Vectores aleatorios

martes, 1 de febrero de 2022 9:08 a. m.

Matriz raiz cuadrada

Sea A una matriz $K \times K$ def. positiva y simétrica con desc. espectral.

$$A = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i e_i e_i'$$

Sea $P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_K \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

Entonces $A = P \Lambda P'$

donde $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_K \end{pmatrix}$

Además

$$A^{-1} = P \Lambda^{-1} P' = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} e_i e_i'$$

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

Def: Sea A matriz $K \times K$ simétrica def. positiva, definimos $\Lambda^{1/2}$ como la matriz con entradas en la diagonal $\sqrt{\lambda_i}$ $i = 1 \ldots k$. Entonces la matriz $\sum \sqrt{\lambda_i}\, e_i e_i' = P \Lambda^{1/2} P'$ se llama matriz raíz cuadrada de A y se conoce como la matriz $A^{1/2}$.

$A^{1/2}$ satisface:

* $(A^{1/2})^T = A^{1/2}$

* $A^{1/2} A^{1/2} = A$
* $(A^{1/2})^{-1} = \sum \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} e_i e_i' = P \Lambda^{-1/2} P'$
* $A^{1/2} A^{-1/2} = A^{-1/2} A^{1/2} = I_k$
* $A^{-1/2} A^{-1/2} = A^{-1}$

Vectores y matrices aleatorias

1) Un vector aleatorio es aquel cuyas entradas son variables aleatorias
2) Una matriz aleatoria es aquella cuyas entradas son v.a's

Ej:

$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ → V.a

$X = \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1p} \\ \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$ → V.A

$X_n \longrightarrow$ V.a

X_{K1} X_{Kp}

3) El valor esperado de un vector aleatorio X (o matr[iz]) es un VECTOR (o MATRIZ) con entradas correspon[dientes] a los valores esperados de los elementos de X

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & \cdots & X_{np} \end{pmatrix} \qquad E(X) = \begin{pmatrix} E(X_{11}) & \cdots & E(\\ \vdots & \ddots & \\ E(X_{n1}) & & E(\end{pmatrix}$$

$$E(X_{ij}) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{ij}(x_{ij})\, x_{ij}\, dx_{ij} & \text{si } X_{ij} \text{ continua con densidad } f_{ij} \\[2em] \displaystyle\sum p_{ij}(x_{ij})\, x_{ij} & \text{si } X_{ij} \text{ discreta con} \end{cases}$$

(PMF $p_{ij}(x_{ij})$)

Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ dos matrices (vectores) aleatorias del mismo tamaño (dim). Sean A y B matrices (vectores) conformables por constantes.

1) $E(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = E(\mathbb{X}) + E(\mathbb{Y})$

2) $E(A\mathbb{Y}B) = A\,E(\mathbb{Y})\,B$

Vector de medias y matriz de covarianza

Sea $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$ un vector aleatorio.

Cada elemento de X es una v.a. con distribución marginal.

Sean μ_i y σ_i^2 la media y varianza de X_i (marginales)

$$\mu_i = E(X_i) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_i(x_i)\, dx_i \\ \sum x_i p_i(x_i) \end{cases}$$

$$\sigma_i^2 = E((X_i - \mu_i)^2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_i)^2 f_i(x_i)\, dx_i \\ \sum (x_i - \mu_i)^2 p_i(x_i) \end{cases}$$

$$\sigma_i^2 = \sigma_{ii}$$

Ahora la cov. entre X_i, X_k $\quad i, k = 1, \dots, p$

$$\sigma_{ik} = \text{Cov}(X_i, X_k) = E\left((X_i-\mu_i)(X_k-\mu_k)\right)$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_i-\mu_i)(x_k-\mu_k) f_{ik}(x_i, x_k)\, dx_i\, dx_k \\ \displaystyle\sum\sum (x_i-\mu_i)(x_k-\mu_k)\, p_{ik}(x_i, x_k) \end{cases}$$

$\to$ PMF conjunta

Obs: Si $i = k$ obtenemos $\sigma_{ii} \to$ varianza marginal de

Obs: Sea X un vect. aleatorio
La distribución de X se puede describir mediante la distr. conjunta de sus entradas.

$$f_{X_1 \cdots X_p}(x_1 \ldots x_p) = f_X(X)$$

$\to$ Muchas veces es la

$x_1 \dots x_p$ ... función de densidad normal multivariada.

X_i, X_K son independientes si

$$F_{iK}(x_i, x_K) = F_i(x_i)\, F_K(x_K)$$

$$f_{iK}(x_i, x_K) = f_i(x_i)\, f_K(x_K)$$

Generalizando:

p v.a. $X_1, X_2 \dots X_p$ continuas se dicen independientes si

$$f_{X_1 \dots X_p}(x_1 \dots x_p) = \prod_{i=1}^{p} f_i(x_i) \quad \forall\, x_1 \dots x_p$$

X_i, X_K indep. $\Longrightarrow$ $\operatorname{cov}(X_i, X_p) = 0$

Notación:

Sea X vector aleatorio

Denotamos $\mu_X = \mu = E(X)$

$$\Sigma = E\left((X-\mu)(X-\mu)^T\right)$$

$\downarrow$

los elementos son las p varianzas σ_{ii} en su diagonal, junto con $\frac{p(p-1)}{2}$ cov. diferent σ_{ij}

$$E(X) = \mu_X = \mu = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ Vector de medias Poblacional

$$\Sigma = E\left(\begin{pmatrix} X_1-\mu_1 \\ \vdots \\ X_p-\mu_p \end{pmatrix}(X_1-\mu_1, \ldots, X_p-\mu_p)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1p} & \cdots & \sigma_{pp} \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Matriz de varianza-cova poblacional.}$$

Def: Definimos la matriz de correlación poblacional (simétrica) como:

$$\rho \quad \begin{pmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1p} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \rho_{1p} \end{pmatrix}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ \rho_{1p} & & \rho_{pp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ \rho_{1p} & & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\rho_{ik} = \dfrac{\sigma_{ik}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{kk}}}$

Mide la asociación lineal entre las V.A.'s X_i,

Ahora:

Sea $V^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_{ii}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{pmatrix}$

matriz desv. estándar

1) $V^{1/2} \rho V^{1/2} = \Sigma$

2) $$\rho = \left(V^{-1/2}\right)^{-1} \Sigma \left(V^{1/2}\right)^{-1}$$

Particiones de vectores y matrices.

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_q \\ \hdashline X_{q+1} \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ \hdashline X^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\mu = E(X) = \begin{pmatrix} E(X^{(1)}) \\ \hdashline E(X^{(2)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \hdashline \mu^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$E\left(\left(X^{(1)}-\mu^{(1)}\right)\left(X^{(2)}-\mu^{(2)}\right)^T\right)$$

$$= E\left(\begin{pmatrix} X_1-\mu_1 \\ \vdots \\ X_q-\mu_q \end{pmatrix}\left(X_{q+1}-\mu_{q+1}, \ldots, X_p-\mu_p\right)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{1,q+1} & \cdots & \sigma_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \\ \sigma_{q,q+1} & & \sigma_{qp} \end{pmatrix} = \Sigma_{(1)(2)}$$

Matriz de covarianza entre los componentes de $X^{(1)}$ y $X^{(2)}$

Σ no necesariamente simétrica ni cuadrada.

Σ_{12}

$$\underset{p\times p}{\Sigma} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & p-q \end{array} \\ \begin{array}{c} q \\ p-q \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right) \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1q} & & \Sigma_{12} & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ \sigma_{q1} & & \sigma_{qq} & & & \\ \hline & & & \sigma_{q+1,q+1} & \cdots & \\ & \Sigma_{21} & & \vdots & \ddots & \\ & & & \sigma_{p,q+1} & & \end{array}\right)$$

$$\Sigma_{21} = \Sigma_{12}'$$

La covarianza de $X^{(1)}$ es Σ_{11} y la de $X^{(2)}$ es Σ_{22}

Algunas veces denotaremos Σ_{12} como $cov(X^{(1)}, X$

aleatorias

Combinaciones lineales de vec...

Recordemos: $Y = aX + b$ $\quad a, b, \mathbb{R}$ $\quad X.\ v.a$

$$E(Y) = aE(X) + b$$

$$Var(Y) = a^2 Var(X)$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ $\quad X, Y, Z.\ v.a's$

$$cov(aX, bY) = ab\, cov(X, Y)$$

$$cov(X, Y + c) = Cov(X, Y)$$

$$cov(X, Y + Z) = cov(X, Y) + cov(X, Z)$$

Sea

$$c = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad X_1, X_2 \text{ v.a}$$

$$E(c'X) = c'E(X) = c'\mu_x$$

$$Var(c'X) = c'\Sigma c$$

$$(a, b)\begin{pmatrix} Var(X_1) & cov(X_1, X_2) \\ cov(X_1, X_2) & Var(X_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

En general para p v.a's

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$$

$$C'X = C_1X_1 + C_2X_2 \dots + C_pX_p$$

$$E(C'X) = C'E(X) = C'\mu_x$$

$$Var(C'X) = \underset{1\times p}{C'} \underset{p\times p}{\Sigma} \underset{p\times 1}{C}$$

Si generalizamos más

Se tienen q comb. lineales de p v.a's

$$Z_1 = C_{11}X_1 + \dots + C_{1p}X_p$$

$$\vdots$$

$$Z_q = C_{q1}X_1 + \dots + C_{qp}X_p$$

Entonces

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_q \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1p} \\ \vdots & \ddots & \\ C_{q1} & & C_{qp} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, \text{ luego}$$

$$\underset{q\times 1}{Z} = CX = \begin{pmatrix} c_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{qp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$$

$$\mu_z = E(z) = E(CX) = C\,E(X) = C\mu_X$$

$$\Sigma = C\Sigma_X C'$$

$1 - 2$

$q \times q$

$q \times p \quad \overline{p \times p} \quad \times \quad p \times q$