证明两条平行线可以相交？

这其实是一篇介绍齐次坐标(Homogeneous Coordinates)的文章。翻译自 Homogeneous Coordinates。

Problem: Two parallel lines can intersect.

在欧式空间(Euclidean space，欧几里德空间)中，同一平面上的两条平行线永不相交。这是我们每个受过九年义务教育的人都知道的常识。

然而，这一常识在射影空间(projective space)中不再成立了，例如，你站在铁道上观察铁轨，举止远望，随着铁轨离你的视线越来越远，铁轨会变得越来越窄，最终会在地平线处相交，相交于一个无穷远处的点(at a point at infinity)。

> *记得上中学时，学向量投影时，一个数学老师在课堂上提到过射影几何、黎曼几何、模糊数学等名词，并解释了平线永不相交是在欧式几何中成立的，在别的几何学中并不一定成立，还提到了这个铁轨的例子。数学真是博大精深。听那堂课时，我还是十几岁的少年，岁月如梭。*

欧式空间(或笛卡尔空间，Cartesian space)很好地描述了我们常见的2D/3D几何图形(或几何结构)，但它们不足以应付射影空间 (实际上，欧式几何是射影几何的一个子集)。一个2D点的笛卡尔坐标可以表示为: (x, y)。

如果把点移到无限远处，怎么表示呢？在无限远处的点是(∞, ∞)，这在欧式空间中是没有意义的。在射影空间中，平行线应该在无限远处相交，但在欧式空间中不是这样的。数学家们发现了一个方法来解决这个问题。

Solution: Homogeneous Coordinates

齐次坐标(Homogeneous coordinate，由August Ferdinand Möbius提出)s使得能够在投影空间中进行图形和几何的计算。齐次坐标是一种用$N+1$个数表示N维坐标的方法。

为了表示2D齐次坐标，我们简单地在已有的(笛卡尔坐标)坐标上添加一个变量w。因此，一个笛卡尔坐标(X, Y)用齐次坐标表示就变成了(x, y, w)。笛卡尔形式的X和Y和齐次坐标x, y和w之间的关系为:

$$\begin{aligned} X &= x/w \\ Y &= y/w \end{aligned}$$

举例，一个笛卡坐标$(1, 2)$用齐次坐标可以表示为$(1, 2, 1)$。如果把这个$(1, 2)$点移到无穷远处时，它变成了(∞, ∞)(笛卡尔坐标表示)。但在齐次坐标中它可以表示为$(1, 2, 0)$，因为$(1/0, 2/0) \approx (\infty, \infty)$。注意使用齐次坐标，我们可以不用"$\infty$"就能表示无穷。

Why is it called "homogeneous"?

为什么称为齐次坐标？“齐次”是什么意思？

正如之前提到的那样，为了把齐次坐标(x, y, w)转化为笛卡尔坐标，我们简地用w除x, y:

$$\underbrace{(x, y, w)}_{\text{齐次坐标}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}\right)}_{\text{笛卡尔坐标}}$$

由齐次坐标转化为笛卡尔坐标的过程，我们可以发现一个事实，看下面的例子，箭头左边是齐次坐标，右边是对应的笛卡尔坐标:

$$\begin{array}{lcll} (1, 2, 3) & \Rightarrow & \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) & \\ (2, 4, 6) & \Rightarrow & \left(\frac{2}{6}, \frac{4}{6}\right) & = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ (4, 8, 12) & \Rightarrow & \left(\frac{4}{12}, \frac{8}{12}\right) & = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ \vdots & \Rightarrow & \vdots & \\ (1a, 2a, 3a) & \Rightarrow & \left(\frac{1a}{3a}, \frac{2a}{3a}\right) & = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{array}$$

如你所见，齐次坐标点$(1, 2, 3)$, $(2, 4, 6)$和$(4, 8, 12)$对应于同一个笛卡尔坐标点$(1/3, 2/3)$。并且任何标量乘积$(1a, 2a, 3a)$和笛卡尔坐标点$(1/3, 2/3)$都是同一个点。因此，这些点是“homogeneous”(即同质的，齐次的)，因为它们在欧式空间(或笛卡尔空间)中表示同一个点。换句话说，笛卡尔坐标具有缩放不变性(scale invariant)。

Proof: Two parallel lines can intersect.

考虑下面欧式空间中的两线性方程组(linear system):

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Ax + By + D = 0 \end{cases}$$

在欧式几何中，如果$C \neq D$，则这个线性方程组是无解的；如果$C = D$则两个方程是相同的。

让我们在射影空间中重写这个方程组，分别用$x/w, y/w$代替x, y:

$$\begin{cases} A\frac{x}{w} + B\frac{y}{w} + C = 0 \\ A\frac{x}{w} + B\frac{y}{w} + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ax + By + Cw = 0 \\ Ax + By + Dw = 0 \end{cases}$$

现在，我们就有了一个解:$(x, y, 0)$，因为$(C - D)w = 0, C \neq D, \therefore w = 0$。因此两条平行线在$(x, y, 0)$处相交，这个交点在无穷远处。

齐次坐标在计算机图形学(如把一个3D场景投影到2D平面上)中非常有用，是基本的概念。

References:

- Homogeneous Coordinates