el proceso que gobierna la serie, por lo que habría que probar distintos modelos *ARIMA* hasta encontrar el más adecuado.

Figura 42: Tendencia de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(2,1,4)(3,0,3)

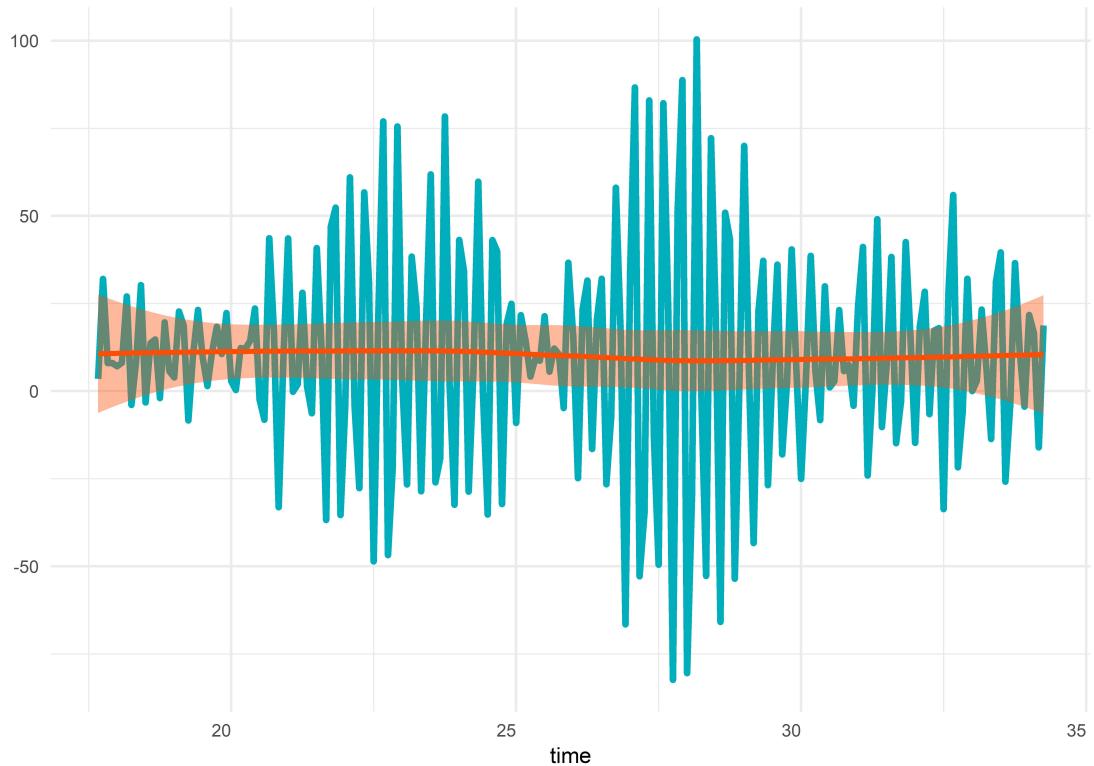


Figura 43: Autocorrelación de los datos simulados a partir de un proceso ARIMA(2,1,4)(3,0,3)

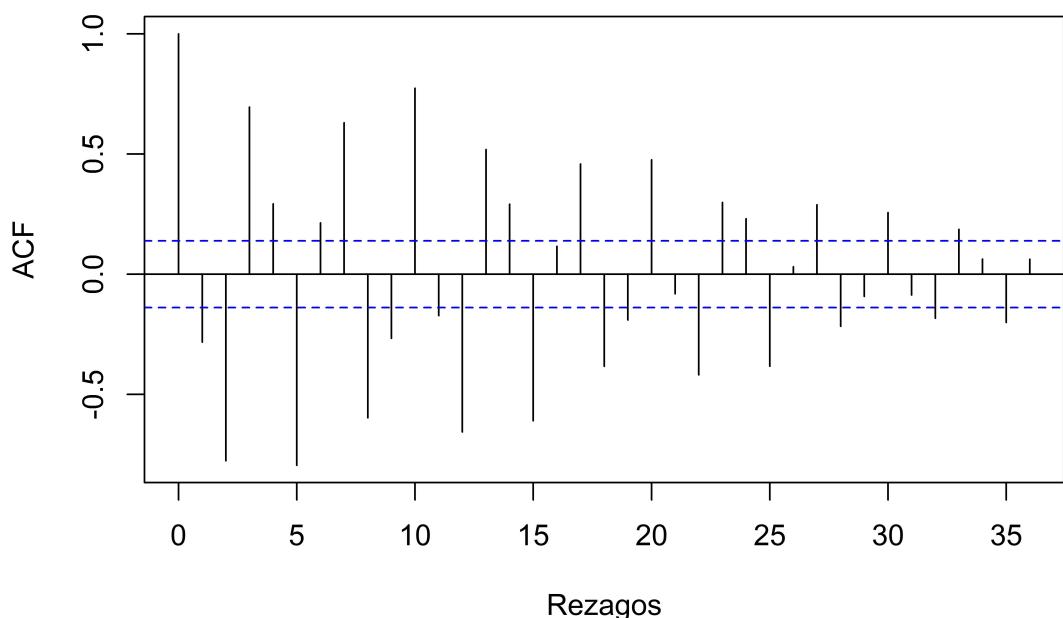
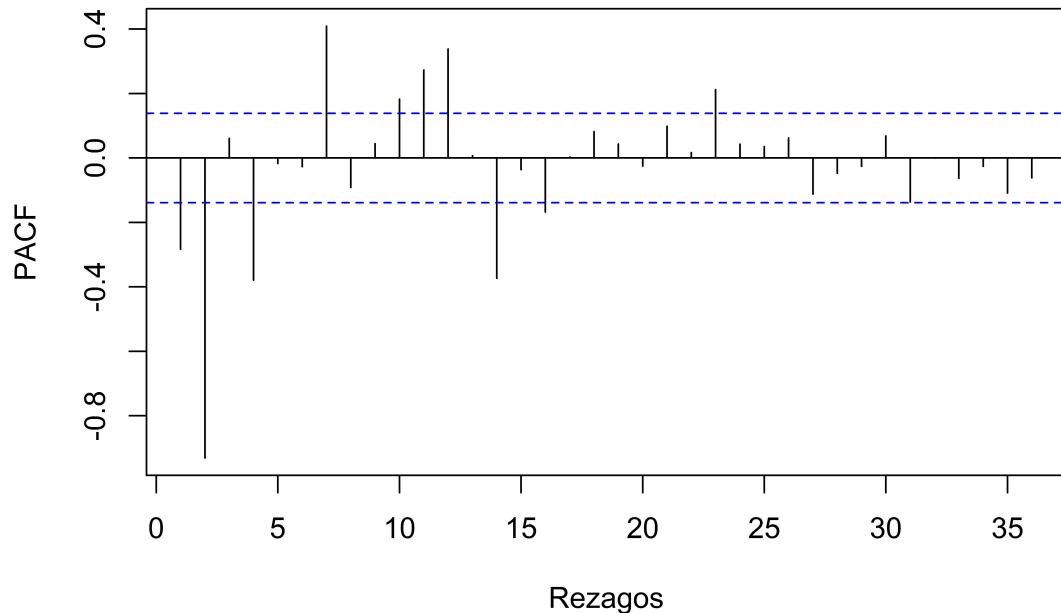


Figura 44: Autocorrelación parcial de los datos simulados a partir de un proceso ARI- $MA(2,1,4)(3,0,3)$



4.1.2 Tasa de mortalidad infantil interanual

Como se mostró en la figura 13, la tasa de mortalidad infantil interanual posee una tendencia claramente decreciente, por lo que su media, por lo que no se trata de una serie cronológica estacionaria. Tras aplicarle una diferenciación, esta situación cambia, tal y como se muestra en la figura 45.

Por otro lado, las figuras 46 y 47 sugieren la presencia de procesos estacionales , mientras que en la parte no estacional se observa como la *ACF* va disminuyendo y el *PACF* se corta tras el segundo rezago, lo cual podría ser indicio de un proceso *MA(2)* o superior.

Figura 45: Tendencia de los datos diferenciados de la TMII

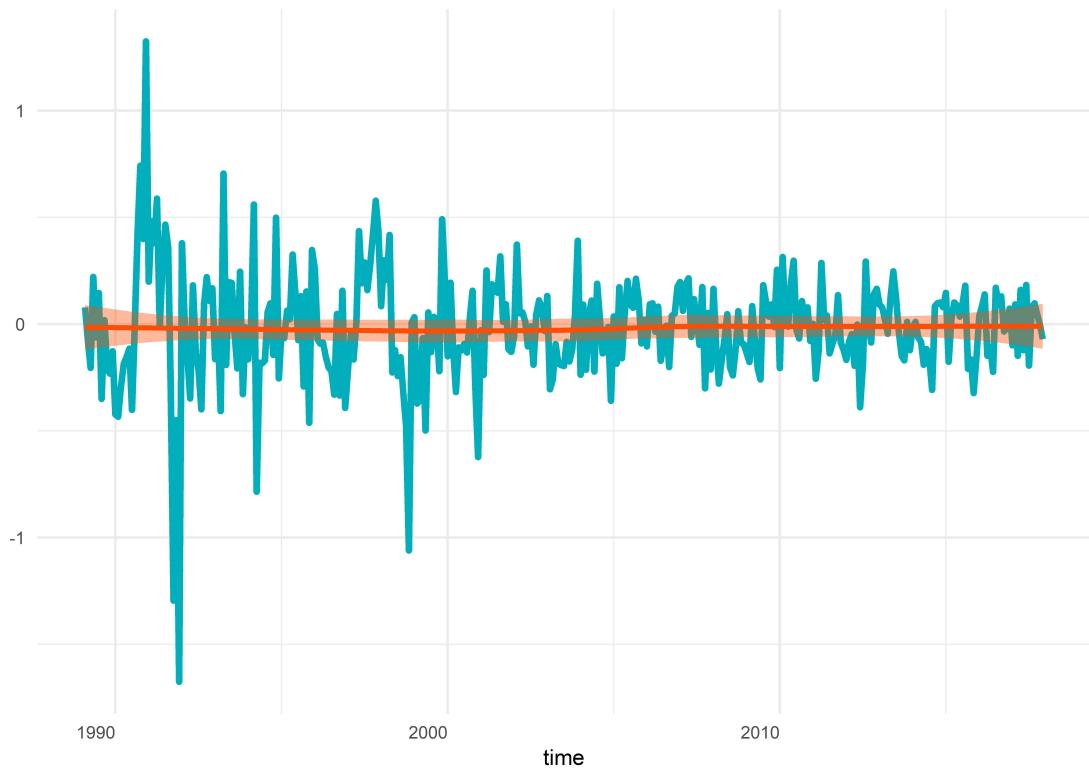


Figura 46: Autocorrelación de los datos diferenciados de la TMII

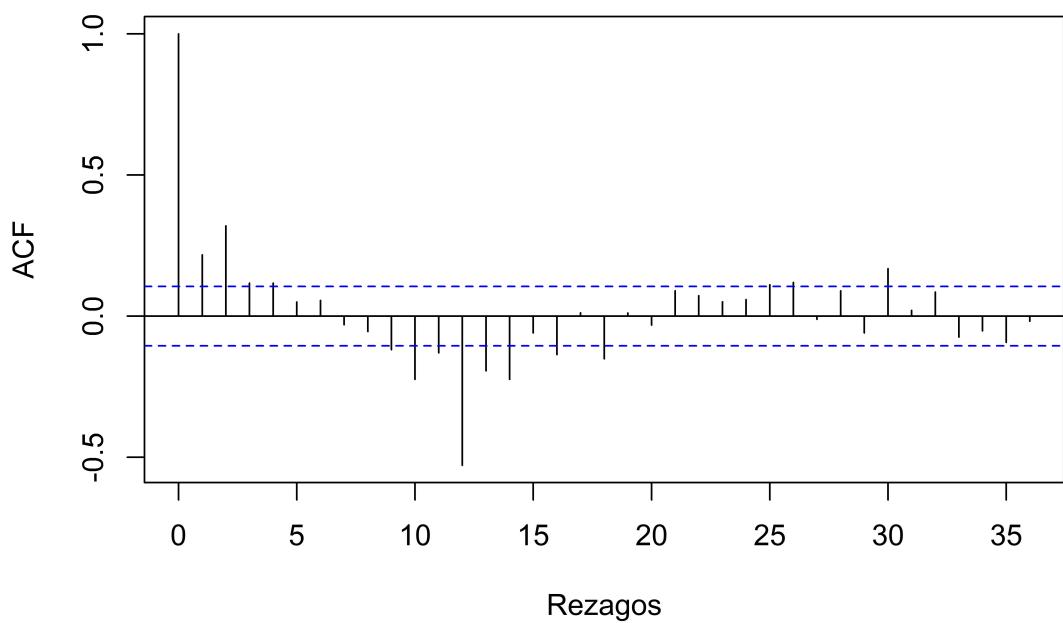
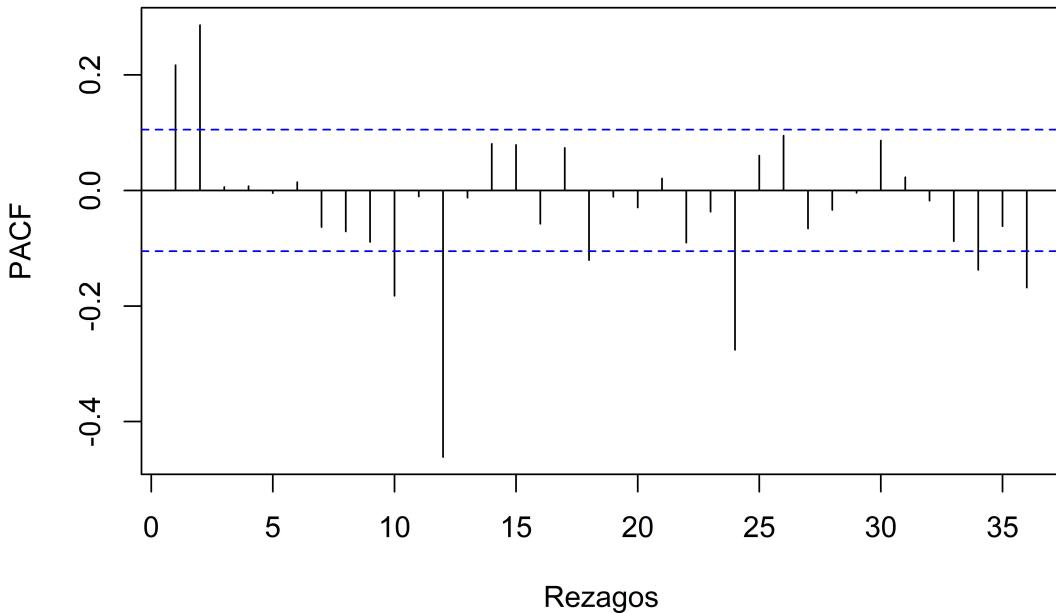


Figura 47: Autocorrelación parcial de los datos diferenciados de la TMII



4.1.3 Mortalidad por causa externa

En la figura 16 se observó como la tasa de mortalidad por causa externa posee una tendencia ligeramente creciente e inestable a lo largo del tiempo, por lo que no se trata de una serie cronológica estacionaria. Tras aplicarle una diferenciación la serie se comporta como lo mostrado en la figura 48. Además, las figuras 49 y 50 muestran indicios de un proceso bajo en la parte no estacional, y si bien no hay indicios claros de patrones estacionales, es sabido que los meses de Enero, Abril y Diciembre son los que cuentan con un mayor número de defunciones por estas causas.

Figura 48: Tendencia de los datos diferenciados de la mortalidad por causa externa

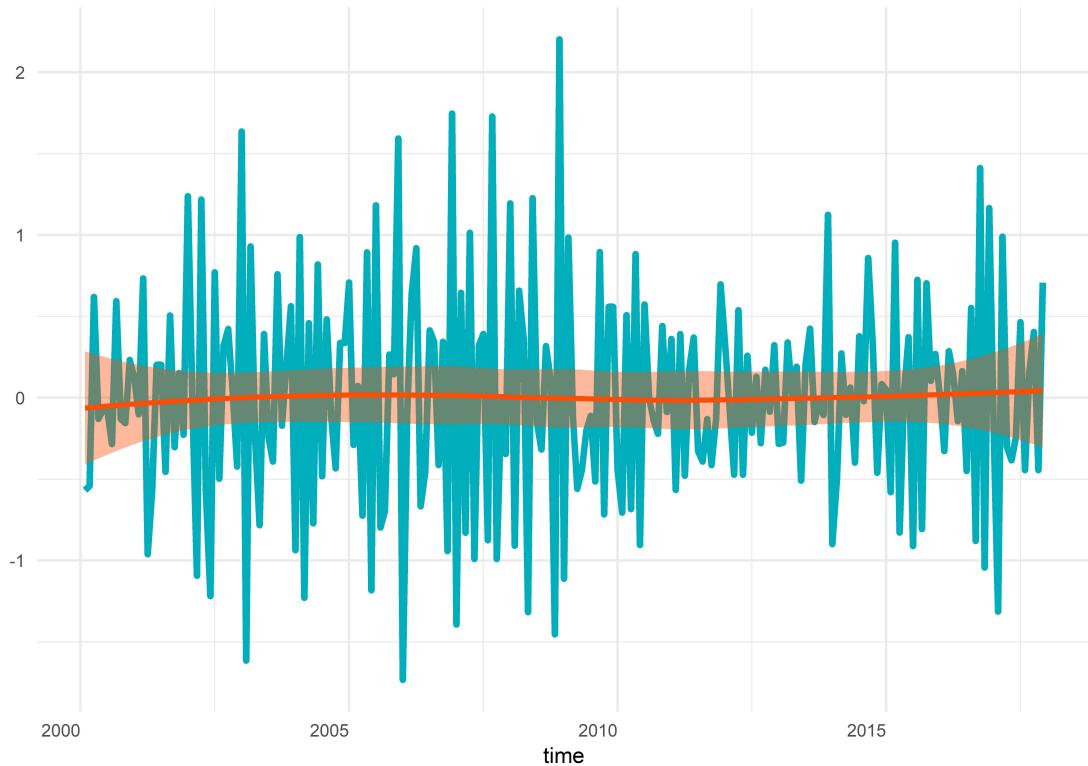


Figura 49: Autocorrelación de los datos diferenciados de la mortalidad por causa externa

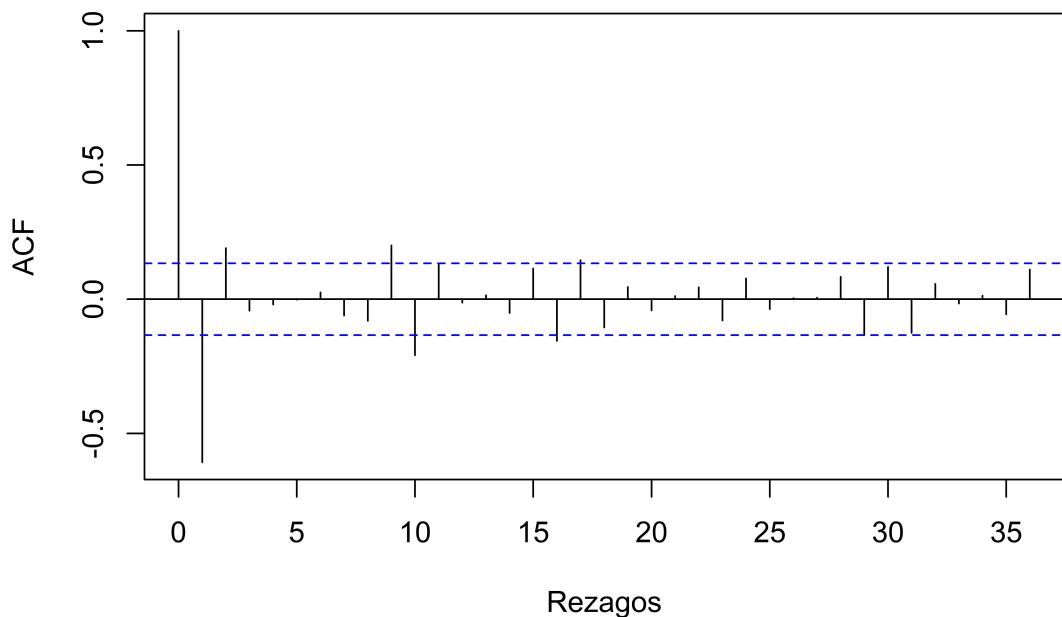
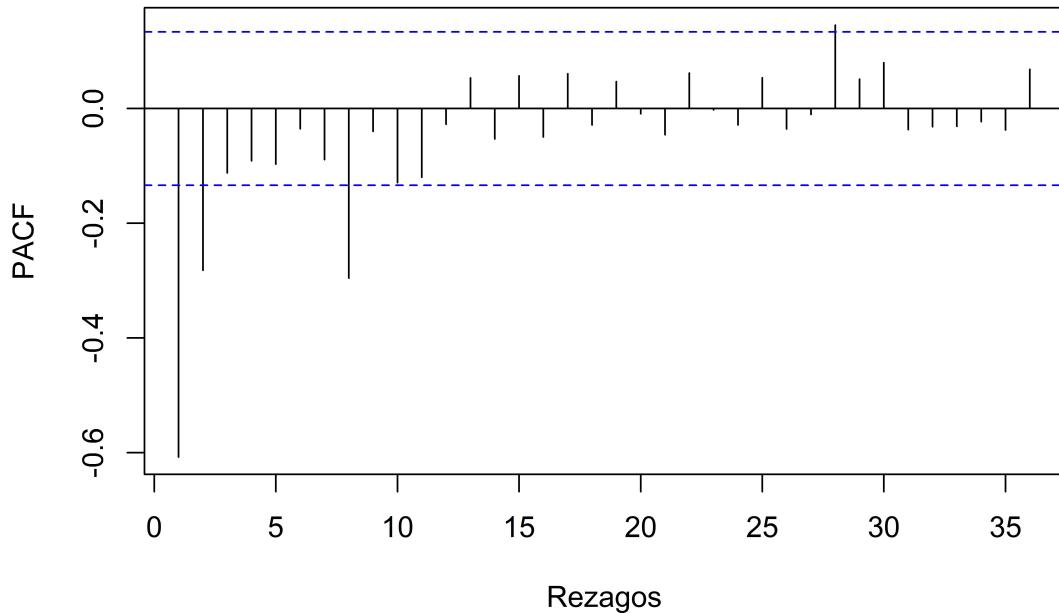


Figura 50: Autocorrelación parcial de los datos diferenciados de la mortalidad por causa externa



4.1.4 Incentivos salariales

En la figura 19 se observó como la serie de incentivos salariales posee una tendencia creciente y sostenida a lo largo del tiempo, por lo que no se trata de una serie cronológica estacionaria. Tras una diferenciación la serie se comporta como lo mostrado en la figura 51, que aunque su media se mantiene constante, parece seguir teniendo patrones. Además, las figuras 52 y 53 no parecen sugerir un proceso en particular tanto para la parte estacional como para la no estacional, a pesar de que es claro que existe un efecto periódico.

Figura 51: Tendencia de los datos diferenciados de la serie de incentivos salariales

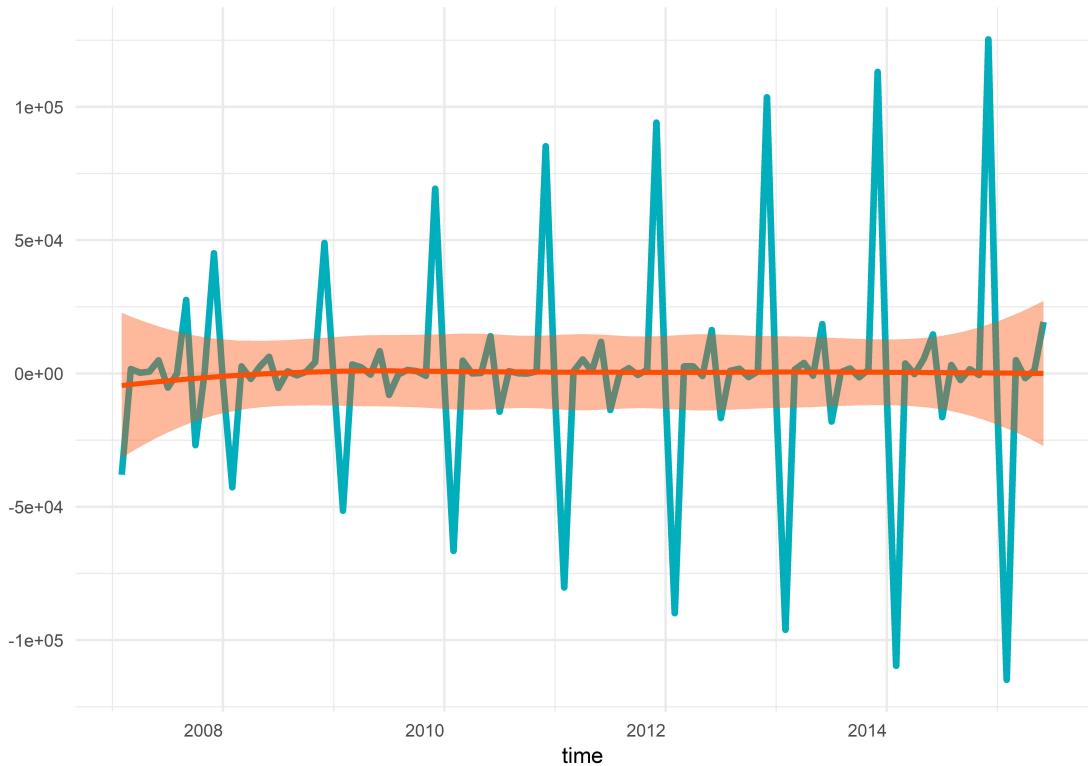


Figura 52: Autocorrelación de los datos diferenciados de la serie de incentivos salariales

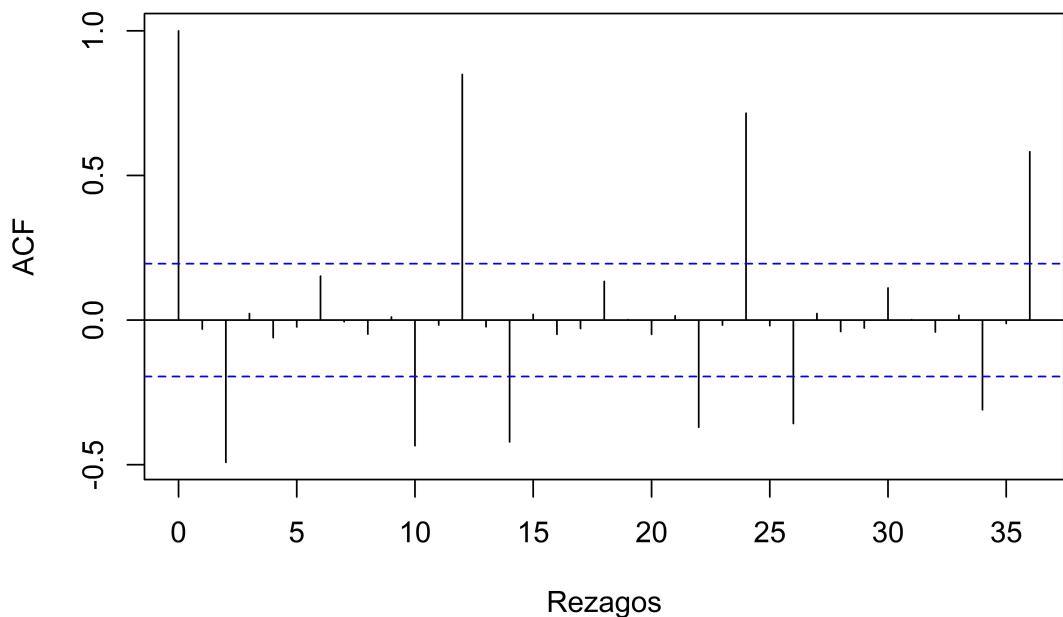
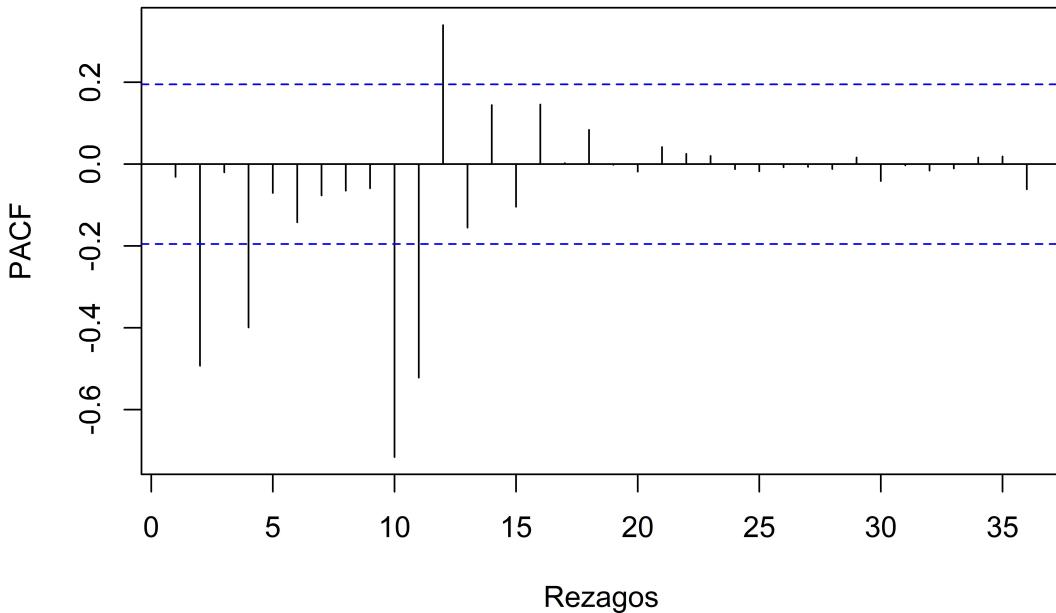


Figura 53: Autocorrelación parcial de los datos diferenciados de la serie de incentivos salariales



4.1.5 Intereses y comisiones del sector público

En la figura 22 se muestra como la serie de intereses y comisiones del sector público posee una tendencia creciente no lineal, por lo que no se trata de una serie de tiempo estacionaria. Tras utilizar una diferenciación la serie se comporta como lo mostrado en la figura 54, que aunque su media se mantiene constante, pero aún conserva algunos patrones. Las figuras 55 y 56 indican que existen un efecto estacional, pero su identificación no es clara.

Figura 54: Tendencia de los datos diferenciados de la serie de intereses y comisiones del sector público

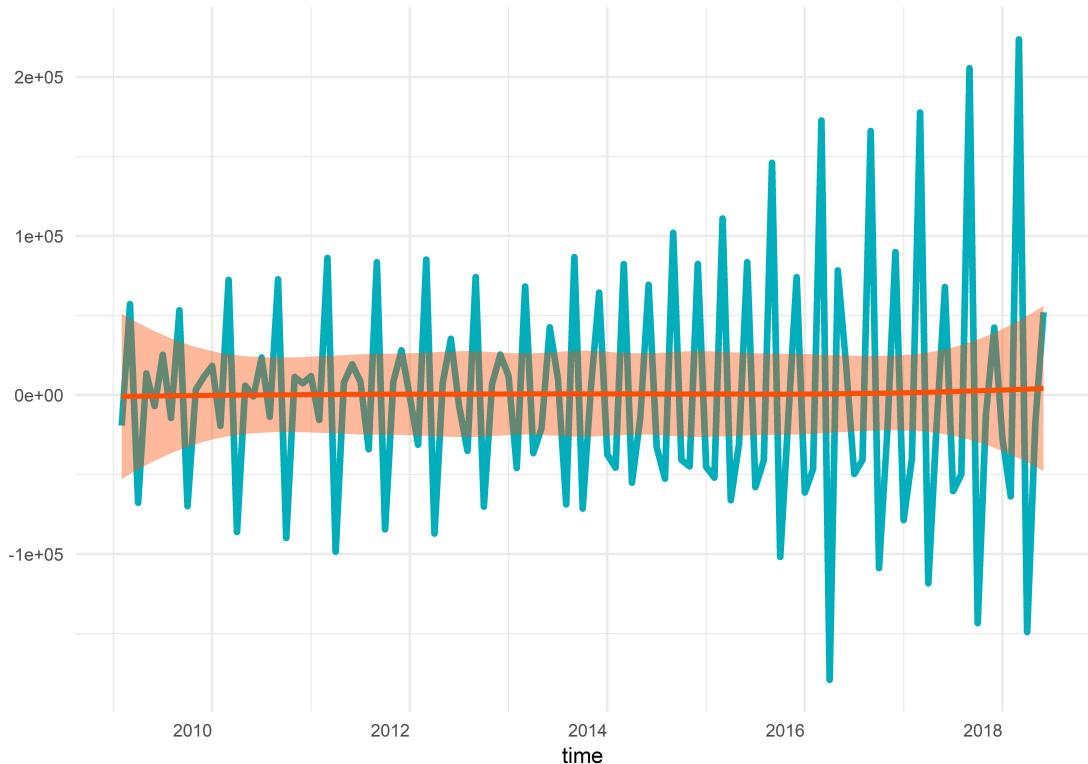


Figura 55: Autocorrelación de los datos diferenciados de la serie de intereses y comisiones del sector público

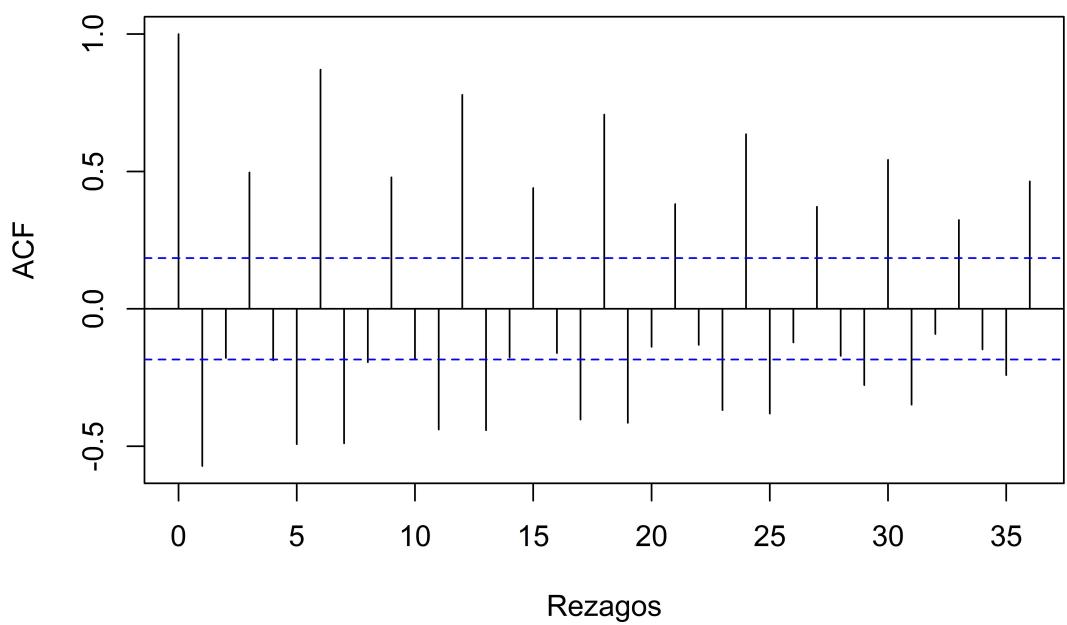
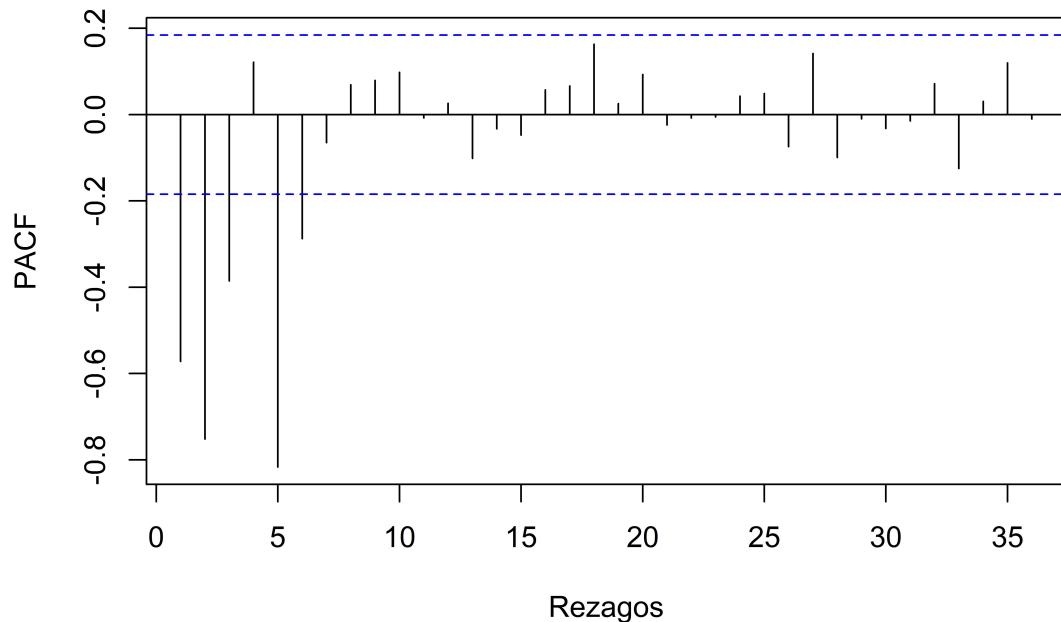


Figura 56: Autocorrelación parcial de los datos diferenciados de la serie de intereses y comisiones del sector público



4.2 Partición de los datos

Como se mencionó en la metodología, la partición utilizada consiste en tomar 80 % de las observaciones para generar el serie cronológica de entrenamiento para ajustar los modelos, mientras que el restante 20 % corresponde al la serie cronológica utilizada como validación. En el caso de los datos simulados, la ventana de observación de los datos seleccionados se muestra en la figura 57 para los datos simulados, y en la figura 58 para las series de tiempo reales.

Figura 57: Partición de los datos en los conjuntos de entrenamiento y validación para las series de tiempo simuladas

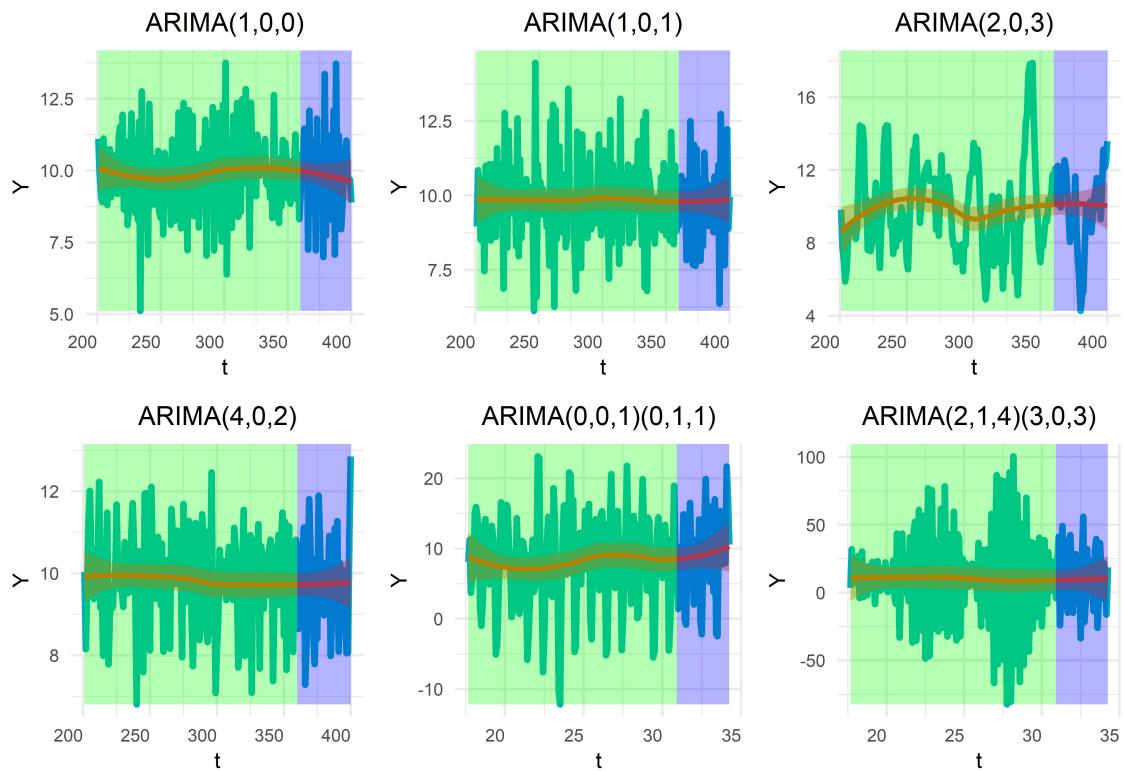
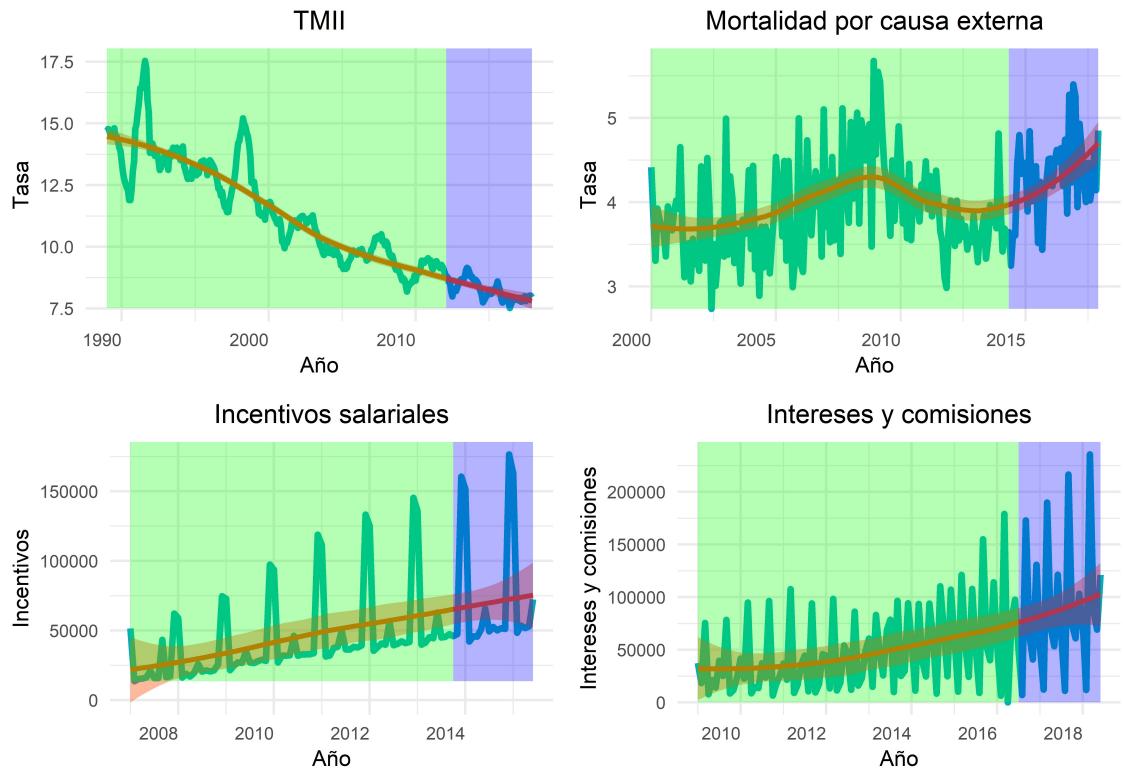


Figura 58: Partición de los datos en los conjuntos de entrenamiento y validación para las series de tiempo reales



4.3 Estimación del mejor modelo según la función `auto.arima()`

Al ajustar modelos con la función `auto.arima()`, al igual que con cualquier otro método para estimar modelos *ARIMA*, se obtienen estimaciones de coeficientes. En el caso de los datos simulados, donde se conoce el verdadero proceso que gobierna la serie de tiempo, estos valores pueden compararse con los valores obtenidos.

4.3.1 Datos simulados

El cuadro 1 resume los resultados obtenidos en la estimación de los coeficientes. En la columna *Proceso original* se indica el proceso a partir del cual se generó la serie cronológica mediante simulación, en la columna *Coeficiente* se indica el coeficiente al cual pertenecen las estimaciones presentes en las columnas *Valor real* (el valor del coeficiente del proceso original), *Estimación auto.arima()* (valor estimado del coeficiente mediante la función `auto.arima()`), *Límite Inferior* y *Límite Superior* del intervalo de confianza el 95 % para los coeficientes estimados en la columna *Estimación auto.arima()*. Como se ha mencionado, la notación más utilizada para los modelos *ARIMA* es $ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)$, que en la columna *Coeficiente* equivale a $ARIMA(ARX, d, MAX)(SARX, D, SMAX)$, con $X = \{1, 2, 3, 4\}$, según corresponda.

De esta manera, a modo de ejemplo, para los datos simulados a partir de un $ARIMA(4, 0, 2)$, los coeficientes de *AR1* hasta *AR4* representan los cuatro coeficientes de la parte autorregresiva no estacional, mientras que *MA1* y *MA2* son los dos coeficientes del modelo de medias móviles de la parte no estacional, la celda del *Valor real* correspondiente al coeficiente *MA3* está vacía porque el modelo original solo tenía dos coeficientes en el modelo de medias móviles, no tres. Así, el modelo estimado con `auto.arima()` estima únicamente los coeficientes *AR1* y *AR2* para el modelo autorregresivo, y *MA1*, *MA2* y *MA3* para el modelo de medias móviles.

4.3.2 Datos reales

En el caso de las series cronológicas reales, se toma en consideración el mejor modelo sugerido por la función `auto.arima()`. Los coeficientes obtenidos para las distintas series de tiempo costarricenses se muestran en el cuadro 2.

4.4 Estimación del mejor modelo con sobreparametrización

De manera análoga al procedimiento realizado con la función `auto.arima()`, se realiza el proceso descrito en la metodología para seleccionar el mejor modelo utilizando la sobreparametrización. Nuevamente, para los datos simulados, se conoce de previo el verdadero proceso que gobierna la serie de temporal, los cuales se comparan con los valores de los coeficientes de cada modelo obtenido mediante la sobreparametrización.

Cuadro 1: Coeficientes del proceso original y los estimados con auto.arima()

Proceso original	Coeficiente	Valor real	Estimación auto.arima()	Límite Inferior	Límite Superior
ARIMA(1,0,0)	AR1	-0.5	-0.52	-0.65	-0.39
	AR1	-0.4			
ARIMA(1,0,1)	MA1	-0.3	-0.66	-0.78	-0.55
	AR1	0.8	1.08	0.65	1.5
	AR2	-0.1	-0.37	-0.74	0.01
	MA1	0.1	-0.22	-0.62	0.19
ARIMA(2,0,3)	MA2	0.5	0.55	0.41	0.69
	MA3	0.2			
	AR1	-0.1	0.33	0.08	0.57
	AR2	-0.3	-0.68	-0.88	-0.47
	AR3	-0.4			
	AR4	-0.2			
ARIMA(4,0,2)	MA1	0.1	-0.41	-0.65	-0.17
	MA2	0.2	0.67	0.44	0.89
	MA3		-0.37	-0.52	-0.21
	MA1	0.9	0.86	0.79	0.94
ARIMA(0,0,1)(0,1,1)	SMA1	-0.5	-0.55	-0.72	-0.39
	AR1	-0.7	-0.62	-0.72	-0.52
	AR2	-0.9	-0.84	-0.93	-0.75
	MA1	-0.8	0.37	0.19	0.55
	MA2	-0.9	-0.55	-0.77	-0.33
	MA3	0.9	0.31	0.16	0.46
	MA4	0.1	0.27	0.12	0.43
	SAR1	-0.7			
	SAR2	0.2			
ARIMA(2,1,4)(3,0,3)	SAR3	0.1			
	SMA1	0.5	-0.62	-0.83	-0.41
	SMA2	-0.3	0.63	0.46	0.8
	SMA3	0.9			

Cuadro 2: Coeficientes de los modelos ajustados con a las series reales con auto.arima()

Serie	Coeficiente	Estimación	Límite Inferior	Límite Superior
	AR1	0.19	0.08	0.31
TMII	AR2	0.32	0.21	0.44
	SMA1	-0.78	-0.87	-0.69
Mortalidad por causa externa	AR1	-0.11	-0.29	0.08
	MA1	-0.82	-0.94	-0.70
Incentivos salariales	MA1	0.22	-0.06	0.49
	SAR1	0.54	0.31	0.76
Intereses y comisiones	MA1	-0.44	-0.62	-0.27

4.4.1 Datos simulados

Los mismos conceptos explicados para el cuadro 1 aplican ahora para el 3.

4.4.2 Datos reales

Para las series cronológicas reales también se toma en consideración el mejor modelo sugerido esta vez por la sobreparametrización. Los coeficientes obtenidos para las distintas series de tiempo costarricenses se muestran en el cuadro 4.

Cuadro 3: Coeficientes del proceso original y los estimados con sobreparametrización

Proceso original	Coeficiente	Valor real	Estimación sobreparametrización	Límite Inferior	Límite Superior
ARIMA(1,0,0)	AR1	-0.5	-0.52	-0.65	-0.39
	AR1	-0.4			
ARIMA(1,0,1)	MA1	-0.3	-0.66	-0.78	-0.55
	AR1	0.8	0.85	0.7	1
	AR2	-0.1	0.39	0.2	0.59
	AR3		-0.38	-0.57	-0.19
	AR4		-0.35	-0.54	-0.16
	AR5		0.27	0.12	0.42
ARIMA(2,0,3)	MA1	0.1	-1	-1.03	-0.97
	MA2	0.5			
	MA3	0.2			
	AR1	-0.1	-0.77	-1.13	-0.41
	AR2	-0.3	-0.52	-0.82	-0.22
	AR3	-0.4	-0.42	-0.6	-0.25
ARIMA(4,0,2)	AR4	-0.2	-0.4	-0.56	-0.25
	MA1	0.1	0.7	0.3	1.1
	MA2	0.2	0.39	0.09	0.68
	MA3	0.9	0.86	0.79	0.94
ARIMA(0,0,1)(0,1,1)	SMA1	-0.5	-0.55	-0.72	-0.39
	AR1	-0.7	-0.63	-0.71	-0.55
	AR2	-0.9	-0.87	-0.94	-0.8
	MA1	-0.8	-0.87	-0.99	-0.75
	MA2	-0.9	-0.87	-1.08	-0.66
	MA3	0.9	1	0.88	1.12
	MA4	0.1			
	SAR1	-0.7			
	SAR2	0.2			
ARIMA(2,1,4)(3,0,3)	SAR3	0.1			
	SMA1	0.5	-1.75	-2.09	-1.41
	SMA2	-0.3	1.37	1	1.74
	SMA3	0.9	-0.62	-0.87	-0.37

Cuadro 4: Coeficientes de los modelos ajustados con a las series reales con sobreparametrización

Serie	Coeficiente	Estimación	Límite Inferior	Límite Superior
	AR1	0.11	0.11	0.11
	AR2	0.27	0.27	0.27
	AR3	0.03	0.02	0.04
	AR4	-0.02	-0.02	-0.02
	SAR1	-1.33	-1.35	-1.32
TMII	SAR2	-1.24	-1.25	-1.22
	SAR3	-0.82	-0.83	-0.81
	SAR4	-0.39	-0.39	-0.39
	AR1	0.71	0.45	0.97
	AR2	0.24	0.04	0.44
Mortalidad por causa externa	MA1	-0.72	-0.95	-0.48
	SMA1	-1.00	-1.29	-0.71
	AR1	-0.57	-0.78	-0.37
	AR2	-0.50	-0.71	-0.29
Incentivos salariales	SAR1	0.43	0.14	0.72
	SAR2	0.35	0.04	0.65
	MA1	-1.45	-1.63	-1.27
Intereses y comisiones	MA2	0.49	0.31	0.67

4.5 Estimación de un modelo ARIMA estándar

Ajustar un modelo ARIMA genérico sirve para referenciar los demás resultados obtenidos, es decir, contrastarlos con los resultados del `auto.arima()` y la sobreparametrización. Nuevamente, para

los datos simulados se comparan los coeficientes obtenidos con los que se conocen a priori.

4.5.1 Datos simulados

Los mismos conceptos explicados para los cuadros 1 y 3 aplican ahora para el cuadro 5.

Cuadro 5: Coeficientes del proceso original y los estimados con un ARIMA estándar

Proceso original	Coeficiente	Valor real	Estimación ARIMA estándar	Límite Inferior	Límite Superior
ARIMA(1,0,0)	AR1	-0.5	-0.52	-0.66	-0.39
	MA1		-0.98	-1.03	-0.92
ARIMA(1,0,1)	AR1	-0.4	-0.56	-0.69	-0.44
	MA1	-0.3	-1	-1.03	-0.97
ARIMA(2,0,3)	AR1	0.8	0.84	0.75	0.92
	AR2	-0.1			
	MA1	0.1	-1	-1.03	-0.97
	MA2	0.5			
	MA3	0.2			
	AR1	-0.1	-0.03	-0.18	0.13
	AR2	-0.3			
	AR3	-0.4			
	AR4	-0.2			
ARIMA(4,0,2)	MA1	0.1	-1	-1.06	-0.94
	MA2	0.2			
	AR1		-0.52	-0.71	-0.34
	MA1	0.9	0.9	0.82	0.99
	SAR1		0.38	0.03	0.74
	SMA1	-0.5	-0.84	-1.18	-0.49
	AR1	-0.7	-0.3	-0.46	-0.15
	AR2	-0.9			
	MA1	-0.8	-1	-1.06	-0.94
	MA2	-0.9			
ARIMA(0,0,1)(0,1,1)	MA3	0.9			
	MA4	0.1			
	SAR1	-0.7	-0.66	-0.76	-0.55
	SAR2	0.2			
	SAR3	0.1			
	SMA1	0.5	-1	-1.15	-0.85
	SMA2	-0.3			
	SMA3	0.9			

4.5.2 Datos reales

Las series cronológicas reales, al contar con un componente estacional, se ajustan todas con un $ARIMA(1,1,1)(1,1,1)$. Los resultados aparecen en el cuadro 6.

4.6 Análisis de los errores

Al ver el comportamiento de los errores buscamos que estos se comporten como ruido blanco, es decir, que no tengan ningún patrón en particular. El autocorrelograma de los residuos también puede usarse para este fin, pues el 95 % de los valores debería estar entre las dos líneas azules. Además, un histograma de los residuos es útil para saber si los residuos siguen una distribución aproximadamente Normal; si no existen grandes desviaciones en este gráfico, entonces puede decirse que el cumplimiento de este supuesto es razonable.

Cuadro 6: Coeficientes de los modelos ajustados con a las series reales con un ARIMA estándar

Serie	Coeficiente	Estimación	Límite Inferior	Límite Superior
TMII	AR1	0.75	0.56	0.94
	MA1	-0.57	-0.80	-0.35
	SAR1	-0.48	-0.58	-0.37
	SMA1	-1.00	-1.07	-0.93
Mortalidad por causa externa	AR1	-0.22	-0.42	-0.03
	MA1	-0.76	-0.91	-0.61
	SAR1	-0.03	-0.20	0.13
	SMA1	-1.00	-1.57	-0.43
Incentivos salariales	AR1	0.06	-0.24	0.35
	MA1	-0.87	-1.03	-0.72
	SAR1	0.79	0.48	1.10
	SMA1	-0.33	-0.90	0.23
Intereses y comisiones	AR1	-0.44	-0.64	-0.24
	MA1	-0.97	-1.05	-0.88
	SAR1	0.20	-0.92	1.31
	SMA1	-0.11	-1.21	0.99

4.6.1 Datos simulados

Al estimar modelos mediante la función `auto.arima()`, la sobreparametrización y el *ARIMA* estándar, es necesario analizar el comportamiento de los errores para los seis modelos estimados con cada técnica.

4.6.1.1 Errores de los modelos estimados con `auto.arima()`

Las visualizaciones de los errores de los modelos estimados con la función `auto.arima()` se muestran en las figuras 59, 60, 61, 62, 63 y 64. En general, los modelos poseen el comportamiento esperado, aunque cuando se incorporan componentes estacionales los errores varían un poco más en los autocoreogramas y el supuesto de normalidad.

Figura 59: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,0,0) estimado con auto.arima() para los datos generados con un ARIMA(1,0,0)

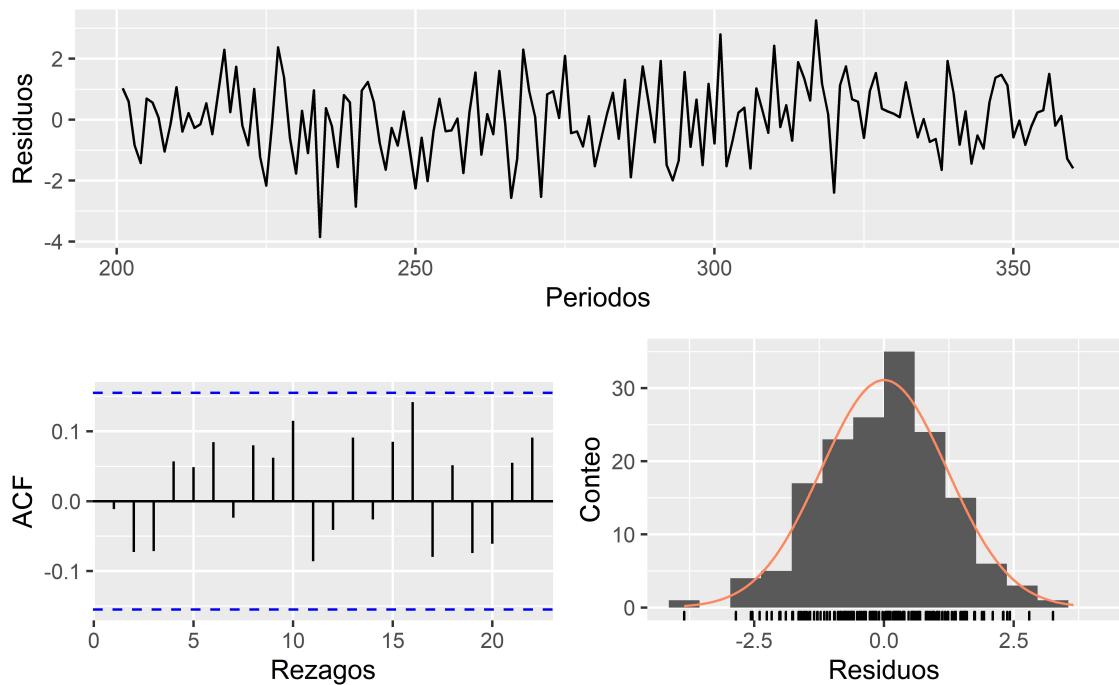


Figura 60: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(0,0,1) estimado con auto.arima() para los datos generados con un ARIMA(1,0,1)

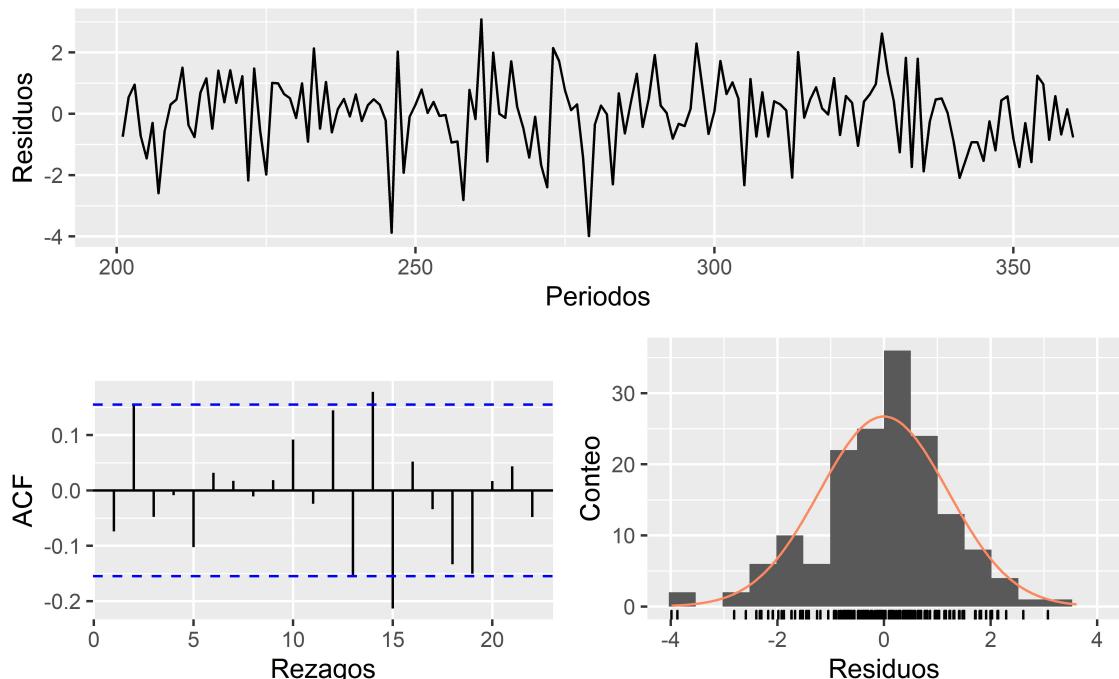


Figura 61: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(2,0,2) estimado con auto.arima() para los datos generados con un ARIMA(2,0,3)

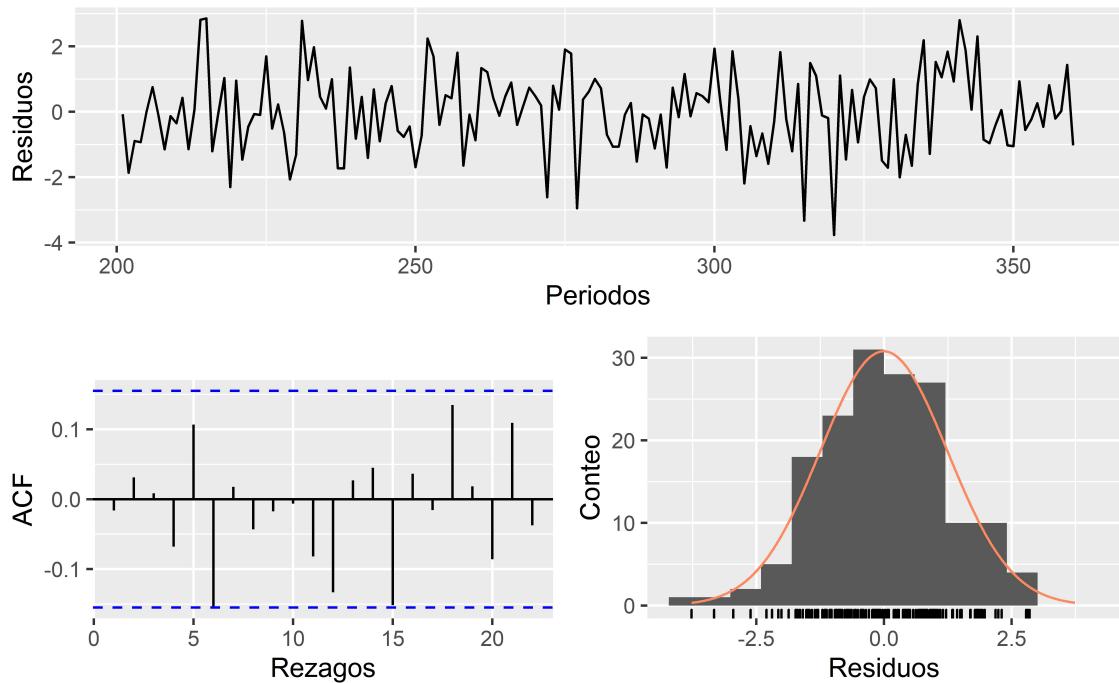


Figura 62: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(2,0,3) estimado con auto.arima() para los datos generados con un ARIMA(4,0,2)

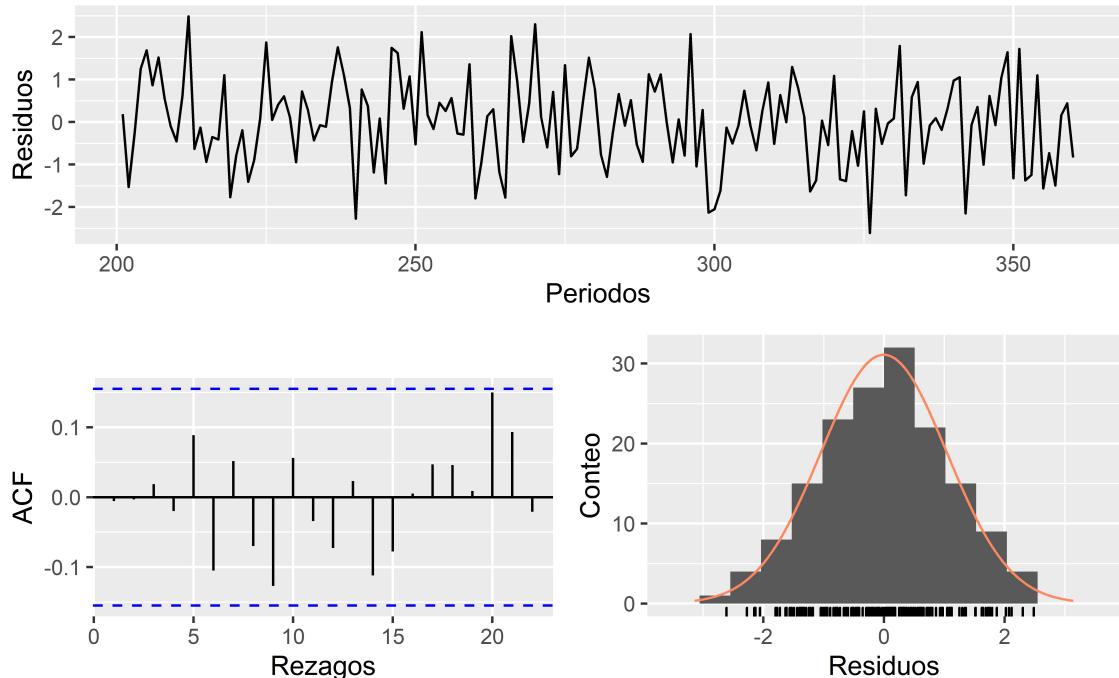


Figura 63: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(0,0,1)(0,1,1) estimado con auto.arima() para los datos generados con un ARIMA(0,0,1)(0,1,1)

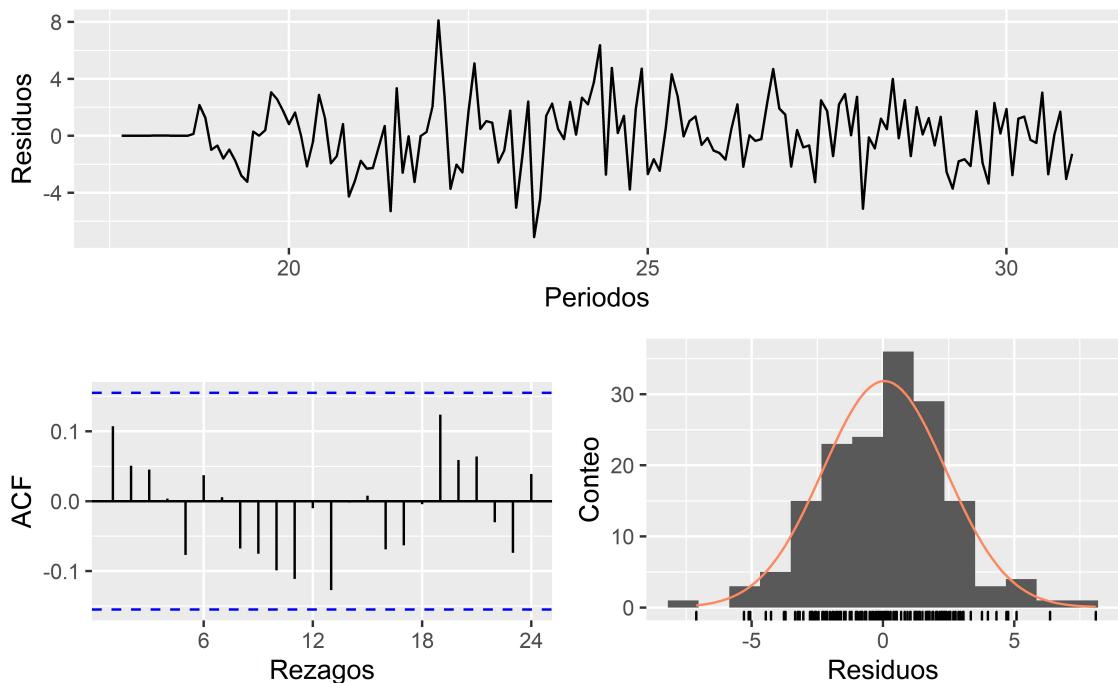
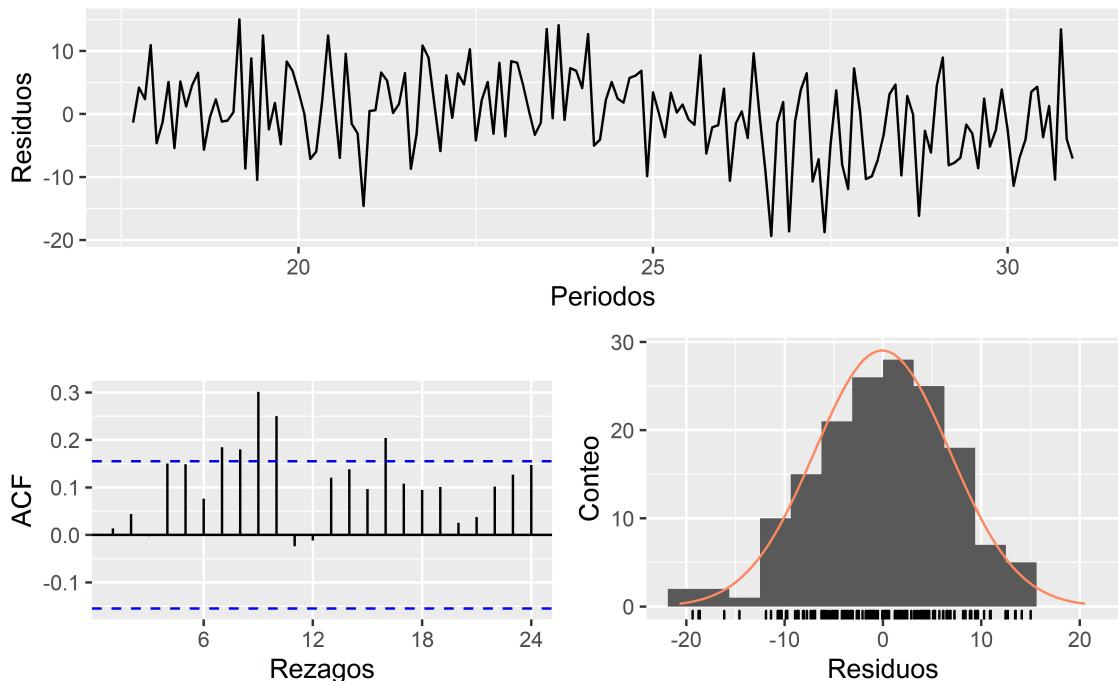


Figura 64: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(2,0,4)(0,0,2) estimado con auto.arima() para los datos generados con un ARIMA(2,1,4)(3,0,3)



4.6.1.2 Errores de los modelos estimados con sobreparametrización

Las visualizaciones de los errores de los modelos estimados con sobreparametrización se muestran en las figuras 65, 66, 67, 68, 69 y 70. En general, los modelos poseen el comportamiento esperado, incluso con menos problemas en la parte estacional.

Figura 65: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,0,0) estimado con sobreparametrización para los datos generados con un ARIMA(1,0,0)

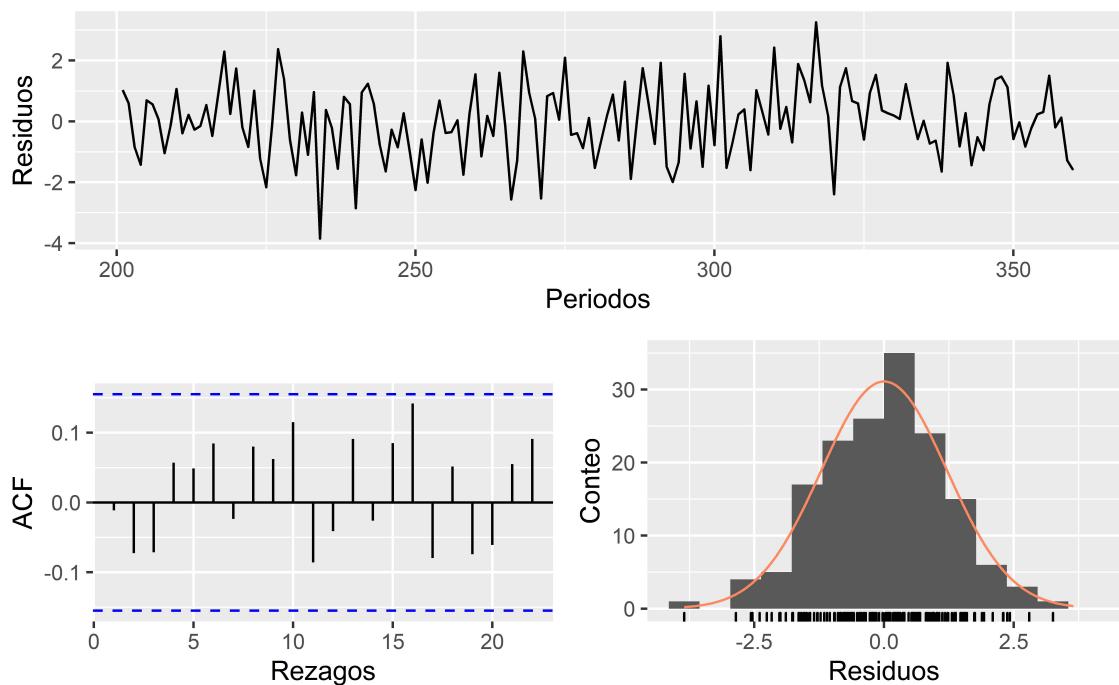


Figura 66: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(0,0,1) estimado con sobreparametrización para los datos generados con un ARIMA(1,0,1)

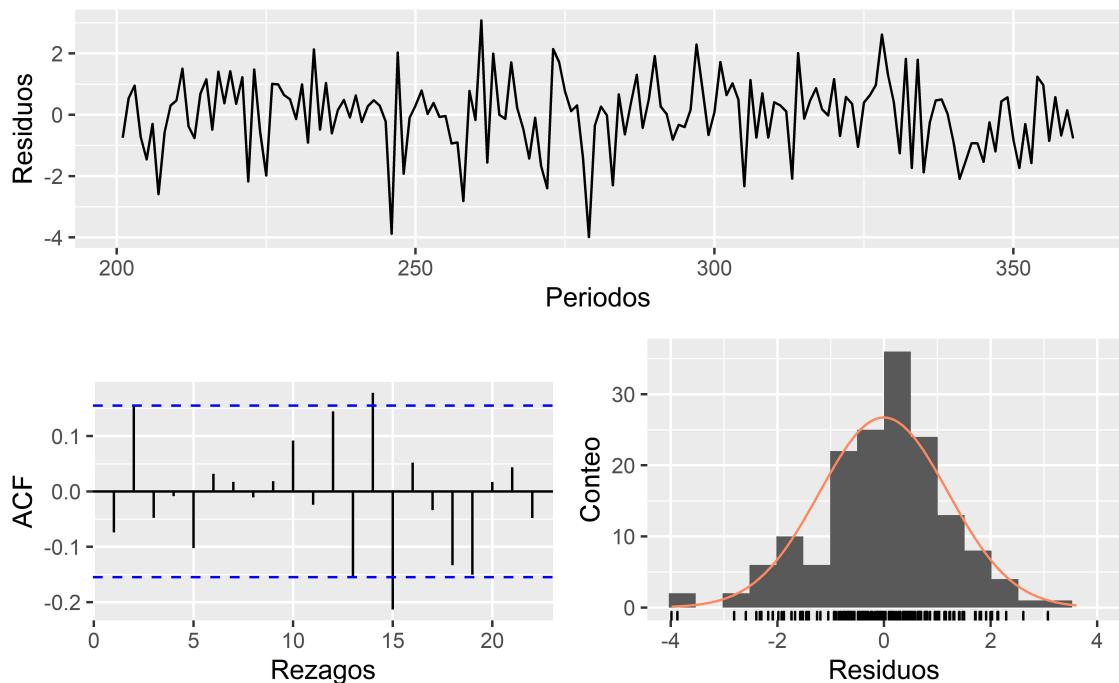


Figura 67: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(5,1,1) estimado con sobreparametrización para los datos generados con un ARIMA(2,0,3)

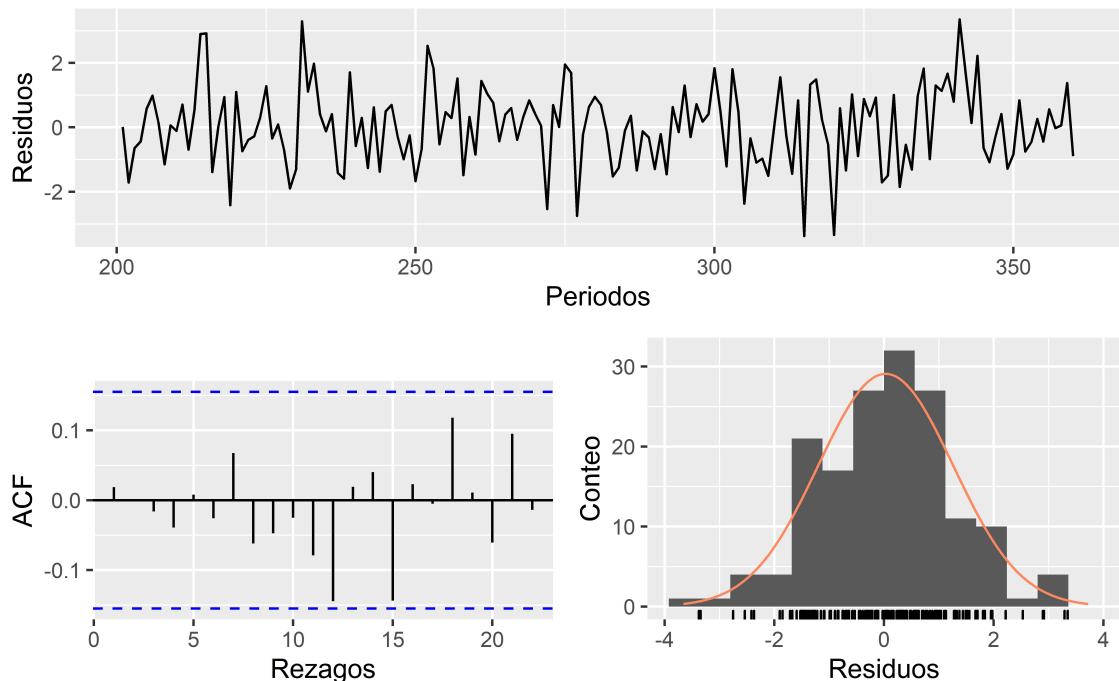


Figura 68: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(4,0,2) estimado con sobreparametrización para los datos generados con un ARIMA(4,0,2)

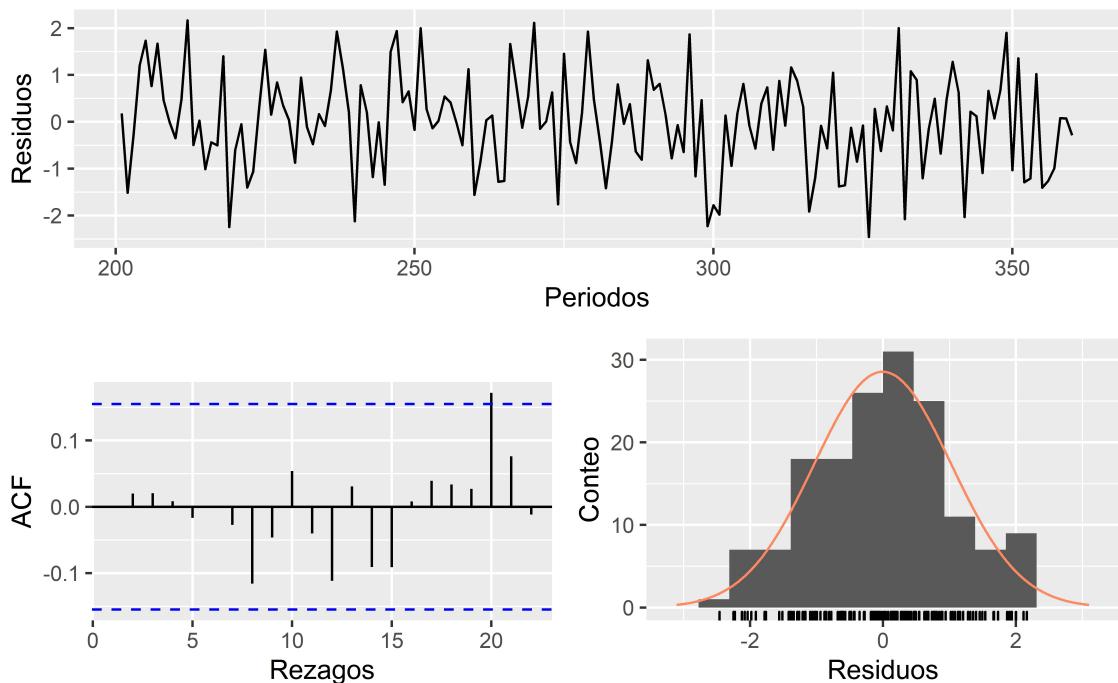


Figura 69: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(0,0,1)(0,1,1) estimado con sobreparametrización para los datos generados con un ARIMA(0,0,1)(0,1,1)

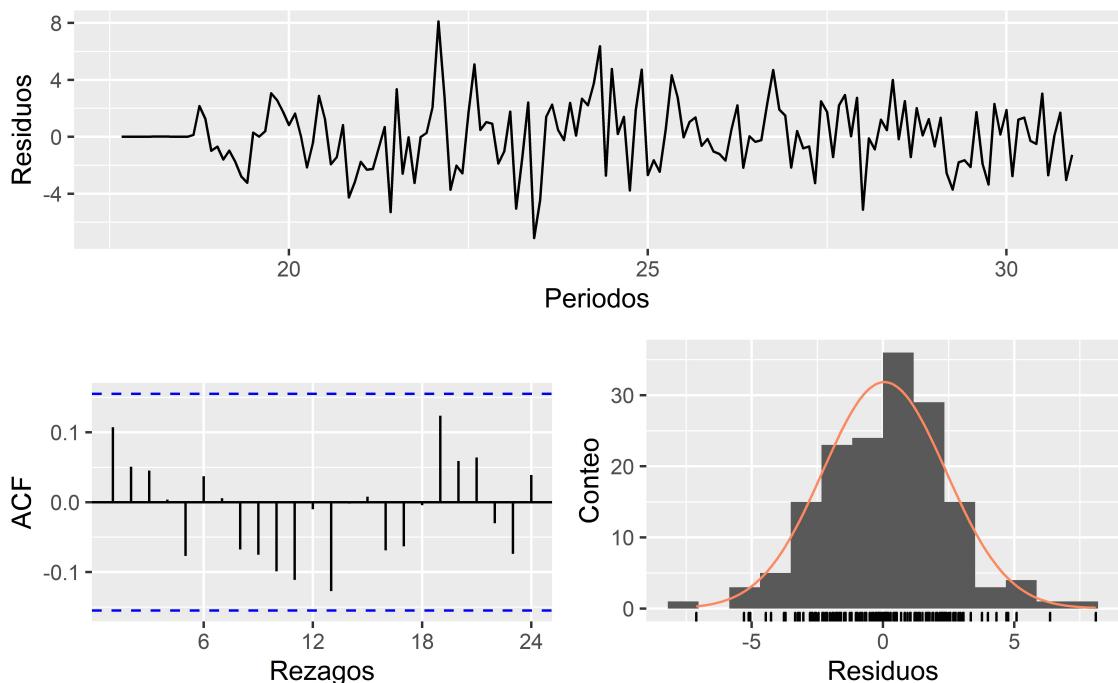
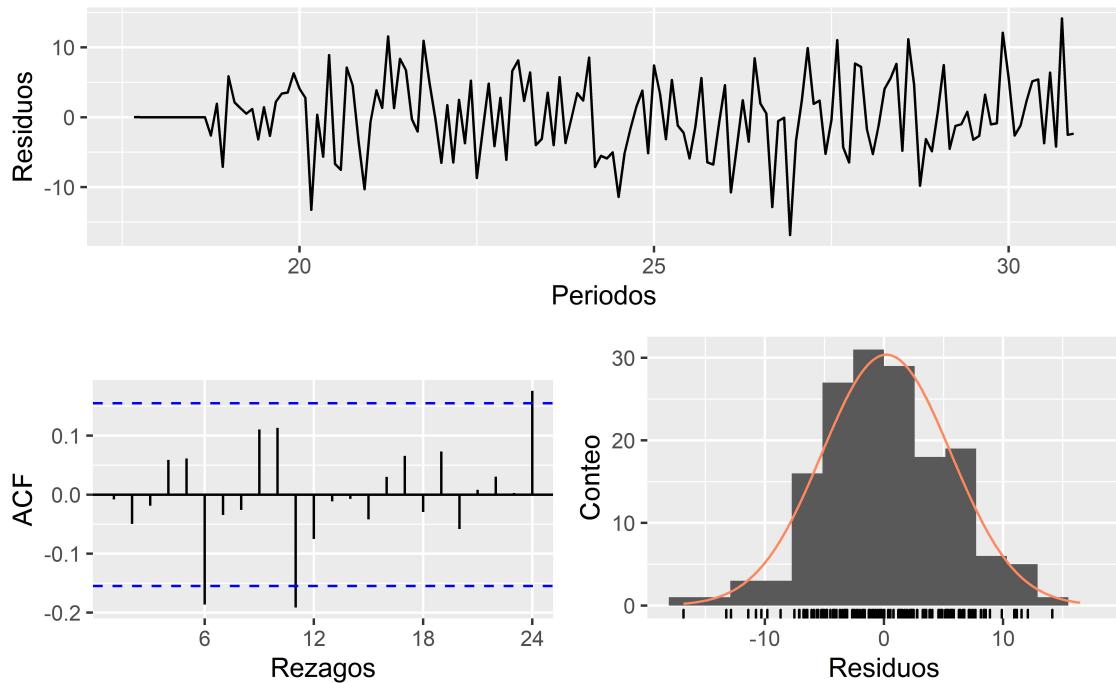


Figura 70: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(2,1,3)(0,1,3) estimado con sobreparametrización para los datos generados con un ARIMA(2,1,4)(3,0,3)



4.6.1.3 Errores de los modelos estimados con un modelo ARIMA estándar

Como ya fue mencionado, para los modelos sin parte estacional se ajustó un modelo ARIMA(1,1,1), mientras que para las series simuladas estacionales se ajustaron modelos ARIMA(1,1,1)(1,1,1). Las visualizaciones de los residuos se muestran en las figuras 71, 72, 73, 74, 75 y 76. Este tipo de moelos son los que presentan una mayor cantidad de inconvenientes, particularmente en los autocoreogramas, donde varios modelos se salen de los márgenes.

Figura 71: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1) estimado con los datos generados con un ARIMA(1,0,0)

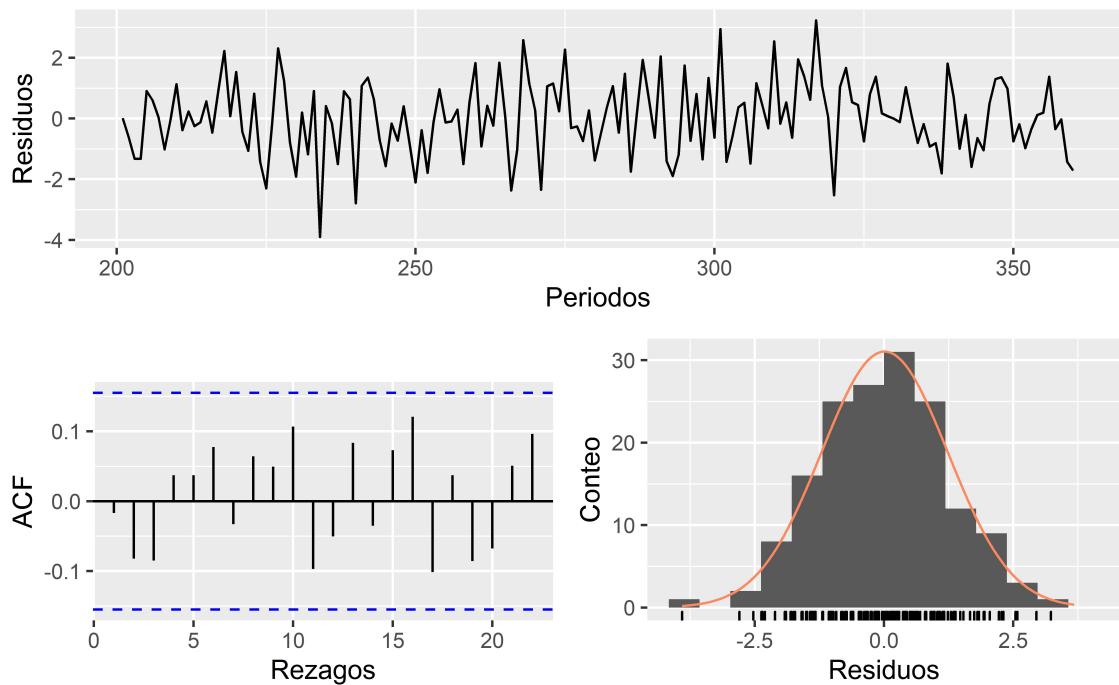


Figura 72: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1) estimado con los datos generados con un ARIMA(1,0,1)

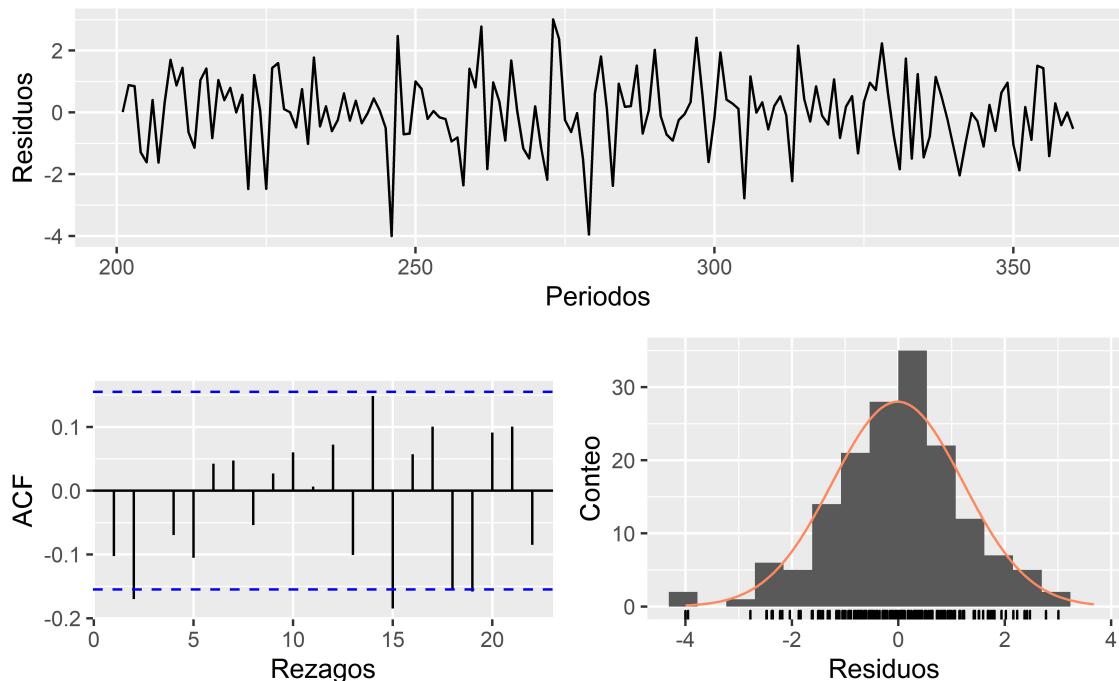


Figura 73: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1) estimado con los datos generados con un ARIMA(2,0,3)

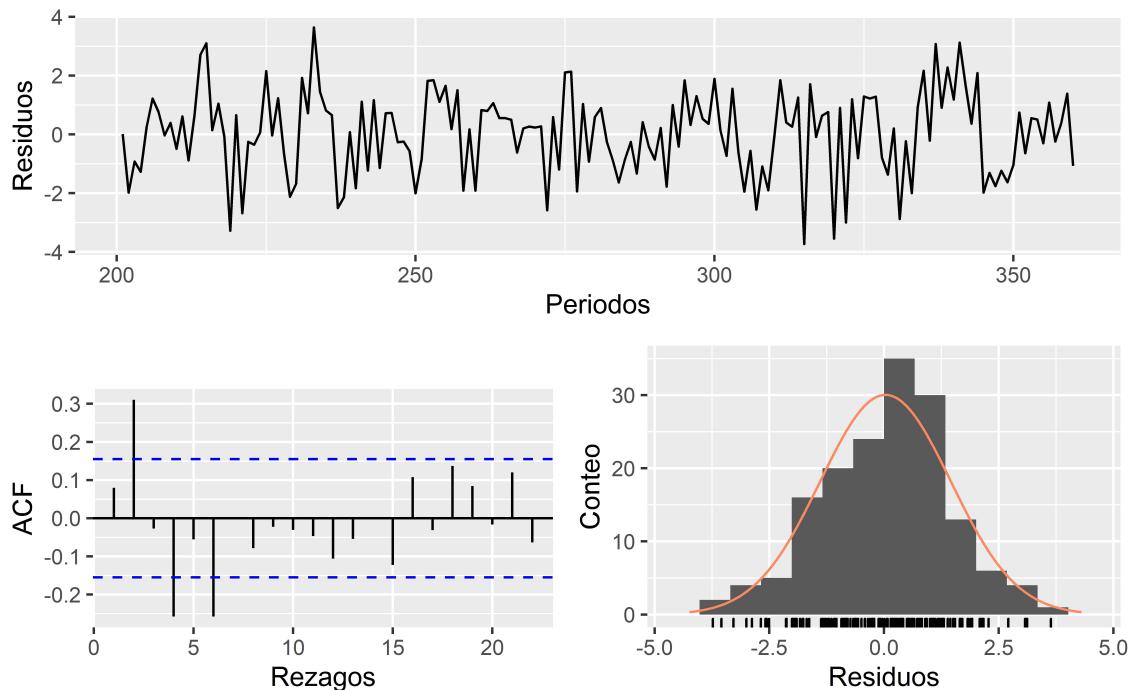


Figura 74: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1) estimado con los datos generados con un ARIMA(4,0,2)

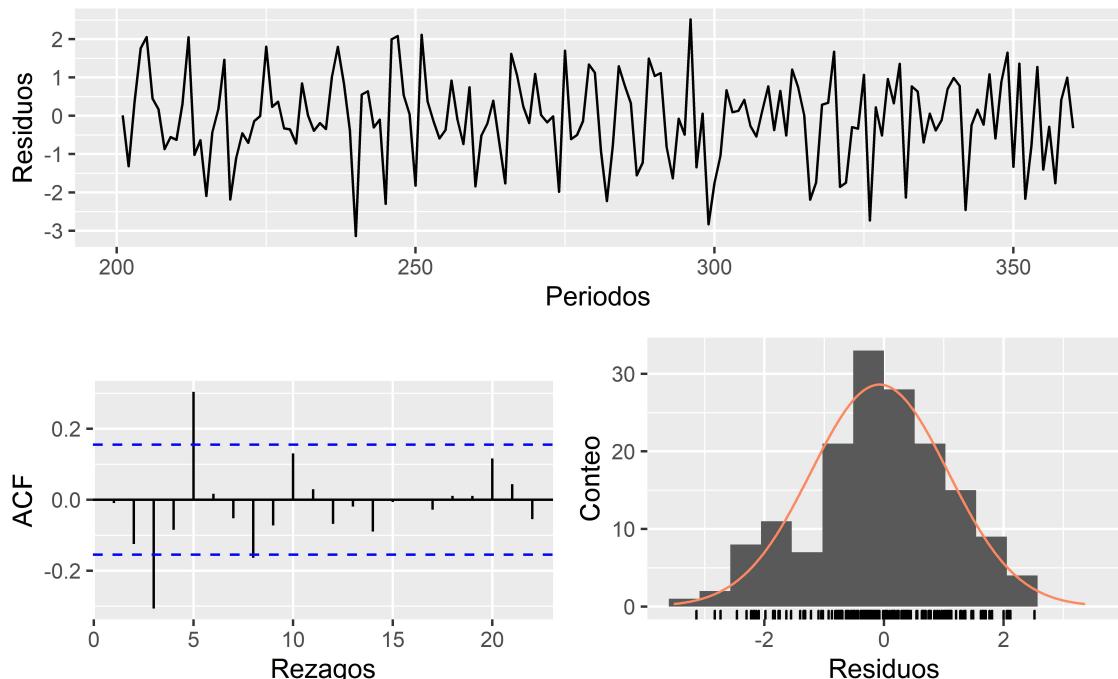


Figura 75: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1)(1,1,1) estimado con los datos generados con un ARIMA(0,0,1)(0,1,1)

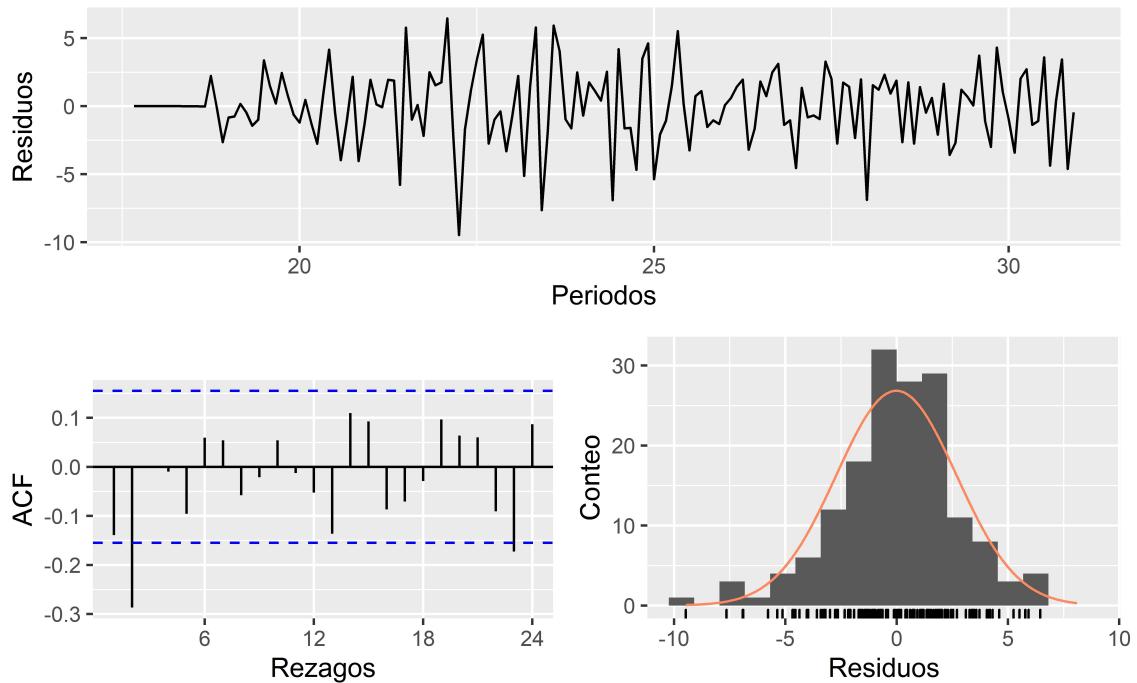
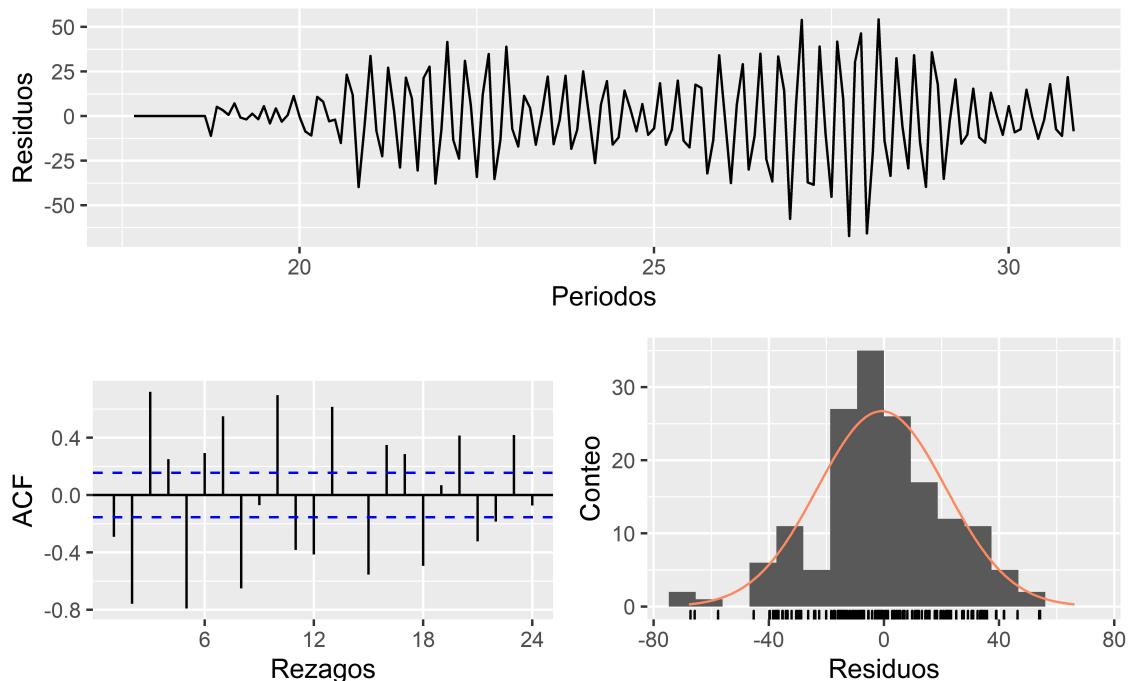


Figura 76: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1)(1,1,1) estimado con los datos generados con un ARIMA(2,1,4)(3,0,3)



4.6.2 Datos reales

4.6.2.1 Errores de los modelos estimados con `auto.arima()`

Las visualizaciones de los errores de los modelos estimados con la función `auto.arima()` para las series reales se muestran en las figuras 77, 78, 79, 80. Los mejores resultados se obtienen al modelar la tasa de mortalidad infantil interanual y la tasa de mortalidad por causa externa, más no en los otros dos casos.

Figura 77: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(2,1,0)(0,0,1) estimado con `auto.arima()` para la tasa de mortalidad infantil interanual

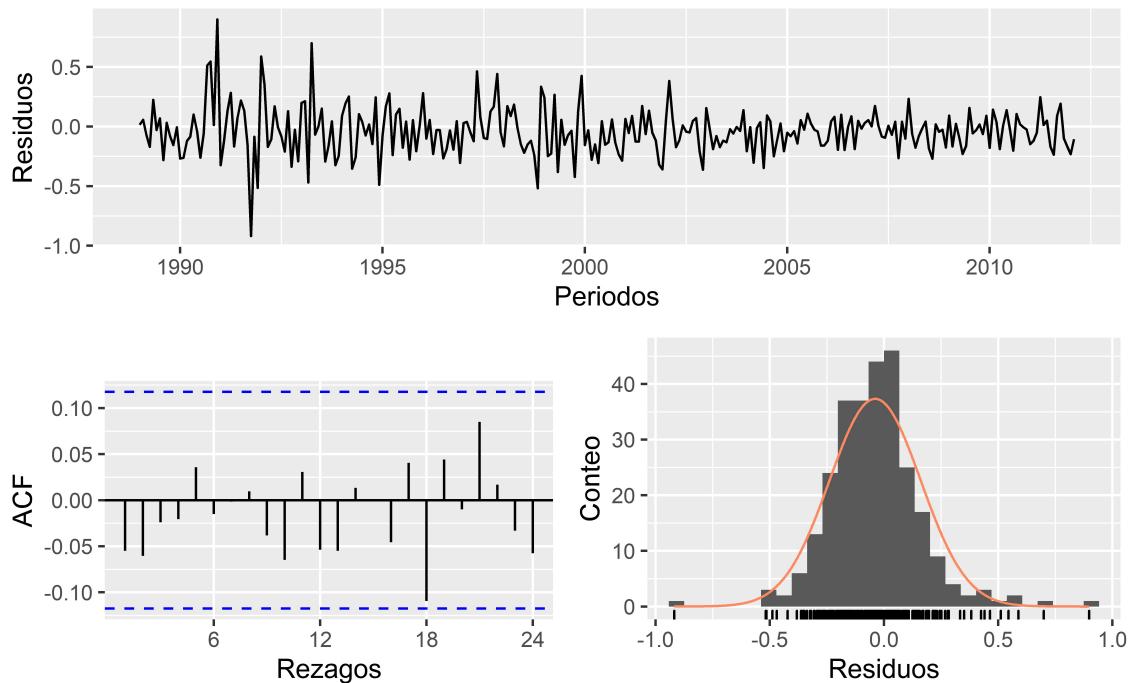


Figura 78: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1) estimado con auto.arima() para la tasa de mortalidad por causa externa

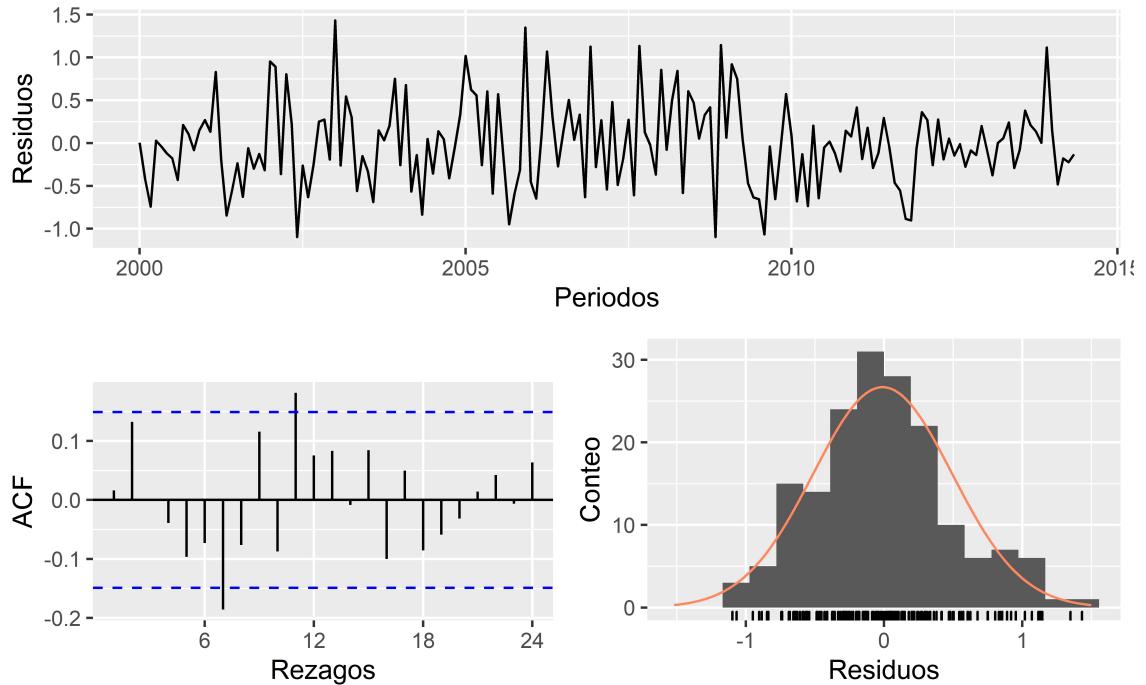


Figura 79: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(0,0,1)(1,1,0) estimado con auto.arima() para los incentivos salariales

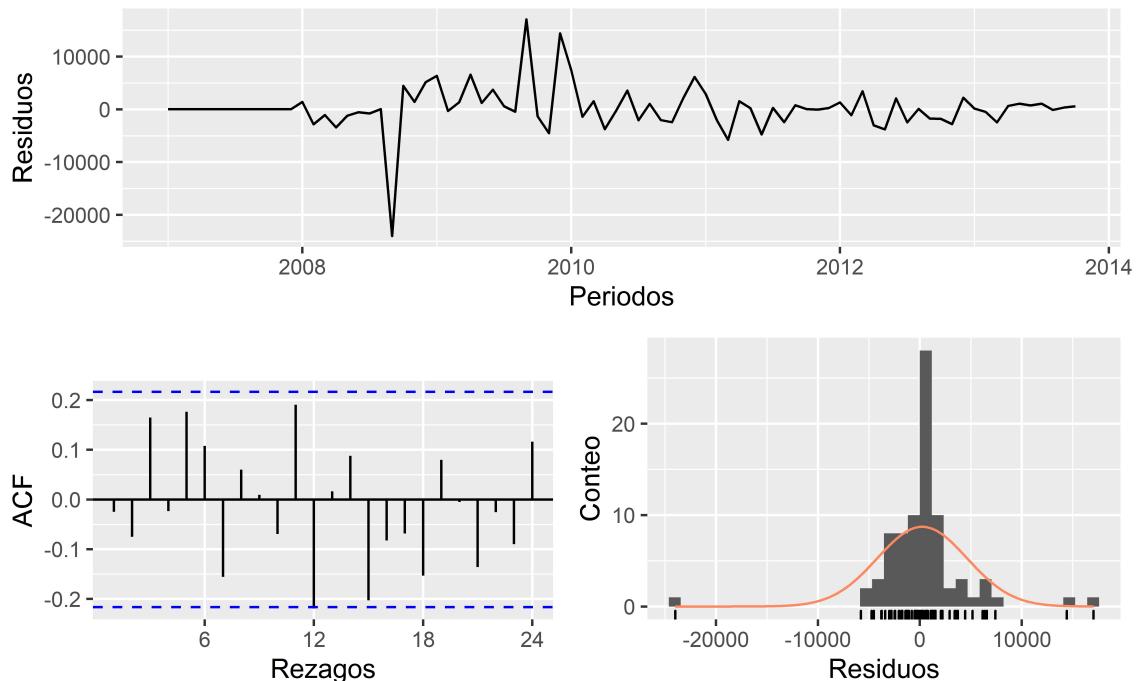
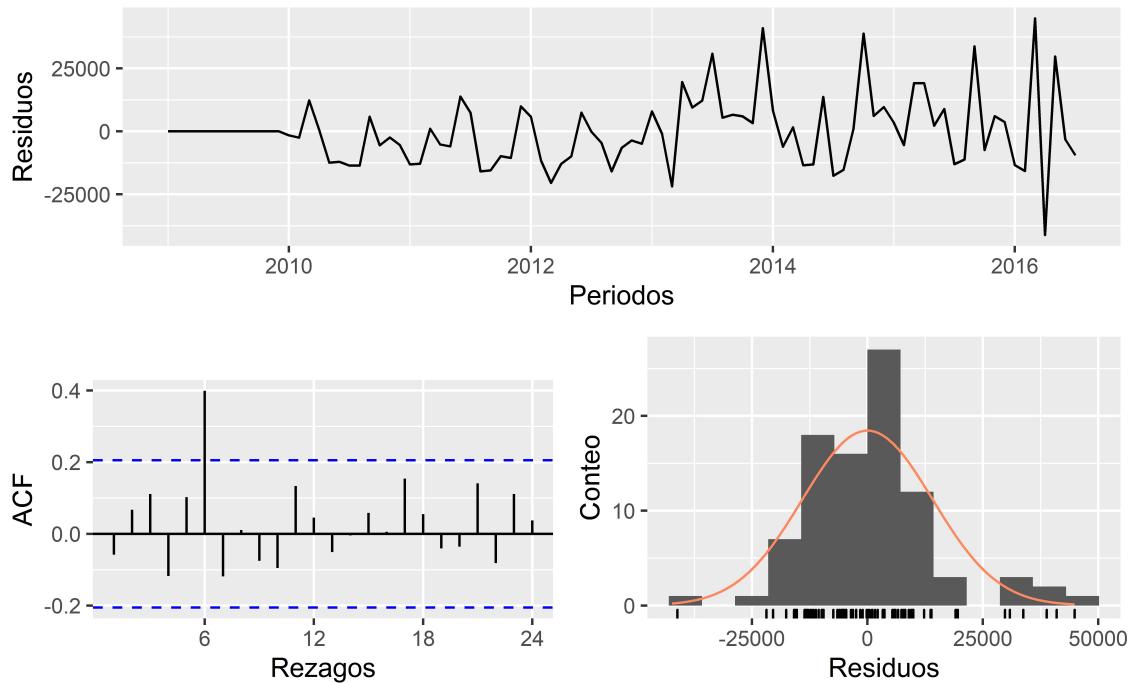


Figura 80: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(0,0,1)(0,1,0) estimado con `auto.arima()` para los intereses y comisiones del sector público



4.6.2.2 Errores de los modelos estimados con sobreparametrización

Las visualizaciones de los errores de los modelos estimados mediante sobreparametrización para las series reales se muestran en las figuras 81, 82, 83, 84. Los mejores resultados se obtienen también al modelar la tasa de mortalidad infantil interanual y la tasa de mortalidad por causa externa, pues en las series temporales de incentivos salariales y de intereses y comisiones del sector público, algunos valores se salen de rango.

Figura 81: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(4,1,0)(4,1,0) estimado con sobreparametrización para la tasa de mortalidad infantil interanual

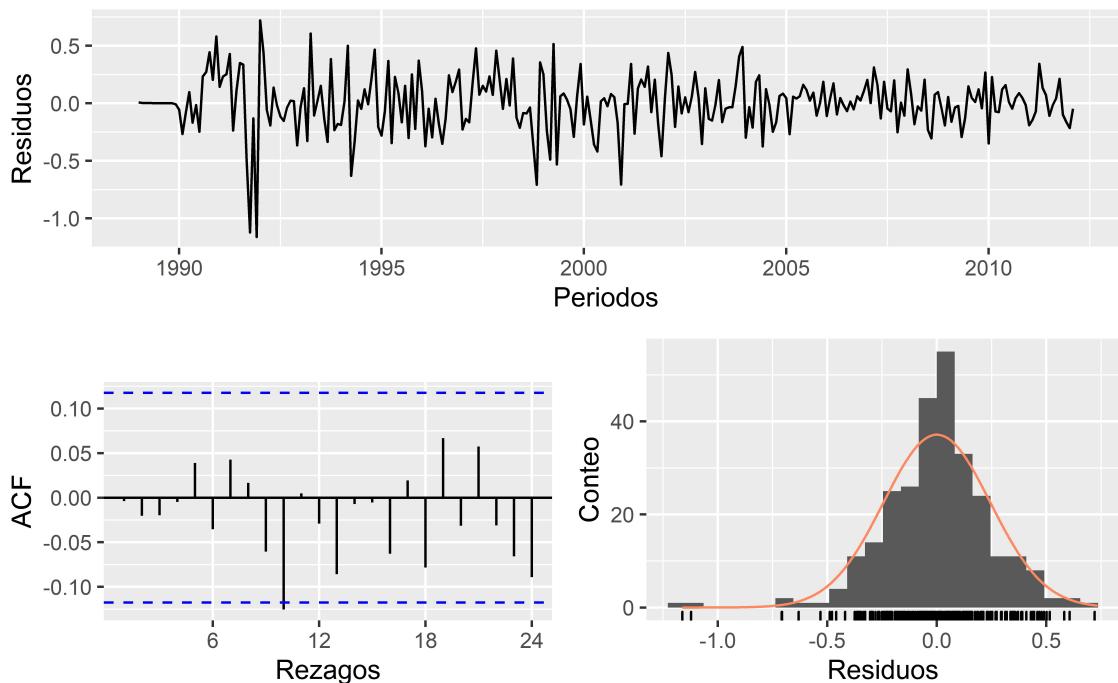


Figura 82: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(2,0,1)(0,1,1) estimado con sobreparametrización para la tasa de mortalidad por causa externa

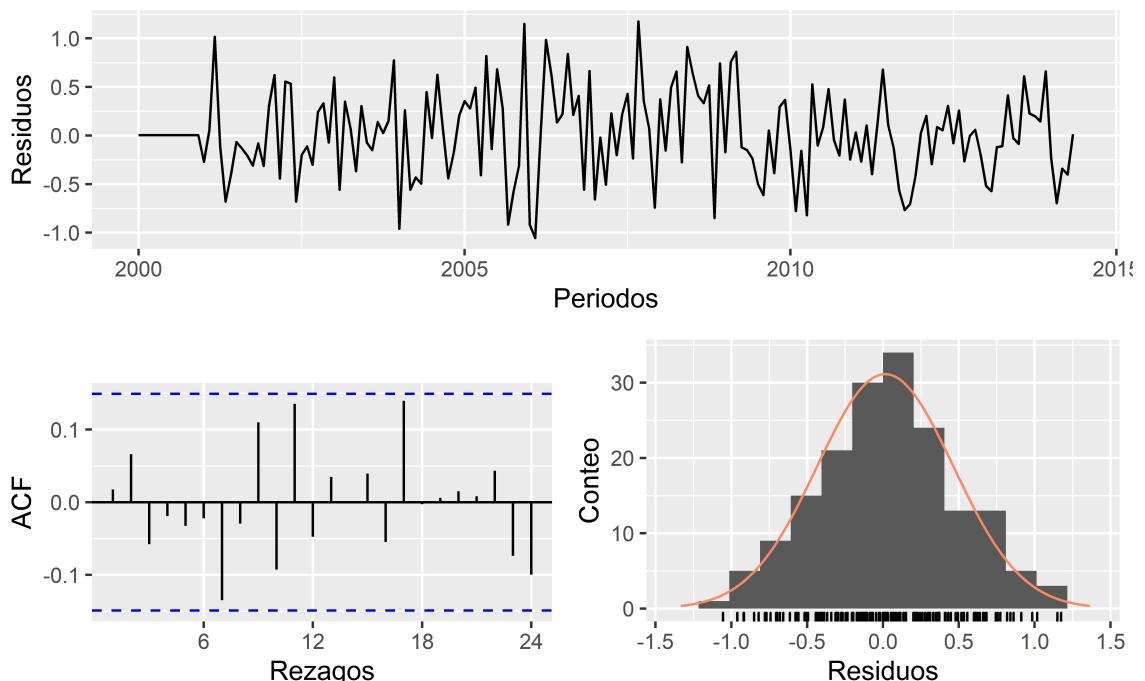


Figura 83: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(2,1,0)(1,2,0) estimado con sobreparametrización para los incentivos salariales

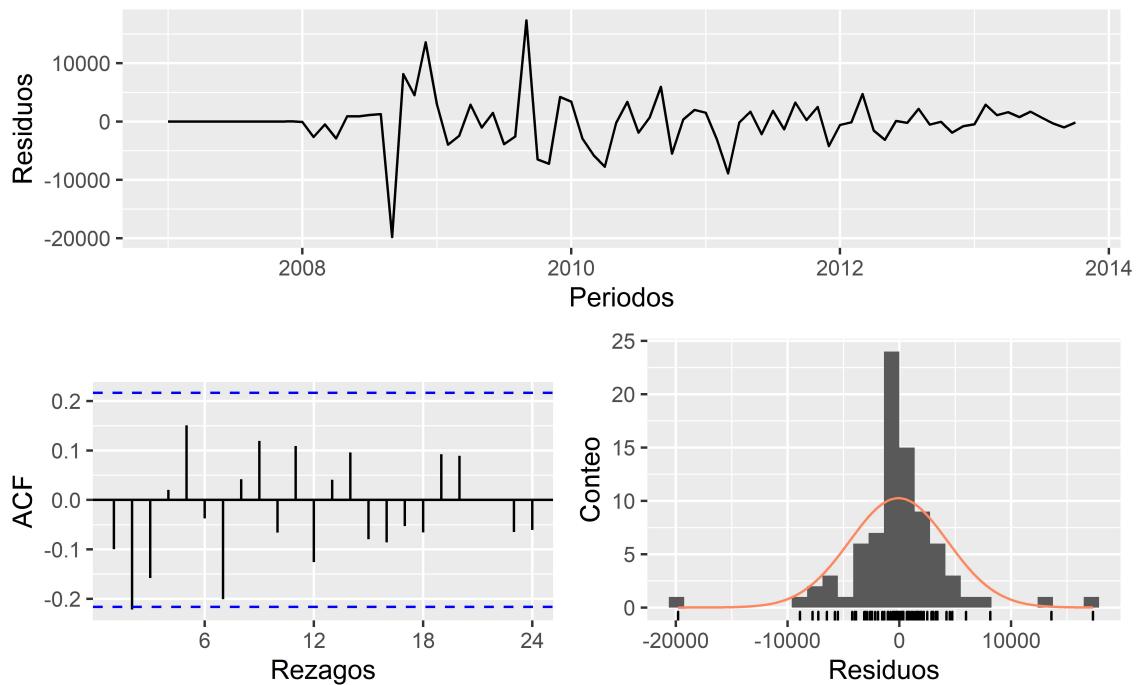
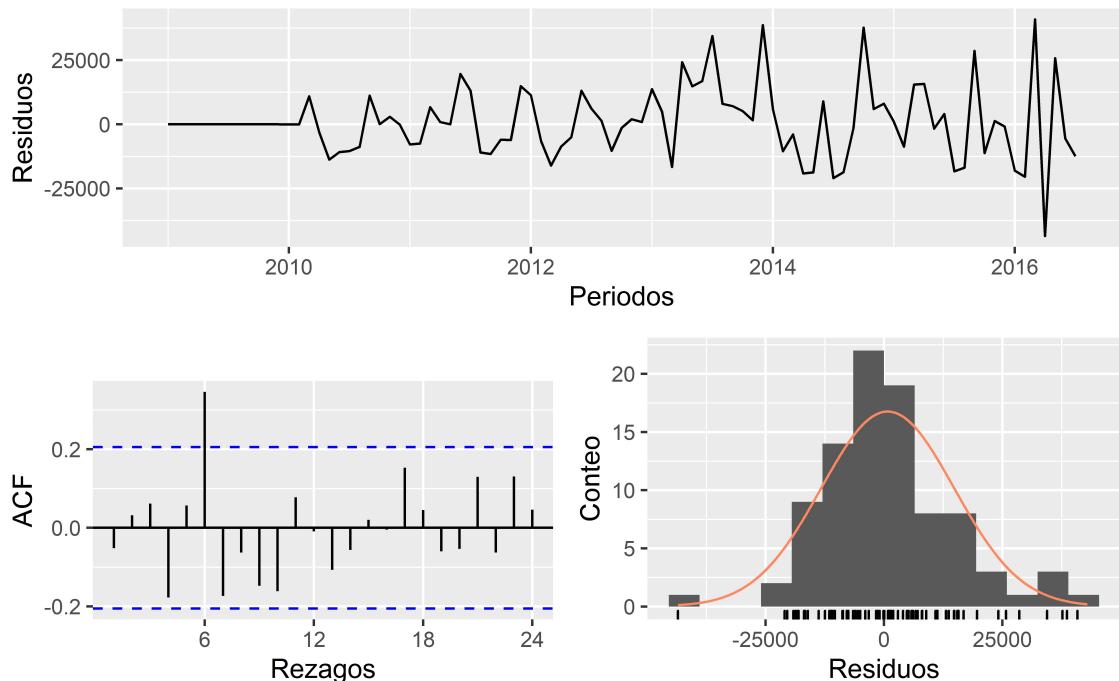


Figura 84: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(0,1,2)(0,1,0) estimado con sobreparametrización para los intereses y comisiones del sector público



4.6.2.3 Errores de los modelos estimados con un modelo ARIMA estándar

Las visualizaciones de los errores de los modelos estimados mediante mdelos $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)$ para las series reales se muestran en las figuras 85, 86, 87, 88. De manera muy similar a los casos anteriores, los mejores resultados se obtienen también al modelar la tasa de mortalidad infantil interanual y la tasa de mortalidad por causa externa, mientras que en las series temporales de incentivos salariales y de intereses y comisiones del sector público, algunos valores se salen de rango.

Figura 85: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1)(1,1,1) para la tasa de mortalidad infantil interanual

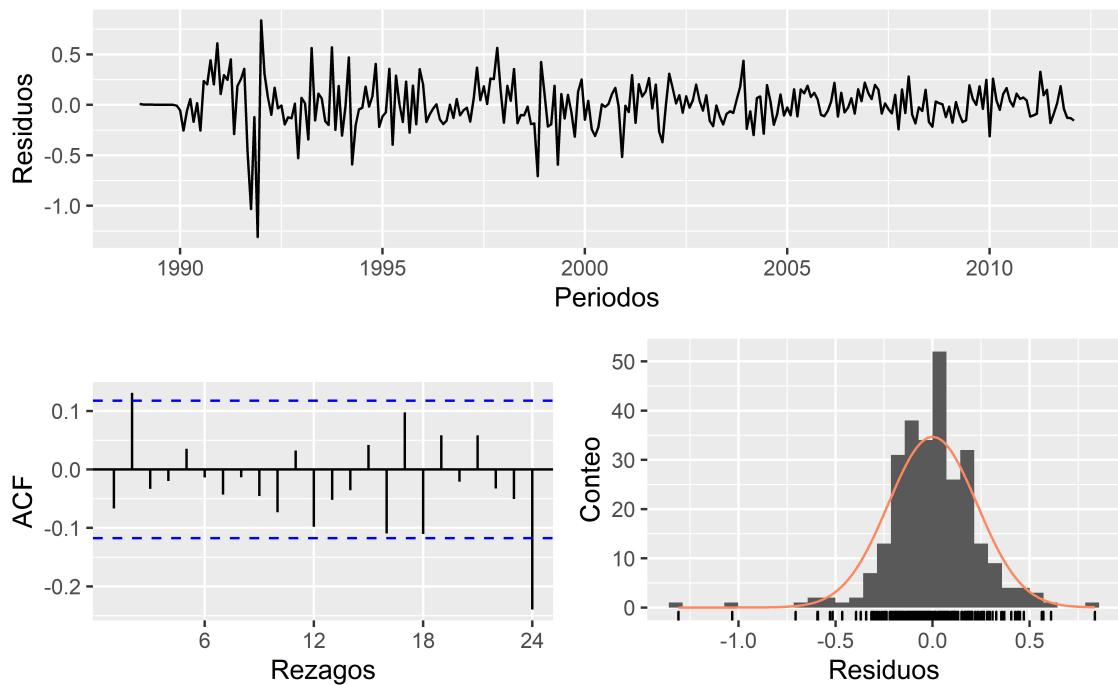


Figura 86: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1)(1,1,1) para la tasa de mortalidad por causa externa

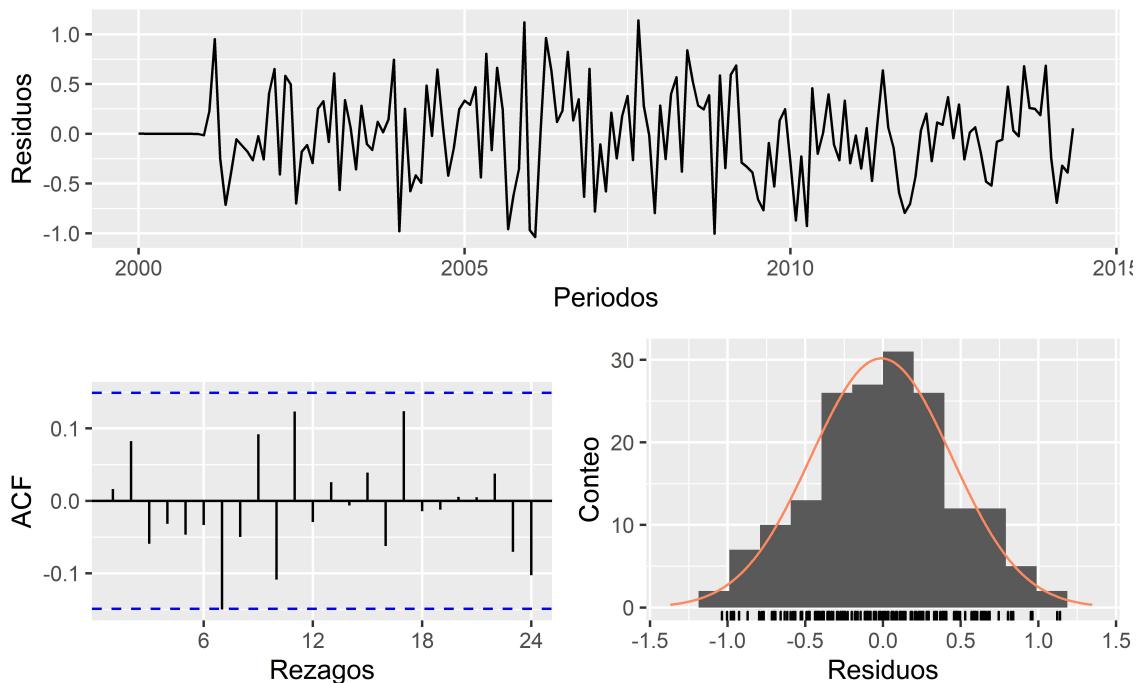


Figura 87: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1)(1,1,1) para los incentivos salariales

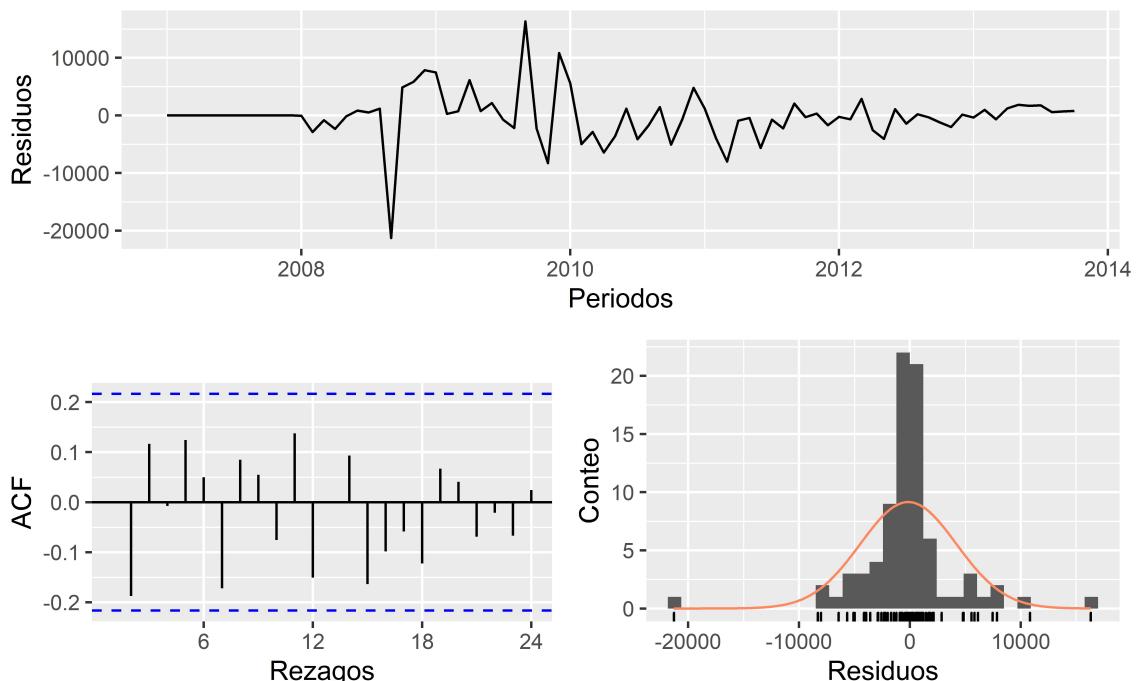
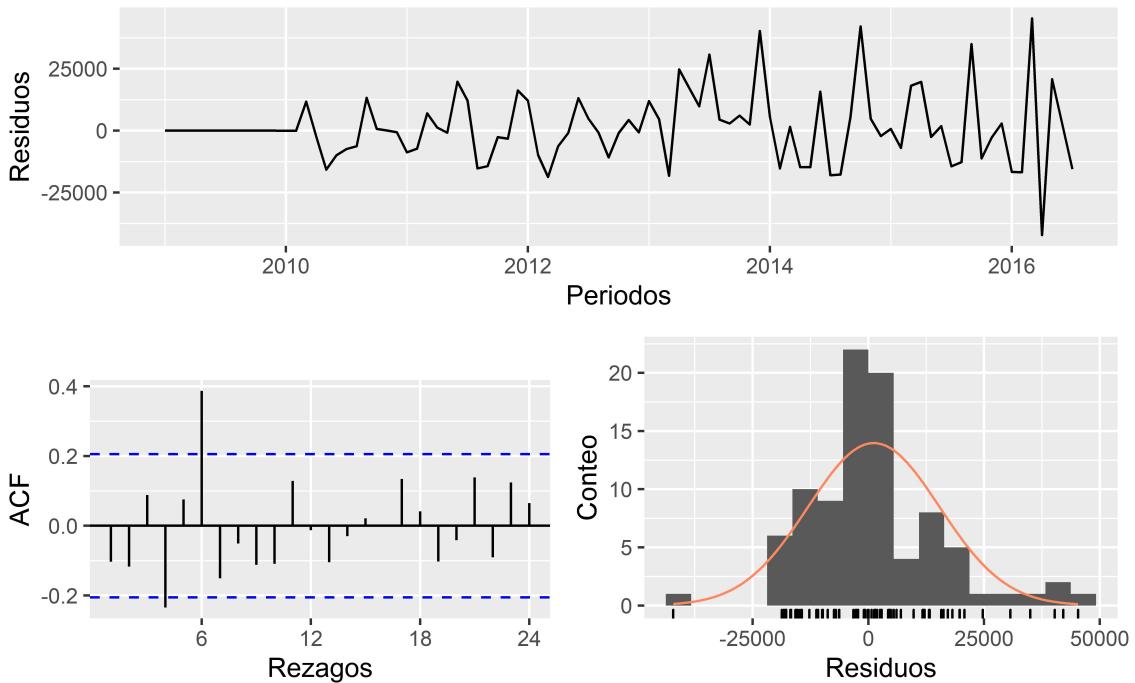


Figura 88: Comportamiento de los errores del modelo ARIMA(1,1,1)(1,1,1) para los intereses y comisiones del sector público



4.7 Pronósticos

Los pronósticos son parte fundamental del análisis de series cronológicas. En esta sección se realiza una inspección visual tanto para los datos simulados como para las series de tiempo de datos costarricenses.

4.7.1 Datos simulados

Las figuras 89, 90, 91, 92, 93 y 94 muestran el ajuste y el pronóstico de cada uno de los modelos estimados con la función `auto.arima()`, con sobreparametrización y con el modelo *ARIMA* estándar. En todos los casos, la línea vertical punteada indica el inicio del periodo de pronóstico.

Figura 89: Pronóstico de los datos generados mediante un ARIMA(1,0,0) según el método de estimación

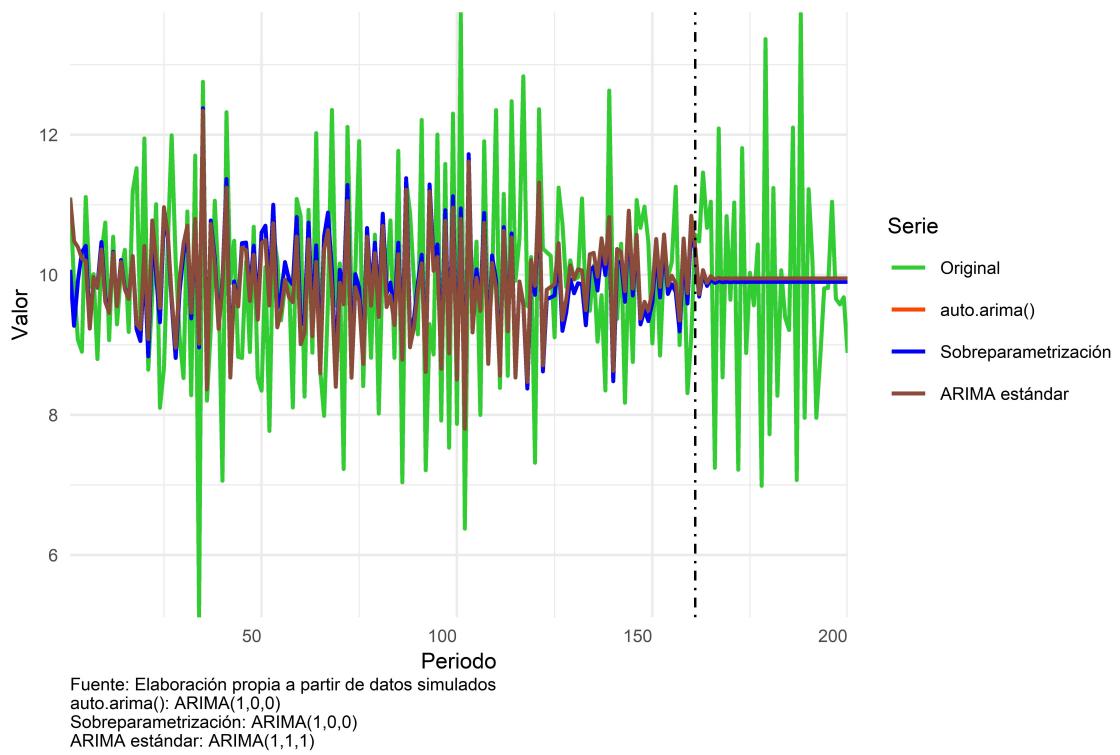


Figura 90: Pronóstico de los datos generados mediante un ARIMA(1,0,1) según el método de estimación

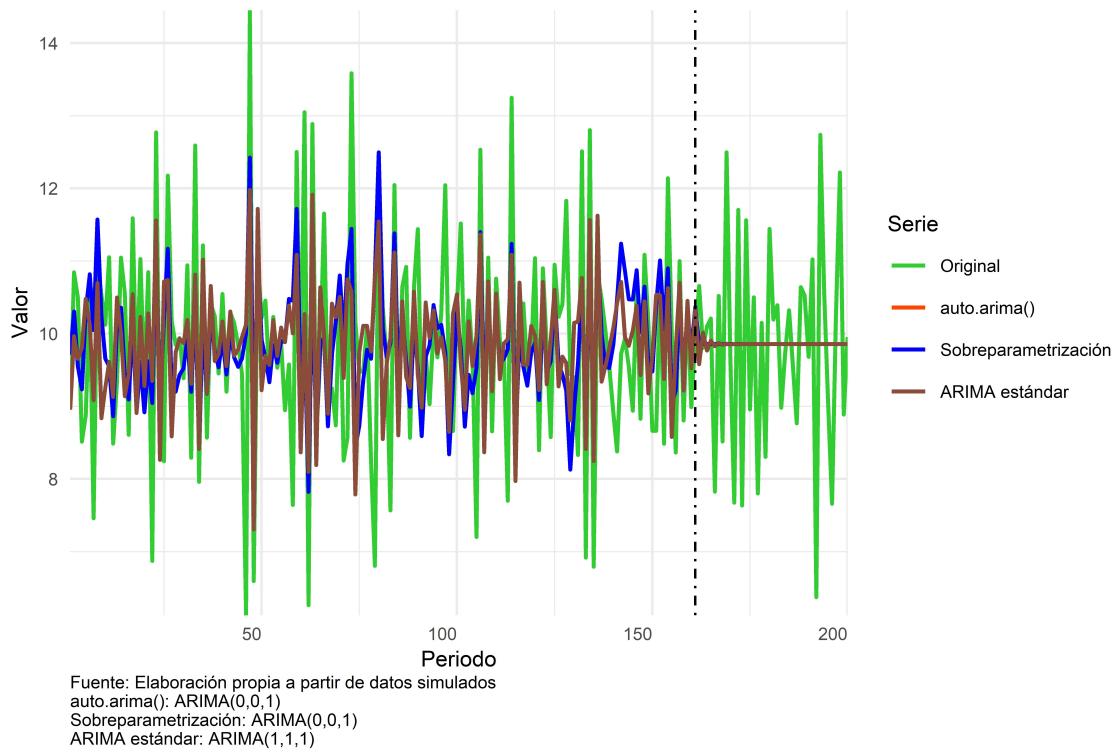


Figura 91: Pronóstico de los datos generados mediante un ARIMA(2,0,3) según el método de estimación

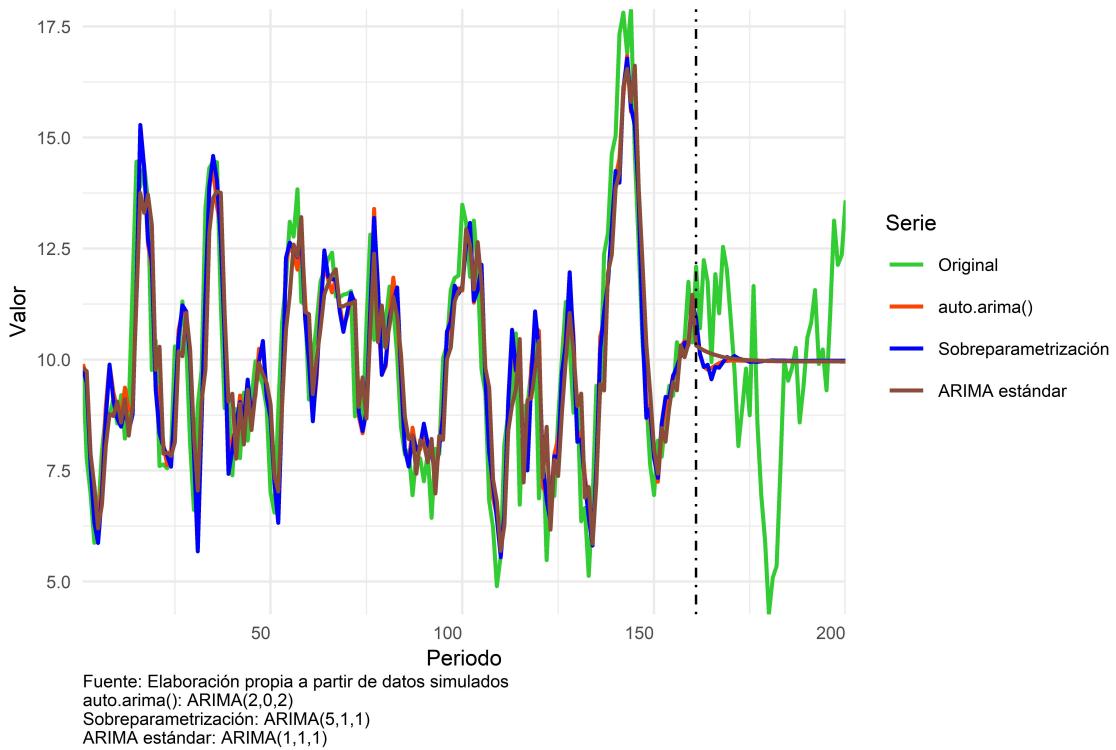


Figura 92: Pronóstico de los datos generados mediante un ARIMA(4,0,2) según el método de estimación

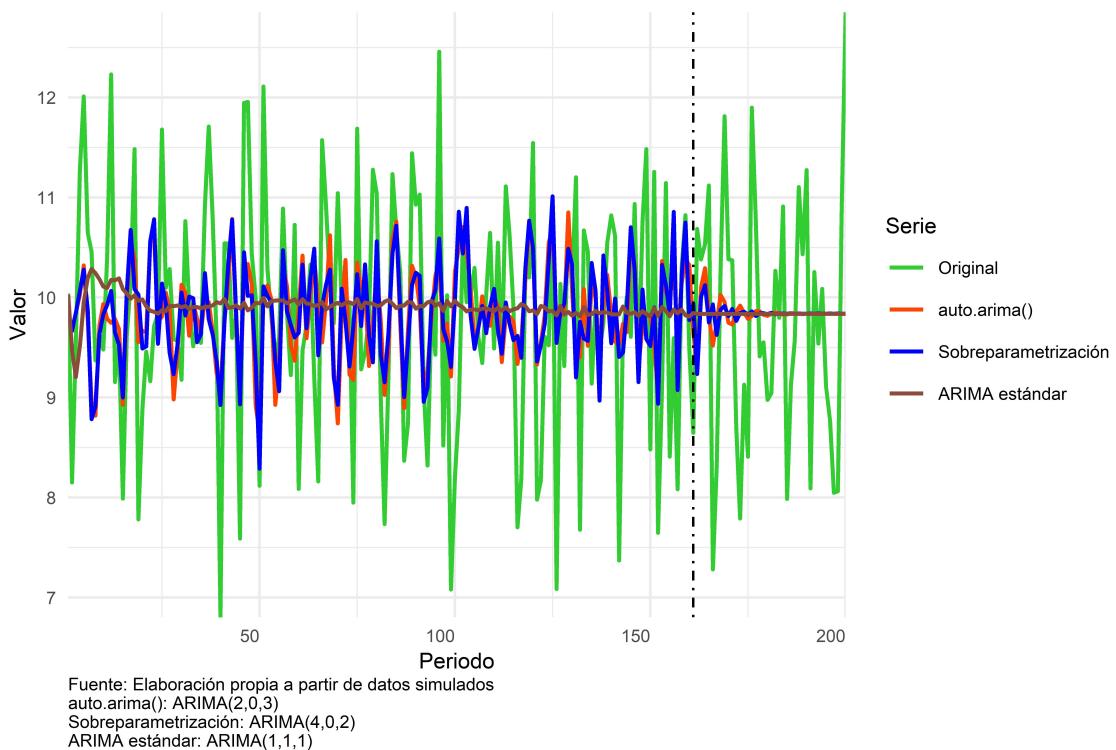


Figura 93: Pronóstico de los datos generados mediante un ARIMA(0,0,1)(0,1,1) según el método de estimación

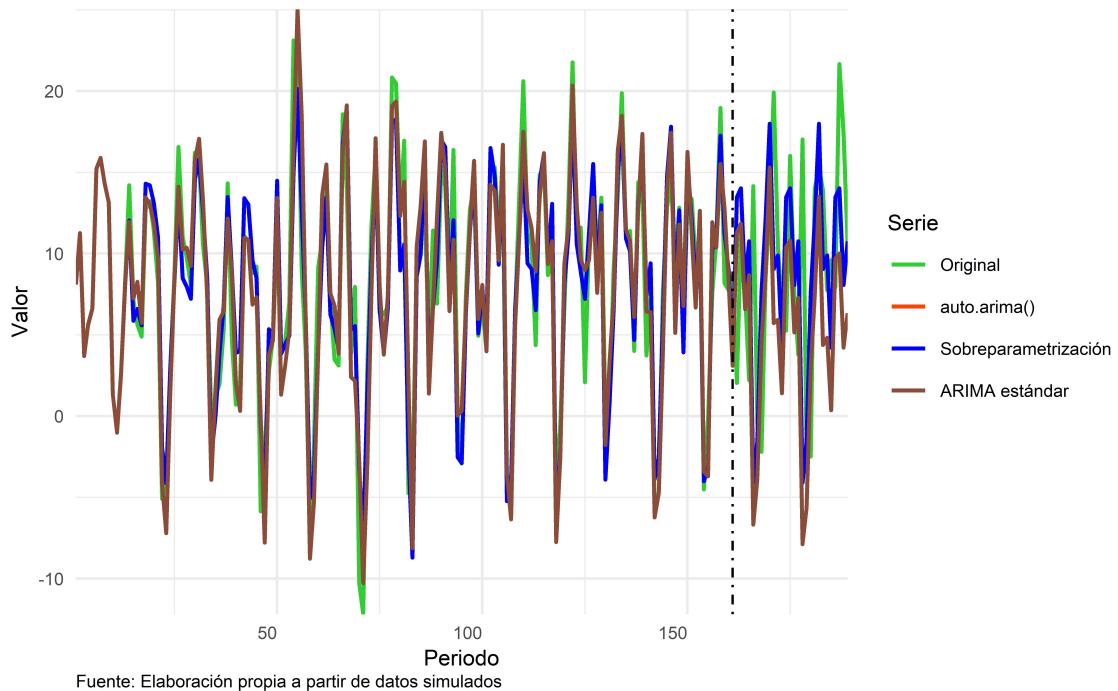
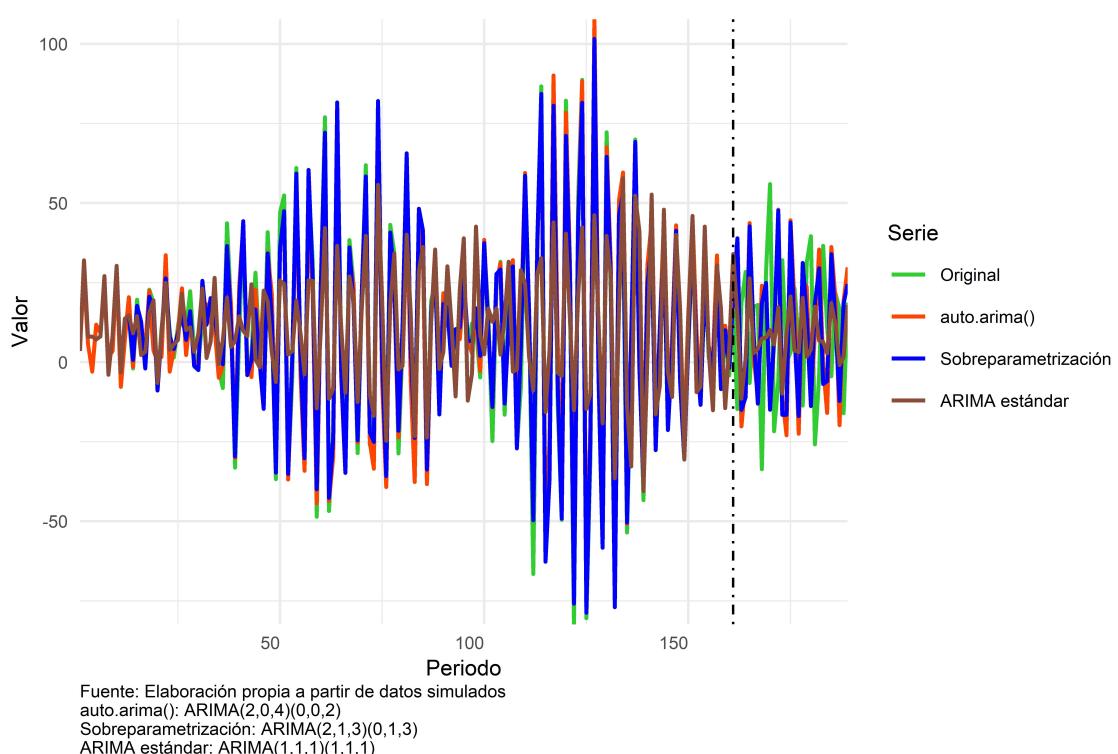


Figura 94: Pronóstico de los datos generados mediante un ARIMA(2,1,4)(3,0,3) según el método de estimación



4.7.2 Datos reales

De la misma manera en que se hizo con los datos simulados, las figuras 95, 96, 97 y 98. La línea vertical punteada marca el inicio del pronóstico.

Figura 95: Pronóstico de la TMII según el método de estimación

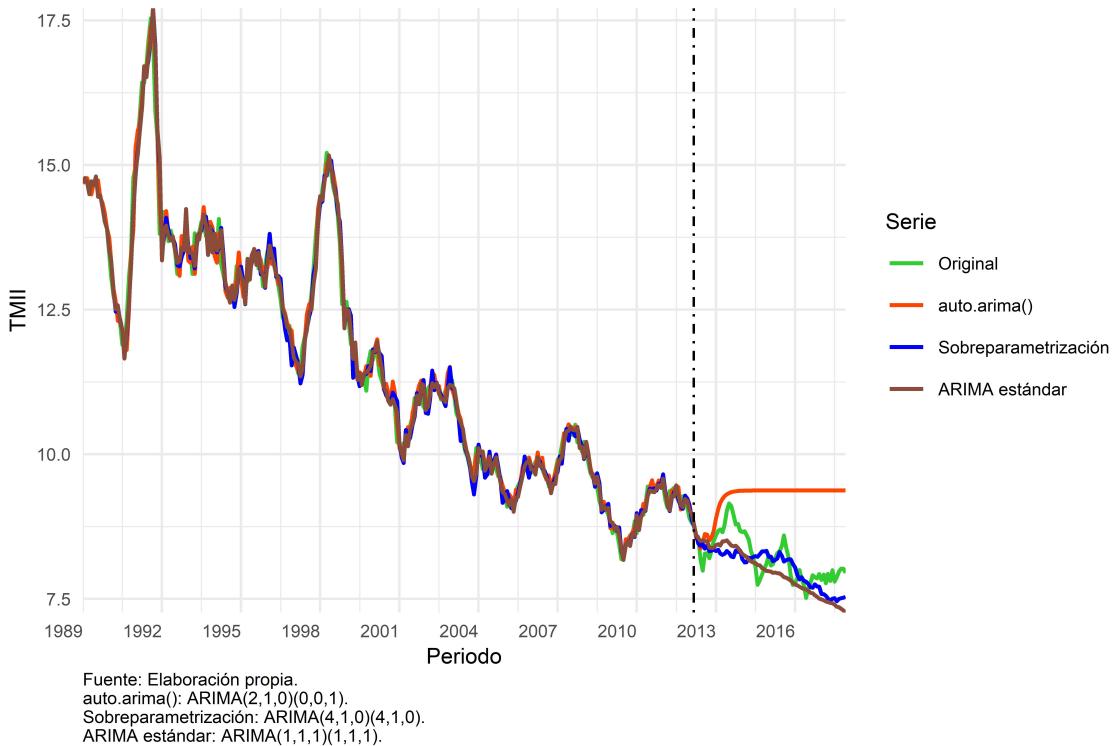


Figura 96: Pronóstico de la Tasa de mortalidad por causa externa (TMCE) según el método de estimación

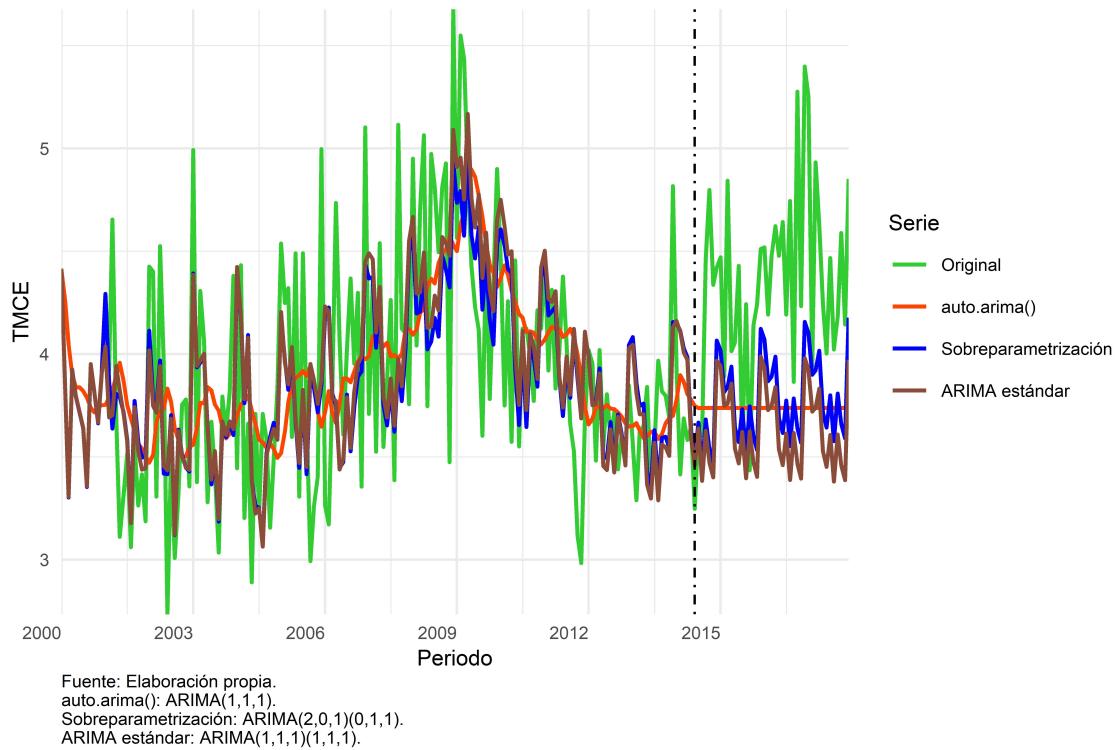


Figura 97: Pronóstico de la serie de incentivos salariales del sector público según el método de estimación

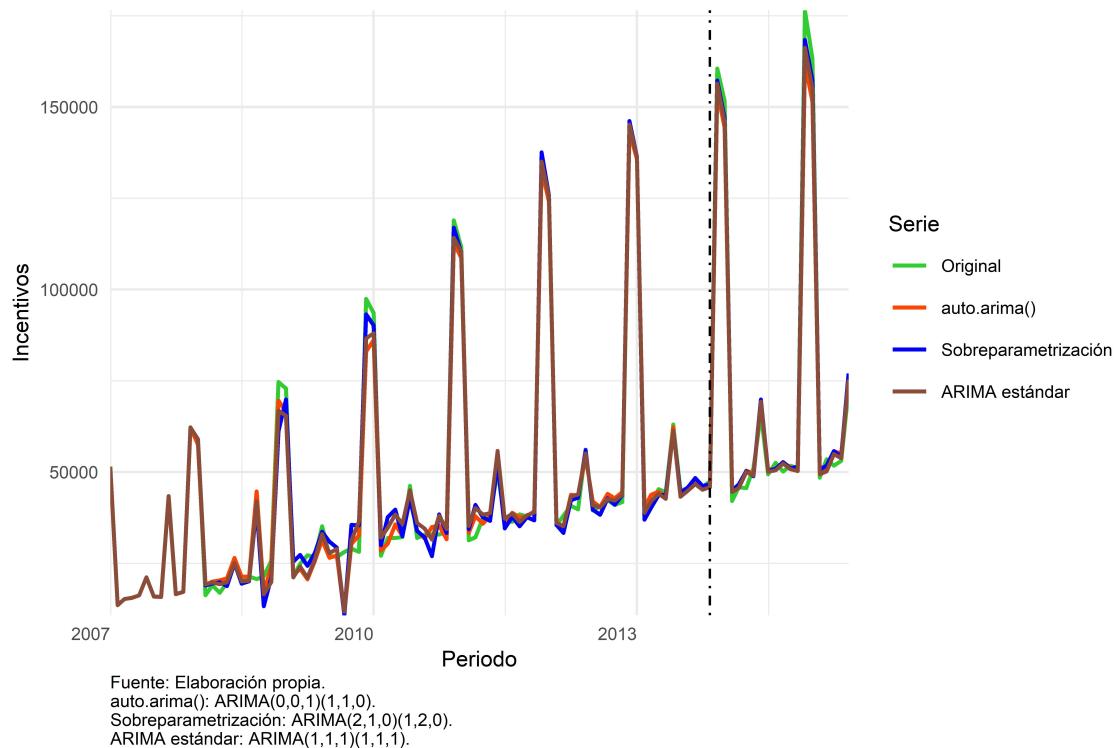
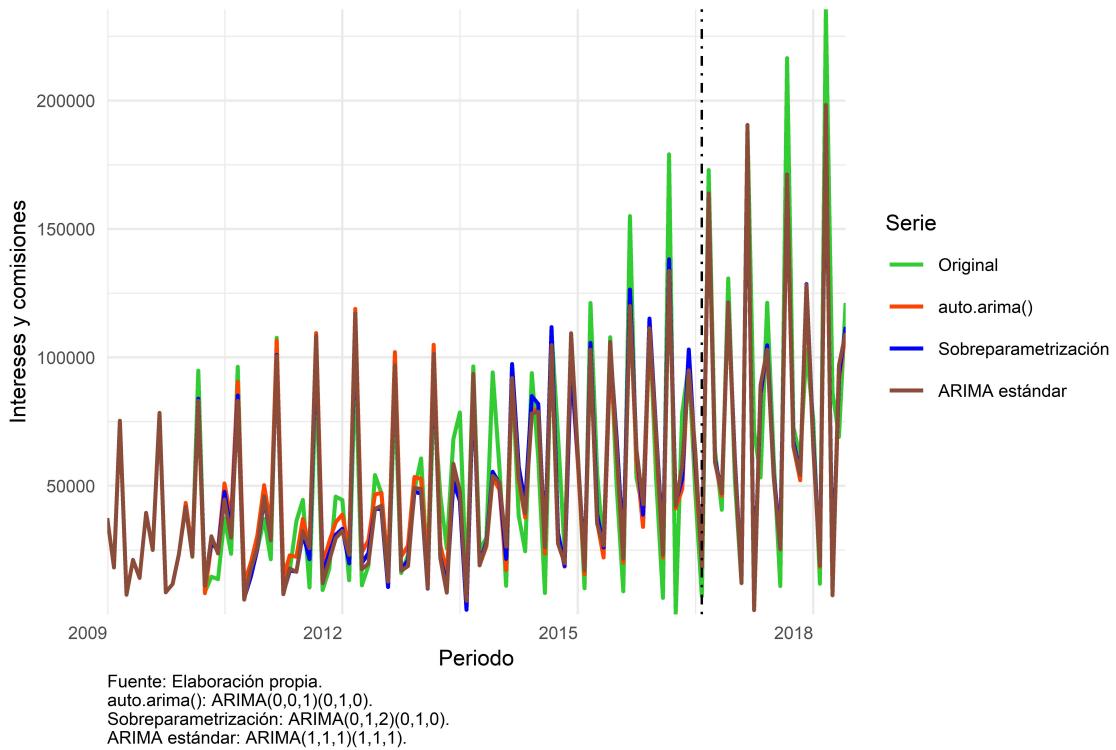


Figura 98: Pronóstico de la serie de intereses y comisiones del sector público según el método de estimación



4.8 Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento

Para complementar los resultados visualizados en la sección anterior, se calculan las medidas de bondad de ajuste obtenidas con el conjunto de datos de entrenamiento, y las medidas de rendimiento obtenidas tanto en el conjunto de entrenamiento como en el conjunto de validación. Ambos resultados para los datos simulados y para los datos reales.

4.8.1 Datos simulados

A partir de las series cronológicas simuladas, las medidas de bondad de ajuste y de rendimiento para cada una de las series simuladas se muestran en las tablas 7, 8, 9, 10, 11 y 12.

Cuadro 7: Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados a partir de un ARIMA(1,0,0)

Conjunto de datos	Estimación	AIC	AICc	BIC	RMSE	MAE	MAPE
Entrenamiento	auto.arima()	521.6386	521.6834	530.8641	1.2122	0.9653	10.2467
	Sobreparametrización	521.6386	521.6834	530.8641	1.2122	0.9653	10.2467
	ARIMA estándar	523.2153	523.2605	532.422	1.2182	0.964	10.1938
Validación	auto.arima()				1.6104	1.2735	13.5453
	Sobreparametrización				1.6104	1.2735	13.5453
	ARIMA estándar				1.6116	1.2755	13.6352

Fuente: Elaboración propia a partir de datos simulados

auto.arima(): ARIMA(1,0,0)

Sobreparametrización: ARIMA(1,0,0)

ARIMA estándar: ARIMA(1,1,1)

Cuadro 8: Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados a partir de un ARIMA(1,0,1)

Conjunto de datos	Estimación	AIC	AICc	BIC	RMSE	MAE	MAPE
Entrenamiento	auto.arima()	518.7534	518.7982	527.9789	1.2013	0.9242	9.9128
	Sobreparametrización	518.7534	518.7982	527.9789	1.2013	0.9242	9.9128
	ARIMA estándar	524.9585	525.0036	534.1652	1.2248	0.9348	9.9803
Validación	auto.arima()				1.4052	1.1026	11.9318
	Sobreparametrización				1.4052	1.1026	11.9318
	ARIMA estándar				1.4086	1.1124	12.0233

Fuente: Elaboración propia a partir de datos simulados

auto.arima(): ARIMA(0,0,1)

Sobreparametrización: ARIMA(0,0,1)

ARIMA estándar: ARIMA(1,1,1)

Cuadro 9: Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados a partir de un ARIMA(2,0,3)

Conjunto de datos	Estimación	AIC	AICc	BIC	RMSE	MAE	MAPE
Entrenamiento	auto.arima()	535.9678	536.0527	554.4188	1.2441	0.9865	10.6383
	Sobreparametrización	533.3344	533.4338	554.8168	1.2263	0.9702	10.4155
	ARIMA estándar	572.2804	572.3256	581.4871	1.42	1.1414	12.3904
Validación	auto.arima()				2.1835	1.6709	20.9806
	Sobreparametrización				2.1819	1.6752	21.0401
	ARIMA estándar				2.1634	1.65	20.8013

Fuente: Elaboración propia a partir de datos simulados

auto.arima(): ARIMA(2,0,2)

Sobreparametrización: ARIMA(5,1,1)

ARIMA estándar: ARIMA(1,1,1)

Cuadro 10: Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados a partir de un ARIMA(4,0,2)

Conjunto de datos	Estimación	AIC	AICc	BIC	RMSE	MAE	MAPE
Entrenamiento	auto.arima()	481.4909	481.5896	503.0171	1.0429	0.8341	8.7629
	Sobreparametrización	479.7228	479.8354	504.3242	1.0306	0.8149	8.5647
	ARIMA estándar	503.5687	503.6139	512.7754	1.1456	0.8977	9.5797
Validación	auto.arima()				1.2473	1.0456	11.0813
	Sobreparametrización				1.2711	1.0668	11.3276
	ARIMA estándar				1.2632	1.0655	11.3145

Fuente: Elaboración propia a partir de datos simulados

auto.arima(): ARIMA(2,0,3)

Sobreparametrización: ARIMA(4,0,2)

ARIMA estándar: ARIMA(1,1,1)

4.8.2 Datos reales

De manera análoga, se muestran las medidas de bondad de ajuste y de rendimiento para las series cronológicas reales en los cuadros 13, 14, 15 y 16.

Cuadro 11: Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados a partir de un ARIMA(0,0,1)(0,1,1)

Conjunto de datos	Estimación	AIC	AICc	BIC	RMSE	MAE	MAPE
Entrenamiento	auto.arima()	732.172	732.2206	741.1636	2.3404	1.7807	86.2929
	Sobreparametrización	732.172	732.2206	741.1636	2.3404	1.7807	86.2929
	ARIMA estándar	781.3164	781.3944	796.2685	2.695	2.0342	79.5335
Validación	auto.arima()				3.6185	3.0153	92.1823
	Sobreparametrización				3.6185	3.0153	92.1823
	ARIMA estándar				5.0877	4.3417	137.1594

Fuente: Elaboración propia a partir de datos simulados

auto.arima(): ARIMA(0,0,1)(0,1,1)

Sobreparametrización: ARIMA(0,0,1)(0,1,1)

ARIMA estándar: ARIMA(1,1,1)(1,1,1)

Cuadro 12: Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados a partir de un ARIMA(2,1,4)(3,0,3)

Conjunto de datos	Estimación	AIC	AICc	BIC	RMSE	MAE	MAPE
Entrenamiento	auto.arima()	1089.7923	1089.9332	1120.544	6.8493	5.4671	57.058
	Sobreparametrización	1012.4006	1012.5392	1039.3145	5.4117	4.2376	63.9969
	ARIMA estándar	1457.0824	1457.1604	1472.0345	22.2688	16.7727	179.3555
Validación	auto.arima()				36.131	31.8461	40577.7819
	Sobreparametrización				31.3749	27.4177	38008.8937
	ARIMA estándar				20.6537	17.0805	20763.9283

Fuente: Elaboración propia a partir de datos simulados

auto.arima(): ARIMA(2,0,4)(0,0,2)

Sobreparametrización: ARIMA(2,1,3)(0,1,3)

ARIMA estándar: ARIMA(1,1,1)(1,1,1)

Cuadro 13: Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados para la TMII

Conjunto de datos	Estimación	AIC	AICc	BIC	RMSE	MAE	MAPE
Entrenamiento	auto.arima()	-88.3504	-88.3173	-73.8543	0.2034	0.1507	1.281
	Sobreparametrización	22.6497	22.7242	54.8673	0.244	0.1769	1.5117
	ARIMA estándar	-21.9973	-21.9549	-4.0987	0.2284	0.1612	1.3711
Validación	auto.arima()				1.1482	1.0192	12.6832
	Sobreparametrización				0.3496	0.284	3.4184
	ARIMA estándar				0.3625	0.305	3.6939

Fuente: Elaboración propia

auto.arima(): ARIMA(2,1,0)(0,0,1)

Sobreparametrización: ARIMA(4,1,0)(4,1,0)

ARIMA estándar: ARIMA(1,1,1)(1,1,1)

5 CONCLUSIONES

La presente investigación ha cubierto las bases fundamentales relacionadas al análisis de series cronológicas. Se ha realizado una recapitulación histórica de esta rama de la estadística y se han puesto en evidencia uno de los principales problemas de las series de tiempo, como lo es la subjetividad del observador en la selección de modelos. Es ante este inconveniente que la investigación buscó siempre proponer un aporte metodológico para la selección de modelos ARIMA y por ende, una mejora en los pronósticos obtenidos a partir de estos modelos.

Cuadro 14: Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados para la TMCE

Conjunto de datos	Estimación	AIC	AICc	BIC	RMSE	MAE	MAPE
Entrenamiento	auto.arima()	258.391	258.4327	267.8335	0.5018	0.3896	10.0427
	Sobreparametrización	223.3956	223.4665	238.8026	0.4483	0.3502	8.9877
	ARIMA estándar	225.7497	225.8212	241.1256	0.4514	0.3537	9.1349
Validación	auto.arima()				0.7555	0.6509	14.3513
	Sobreparametrización				0.7059	0.6012	13.2788
	ARIMA estándar				0.8285	0.7242	16.0268

Fuente: Elaboración propia

auto.arima(): ARIMA(1,1,1)

Sobreparametrización: ARIMA(2,0,1)(0,1,1)

ARIMA estándar: ARIMA(1,1,1)(1,1,1)

Cuadro 15: Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados para la serie de incentivos salariales del sector público

Conjunto de datos	Estimación	AIC	AICc	BIC	RMSE	MAE	MAPE
Entrenamiento	auto.arima()	1615.6654	1615.8038	1624.6593	4375.9389	2349.4078	6.8325
	Sobreparametrización	1617.0377	1617.2124	1628.2083	4359.168	2564.749	8.0597
	ARIMA estándar	1615.2012	1615.3758	1626.3718	4310.6458	2491.6453	7.5001
Validación	auto.arima()				5212.797	3701.0735	4.4981
	Sobreparametrización				3476.9066	2846.9747	4.0009
	ARIMA estándar				3917.3981	3011.2704	3.9312

Fuente: Elaboración propia

auto.arima(): ARIMA(0,0,1)(1,1,0)

Sobreparametrización: ARIMA(2,1,0)(1,2,0)

ARIMA estándar: ARIMA(1,1,1)(1,1,1)

Cuadro 16: Medidas de bondad de ajuste y de rendimiento según el método de estimación para los conjuntos de entrenamiento y validación simulados para la serie de intereses y comisiones del sector público

Conjunto de datos	Estimación	AIC	AICc	BIC	RMSE	MAE	MAPE
Entrenamiento	auto.arima()	2002.1425	2002.2358	2009.2508	14028.5068	10046.5413	4341.7409
	Sobreparametrización	2001.8101	2001.9047	2008.8802	14003.1158	9853.7352	4586.7425
	ARIMA estándar	2008.1558	2008.3086	2019.9394	14184.9248	9681.3184	4443.177
Validación	auto.arima()				27737.53	19562.584	35.6642
	Sobreparametrización				27280.4631	19346.2507	39.8965
	ARIMA estándar				28487.3026	19645.3772	36.125

Fuente: Elaboración propia

auto.arima(): ARIMA(0,0,1)(0,1,0)

Sobreparametrización: ARIMA(0,1,2)(0,1,0)

ARIMA estándar: ARIMA(1,1,1)(1,1,1)

Las bases de este estudio se presentaron en el segundo capítulo, donde además de describir qué es una serie cronológica se explican los componentes de la misma: tendencia-ciclo, componente estacional y componente irregular. Además, se plantearon los supuestos asociados al análisis de series cronológicas, así como los distintos criterios para la identificación del modelo que gobierna a una determinada serie cronológica. Entre las distintas clases de modelos, el interés de esta investigación se centra en los modelos autorregresivos integrados de medias móviles, razón por la cual se deja claro el fundamento teórico de la ecuación de Wold y la metodología de Box-Jenkins

para poder estimar los modelos autorregresivos y los modelos de medias móviles, y de esta manera justificar la unión de ambas clases en los modelos autorregresivos integrados de medias móviles. Aunado a esto, se discutió el uso de los autocorrelogramas como método de identificación de modelos para así introducir los elementos básicos del análisis combinatorio y su uso conjunto con la sobreparametrización para encontrar modelos ARIMA adecuados.

A partir de lo anterior, se describieron los materiales a usar: series cronológicas simuladas y reales (tasa de mortalidad infantil interanual, tasa de mortalidad por causa externa, incentivos salariales del sector público e intereses y comisiones del sector público). Con estos insumos, el proceso de análisis consistió en realizar un análisis exploratorio de cada serie cronológica, aplicarle a las mismas una partición de datos para dividirla en dos conjuntos de datos, entrenamiento y validación, una para ajustar los modelos y otra para evaluar la calidad de los pronósticos, respectivamente. Se realiza el ajuste de los modelos con las series simuladas y luego con las reales para posteriormente hacer un análisis de los residuales de cada modelo y verificar el cumplimiento de los supuestos discutidos previamente. Una vez estimados los modelos, se realizaron los pronósticos de todas las series cronológicas para obtener un análisis visual del comportamiento de los valores ajustados y de los pronósticos, además de evaluar la calidad de estos mediante distintas medidas de bondad de ajuste y de rendimiento.

Al aplicar la función `auto.arima()` y la sobreparametrización sobre una serie cronológica generada a partir de un $ARIMA(1, 0, 0)$, se obtienen los mismos resultados, y esto son ligeramente inferiores a los obtenidos mediante un $ARIMA(1, 1, 1)$. Al generar datos a partir de un $ARIMA(1, 0, 1)$ los mejores pronósticos se obtienen tanto con el `auto.arima()` como con la sobreparametrización, pues ambos son superiores a los obtenidos mediante un $ARIMA(1, 1, 1)$. Al ir incorporando términos en las series no estacionales, como es el caso de los datos simulados a partir de un $ARIMA(2, 0, 3)$, los mejores pronósticos se obtienen mediante el uso de la sobreparametrización, pues la magnitud de sus errores son siempre menores. Con los tres métodos utilizados, a pesar de que los pronósticos en series de orden bajo no son los mejores, entre las tres opciones la sobreparametrización brinda mejores resultados en términos de rendimiento y bondad de ajuste.

Cuando se consideran series cronológicas estacionales, se presenta un comportamiento similar a lo previamente descrito. Al tener una baja cantidad de parámetros en los datos simulados de un proceso estacional $ARIMA(0, 0, 1)(0, 1, 1)_{12}$, la sobreparametrización iguala los resultados obtenidos mediante la función `auto.arima()`; y además, cuando se incorporan más parámetros al modelo generador de los dato como en el caso del $ARIMA(2, 1, 4)(3, 0, 3)_{12}$, la sobreparametrización logra captar de mejor manera el comportamiento de los datos, obteniendo así menores mediciones del error, es decir, los pronósticos se acercan más a los datos reales.

En el caso de las series de tiempo generadas a partir de datos reales, y en el caso particular de

la Tasa de mortalidad infantil interanual, la función `auto.arima()` sugiere como mejor modelo un $ARIMA(2, 1, 0)(0, 0, 1)$, mientras que utilizando la sobreparametrización se tiene como mejor modelo un $ARIMA(4, 1, 0)(4, 1, 0)$. El cuadro 13 y la figura 95 muestran como el uso de la sobreparametrización ajusta los valores pronosticados de una mejor manera a los datos reales con respecto a utilizar `auto.arima()` o un modelo $ARIMA$ estándar.

De manera similar, tras ajustar un modelo utilizando la función `auto.arima()` a la tasa de mortalidad por causa externa el mejor modelo sugerido es un $ARIMA(1, 1, 1)$, mientras que la sobreparametrización propone como mejor modelo un $ARIMA(2, 0, 1)(0, 1, 1)_{12}$. Los resultados de la figura 96 y el cuadro 14 muestran que la sobreparametrización supera a los resultados del $ARIMA$ estándar, y este a su vez supera al `auto.arima()`. Aunque no se replican a la perfección los saltos de la serie, el comportamiento general es similar, y las medidas de rendimiento y bondad de ajuste en la sobreparametrización indican que este modelo es más adecuado en comparación a los demás.

Para la serie de incentivos salariales del sector público, la función `auto.arima()` indica que el mejor modelo es un $ARIMA(0, 0, 1)(1, 1, 0)_{12}$, mientras que la sobreparametrización sugiere un $ARIMA(2, 1, 0)(1, 2, 0)_{12}$ como el más adecuado. Los resultados del cuadro 15 y la figura 97 muestran que nuevamente los pronósticos obtenidos son superiores utilizando la sobreparametrización al analizar los pronósticos, y aunque no presenta las mejores medidas de ajuste, la diferencia con los otros modelos no es tan grande.

Por último, los modelos ajustados para pronosticar los intereses y comisiones del sector público son un $ARIMA(0, 0, 1)(0, 1, 0)_{12}$ para el caso de la función `auto.arima()` y un $ARIMA(0, 1, 2)(0, 1, 0)_{12}$. En este caso, la sobreparametrización es superior en dos de las tres medidas de rendimiento y en las medidas de bondad de ajuste, tal y como muestra el cuadro 16, mientras que la figura 98 muestra de manera gráfica los pronósticos obtenidos, que son bastante similares pues ambos modelos difieren solamente en un parámetro para la parte no estacional.

El uso de la sobreparametrización propuesto mediante un algoritmo de selección de modelos implementado en esta investigación permite evaluar una gama más amplia de modelos ARIMA al definir un máximo en la cantidad de parámetros para las partes estacionales y no estacionales de la series cronológicas, pues al definir este máximo se definen todos los posibles escenarios que posteriormente evalúan el aporte de cada nuevo término a los pronósticos. La incorporación de estos nuevos parámetros en los modelos ARIMA son validados mediante pruebas de significancia estadística, particiones de la serie cronológica, medidas de bondad de ajuste de los modelos y sus correspondientes medidas de rendimiento.

Como parte de la investigación, las series cronológicas utilizadas de forma simulada y generadas a partir de registros administrativos muestran como el uso de la sobreparametrización iguala y en muchos casos mejora la calidad de los pronósticos obtenidos en comparación a métodos ya establecidos,

como es el caso de la función `auto.arima()`, o estimación de modelos más genéricos con un bajo número de parámetros, como los modelos estándar $ARIMA(1, 1, 1)$ o $ARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 1)_{12}$.

Como puede apreciarse en los resultados, al tener datos que vienen de un proceso con bajo número de parámetros, el uso de la sobreparametrización logra captar de buena manera el comportamiento de la serie en comparación a las otras alternativas más utilizadas y, además, cuando el proceso que gobierna la serie es de un mayor grado, la metodología propuesta, al considerar un mayor espectro paramétrico, es capaz de capturar de mejor forma el comportamiento de la serie y conseguir pronósticos con una precisión mayor al de los métodos más tradicionales. Lo anterior representa una mejora en cuanto a la utilización de modelos ARIMA para el pronóstico de series cronológicas, lo cual a su vez aporta herramientas para la toma de decisiones relacionadas a este tipo de análisis.

Una potencial mejora al uso de la sobreparametrización es la inclusión semi-automática de regresores para controlar cambios estructurales de la serie cronológica en estudio, pues estos coeficientes adicionales podrían controlar cambios particulares en la serie y que podrían mejorar la precisión de los pronósticos.

La metodología aquí propuesta se encuentra disponible de manera abierta mediante el paquete de R `popstudy`, el cual fue desarrollado para esta investigación y cuenta con los procedimientos previamente descritos. Se encuentra disponible en un repositorio de Github⁸ y además en el repositorio CRAN⁹, que es la fuente oficial de los paquetes del lenguaje R.

⁸<https://github.com/cgamoasanabria/popstudy>

⁹Publicación pendiente.

6 ANEXOS

6.1 Función de sobreparametrización

Código 1: Función op.arima

```
op.arima <- function(arima_process = c(p = 1, d = 1, q = 1,
                                         P = 1, D = 1, Q = 1),
                       seasonal_periodicity,
                       time_serie, reg = NULL, horiz = 12,
                       prop=.8, training_weight=.2, testing_weight=.8,
                       parallelize=FALSE,
                       clusters=detectCores(logical = FALSE),...){

  data_partition <- round(length(time_serie)*prop, 0)
  train <- subset(time_serie, end=data_partition)
  test <- subset(time_serie, start=data_partition+1)

  arima_model <- function(time_serie, non_seasonal, seasonal, periodic,
                         regr = NULL,...){

    if(is.list(non_seasonal)){
      non_seasonal <- unlist(non_seasonal)
    }

    if(is.list(seasonal)){
      seasonal <- unlist(seasonal)
    }

    seasonal_part <- list(order=seasonal, period=periodic)
    if(is.null(regr)){
      arima_model <- tryCatch({
        Arima(time_serie,
              order = non_seasonal,
              seasonal = seasonal_part,...)
      },
      error = function(e) NULL)
    }
  }
}
```

```

}

if(!is.null(regr)){
  arima_model <-tryCatch({
    Arima(time_serie,
          order = non_seasonal,
          seasonal = seasonal_part,
          xreg = regr,...)
  },
  error = function(e) NULL)
}

if(!is.null(arima_model)){
  degrees_of_freedom <- arima_model$nobs - length(arima_model$coef)
  t_value <- arima_model$coef/sqrt(diag(arima_model$var.coef))
  prob <- stats::pf(t_value^2, df1 = 1, df2 = degrees_of_freedom,
                     lower.tail = FALSE)
  ifelse(sum(1*prob>0.05)<1, return(arima_model), 1)
}

}

arima_measures <- function(arima_model, testing, horizon, regr = NULL){

  model_spec <- capture.output(arima_model)
  model_spec <- substr(model_spec[2],1, 23)

  data <- capture.output(summary(arima_model))
  data <- data[grep("AIC", data) == T]
  model_info <- strsplit(data, " ")
  pos <- which(sapply(model_info, nchar)>0)
  model_info <- model_info[[1]][pos]
  model_info <- do.call("rbind", strsplit(model_info, "=")) %>%
    data.frame()
  colnames(model_info) <- c("Medida", "Valor")
}

```

```

model_info <- model_info %>%
  mutate(Valor = as.numeric(as.character(Valor))) %>%
  spread(Medida, Valor) %>%
  data.frame(arima_model = model_spec)

model_performance <- data.frame(arima_model = c(model_spec,
                                                 paste(model_spec,
                                                       "Validacion")),
                                 accuracy(forecast(arima_model, horizon,
                                                       xreg = regr),
                                                       testing))

merge(model_info, model_performance, by="arima_model", all = TRUE) %>%
  select(arima_model, AIC, AICc, BIC, MAE, RMSE, MASE)
}

arima_selected <- function(model_table, Wtrain=training_weight,
                           Wtest=testing_weight){

  model_table <- model_table %>%
    distinct(arima_model, .keep_all = TRUE)

  model_table <- model_table %>%
    mutate(mod = as.character(c(0, rep(1:(nrow(model_table)-1) %/% 2)))))

  tabla2 <- model_table %>%
    mutate_at(vars(contains("C")), function(x){x-min(x, na.rm=TRUE)}) %>%
    mutate_if(is.numeric, function(x) ifelse(is.na(x), 0, x)) %>%
    mutate(puntaje = AIC+AICc+BIC+MAE+RMSE+MASE,
          donde = ifelse(grepl("Validacion", arima_model)==TRUE,
                         Wtest, Wtrain),
          puntaje = puntaje*donde)

  suppressMessages({
    minimal_score <- tabla2 %>%
      group_by(mod) %>%
      summarise(puntaje=sum(puntaje)) %>%
  })
}

```

```

ungroup
})

pos <- minimal_score$mod[which(
  minimal_score$puntaje==min(minimal_score$puntaje))]

model_table %>%
  filter(mod %in% pos) %>%
  dplyr::select(arima_model:MASE)
}

suppressWarnings({
  valores <- expand.grid(p = 0:arima_process[1],
                         d = 0:arima_process[2],
                         q = 0:arima_process[3],
                         P = 0:arima_process[4],
                         D = 0:arima_process[5],
                         Q = 0:arima_process[6])

  non_seasonal_values <- split(as.matrix(valores[, 1:3]),
                                 row(valores[, 1:3]))
  seasonal_values <- split(as.matrix(valores[, 4:6]),
                            row(valores[, 4:6]))

  if(parallelize==FALSE){
    arima_models <- mapply(arima_model,
                           non_seasonal=non_seasonal_values,
                           seasonal=seasonal_values,
                           MoreArgs = list(time_serie=train,
                                           regr=reg,
                                           periodic=seasonal_periodicity),
                           SIMPLIFY = FALSE)
  }else{
    clp <- makeCluster(clusters, type = "SOCK", useXDR=FALSE)
  }
})

```

```

clusterEvalQ(clp, expr = {
  library(forecast)
})

arima_models <- clusterMap(cl=clp, fun = arima_model,
                           non_seasonal=non_seasonal_values,
                           seasonal=seasonal_values,
                           MoreArgs = list(time_serie=train, regr=reg, periodic=sea-
                           SIMPLIFY = FALSE, .scheduling = "dynamic"))

stopCluster(clp)

})

pos <- which(sapply(lapply(arima_models, class), length)>1)

final_measures <- do.call("rbind", lapply(arima_models[pos],
                                             arima_measures,
                                             testing = test,
                                             horizon= horiz,
                                             regr = reg)) %>%
  mutate_if(is.numeric, round, 2)

final_list <- list(arima_models=arima_models[pos],
                    final_measures=final_measures,
                    bests=arima_selected(final_measures, Wtrain = training_weight, Wtest =
mod_index <- final_list$bests %>%
  row.names %>%
  as.numeric %>%
  floor %>%
  unique %>%
  as.character

final_list$best_model <- eval(parse(text = paste0(
  "final_list$arima_models$", "``", mod_index, "``")))

```

```

    final_list
  })
}

```

6.2 Función de simulación de series cronológicas

Código 2: Función ts.sim

```

ts.sim <- function(data,
  n,
  temporalidad,
  no.estacional,
  estacional = c(0, 0, 0),
  p = NULL,
  q = NULL,
  P = NULL,
  Q = NULL) {

  require(forecast)
  tryCatch({
    coeficientes <- list(p, q, P, Q)
    coeficientes.simulados <- lapply(c(no.estacional[c(1, 3)],
                                         estacional[c(1, 3)]),
                                       function(x)
                                         sample(seq(-1, 1, .1), x))

    pos <- which(sapply(coeficientes, is.null) == TRUE)
    pos2 <- which(sapply(coeficientes.simulados, length) > 0)

    coeficientes[pos] <- coeficientes.simulados[pos]

    names(coeficientes) <- c("p", "q", "P", "Q")
    coeficientes <- coeficientes[pos2]

    if (TRUE %in% (c("P", "Q") %in% names(coeficientes))) {
      modelo <- Arima(
        ts(data = data, freq = temporalidad),
        order = no.estacional,

```

```
    seasonal = estacional,
    fixed = c(unlist(coeficientes))

  )
} else
({  

  modelo <- Arima(  

    ts(data = data, freq = temporalidad),
    order = no.estacional,
    seasonal = estacional,
    fixed = c(unlist(coeficientes), NA)
  )
})  
  
datos <- simulate(modelo, nsim=(n+length(data)))  
  
datos <- subset(datos, start=length(data)+1)  
list(modelo=modelo, datos=datos)},  
error = function(e)  
  ts.sim(data, n, temporalidad,  
         no.estacional, estacional,  
         p, q, P, Q))  
}
```

7 REFERENCIAS

- Adhikari, R., K, A. R., & Agrawal, R. K. (2013). *An Introductory Study on Time Series Modeling and Forecasting* (pp. 42-45). Recuperado de <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1302/1302.6613.pdf>
- Agrawal, R., & Adhikari, R. (2013). An introductory study on time series modeling and forecasting. *Nova York: CoRR.*
- Aphalo, P. J. (2021). *ggpmisc: Miscellaneous Extensions to 'ggplot2'*. Recuperado de <https://CRAN.R-project.org/package=ggpmisc>
- Auguie, B. (2017). *gridExtra: Miscellaneous Functions for "Grid"Graphics*. Recuperado de <https://CRAN.R-project.org/package=gridExtra>
- Benesty, J., & Chen, Y. and C., J.and Huang. (2009). Pearson Correlation Coefficient. En *Noise Reduction in Speech Processing* (pp. 37-38). https://doi.org/10.1007/978-3-642-00296-0_5
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Recuperado de <https://books.google.co.cr/books?id=sRzvAAAAMAAJ>
- Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (2009). *Time Series: Theory and Methods*. En *Springer Series en Statistics* (p. 239). Recuperado de https://books.google.co.cr/books?id=_DcYu/_EhVzUC
- Brown, R. (1956). *Exponential Smoothing for Predicting Demand*. Recuperado de <https://www.industrydocuments.ucsf.edu/docs/jzlc0130>
- Burnham, K. P., & Anderson, D. R. (2007). *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach*. Recuperado de <https://books.google.co.cr/books?id=IWUKBwAAQBAJ>
- Calderón, C. E. (2012). Estadística para Estudiantes de Administración de Empresas de la Universidad Nacional del Callao. *Editorial San Marcos, 2da Edición, Lima Perú*. Recuperado de https://unac.edu.pe/documentos/organizacion/vri/cdcitra/Informes_Finales_Investigacion/IF_JUNIO_2012/IF_CALDERON%20OTOYA_FCA/capitulo%208.pdf
- Canova, F., & Hansen, B. E. (1995). Are Seasonal Patterns Constant over Time? A Test for Seasonal Stability. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3), 237-252. Recuperado de <http://www.jstor.org/stable/1392184>
- Cardona, G. ;. F., D.; Escané. (2013). Mortalidad por causas externas: Un problema de salud pública. Argentina, Chile y Colombia. 2000-2008. *Revista electrónica semestral*, 10(2). Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/274885475_Mortalidad_por_causa_externas_un_problema_de_salud_publica_Argentina_Chile_y_Colombia_2000-2008
- Cochrane, J. H. (1997). *Time Series for Macroeconomics and Finance*. Recuperado de <http://econ.lse.ac.uk/staff/wdenhaan/teach/cochrane.pdf>
- De Gooijer, J. G., & Hyndman, R. J. (2006). 25 years of time series forecasting. *International Journal of Forecasting*, 22(3), 427-445. Recuperado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0883542506000173>

- nal of Forecasting*, 22(3), 443-473. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2006.01.001](https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2006.01.001)
- Donoso, E. (2004). Desigualdad en mortalidad infantil entre las comunas de la provincia de Santia-go. *Revista médica de Chile*, 132, 461-466. Recuperado de https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0034-98872004000400008&nrm=iso
- Ellis, P. (2018). *ggseas: 'stats' for Seasonal Adjustment on the Fly with 'ggplot2'*. Recuperado de <https://CRAN.R-project.org/package=ggseas>
- Elmabrouk, O. M. (s. f.). *Measuring Reliability of Stationary Stochastic Processes*. Recuperado de https://www.academia.edu/7140606/Measuring_Reliability_of_Stationary_Stochastic_Processes?auto=download
- Evans, M. J., & Rosenthal, J. S. (2005). *Probabilidad y estadística* (p. 121). Recuperado de <https://books.google.co.cr/books?id=ZU3MEKZFgsMC>
- Flaherty, J., & Lombardo, R. (2000, enero). *Modelling Private New Housing Starts in Australia*. Recuperado de http://www.prres.net/papers/Flaherty_Modelling_Private_New_Housing_Starts_In_Australia.pdf
- Fuller, W. A. (1995). *Introduction to Statistical Time Series*. Recuperado de <https://books.google.co.cr/books?id=wyRhjmAPQIYC>
- Grolemund, G., & Wickham, H. (2011). Dates and Times Made Easy with lubridate. *Journal of Statistical Software*, 40(3), 1-25. Recuperado de <https://www.jstatsoft.org/v40/i03/>
- Hamzaçebi, C. (2008). Improving Artificial Neural Networks' Performance in Seasonal Time Series Forecasting. *Inf. Sci.*, 178(23), 4550-4559. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2008.07.024>
- Hernández, O. (2008). *Modelos probabilísticos discretos* (1.^a ed.). Recuperado de <http://www.editorial.ucr.ac.cr/ciencias-naturales-y-exactas/item/2168-modelos-probabilisticos-discretos.html>
- Hernández, O. (2011). *Introducción a las Series Cronológicas* (1.^a ed.). Recuperado de <http://www.editorial.ucr.ac.cr/ciencias-naturales-y-exactas/item/1985-introduccion-a-las-series-cronologicas.html>
- Hipel, K. W., & McLeod, A. I. (1994). *Time Series Modelling of Water Resources and Environmental Systems*. Recuperado de <https://books.google.co.cr/books?id=t1zG8OUbgdgC>
- Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G. (2018a). *Forecasting: principles and practice*. Recuperado de https://books.google.co.cr/books?id=_bBhDwAAQBAJ
- Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G. (2018b). *Forecasting: principles and practice*. Recuperado de https://books.google.co.cr/books?id=_bBhDwAAQBAJ
- Hyndman, Rob J., & Khandakar, Y. (2008). Automatic time series forecasting: the forecast package for R. *Journal of Statistical Software*, 26(3), 1-22. Recuperado de <https://www.jstatsoft.org/article/view/v027i03>

- Hyndman, R., & Khandakar, Y. (2008). Automatic Time Series Forecasting: The forecast Package for R. *Journal of Statistical Software, Articles*, 27(3), 1-22. <https://doi.org/10.18637/jss.v027.i03>
- INEC. (2004). *Documento Metodológico de Defunciones Infantiles*. INEC.
- Jammalamadaka, S. R., Qiu, J., & Ning, N. (2018). *Multivariate Bayesian Structural Time Series Model*. Recuperado de <https://arxiv.org/pdf/1801.03222.pdf>
- Kassambara, A. (2020). *ggbubr: 'ggplot2' Based Publication Ready Plots*. Recuperado de <https://CRAN.R-project.org/package=ggbubr>
- Kedem, B., & Fokianos, K. (2005). *Regression Models for Time Series Analysis*. Recuperado de <https://books.google.co.cr/books?id=8r0qE35wt44C>
- Lee, J. (s. f.). Univariate time series modeling and forecasting (Box-Jenkins Method). *Econ* 413, lecture 4.
- León, B. ; E., R.; Gallegos. (1998). Mortalidad infantil: Análisis de un decenio. *Revista Cubana de Medicina General Integral*, 14, 606-610. Recuperado de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0864-21251998000600017&nrm=iso
- Nación. (2013). Morbilidad y mortalidad en Costa Rica. *La Nacion*. Recuperado de <https://bit.ly/2xWUeXU>
- OPS. (2016). *Clasificación Estadística Internacional de Enfermedades y Problemas Relacionados con la Salud*. OMS.
- Osborn, D. R., Chui, A. P. L., Smith, J., & Birchenhall, C. (2009). *Seasonality and the order of integration for consumption*. Recuperado de http://www.est.uc3m.es/esp/nueva_docencia/comp_col_get/lade/tecnicas_prediccion/OCSB_OxBull1988.pdf
- R Core Team. (2019). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Recuperado de <https://www.R-project.org/>
- Ramírez, F. (2007). *Introducción a las series de tiempo. Métodos paramétricos*. Recuperado de <https://books.google.es/books?id=KvLhxFPwvsUC>
- Rezaee, Z., Aliabadi, S., Dorestani, A., & Rezaee, N. J. (2020). Application of Time Series Models in Business Research: Correlation, Association, Causation. *Sustainability*, 12(12), 4833.
- Rincon, M. (2000). *Métodos para proyecciones demográficas*.
- Rosero-Bixby, L. (2018). *Producto C para SUPEN. Proyección de la mortalidad de Costa Rica 2015-2150*. Recuperado de CCP-UCR website: <http://srv-website.cloudapp.net/documents/10179/999061/Nota+t%C3%A9cnica+tablas+de+vida+segunda+parte>
- Sargent, T. J. (1979). *Macroeconomic Theory*. Recuperado de <https://books.google.co.cr/books?id=X6u7AAAAIAAJ>
- Stoffer, D. (2020). *astsa: Applied Statistical Time Series Analysis*. Recuperado de <https://CRAN.R-project.org/package=astsa>

- Surhone, L. M., Timpledon, M. T., & Marseken, S. F. (2010). *Wold Decomposition*. Recuperado de <https://books.google.co.cr/books?id=7cSqcQAAQAAJ>
- Tadayon, M., & Iwashita, Y. (2020). *Comprehensive Analysis of Time Series Forecasting Using Neural Networks*. Recuperado de <https://arxiv.org/pdf/2001.09547.pdf>
- Vázquez, J. (2017). En 5 años flotilla de motos se disparó en un 189 por ciento. *CR Hoy*. Recuperado de <https://bit.ly/2QmQQfE>
- Villalón, S. ;. O., G.; Vera. (2006). *Tabla de vida por método de mortalidad óptima*. INE.
- Wickham, H. (2016). *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Recuperado de <https://ggplot2.tidyverse.org>
- Wickham, H., & Bryan, J. (2019). *readxl: Read Excel Files*. Recuperado de <https://CRAN.R-project.org/package=readxl>
- Wickham, H., François, R., Henry, L., & Müller, K. (2019). *dplyr: A Grammar of Data Manipulation*. Recuperado de <https://CRAN.R-project.org/package=dplyr>
- Wickham, H., & Henry, L. (2019). *tidyR: Tidy Messy Data*. Recuperado de <https://CRAN.R-project.org/package=tidyr>
- Xiao, Z. (2001). Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against an Autoregressive Unit Root Alternative. *Journal of Time Series Analysis*, 22(1), 87-105. <https://doi.org/10.1111/1467-9892.00213>
- Xie, Y. (2014). knitr: A Comprehensive Tool for Reproducible Research in R. En V. Stodden, F. Leisch, & R. D. Peng (Eds.), *Implementing Reproducible Computational Research*. Recuperado de <http://www.crcpress.com/product/isbn/9781466561595>
- Zhang, G. (2003). Time series forecasting using a hybrid ARIMA and neural network model. *Neurocomputing*, 50, 159-175.
- Zhu, H. (2021). *kableExtra: Construct Complex Table with 'kable' and Pipe Syntax*. Recuperado de <https://CRAN.R-project.org/package=kableExtra>