

Capítulo 3

Estructura no lineal de una serie temporal

La volatilidad asociada a la rentabilidad de un activo no puede ser observada de forma directa y su estimación, gracias a la medida de volatilidad elegida, permite tratarla como un proceso que evoluciona en el tiempo. De esta manera el estudio de la volatilidad se concreta en el análisis de una serie temporal y es por tanto necesario utilizar la teoría estadística desarrollada para este tipo de datos.

Una de las características que distingue a las series temporales de otros tipos de datos estadísticos es el hecho de que, en general, los valores de la serie en diferentes instantes del tiempo pueden estar correlacionados. De esta manera el problema básico en el análisis de las series temporales es el estudio del patrón de correlación de los valores de la serie, y la elaboración de un modelo estadístico que explique su estructura.

La metodología más clásica para el análisis de las series temporales "Metodología Box y Jenkins" (1970) permite la identificación y estimación de los modelos ARMA (autoregresivos y de medias móviles). Estos modelos asumen las siguientes hipótesis:

- la serie es estacionaria o puede transformarse en estacionaria a partir de una transformación simple
- la serie sigue un modelo lineal.

Ambas hipótesis suponen una idealización matemática que en algunos casos puede ser válida pero, en otras ocasiones, puede estar muy alejada de la situación real. La asunción de las hipótesis da lugar a algunas ventajas y limitaciones de los modelos ARMA.

Ventajas:

1. La serie temporal puede expresarse como una ecuación lineal en diferencias con una perturbación aleatoria que sigue la distribución normal. La teoría matemática de las ecuaciones lineales en diferencias posee un cuerpo de doctrina completo y, en particular, para los modelos lineales Gaussianos ha conseguido un mayor desarrollo de la teoría de la inferencia estadística.
2. Los modelos ARMA Gaussianos estacionarios se fundamentan en la teoría de los espacios de Hilbert para desarrollar, especialmente, su comportamiento predictivo; la visión geométrica que esta teoría aporta, permite dar una interpretación sencilla a resultados algebraicos complejos.
3. Existen gran cantidad de programas informáticos que nos facilitan el ajuste del modelo.
4. Estos modelos han resultado razonablemente satisfactorios como instrumentos de análisis, previsión y control.

Limitaciones:

1. No se pueden obtener soluciones periódicas estables independientes del valor inicial.
2. Dado que las distribuciones conjuntas de los modelos ARMA Gaussianos estacionarios son simétricas, estos modelos no permiten estudiar datos con comportamientos muy asimétricos.
3. Los modelos ARMA no son útiles para estudiar series temporales que presentan, de manera irregular en el tiempo, saltos de gran amplitud.
4. El estudio de los modelos ARMA se basa en el cálculo de las covarianzas; otros parámetros pueden contener información importante que no es recogida por las covarianzas, por ejemplo la función de regresión de retardo j , $E(X_t | X_{t-j})$, es útil para capturar comportamientos cíclicos de los datos.

5. Los modelos ARMA lineales no son adecuados cuando los datos presentan irreversibilidad respecto al tiempo.

Ante esta situación es natural que la investigación en el campo de las series temporales se haya extendido a modelos más generales en los que no se asumen las hipótesis de linealidad y estacionariedad. Estudios realizados sobre diferentes conjuntos de datos indican que los modelos no lineales y no estacionarios son más flexibles para capturar las características de los datos y, en algunos casos, pueden mejorar la calidad del ajuste y la capacidad de predicción del modelo. Tiao y Tsay (1994) consideran que estos avances no significan que los modelos lineales sean menos útiles, al contrario, los modelos lineales nos proporcionan una primera aproximación que puede resultar de gran ayuda como primera estimación de algunos parámetros.

La modelización de la serie temporal de volatilidades asociada a la rentabilidad de las acciones debe empezar por evaluar si el comportamiento de la serie sigue un esquema lineal o no lineal y, en este último caso, analizar el tipo de no linealidad. Diferentes tests permiten determinar este comportamiento contrastando la hipótesis de linealidad frente a alternativas no lineales concretas. La gran variedad de modelos no lineales para series temporales nos obliga a realizar un breve repaso de las diferentes alternativas, cuyo objetivo es contextualizar los modelos no lineales SETAR, así como conocer los tests más adecuados para detectar esta forma de no linealidad.

3.1 Clasificación de los modelos no lineales.

Una manera habitual de modelizar una serie temporal consiste en establecer las relaciones existentes entre la serie temporal $\{x_t\}$ y la secuencia de perturbaciones asociadas $\{\varepsilon_t\}$. En el estudio de las series temporales se considera que las perturbaciones están incorrelacionadas, pero no es necesario asumir que son independientes y están idénticamente distribuidas (I.I.D.). Los modelos lineales generalmente considerados son modelos estacionarios de segundo orden, que se pueden expresar por la descomposición de Wold como una combinación lineal con coeficientes constantes a_k de las perturbaciones, donde éstas, ε_t , son variables aleatorias no correlacionadas.

$$x_t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{t-k}$$

Esta representación nos asegura que una serie temporal lineal puede expresarse como un $MA(\infty)$ de las perturbaciones, y es la responsable de la no condicionalidad de la varianza y de las autocovarianzas de la serie $\{x_t\}$.

Al realizar el análisis de una serie temporal no lineal, se considera que las perturbaciones asociadas son I.I.D., pero permitimos que sea una función no lineal la que relacione x_t con sus perturbaciones. Una representación general es:

$$x_t = f(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-j}, \dots) \quad (3.1)$$

donde se asume que las perturbaciones tienen media cero y varianza unitaria y, $f(\cdot)$ es una función desconocida.

Una expresión tan general hace muy difícil trabajar con ella, por lo que en la práctica los modelos usados establecen una relación más restrictiva:

Definición 14:

$$x_t = g(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-j}, \dots) + \varepsilon_t \cdot h(\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-j}, \dots) \quad (3.2)$$

donde $g(\cdot)$ es la media de x_t condicionada a la información pasada, es decir,

$$E(x_t \mid x_{t-1}, x_{t-2}, \dots) = g(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-j}, \dots)$$

La expresión (3.2) es más restrictiva que la (3.1) y se obtiene a partir del desarrollo de Taylor de la siguiente manera:

Proposición 15: Consideremos para x_t su desarrollo en serie de Taylor alrededor de $\varepsilon_t = 0$ para $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$, dados, entonces

$$x_t = f(0, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-j}, \dots) + \varepsilon_t \cdot f'(0, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-j}, \dots) + \left(\frac{1}{2}\right) \varepsilon_t^2 \cdot f''(0, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-j}, \dots) + \dots$$

donde f' y f'' son respectivamente la primera y segunda derivada de f respecto a ε_t .

Proposición 16: La innovación en x_t es proporcional a la perturbación ε_t con coeficiente de proporcionalidad igual a la función $h(\cdot)$. La varianza de x_t condicionada a la información pasada, $V(x_t \mid x_{t-1}, x_{t-2}, \dots)$ es igual a $h(\cdot)^2$.

Asumiendo la expresión 3.2, se denominan **modelos no lineales en media** aquellos en

que $g(\cdot)$ es una función no lineal, y **modelos no lineales en varianza** aquellos con $h(\cdot)^2$ no lineal. La mayoría de modelos no lineales se concentran en una forma o otra de no linealidad.

Una manera de comprender la distinción entre no linealidad en media y no linealidad en varianza pasa por considerar los momentos del proceso $\{x_t\}$. Para todos los modelos no lineales se cumple que

$$E(x_t x_{t-i}) = 0 \quad \text{si } i > 0$$

Consideremos ahora un momento de orden elevado, $E(x_t \cdot x_{t-i} \cdot x_{t-j} \cdot x_{t-k} \cdot \dots)$, tenemos que para los *modelos no lineales en media* el anterior momento es diferente de cero cuando $i, j, k > 0$, en cambio para los *modelos no lineales en varianza* (que cumplen la condición de martingala) este momento es igual a cero para $i, j, k > 0$. Solo será diferente de cero cuando al menos uno de los retardos i, j, k , sea cero.

Las características observadas para la volatilidad hacen necesario considerar una dinámica no lineal del proceso. Es bien conocido que los modelos lineales solo pueden generar cuatro tipos de movimientos: oscilatorio y estable, oscilatorio y explosivo, no oscilatorio y estable, y no oscilatorio y explosivo. Sin embargo los modelos no lineales pueden generar un conjunto mucho más amplio de movimientos.

Habida cuenta de la complejidad que entrañan los modelos no lineales, vamos a situar los modelos SETAR dentro de la amplia estructura de los modelos no lineales. No existe, como es natural, una única clasificación, cada una atiende a diferentes criterios o enfoques. Vamos a considerar las clasificaciones debidas a Tong (1990), Guegan (1994) y Hsieh (1995). La primera es una completa y minuciosa revisión de las diferentes formas de no linealidad; la clasificación propuesta por Guegan es mucho más simple, se basa en las características más esenciales de los modelos no lineales: su carácter autorregresivo o no, si se trata de modelos no lineales en media o en varianza, etc. Finalmente la clasificación de Hsieh, nos parece interesante pues diferencia de manera clara y sencilla los modelos TAR de los modelos ARCH

Tong en 1990 realiza, como ya hemos mencionado, una exhaustiva clasificación de los modelos no lineales para series temporales. En ella, estos modelos se estructuran en 13 grupos diferentes:

MODELOS NO LINEALES (Tong 1990):
Modelos Umbral (<i>"Threshold Models"</i>)
Modelos EXPAR (<i>"Amplitude-dependent exponential autoregressive models"</i>)
Modelos FAR (<i>"Fractional autoregressive models"</i>)
Modelos PAR (<i>"Product autoregressive models"</i>)
Modelos RCA (<i>"Random coefficient autoregressive models"</i>)
Modelos NEAR (<i>"Newer exponential autoregressive models"</i>)
Modelos autoregresivos con espacio de estados discreto
Modelos bilineales (BL)
Modelos no lineales de medias móviles
Modelos ARCH (<i>"Autoregressive models with conditional heterocedasticity"</i>)
Modelos de segunda generación
Modelos doblemente estocásticos
Modelos SDM (<i>"State dependent models"</i>) o dependientes de estados

El primer grupo aglutina los denominados "Modelos Umbral", es decir, aquellos que se caracterizan por el "principio del umbral" (*threshold principle*). La idea fundamental de este principio es la introducción de regímenes a partir de umbrales, permitiendo así el análisis de sistemas estocásticos complejos, a partir de subsistemas simples.

Los modelos no lineales para series temporales basados en el "principio del umbral" se clasifican, según Tong (1990), en tres grandes grupos:

MODELOS UMBRAL (<i>"THRESHOLD MODELS"</i>):
Modelos lineales definidos por partes TAR (<i>"piecewise linear models"</i>)
Modelos polinomiales definidos por partes (<i>"piecewise polynomial models"</i>)
Modelos STAR (<i>"smooth threshold autoregressive models"</i>)

Los modelos lineales definidos por partes son los que se conocen habitualmente como modelos autorregresivos por umbrales TAR, su forma canónica es la siguiente:

Definición 17: Modelo TAR.

Sea $\{X_t\}$ una serie temporal de dimensión k , para todo t .

J_t es una variable aleatoria indicadora que toma los valores $\{1, 2, \dots, l\}$.

Decimos que el par ordenado $(\mathbf{X}_t, \mathbf{J}_t)$ sigue un modelo TAR (Threshold AutoRegressive model) si:

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{A}^{J_t} \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{B}^{J_t} \boldsymbol{\varepsilon}_t + \mathbf{C}^{J_t} \quad (3.3)$$

donde, para $J_t = j$

\mathbf{A}^j es una matriz con coeficientes constantes ($k \times k$)

\mathbf{B}^j es una matriz con coeficientes constantes ($k \times k$)

\mathbf{C}^j es un vector con coeficientes constantes ($k \times 1$)

$\varepsilon_t^{(j)}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, k -dimensionales, centradas, con esperanza cero y con matriz de covarianzas diagonal, tal que:

$$E(\varepsilon_t^{(j)} \varepsilon_t^{(j')}) = 0 \quad \text{para } j \neq j'$$

y ε_t independiente de X_{t-1} para todo t .

El modelo SETAR ("Self-Exciting Threshold AutoRegressive models") es un caso particular del modelo TAR definido en (3.3) en el que \mathbf{J}_t , mecanismo que rige la dinámica del proceso, se elige en función de los valores retardados de X_t . La formulación de un modelo SETAR $(l; k, \dots, k)$ es la siguiente:

Definición 18: Modelo SETAR $(l; k, \dots, k)$.

Sea (r_0, r_1, \dots, r_l) un conjunto de números ordenados tal que $-\infty = r_0 < r_1 < \dots < r_l = +\infty$ y sea R_1, R_2, \dots, R_l una partición de R donde $R_j = (r_{j-1}, r_j)$.

Si en la definición anterior del modelo TAR consideramos $X_t = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-k+1})'$ y sustituimos $A^{(j)}, B^{(j)}$ y $C^{(j)}$ por las siguientes expresiones

$$A^{(j)} = \left(\begin{array}{c|c} a_1^{(j)} \cdots a_{k-1}^{(j)} & a_k^{(j)} \\ \hline \mathbf{I}_{k-1} & 0 \end{array} \right) \quad B^{(j)} = \left(\begin{array}{c|c} h_1^{(j)} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$C^{(j)} = (a_0^{(j)}, 0, \dots, 0)'$$

$$\varepsilon_t = (\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-k+1})' \quad y$$

$$R_{j,d}^{(k)} = R \times R \times \dots \times R \times R_J \times R \times \dots \times R \quad (\text{cilindro de dimensión } k),$$

donde d es un entero del conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$ y $J_t = j$.

Si $X_{t-1} \in R_{j,d}^k$, entonces se cumple

$$\mathbf{X}_t = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^k a_i^{(j)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(j)} \quad \text{si} \quad X_{t-d} \in R_J, \quad j = 1, \dots, l$$

y decimos que el par ordenado $(\mathbf{X}_t, \mathbf{J}_t)$ sigue un modelo SETAR ("self-exciting threshold autoregressive model").

Para simplificar la notación consideramos $\varepsilon_t^{(j)} = h^{(j)} \varepsilon_t$, una serie (heterogénea) ruido blanco.

El resto de modelos que conforman la clasificación de Tong no van a ser comentados pues no tienen para nosotros un interés directo, para una revisión exhaustiva se puede consultar la obra de Tong (1990).

Guegan presenta una clasificación más simple para los modelos no lineales. En ella tiene en cuenta modelos autoregresivos combinados con diversos tipos de no linealidad, modelos en los que la media y la varianza dependen del tiempo, o si se trata de modelos gaussianos o no (entre otras características).

MODELOS NO LINEALES:	Guegan (1994)
Modelos estructuralmente no lineales:	Modelos autoregresivos no lineales
	Modelos autoregresivos con coeficientes aleatorios
	Modelos dependientes de estados <i>"State dependent models"</i>
	Modelos bilineales
Modelos autoregresivos no lineales	
Modelos evolutivos	
Modelos sometidos a atractores	
Modelos de larga memoria	
Modelos no lineales y/o no gaussianos	

Dentro del grupo de los "Modelos autoregresivos no lineales" se incluyen los modelos *threshold* autoregresivos TAR. Los modelos autoregresivos condicionados heterocedásticos ARCH, se incluyen dentro del grupo de "Modelos evolutivos".

Hsieh (1995) realiza una clasificación donde el criterio empleado es el tipo de relación que se establece entre la variable residual ε_t y la función no lineal. Así los modelos TAR se incluyen en el grupo de "**modelos aditivos**" que tienen como expresión general para X_t :

$$X_t = F(I_{t-1}) + \varepsilon_t$$

donde I_{t-1} es la información hasta el instante $t - 1$, es decir, la historia de X_{t-1} y ε_{t-1} , $F(\cdot)$ se conoce como función esperanza condicionada y es no lineal.

Los "**modelos multiplicativos**" son aquellos que

$$X_t = G(I_{t-1})^{\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon_t$$

donde $G(\cdot)$ es la función varianza condicionada.

MODELOS NO LINEALES Hsieh (1995)	
modelos aditivos	modelos multiplicativos
TAR	ARCH

La no linealidad de los "modelos multiplicativos" es debida a que el término de error ε_t , multiplica a $G(\cdot)$, en este grupo se encuentran los modelos ARCH.

Después de este breve repaso a los distintos modelos no lineales, no nos pueden extrañar las palabras de Hsieh (1995): "Empíricamente, el mundo de los procesos no lineales es mucho más rico que el mundo de los procesos lineales. Los procesos no lineales pueden generar muchas más dinámicas que las generadas por los procesos no lineales".

3.2 Tests para estructuras no lineales

El estimador de la volatilidad que hemos elegido en el Capítulo 2 nos permite entenderla como un proceso temporal que evoluciona en el tiempo, por tanto, abordamos su estudio desde la teoría desarrollada para las series temporales. Una primera cuestión que nos planteamos es si el comportamiento de la serie es lineal o no lineal, y en este último caso debemos concretar el tipo de no linealidad.

Aunque la observación a través de gráficos del comportamiento de la serie nos ofrece una primera aproximación sobre el tipo de dinámica del proceso, son las pruebas estadísticas de contrastación las que nos permiten asegurar (siempre con un cierto error) si la serie es lineal o no.

Considerar en el test una hipótesis alternativa específica presupone, al menos, una sospecha de que nuestra serie temporal sigue un determinado modelo. El estudio de los modelos teóricos permite conocer las características más relevantes y hace posible que podamos reconocer algunas o todas ellas en nuestra serie. El test estadístico es el responsable de confirmar (o no) si los indicios hallados en nuestra serie son pruebas de una dinámica determinada.

Existen diferentes tests diseñados para contrastar la linealidad de una serie temporal¹, pero en este trabajo nos vamos a centrar en aquellos que presentan como alternativa a la hipótesis de linealidad, la no linealidad por umbrales o tipo "threshold". También abordaremos un test para el diagnóstico del modelo propuesto.

Test de la Razón de verosimilitud.

Chang y Tong (1986) han propuesto el Test de la razón de verosimilitud para contrastar la hipótesis de linealidad frente a la no linealidad tipo SETAR. Este test supone conocidos el valor umbral r , el retardo d y el orden del modelo p , los resultados obtenidos muestran que es menos potente al identificar la no linealidad threshold que el propuesto posteriormente por Tsay (1989).

Teorema 19: (Petrucelli y Woolford, 1984, Chan y Tong 1986):

Supongamos r conocido y $\lambda_r = \left[\frac{\hat{\sigma}^2(NL, r_1)}{\hat{\sigma}^2(L)} \right]^{\frac{(n-p+1)}{2}}$ donde:

n es el tamaño de la muestra y \hat{r}_1 es el estimador mínimo cuadrático de r ,

$\hat{\sigma}^2(NL, \hat{r}_1)$ es la media de la suma de los cuadrados de los residuos bajo la hipótesis:

$$H_1 : a_i^{(1)} \neq a_i^{(2)} \quad \text{para} \quad 0 \leq i \leq p$$

$\hat{\sigma}^2(L)$ es la media de la suma de los cuadrados de los residuos bajo la hipótesis H_0 de linealidad.

Suponiendo también que los residuos se distribuyen normalmente, entonces, considerando H_0 cierta, el estadístico

$$-2 \log \lambda_r$$

converge hacia una ley χ_{p+1}^2 .

Test TAR-F de Tsay (1989).

El test TAR-F se basa en dos tests anteriores, el test de Petrucelli y Davies (1986) y el test no linealidad de Keenan (1985). Al igual que el test de Petrucelli y Davies, se obtiene

¹Tong (1990) realiza una revisión de los tests de linealidad, que puede ser completada con el estudio de Teräsvirta (1996) sobre su potencia y propiedades.

a partir de una autoregresión ordenada y utiliza los residuos predictivos, pero es más potente, más simple y ampliamente aplicable. Una de las mayores ventajas del TAR-F es su especificidad para capturar no linealidad tipo umbral y que permite determinar el valor del parámetro de retardo d .

En esencia Tsay propone un test basado en el siguiente teorema:

Teorema 20: Test TAR-F.

Supongamos que la variable sigue un proceso lineal estacionario de orden p ; entonces para valores de n grandes y para un valor de d fijado, el estadístico definido como:

$$\hat{F}(p, d) = \frac{\frac{(\sum \hat{e}_t^2 - \sum \hat{\varepsilon}_t^2)}{p+1}}{\frac{(\sum \hat{\varepsilon}_t^2)}{(n-d-b-p-h)}}$$

con

$$b = \frac{n}{10} + p \quad y \quad h = \max \{1, p + 1 - d\}$$

$\hat{F}(p, d)$ sigue aproximadamente una distribución F de Fischer con $p+1$ y $(n-d-b-p-h)$ grados de libertad.

En la demostración, Tsay utiliza la consistencia de las estimaciones mínimo cuadráticas de un modelo lineal AR y una versión del teorema central de límite para martingalas de Billingsley (1961).

La aplicación de este test tiene como inconveniente que tan solo acepta que la serie de observaciones siga un modelo no lineal del tipo TAR; de manera que si la serie resulta ser no lineal pero no del tipo TAR, es necesario utilizar otro método para averiguar el modelo a identificar.

Tsay en 1991 propone un nuevo test, "*el test general de no linealidad*", que combina las ideas del test TAR-F y del F-test². Así el nuevo test conserva la potencia del F-test para detectar la no linealidad de orden finito y añade la idea de la autoregresión ordenada, que permite reconocer la no linealidad de tipo "*threshold*" o por umbrales. Esta combinación mantiene las ventajas

²El F-Test es debido a Tsay (1986), permite testar modelos no lineales de segundo orden. Representa una mejora del test de Keenan (1985) pues consigue aumentar la potencia de este test.

de ambos tests a la vez que elimina sus puntos débiles.

El *test general de no linealidad* utiliza la adición de nuevas variables para detectar varios tipos de no linealidad, la propia de los modelos bilineales (BI), exponenciales autoregresivos (EXPAR), autoregresivos con umbral suavizado (STAR); la autoregresión ordenada es utilizada para capturar la no linealidad de los modelos autoregresivos por umbrales (TAR).

Otro test que vamos a utilizar es el de McLeod y Li (1983), aunque es un test de linealidad se utiliza principalmente como test de diagnóstico de los residuos.

McLeod y Li proponen el siguiente test para la linealidad:

Teorema 21: Test de McLeod y Li.

Sean $\{\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \dots, \hat{\varepsilon}_N\}$ los residuos obtenidos al ajustar un modelo ARMA. Designamos con r_k la autocorrelación muestral de los residuos al cuadrado, esto es

$$r_k = \frac{\sum_{j=1}^{N-k} (\hat{\varepsilon}_j^2 - \hat{\sigma}^2)(\hat{\varepsilon}_{j+k}^2 - \hat{\sigma}^2)}{\sum_{j=1}^N (\hat{\varepsilon}_j^2 - \hat{\sigma}^2)^2}$$

donde

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{j=1}^N \hat{\varepsilon}_j^2 / N$$

para m fijado, el estadístico propuesto es

$$Q^2 = N(N+2) \sum_{k=1}^m r_k^2 / (N-k)$$

Entonces, si asumimos la hipótesis nula de que las innovaciones son independientes, Q^2 se distribuye como una χ_m^2 .

Este estadístico se puede usar para detectar no linealidad de tipo bilineal, aunque cuando obtenemos un resultado significativo no podemos distinguir claramente si se trata de no linealidad o de si el modelo se encuentra mal especificado.

Según los estudios comparativos realizados por Petrucci y Davies (1986) y Luukonen *et al.* (1988), este test es válido para testar la hipótesis de linealidad frente alternativas no lineales tipo ARCH, aunque su potencia es inferior a la de otros tests del dominio temporal.

Donde el uso de este test es más apropiado (y es donde nosotros lo utilizaremos), es en la etapa de diagnóstico del modelo para estudiar la linealidad de los residuos. Gao (1994) estudia las propiedades muestrales del estadístico y comprueba que Q^2 es capaz de detectar ciertos tipos de dependencia serial, especialmente cuando esta dependencia corresponde a la varianza condicionada de la serie temporal.

Tong y Yeung (1991) proponen un **Test de no-linealidad tipo SETAR en series parcialmente observadas** adaptando los tests de Petrucci-Davies, Petrucci y el test TAR-F de Tsay mediante el filtro de Kalman.

Otros tests utilizados para contrastar diferentes formas de no linealidad son:

Test TR (time reversibility) de Ramsey y Rothman (1996), que considera como hipótesis nula que el proceso es reversible temporalmente. Este test se basa en la simple estimación por el método de los momentos de la función de bicovarianza-simétrica. El estadístico de prueba está distribuido asintóticamente según una Normal. Por construcción el test TR no permite detectar la no linealidad de procesos cuya bicovarianza sea cero (ARCH, EGARCH). Cuando la hipótesis nula es rechazada, el patrón de irreversibilidad temporal puede ser útil en el proceso de identificación del modelo; en concreto trabajos de Rothman (1992, 1999) estudian la gran potencia del test frente a la alternativa de modelos por umbrales o modelos bilineales.

Test REVERSE propuesto por Hinich y Rothman (1998) sirve también para contrastar la reversibilidad temporal. Es un test definido en el dominio frecuencial y que se basa en las propiedades del espectro de orden elevado. El estadístico se calcula a partir de la suma de los cuadrados de los valores absolutos de la parte imaginaria de la estimación de la función de asimetría (esta función se calcula en términos del biespectro), bajo la hipótesis nula de reversibilidad temporal, el estadístico se distribuye como una ji-cuadrado. El test es muy potente para detectar ciclos asimétricos.

Test BDS (Brock, Dechert y Scheinkman, 1987,1996), tiene su origen en la literatura económico-financiera. Permite probar que las observaciones de una serie temporal son independientes e idénticamente distribuidas (IID). El **Test BDS** puede aplicarse para testar la bondad de un modelo de predicción contrastando si existe alguna estructura en los errores de predicción. Brock, Dechert y Scheinkman, (1987, 1996) demuestran que si una serie temporal es IID, entonces el estadístico de prueba se distribuye asintóticamente como una Normal estandar.

Los dos primeros tests son de gran utilidad para contrastar la irreversibilidad temporal de la serie de volatilidades (característica que los modelos SETAR pueden capturar) y el último para probar la bondad del modelo propuesto.

Las siguientes figuras (3-1, 3-2, 3-3) ilustran los comentarios que acabamos de realizar sobre los tests aplicados para detectar diferentes formas de no linealidad. En la figura 3-1 aparecen aquellos tests (dentro de los que hemos mencionados) que enfrentan la hipótesis nula de linealidad a formas concretas de no linealidad.

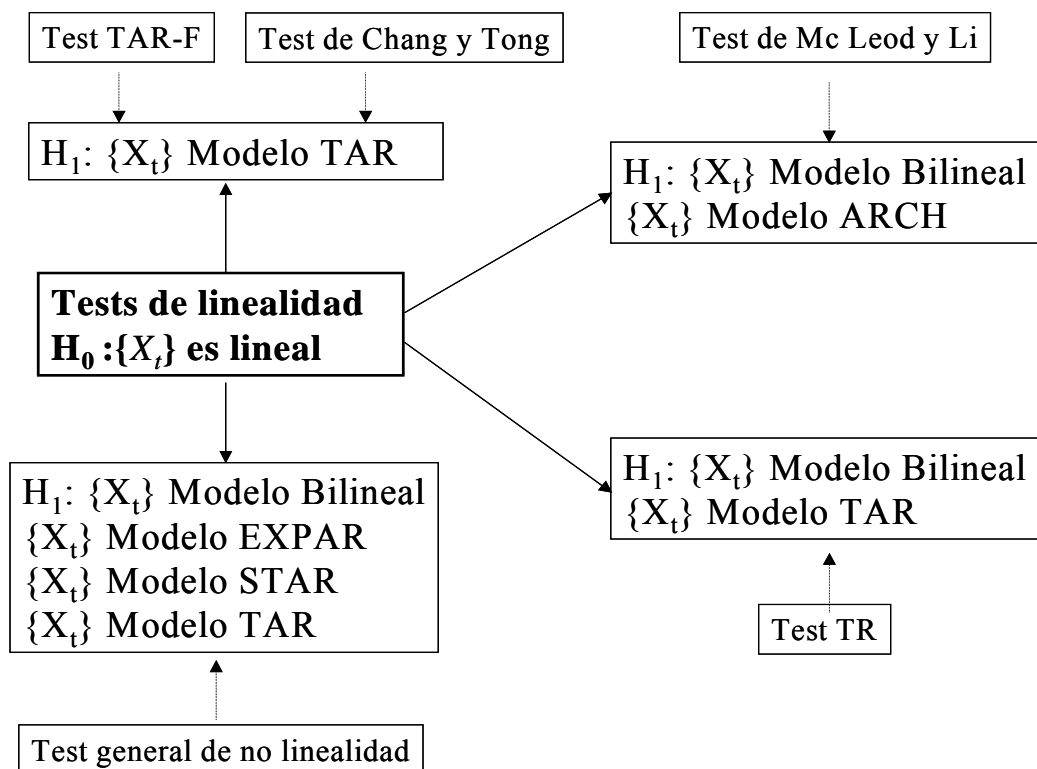


Figura 3-1: Tests de linealidad e hipótesis implicadas.

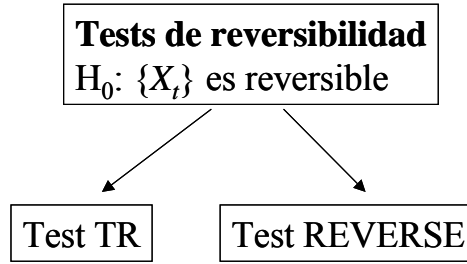


Figura 3-2: Tests de reversibilidad.

En la figura 3-2 aparecen tests cuyo objeto es contrastar la irreversibilidad de la serie, y finalmente en la figura 3-3 se recogen los tests utilizados para verificar la bondad del ajuste del modelo.

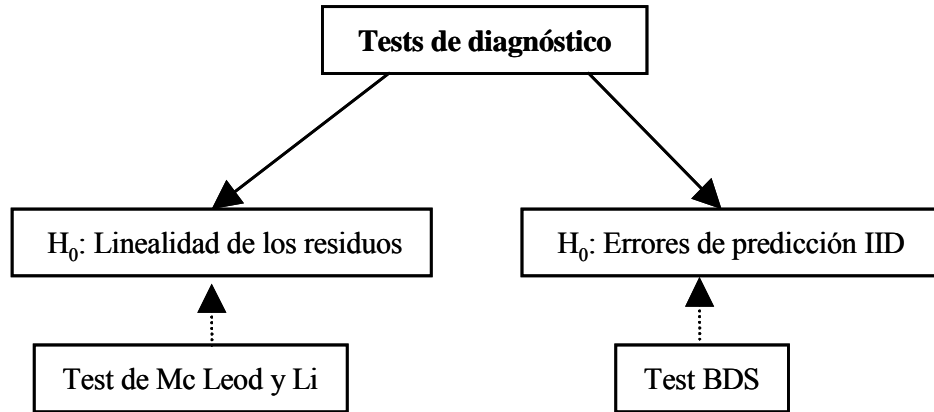


Figura 3-3: Tests de diagnóstico e hipótesis implicadas.

Aunque algunos de los tests que aparecen en estas figuras no van a ser utilizados en nuestro trabajo (Test general de linealidad) o van a utilizarse sólo en alguna de sus facetas (Test de Mc Leod y Li, Test TR), nos parece interesante mostrar todas sus capacidades.