目录

1 基本几何体 **2**

1.1 球 2

1.2 Plane 3

2 光学原理 **3**

2.1 反射 3

2.2 折射 3

2.3 光的折射定律/Snell's Law 5

2.3.1 求折射光线 6

2.4 菲涅耳方程 Fresnel equation 8

2.4.1 Schlick 近似 9

3 Camera **10**

4 Bounding Volume Hierarchies **10**

计算机图形学基础

Lei Xinyue

2019-5-13

1 基本几何体

1.1 球

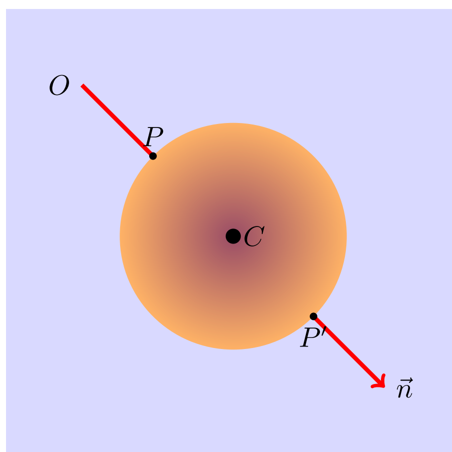

图 1: 射线和球

设球 S 有球心 C，半径 r。
设射线 R 有源点 O，方向 $\vec{d}$。$\vec{d}$ 是单位向量。

如图1，求射线 R 与球 S 是否相交，以及交点?

若射线与球相交，则存在点使得:

$$\|\overrightarrow{CO}\| = r$$

1.2 Plane

三维空间中的平面是二维空间中直线的扩展。

如图2所示，平面的参数方程可以表示为:

$$p(u,v) = o + u\vec{s} + v\vec{t}$$

其中，o 是平面中的一点，s 和 t 是平面中不共线的向量。

另外，平面也可以用隐式方程表示:

$$n \cdot p + d = 0$$

其中，n 是平面法线，p 是平面中的点，$d = -n \cdot x$，x 是平面任意一点。

给定平面中不共线的三点 u, v, w，则法线 $n = (u - w) \times (v - w)$。给定平面 π 上一点 q，则 $d = -n \cdot q$。

设 $f(p) = n \cdot p + d$，则:

1. $f(p) = 0 \Leftrightarrow p \in \pi$
2. $f(p) > 0 \Leftrightarrow p$ 属于点 $p + n$ 所在的一侧
3. $f(p < 0) \Leftrightarrow p$ 属于点 $p - n$ 所在的一侧

2 光学原理

2.1 反射

给定入射光线 v，法线 n，求反射光线 r，其中 v, n, r 是三维向量，n 是单位向量。如第5页的图3所示，反射光线方向为 $r = v - 2 \times (dot(v, n)) \times n$。

注意: 图3中，$dot(v, n)$ 是一个负数，$v' = dot(v, n) \times n$。

也可以查看图4，更简单明了一些。

2.2 折射

费马 (Fermat) 原理: 又称为时间最小原理或极短光原，光在任意介质中从一点传播到另一点，沿所需要时间最短的路径传播。可以用来推导光的折射定律。

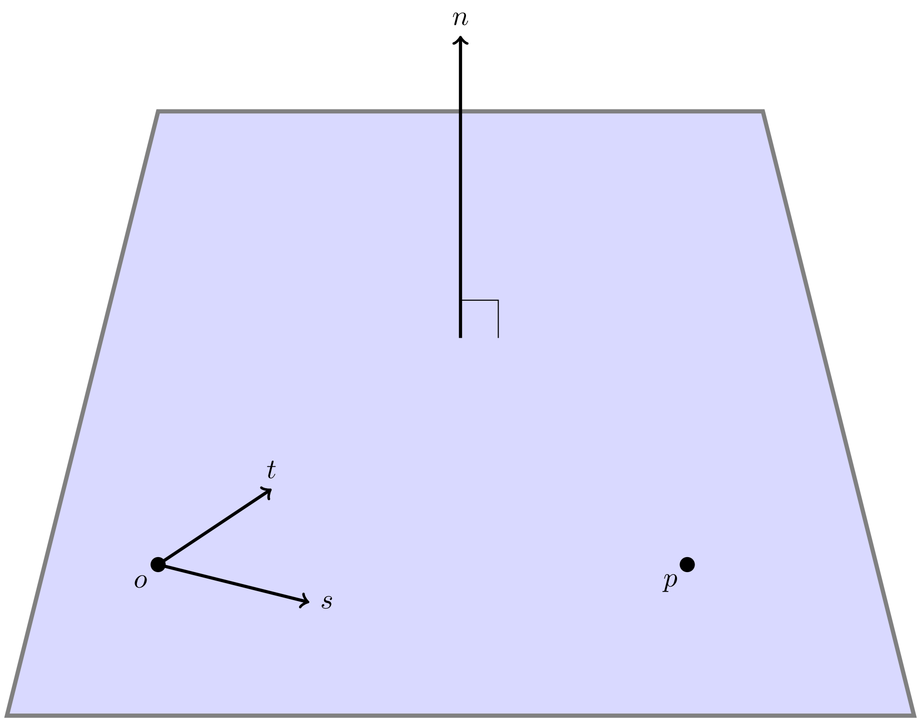

图 2: 三维空间的平面 π

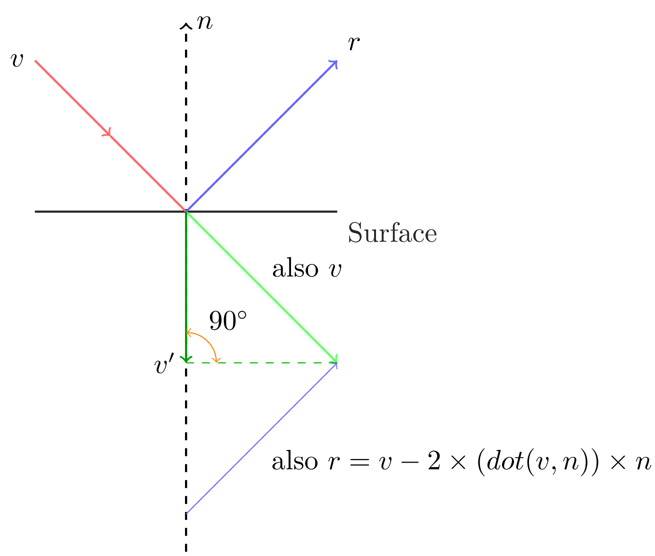

图 3: 反射示意图

2.3 光的折射定律/Snell's Law

光从一种介质射向另一种介质的平滑界面时，一部分光被界面反射，另一部分光透过界面在另一种介质中折射，折射光线服从折射定律：**折射光线与入射光线、法线处在同一平面内，折射光线与入射光线分别位于法线的两侧；入射角的正弦与折射角的正弦成正比**，即

$$\frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{\eta_2}{\eta_1} = n_{12}$$

其中，η_1, η_2 分别是光在第一种介质和第二种介质中的折射率。n_{12} 是比例常数，是第二介质对第一介质的相对折射率。(该定律适用于声波和无线电波)。

光从空气进入水，发生折射的示意图，见图5。

重要性质：

1. 当光从光疏介质斜射入光密介质中时，折射角小于入射角。
2. 当光从光密介质中斜射入光疏介质时，折射角大于入射角。
3. 当入射角增大时，折射角也随着增大。
4. 当光线垂直射向介质表面时，传播方向不改变。

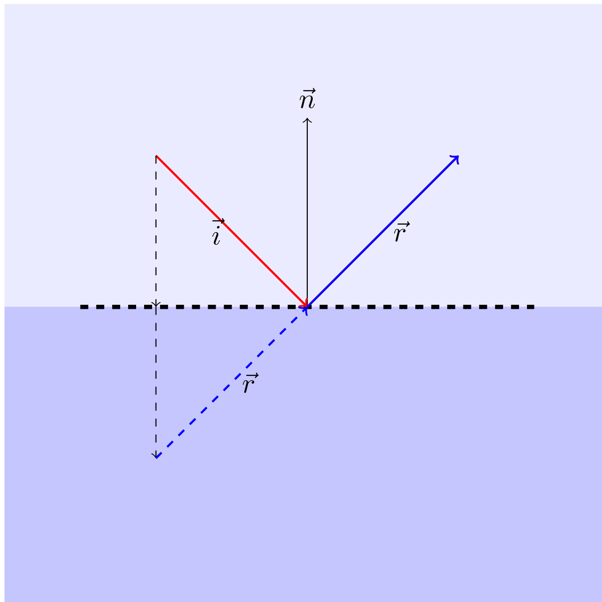

图 4: 反射示意图 2

2.3.1 求折射光线

参考链接。

如图6，设入射光线 $\overrightarrow{IO}$(也即 $\vec{i}$)，和法线 $\overrightarrow{ON}$(也即 $\vec{t}$) 都为单位向量,$\overrightarrow{LR}$ 是界面的切线向量 (也即 $\vec{m}$)。

折射向量可以表示为:

$$\vec{t} = \sin(\theta_2)\vec{m} - \cos(\theta_1)\vec{n}$$

又 $\vec{i} = \left(\vec{i} \cdot \vec{n}\right)\vec{n}$

$$\vec{m} = \frac{\vec{i} - \left(\vec{i} \cdot \vec{n}\right)\vec{n}}{\sin(\theta_1)}$$

由斯涅尔定律，

$$\sin(\theta_2) = \frac{\eta_1}{\eta_2}\sin(\theta_1) = \frac{\eta_1}{\eta_2}\sqrt{1-\cos^2(\theta_1)} \quad = \frac{\eta_1}{\eta_2}\sqrt{1-\left(\vec{i} \cdot \vec{n}\right)^2} \tag{1}$$

在方程1中，若 $\eta_1 > \eta_2 \iff \frac{\eta_1}{\eta_2} > 1$，则存在某个 θ_1，使得方程中右侧值大于 1，超出正弦值的范围，等于不再成立。此时，不发生折射，所有入射光

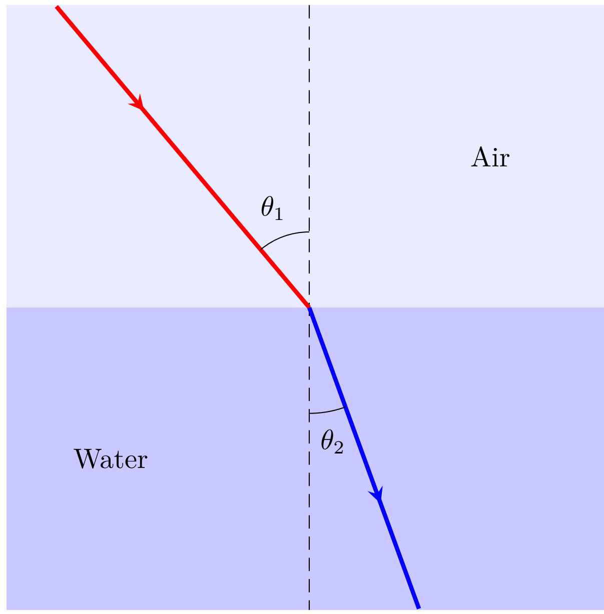

图 5: 折射示意图

;

发生完全反射。把方程1左侧设为 1，则可求出临界值 (critical angle):

$$1 = \frac{\eta_1}{\eta_2} \sin(\theta_c) \iff \theta_c = \sin^{-1} \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

一般入射光由光密介质到达光疏介质，$\theta_1 > \theta_c$ 时，才发生完全反射。由方程1可知，

$$\cos(\theta_2) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta_2)} = \sqrt{1 - \left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 \left(1 - \left(\vec{i} \cdot \vec{n}\right)^2\right)} \tag{2}$$

故,

$$
\begin{aligned}
\vec{t} &= \sin(\theta_2)\vec{m} - \cos(\theta_1)\vec{n} \\
&= \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1)}\left(\vec{i} - \left(\vec{i}\cdot\vec{n}\right)\vec{n}\right) - \sqrt{1-\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2\left(1-\left(\vec{i}\cdot\vec{n}\right)^2\right)}\vec{n} \\
&= \frac{\eta_1}{\eta_2}\left(\vec{i} - \left(\vec{i}\cdot\vec{n}\right)\vec{n}\right) - \sqrt{1-\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2\left(1-\left(\vec{i}\cdot\vec{n}\right)^2\right)}\vec{n} \\
&= \frac{\vec{\eta_1}}{\eta_2}\vec{i} - \left(\frac{\vec{\eta_1}}{\eta_2}\left(\vec{i}\cdot\vec{n}\right) + \sqrt{1-\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2\left(1-\left(\vec{i}\cdot\vec{n}\right)^2\right)}\right)\vec{n}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

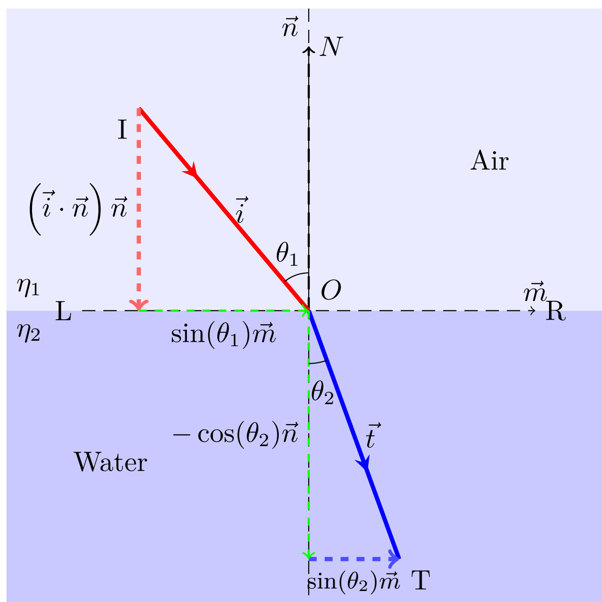

图 6: 求折射光线,$\vec{i}$,$\vec{t}$ 都是单位向量

2.4 菲涅耳方程 Fresnel equation

参考链接

菲涅耳方程（Fresnel equation）描述了光线经过两个介质的界面时，反射和透射的光强比重。图7中，$R \in [0,1]$ 为反射比，因能量守恒，透射比为 $1-R$。

对于**电介质（dielectric）**而言，菲涅耳方程为：

$$
\begin{aligned}
R_s &= \left(\frac{\eta_1 \cos\theta_i - \eta_2 \cos\theta_t}{\eta_1 \cos\theta_i + \eta_2 \cos\theta_t}\right)^2 \\
R_p &= \left(\frac{\eta_1 \cos\theta_t - \eta_2 \cos\theta_i}{\eta_1 \cos\theta_t + \eta_2 \cos\theta_i}\right)^2
\end{aligned}
\tag{4}
$$

其中，R_s 和 R_p 分别对应入射光的 s 偏振（senkrecht polarized）和 p 偏振（parallel polarized）所造成的反射比。图形学中通常考虑光是无偏振的（unpolarized），也就是两种偏振是等量的，所以可以取其平均值：

$$R = \frac{R_s + R_p}{2}$$

即求得反射比 R。

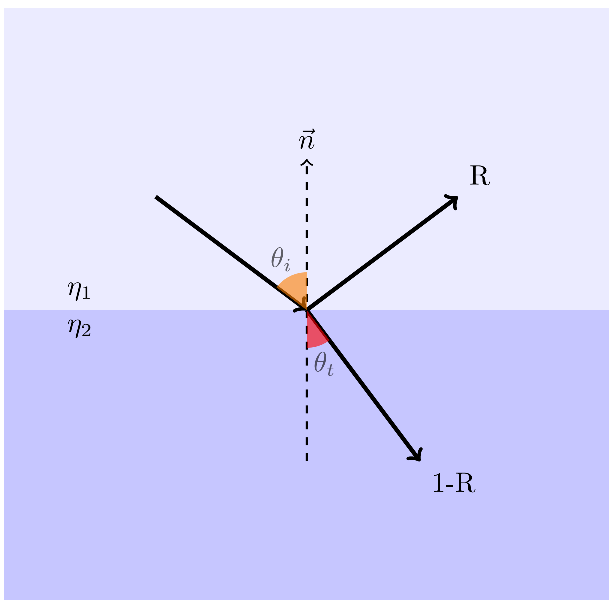

图 7: 反射和透射的光强比重

2.4.1 Schlick 近似

鉴于导体的菲涅耳方程较复杂，Schlick 提供了一个近似的函数：

$$R(\theta_i) \approx R(0) + (1 - R(0))(1 - \cos\theta_i)^5$$

此函数只需要对材质提供光线垂直反射时的 $R(0)$ 值，就能近似地计算出不同入射角时的菲涅耳反射比。对于电介质由方程2.4知，$R(0) = \left(\frac{\eta_i - \eta_t}{\eta_i + \eta_t}\right)^2$。对于导体，需要提供 $R(0)$ 的值（可能需要多个频率，如 RGB）。

https://github.com/EStormLynn/Peter-Shirley-Ray-Tracing-in-one-weenkend
https://github.com/EStormLynn/Peter-Shirley-Ray-Tracing-the-next-week

3 Camera

相机的原理

4 Bounding Volume Hierarchies