Sea $P=(x_1,x_2)$, sea O el origen, la dist. euclidiana de P al origen es

$$d(O,P)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

En general $P=(x_1,x_2,\dots x_p)$

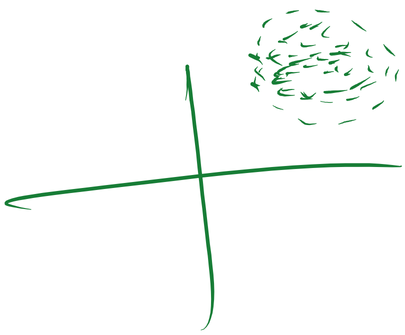
$$d(O,P)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_p^2}$$

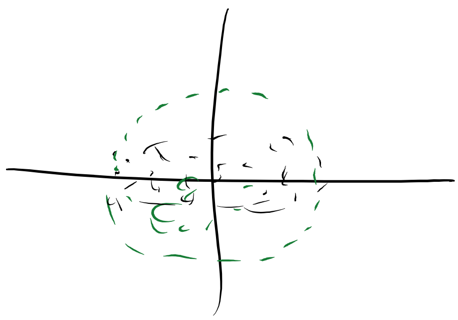
La distancia entre P y Q $(Q=(y_1,y_2\dots y_p))$

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_p-y_p)^2}$$

Distancia Estadística

$$d(O,P)=\sqrt{\frac{x_1^2}{s_{11}}+\frac{x_2^2}{s_{22}}}$$

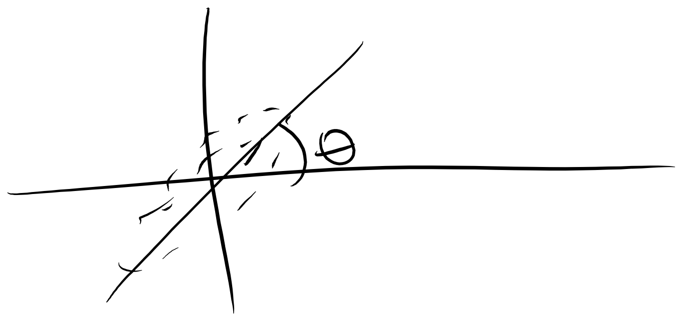




En general la distancia entre P y Q $\quad P=(x_1\dots x_p)$ $\quad Q=(y_1\dots y_p)$

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_p-y_p)^2}$$

$$d(P,Q) = \sqrt{\left(\frac{x_1-y_1}{\sqrt{s_{11}}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_p-y_p}{\sqrt{s_{pp}}}\right)^2}$$



En este caso, mediante una rotación tenemos

$$d(O,P) = \sqrt{\frac{\tilde{x}_1^2}{\tilde{s}_{11}} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\tilde{s}_{22}}}$$

Para 2D, la matriz de rotación:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$d(O,P) = \sqrt{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2}$$

dependen de θ y de s_{11}, s_{22} y s_{21}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{p1} & & a_{pp} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix}$$

Simétrica tq se ~~debe~~ satisfacer:

i) $d(P,Q) = d(Q,P)$

ii) $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$

iii) $d(P,Q) > 0 \;,\; P \neq Q$

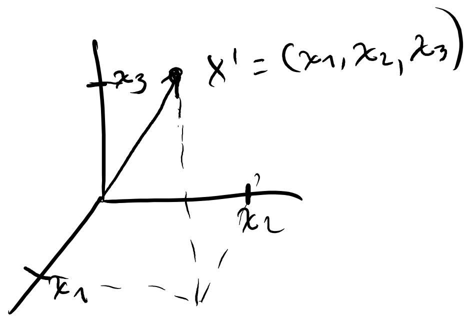
iv) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$

Reposo AL

$x_i \in \mathbb{R}$

$$X \in \mathbb{R}^n \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$X^T = X' = (x_1 \ldots x_n)$$



$c \in \mathbb{R}$

$$cX = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix}$$

2) $X, Y \in \mathbb{R}^n$

$$X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

3) Longitud de un vector

$$L_X = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{X'X}$$

Si $c \in \mathbb{R}$

$$L_{cX} = |c| \, L_X$$

Si $c = L_X^{-1}$, cX es el vector unitario en dirección de X.

Ángulo entre dos vectores X, Y

$$\cos\theta = \frac{X'Y}{L_X L_Y} = \frac{X'Y}{\sqrt{(X'X)(Y'Y)}}$$

X, Y perpend. $\Longleftrightarrow$ $X'Y = 0$

Indep Lineal

$X, Y \in \mathbb{R}^n$ son linealmente dep

$\exists\, c_1, c_2$ dif. de 0 tq

$$c_1 X + c_2 Y = 0$$

$X_1 \ldots X_k$ son linealmente indep si:

$$c_1 X_1 + \cdots + c_2 X_2 = 0 \longrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = 0$$

Proyecciones

Sea X, Y dos vectores. La proyección ortogonal de X sobre Y se calcula como:

$$P_Y(X) = \left(\frac{X'Y}{Y'Y}\right) Y$$

Longitud de la proyección

$$L_{P_Y(X)} = |\cos(\theta)|\, L_X$$

Matrices

Una matriz de dim $n \times p$ es un arreglo de números reales con n filas y p columnas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Llamamos A^T a la matriz resultante de rotar A sobre su diagonal

$$A^T = \begin{array}{cc} & n \\ p & \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \end{pmatrix} \end{array}$$

Sea $c \in \mathbb{R}$

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{1p} \\ \vdots & & \\ ca_{n1} & \cdots & ca_{np} \end{pmatrix}$$

Sean A y B matrices $n \times p$

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1p}+b_{1p} \\ & \ddots & \\ & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}$$

Multip. de matrices:

Sea A una matriz $n \times k$ y B una matriz $k \times p$ la matriz AB. Es aquella de dimensión $n \times p$ con entrada en la posición i,j igual al producto interno entre la i-ésima fila de A y la j-ésima columna de B.

Una matriz cuadrada es aquella con igual # de filas y columnas.

A es simetrica si

$$A = A^T$$

En general $A \cdot B \neq B \cdot A$

Llamamos I_K a la matriz identidad $K \times K$

$\forall A$ matriz $K \times K$

$$I_K A = A I_K = A$$

Decimos que una matriz cuadrada $A_{K \times K}$ es invertible si existe B

$$A \cdot B = B \cdot A = I_K$$

B es la inversa de A

$B \rightarrow A^{-1}$

A es invertible si todos los vectores columna son linealmente indep.

Vectores y valores propios

Sea A una matriz cuadrada. Decimos que λ es valor propio de A con vector propio $X \neq 0$ si

$$Ax = \lambda X$$

Sea $A_{K \times K}$ simétrica. Entonces A tiene K pares de valores propios y vectores propios

$$\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_K e_K$$

$$e_1, \ldots, e_K \longrightarrow \text{ortonormales}$$

Sea A una matriz cuadrada simétrica la desc. espectral de A está dada por:

$$A = \lambda_1 e_1 e_1^T + \lambda_2 e_2 e_2^T + \ldots + \lambda_K e_K e_K^T$$

Formas cuadráticas

Sea A una matriz cuadrada $K \times K$. Sea X un vector $K \times 1$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_K \end{pmatrix}$

La forma cuadrática asociada a A es

$$x'Ax = a_{11}x_1^2 + \dots a_{ij}x_i x_j + \dots$$
$$+ a_{k-1,k}\, x_k x_{k-1}$$

* Si $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad 0 \leq x'Ax$

Entonces A se dice def. no negativa

Si A es def. no negativa

$$x'Ax = 0 \iff x = 0$$

Entonces A se dice def. positiva

1) A def positiva $\iff$ todos los valores propios son positivos

2) A def no neg $\iff$ todos los valores propios son no neg.