Matrix 矩阵

1. Gram-Schmidt Orthogonalization

把一个线性无关的n个向量的集合转化成一个正交基的基本思想：从一个向量中减去该向量在排在它前面的向量上的投影，则该向量剩余的部分必定与排在前面的向量正交。

> *原文: The basic idea is to subtract away the projection of each vector onto the vectors preceding it in the set. Whatever vector is left over must then be orthogonal to its predecessors.*

施密特正交化正是基于此思想的。

给定一个n个线性无关的向量的集合$\beta = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$，施密特正交化算法将产生一个新的集合$\beta' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$，使得$e'_i \cdot e'_j = 0, \quad i \neq j$。

步骤如下：

A. 设定$e'_1 = e_1$。
B. 从$i = 2$开始。
C. 从e_i中减去e_i在向量$e'_1, e'_2, \ldots, e'_{i-1}$上的投影，并把结果存进$e'_i$。用公式表示就是：
$e'_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{e_i \cdot e'_k}{{e'_k}^2} e'_k$
D. 如果$i < n$，增加i，回到步骤**C**。

相关

向量投影

一个向量P在向量Q上的投影为：

$proj_Q P = \frac{P \cdot Q}{||Q||^2} Q$,

向量P垂直于向量Q的分量为：

$perp_Q P = P - proj_Q P = P - \frac{P \cdot Q}{||Q||^2} Q$

2. 矩阵的行列式determinant

一个$n \times n$的矩阵M的行列式:

$detM = \sum_{i=1}^{n} M_{ik} C_{ik}(M)$
或者 $detM = \sum_{j=1}^{n} M_{kj} C_{kj}(M)$

其中，$C_{ij}(M) = (-1)^{i+j} detM^{\{i,j\}}$，而$M^{\{i,j\}}$是矩阵$M$的去掉第$i$行，第$j$列的子矩阵。

3. 矩阵的逆 (Matrix Inverses)

一个$n \times n$矩阵M是可逆的，当且仅当M的列向量是线性无关的。或者说，M是可逆的当且仅当$detM \neq 0$。或者说，一个矩阵M是可逆的当且仅当其转置矩阵M^T是可逆的。

可以用高斯消元法求逆矩阵。

一个$n \times n$的矩阵F的逆阵G的各项可以用以下公式计算:

$G_{ij} = \frac{C_{ji}(F)}{detF}$

例如，一个2×2的矩阵A的逆阵可以由以下公式给出:

$A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}$

4. 特征值和特征向量 Eigenvalues and Eigenvectors

$n \times n$矩阵M的特征值等于特征多项式的根:

$det(M - \lambda I)$

一个与特征值λ相关联的特征向量V是齐次线性系统的解:

$(M - \lambda I)V = 0$

实对称矩阵的特征值是实数，实对称矩阵的对应不同特征值的特征向量相互正交。

对角化

如果$V_1, V_2, \ldots, V_n$是$n \times n$矩阵M的线性无关的特征值，则下面的矩阵A可以对角化M,

$A = [\, V_1 \quad V_2 \quad \cdots \quad V_n \,]$

即 $A^{-1}MA = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$

此处$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$是$M$的特征值。

5. 正交矩阵 (Orthogonal Matrices

定义: 一个$n \times n$的可逆阵M，当且仅当$M^{-1} = M^T$时，称之为正交矩阵。

如果一个方阵的列向量构成的向量集合是正交的，则此方阵是正交矩阵。

定理：如果一个$n \times n$矩阵M是正交的，则M保持长度和角度不变。

例如：有正交阵M，向量P, P_1, P_2，则：

$||MP|| = ||P||$ 即长度不变。

$(MP_1) \cdot (MP_2) = P_1 \cdot P_2$ 即角度不变。

因为正交矩阵保持长度和角度不变，可以保持坐标系的总体结构不变。正交矩阵仅可以用于表示旋转变换(rotation)和反射变换(reflections)的组合。

Handedness

作为一个右手坐标系基的三个向量V_1, V_2, V_3满足：$(V_1 \times V_2) \cdot V_3 > 0$。如果是正交基，则$(V_1 \times V_2) = V_3$。如果$(V_1 \times V_2) \cdot V_3 < 0$，则表示为左手坐标系。

一个正交矩阵M的行列式只能为1或-1。如果$detM = 1$，则M只表示旋转(pure rotation)；如果$M = -1$，则M表示一个旋转及一个反射(refection，镜像操作)。

Transforming Normal Vectors

三维空间中法线的变换矩阵。设顶点变换矩阵为4×4矩阵F，矩阵M为其左上角的3×3子矩阵，则变换法线的矩阵为$(M^{-1})^T$，变换切线向量的矩阵为F或M。
注意 法线是一个向量，不受平移影响，所以这里用3×3矩阵表示。当M为正交矩阵时，$M^{-1} = M^T$，所以此时法线也可以用F或M进行变换。

4D矩阵F

设4×4矩阵$\mathbf{F}$由3×3的旋转矩阵$\mathbf{M}$和3D平移向量$\mathbf{T}$构成，即:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{T} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则$\mathbf{F}$的逆$\mathbf{F^{-1}}$为:

$$\mathbf{F^{-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M^{-1}} & -\mathbf{M^{-1}T} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{F}$的逆转置矩阵$\mathbf{(F^{-1})^T}$为:

$$\mathbf{(F^{-1})^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{(M^{-1})^T} & 0 \\ -\mathbf{M^{-1}T} & 1 \end{bmatrix}$$

变换平面的矩阵

设一个平面$\mathbf{L}$有法向$\mathbf{N}$和平面上的一点$\mathbf{P}$确定，则该平面由符合以下方程的点集构成(设$\mathbf{Q}$是平面上任意一点):

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{P}) = 0$$

记$\mathbf{D = -N \cdot P}$，则

可以该平面可以写成:$\mathbf{L} = \langle \mathbf{N}, \mathbf{D} \rangle$

则对该平面进行旋转、平移变换的矩阵为上面公式(3)中的$(\mathbf{F}^{-1})^{\mathbf{T}}$，即:

$$\mathbf{L}' = (\mathbf{F}^{-1})^{\mathbf{T}}\mathbf{L}$$

参考《Mathematics for 3D game Programming》第5.2章节。