四元数和旋转(Quaternion & rotation)

本篇文章主要讲述3D空间中的旋转和四元数之间的关系。其中会涉及到矩阵、向量运算，旋转矩阵，四元数，旋转的四元数表示，四元数表示的旋转如何转化为旋转矩阵。层层铺垫，可能文章有点长。基础好的同学，可以直接跳到四元数表示旋转部分，见下文公式(18)和公式(21)。

1 向量的点积和叉积

1.1 点积

给定两个n维向量$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$，则它们的点积(dot product，又称为内积)为：

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \|\mathbf{P}\| \, \|\mathbf{Q}\| \cos\alpha \qquad (1),$$

其中α是两向量之间的夹角。

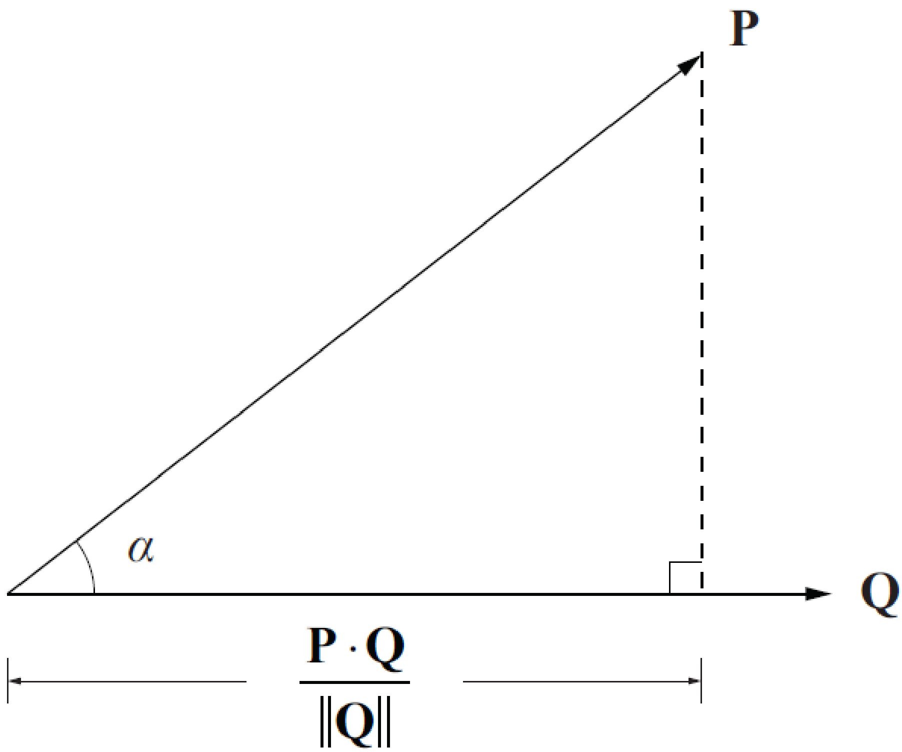

图1 向量P在Q上的投影

如上面图1，向量$\mathbf{P}$在$\mathbf{Q}$上的投影为:

$$proj_Q\mathbf{P} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{\|\mathbf{Q}\|^2}\mathbf{Q}$$

向量$\mathbf{P}$垂直于$\mathbf{Q}$的分量为:

$$\begin{aligned} perp_Q\mathbf{P} &= \mathbf{P} - proj_Q\mathbf{P} \\ &= \mathbf{p} - \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{\|\mathbf{Q}\|^2}\mathbf{Q} \end{aligned}$$

其中，向量$\mathbf{P}$在$\mathbf{Q}$上的投影可以看作$\mathbf{P}$的线性变换，可以写成矩阵向量积：

$$proj_Q\mathbf{P} = \frac{1}{\|\mathbf{Q}\|^2}\begin{bmatrix} Q_x^2 & Q_xQ_y & Q_xQ_z \\ Q_xQ_y & Q_y^2 & Q_yQ_z \\ Q_xQ_z & Q_yQ_z & Q_z^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \tag{2}$$

1.2 叉积(cross product)

给定两个3D向量$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$，则它们的叉积(又称为向量积，vector product)是一个向量:

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \langle P_yQ_z - P_zQ_y, P_zQ_x - P_xQ_z, P_xQ_y - P_yQ_x \rangle .$$

叉积的模:

$$\|\mathbf{P} \times \mathbf{Q}\| = \|\mathbf{P}\| \, \|Q\| \sin\alpha$$

叉积也可以写成矩阵向量相乘的形式：

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -P_z & P_y \\ P_z & 0 & -P_x \\ -P_y & P_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} \tag{3}$$

2 旋转变换 (Rotation Transforms)

先看二维空间中的旋转。

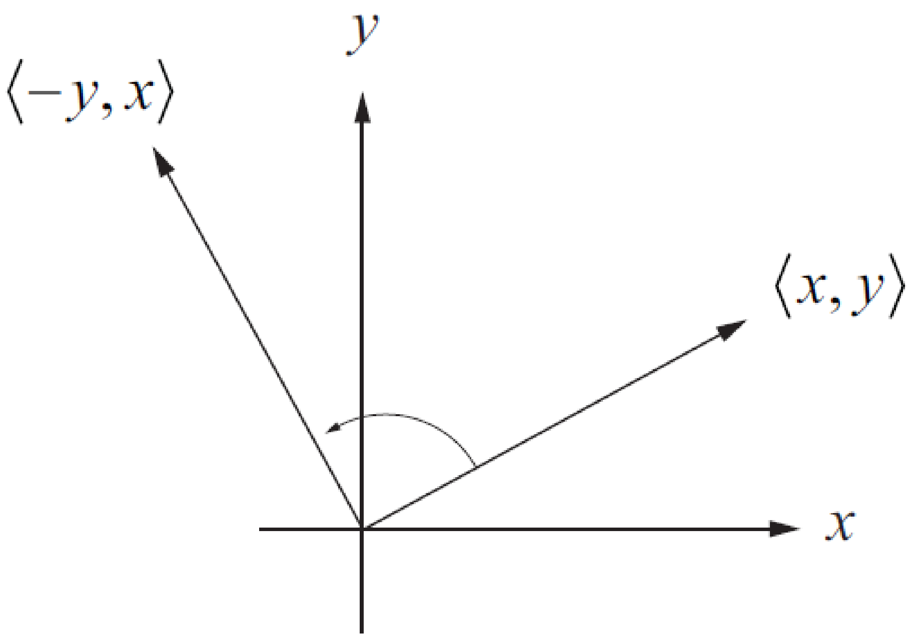

图2 x-y平面中向量P旋转90度

如上面图2，在x-y平面上把向量$\mathbf{P} = \langle x, y \rangle$逆时针旋转90度，变成了向量$\mathbf{Q} = \langle -P_y, P_x \rangle = \langle -y, x \rangle$。向量$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$形成了x-y平面的一个正交基，因此我们可以用这两个向量表示x-y平面的任意向量。

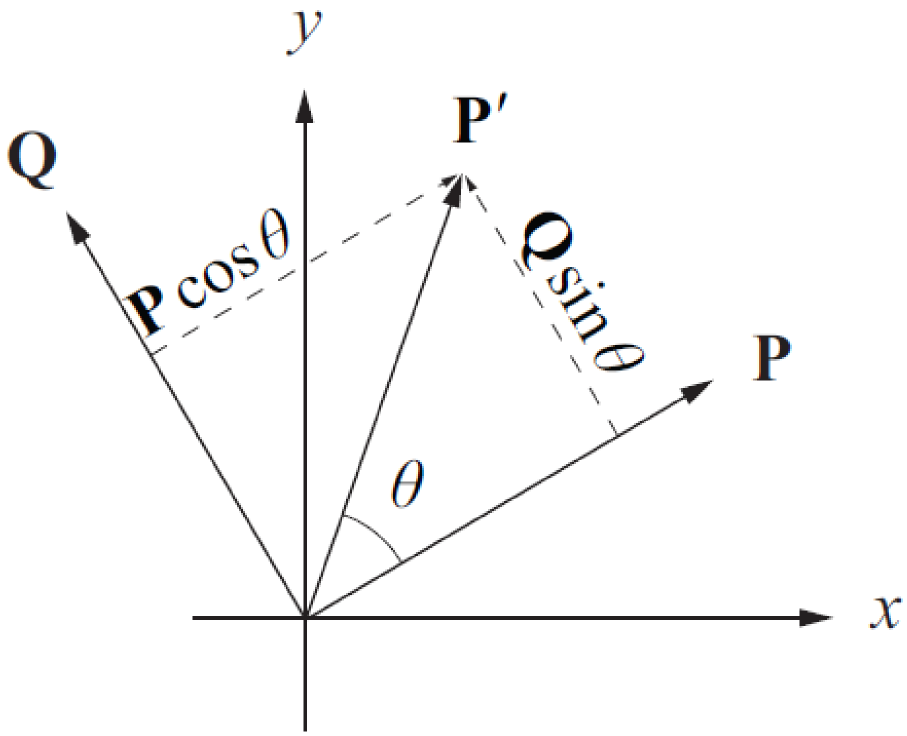

图3 x-y平面中向量P旋转theta度

如上面图3，向量$\mathbf{Q}$是向量$\mathbf{P}$逆时针旋转90度后得到的向量，向量$\mathbf{P}'$是向量$\mathbf{P}$旋转θ度得到的向量，则：

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}\cos\theta + \mathbf{Q}\sin\theta.$$

即

$$\begin{aligned} P'_x &= P_x\cos\theta - P_y\sin\theta \\ P'_y &= P_y\cos\theta + P_x\sin\theta \end{aligned}$$

写成矩阵形式，即：

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \mathbf{P}$$

上面的旋转矩阵可以扩展为三维空间中绕z轴旋转θ角度的矩阵(只要保证旋转后z坐标不变)：

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

类似地，也可以推出三维空间中绕x轴、y轴的旋转矩阵：

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

绕任意轴的旋转

假设我们想要绕任意一个轴$\mathbf{A}$对向量$\mathbf{P}$旋转θ度(其中$\mathbf{A}$是单位向量)。

因为旋转轴$\mathbf{A}$是单位向量，所以$\mathbf{P}$在$\mathbf{A}$上的投影可以简化为:

$$proj_{\mathbf{A}}\mathbf{P} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})\mathbf{A}$$

则$\mathbf{P}$垂直于$\mathbf{A}$的分量为:

$$perp_{\mathbf{A}}\mathbf{P} = \mathbf{P} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})\mathbf{A}$$

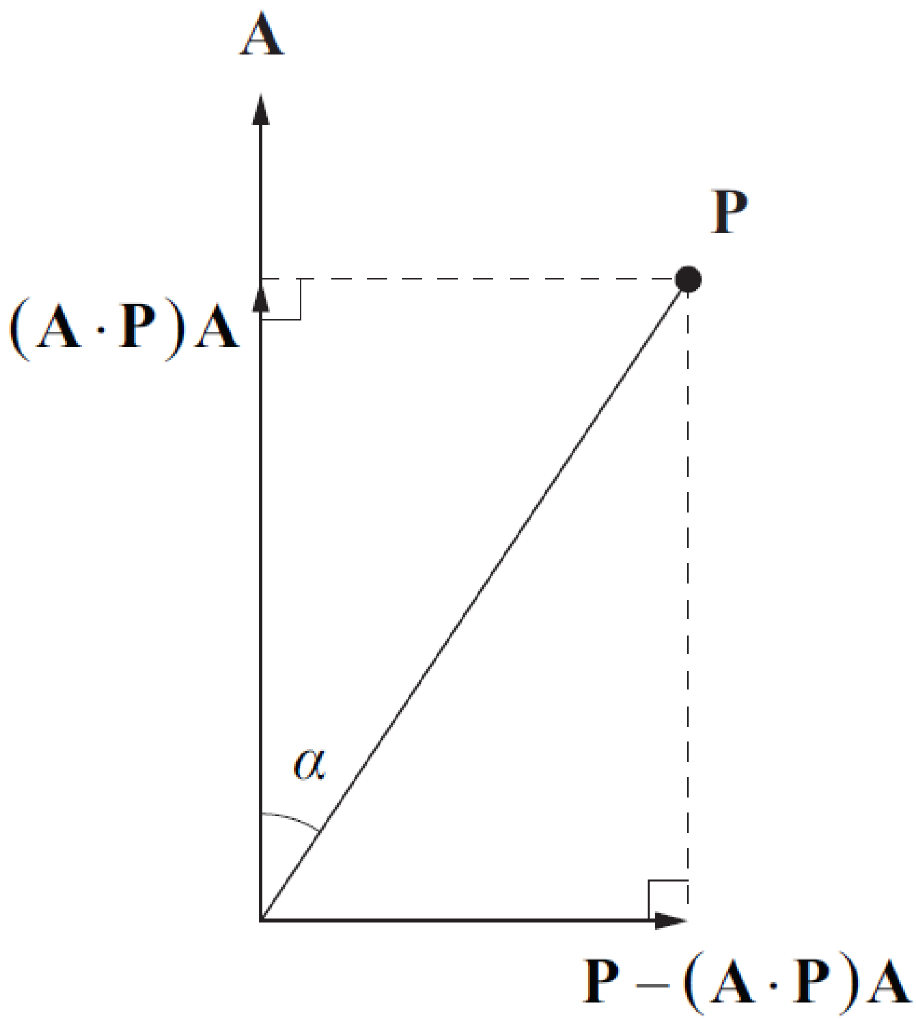

图4. 绕任意轴旋转示意图

与旋转轴平行的分量$proj_{\mathbf{A}}\mathbf{P}$不受旋转的影响，我们只需要考虑垂直旋转轴的分量$perp_{\mathbf{A}}\mathbf{P}$。要注意的是，最后计算出旋转后的$perp_{\mathbf{A}}\mathbf{P}$要加上与旋转轴平行的分量，才能得到最终的旋转后的向量。

垂直分量绕$\mathbf{A}$的旋转发生于垂直于旋转轴$\mathbf{A}$的平面上。像之前一样，我们可以把旋转后的向量表示成向量$perp_{\mathbf{A}}\mathbf{P}$和$perp_{\mathbf{A}}\mathbf{P}$绕$\mathbf{A}$逆时针旋转90度后的向量(即下文说的$\mathbf{A} \times \mathbf{P}$)的线性组合(linear combination)。

如图4所示，$perp_{\mathbf{A}}\mathbf{P}$的长度显然为$\|\mathbf{P}\| \sin \alpha$，又旋转轴$\mathbf{A}$是单位向量，则$\mathbf{A} \times \mathbf{P}$刚好长度和相同，且垂直于\mathbf{A}和\mathbf{P}$，正是我们想要的向量。

现在，按照上面的论述，$perp_{\mathbf{A}}\mathbf{P}$绕$\mathbf{A}$旋转$\theta$后的向量可以表示为:

$$[\mathbf{P} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})\mathbf{A}] \cos \theta + (\mathbf{A} \times \mathbf{P}) \sin \theta$$

再加上不受旋转影响的分量$proj_{\mathbf{A}}\mathbf{P}$，就得到了向量$\mathbf{P}$绕旋转轴$\mathbf{A}$旋转$\theta$角度后的向量$\mathbf{P}'$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}\cos\theta + (\mathbf{A}\times\mathbf{P})\sin\theta + \mathbf{A}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{P})(1-\cos\theta) \qquad (4)$$

把$\mathbf{A}\times\mathbf{P}$和$\mathbf{A}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{P})$换成对应的矩阵形式(参考上面的公式3和公式2)。我们可以得到：

$$\begin{aligned}\mathbf{P}' = &\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{P}\cos\theta + \begin{bmatrix}0 & -A_z & A_y\\ A_z & 0 & -A_x\\ -A_y & A_x & 0\end{bmatrix}\mathbf{P}\sin\theta\\ &+ \begin{bmatrix}A_x^2 & A_xA_y & A_xA_z\\ A_xA_y & A_y^2 & A_yA_z\\ A_xA_z & A_yA_z & A_z^2\end{bmatrix}\mathbf{P}(1-\cos\theta) \qquad (5)\end{aligned}$$

把公式(5)中的各项结合起来(即提取出$\mathbf{P}$)，同时设$c=\cos\theta, s=\sin\theta$，则绕任意旋转轴$\mathbf{A}$旋转一个向量$\theta$角度的旋转矩阵为:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{A}}(\theta) = \begin{bmatrix}c+(1-c)A_x^2 & (1-c)A_xA_y - sA_z & (1-c)A_xA_z + sA_y\\ (1-c)A_xA_y + sA_z & c+(1-c)A_y^2 & (1-c)A_yA_z - sA_x\\ (1-c)A_xA_z - sA_y & (1-c)A_yA_z + sA_x & c+(1-c)A_z^2\end{bmatrix} \qquad (6)$$

3 四元数

3.1 四元数定义

四元数(quaternion)可以看作中学时学的复数的扩充，它有三个虚部。形式如下：

$\mathbf{q} =< w,x,y,z >= w + xi + yj + zk$，可以写成$\mathbf{q} = s + \mathbf{v}$

具有如下性质：

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$ij = -ji = k$

$jk = -kj = i$

$ki = -ik = j$

设$\mathbf{q}_1 = s_1 + \mathbf{v}_1$，$\mathbf{q}_2 = s_2 + \mathbf{v}_2$，则

$\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 = s_1s_2 - \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 + s_1\mathbf{v}_2 + s_2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2$

3.2 共 轭四元数

一个四元数$\mathbf{q} = s + \mathbf{v}$的共轭(用$\bar{\mathbf{q}}$表示)为$\bar{\mathbf{q}} = s - \mathbf{v}$

一个四元数和它的共轭的积等于该四元数与自身的点乘，也等于该四元数长度的平方。即，

$\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}\mathbf{q} = \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} = ||\mathbf{q}||^2 = q^2$

3.3 四元数的逆

一个非零四元数$\mathbf{q}$的逆为$\mathbf{q^{-1}} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\mathbf{q}^2}$。
显然$\mathbf{qq^{-1}} = 1$

3.4 四元数表示旋转

终于到正题了。

三维空间中的旋转可以被认为是一个函数ϕ，从$\mathbb{R}^3$到自身的映射。函数ϕ要想表示一个旋转，必须在旋转过程中保持向量长度(lengths)、向量夹角(angles)和handedness不变。

(handedness和左右手坐标系有关，例如左手坐标系中向量旋转后，仍要符合左手坐标系规则)

长度保持不变要满足：

$$\|\phi(\mathbf{P})\| = \|\mathbf{P}\| \qquad (7)$$

角度不变要满足：

$$\phi(\mathbf{P_1}) \cdot \phi(\mathbf{P_2}) = \mathbf{P_1} \cdot \mathbf{P_2} \qquad (8)$$

最后，**handedness保持不变**要满足：

$$\phi(\mathbf{P_1}) \times \phi(\mathbf{P_2}) = \phi(\mathbf{P_1} \times \mathbf{P_2}) \qquad (9)$$

扩展函数ϕ成为一个从$\mathbb{H}$到其自身的映射，要求$\phi(s + \mathbf{V}) = s + \phi(\mathbf{V})$，这使得我们可以重写上面的方程(7)：

$$\phi(\mathbf{P_1}) \cdot \phi(\mathbf{P_2}) = \phi(\mathbf{P_1} \cdot \mathbf{P_2}) \qquad (10)$$

注意，这里把$\mathbf{P_1}$和$\mathbf{P_2}$当作标量部分(scalar part)为0的四元数(其实就是三维空间中的点)，所以根据$\phi(s + \mathbf{V}) = s + \phi(\mathbf{V})$可得到公式(10)。我们可以把方程(9)、(10)合写成一个公式(角度保持不变、handedness保持不变)：

$$\phi(\mathbf{P_1})\phi(\mathbf{P_2}) = \phi(\mathbf{P_1 P_2}) \qquad (11)$$

方程(11)两向量的乘其实既点乘、又是叉乘，二者合二为一，用一种形式写出来了。

一个满足方程(11)的函数ϕ被称为同态(*homomorphism*，异质同形)。

重点来了：

由下面公式(12)给出的一类函数满足方程(7)和方程(11)，可以表示**旋转**。

$$\phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{P}) = \mathbf{qPq^{-1}} \qquad (12)$$

这里$\mathbf{q}$是一个非零四元数，函数的参数$\mathbf{P}$可以看作三维空间中的点(即一个实部或标量部分为0的四元数)。

首先证明方程(12)中的函数满足方程(7)：

$$\|\phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{P})\| = \left\|\mathbf{qPq^{-1}}\right\| = \|q\| \,\|\mathbf{P}\| \left\|q^{-1}\right\| = \|\mathbf{P}\| \frac{\|\mathbf{q}\| \,\|\bar{\mathbf{q}}\|}{q^2} = \|\mathbf{P}\| \tag{13}$$

更进一步地，$\phi_{\mathbf{q}}$是一个homomorphism，即满足方程(11)，因为：

$$\phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{P_1})\phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{P_2}) = \mathbf{qP_1q^{-1}qP_2q^{-1}} = \mathbf{qP_1P_2q^{-1}} = \phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{P_1P_2}) \tag{14}$$

接下来我们要找到一个四元数$\mathbf{q}$，使它对应于一个绕旋转轴$\mathbf{A}$旋转θ的旋转变换。可以很容易证明对于任意非零标量a，$\phi_{a\mathbf{q}} = \phi_{\mathbf{q}}$成立。为了使事情简单点，我们可以选择单位四元数$\mathbf{q}$。

设$\mathbf{q} = s + \mathbf{v}$为一个单位四元数，则它的逆为$\mathbf{q^{-1}} = s - \mathbf{v}$。再给一个三维空间中的点$\mathbf{P}$(相当于一个标量部分为0的四元数)，就有：

$$\begin{aligned}
\mathbf{qPq^{-1}} &= (s+\mathbf{v})\mathbf{P}(s-\mathbf{v}) \\
&= (-\mathbf{v}\cdot\mathbf{P} + s\mathbf{P} + \mathbf{v}\times\mathbf{P})(s-\mathbf{v}) \\
&= -s\mathbf{v}\cdot\mathbf{P} + s^2\mathbf{P} + s\mathbf{v}\times\mathbf{P} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{P})\mathbf{v} - s\mathbf{P}\mathbf{v} - (\mathbf{v}\times\mathbf{P})\mathbf{v} \\
&= s^2\mathbf{P} + 2s\mathbf{v}\times\mathbf{P} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{P})\mathbf{v} - \mathbf{v}\times\mathbf{P}\times\mathbf{v}
\end{aligned} \tag{15}$$

> *定理：给定任意两个3D向量*$\mathbf{P},\mathbf{Q}$*，则：*
> $\mathbf{P}\times(\mathbf{Q}\times\mathbf{P}) = \mathbf{P}\times\mathbf{Q}\times\mathbf{P} = P^2\mathbf{Q} - (\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q})\mathbf{P}$

所以，对方程(15)中的$\mathbf{v}\times\mathbf{P}\times\mathbf{v}$施加上述定理，方程(15)就变成了：

$$\mathbf{qPq^{-1}} = (s^2 - \mathbf{v}^2)\mathbf{P} + 2s\mathbf{v}\times\mathbf{P} + 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{P})\mathbf{v} \tag{16}$$

设$\mathbf{v} = t\mathbf{A}$，此处$\mathbf{A}$是一个单位向量，即旋转轴，重写方程(16)为：

$$\mathbf{qPq^{-1}} = (s^2 - t^2)\mathbf{P} + 2st\mathbf{A}\times\mathbf{P} + 2t^2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{P})\mathbf{A} \tag{17}$$

把方程(17)和上面说过的绕任意轴旋转的公式(4)进行比较。

> *上面说过的公式(4):*
> $\mathbf{P}' = \mathbf{P}\cos\theta + (\mathbf{A}\times\mathbf{P})\sin\theta + \mathbf{A}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{P})(1-\cos\theta)$

我们可以推出以下等式：

$$\begin{aligned}
s^2 - t^2 &= \cos\theta \\
2st &= \sin\theta \\
2t^2 &= 1 - \cos\theta
\end{aligned}$$

由第三个等式可以解出:

$$t = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sin\frac{\theta}{2}$$

由第一和第三个等式可推出$s^2 + t^2 = 1$，所以$s = \cos\frac{\theta}{2}$。

所以，我们找到了一个单位四元数$\mathbf{q}$，其对应于绕旋转轴$\mathbf{A}$旋转θ角度的旋转变换**(重要结论)**：

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} &= s + \mathbf{v} \\
&= s + t\mathbf{A} \\
&= \cos\frac{\theta}{2} + \mathbf{A}\sin\frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{18}$$

这里顺便证明一下对于任意非零a(如，$a=-1$)，$a\mathbf{q}$和$\mathbf{q}$表示同一个旋转，因为

$$(a\mathbf{q})\mathbf{P}(a\mathbf{q})^{-1} = a\mathbf{q}\mathbf{P}\frac{\mathbf{q}^{-1}}{a} = \mathbf{q}\mathbf{P}\mathbf{q}^{-1}$$

两个四元数$\mathbf{q_1}$和$\mathbf{q_2}$的乘积也表示一个旋转。例如，$\mathbf{q_1 q_2}$表示施加旋转$\mathbf{q_2}$，再施加旋转$\mathbf{q_1}$。因为：

$$\mathbf{q_1(q_2Pq_2^{-1})q_1^{-1} = (q_1q_2)P(q_1q_2)^{-1}}$$

我们可以连接任意多个表示旋转的四元数，形成一个单一的四元数。

两个四元数相乘需要16个乘加运算(multiply-add)，然而两个3×4矩阵相乘需要27个乘加运算。因此在某些情况下(比如要对同一个对象施加多个旋转变换时)，用四元数表示旋转，计算效率会高些。

总之，通过一个四元数$\mathbf{q}$对一个点$\mathbf{P}$施加旋转变换，只需要做如下计算：

$$\mathbf{P}' = \mathbf{qPq^{-1}}$$

3.5 四元数转换为旋转矩阵

有时需要把四元数转换为3×3的旋转矩阵，例如，使用某些3D图形库时。

我们可以根据方程(2)和方程(3)，把方程(17)写程矩阵形式，来找到四元数$\mathbf{q} = s + t\mathbf{A}$对应的旋转矩阵：

$$\begin{aligned}\mathbf{qPq^{-1}} = &\begin{bmatrix} s^2-t^2 & 0 & 0 \\ 0 & s^2-t^2 & 0 \\ 0 & 0 & s^2-t^2 \end{bmatrix}\mathbf{P} + \begin{bmatrix} 0 & -2stA_z & 2stA_y \\ 2stA_z & 0 & -2stA_x \\ -2stA_y & 2stA_x & 0 \end{bmatrix}\mathbf{P} \\ &+ \begin{bmatrix} 2t^2A_x^2 & 2t^2A_xA_y & 2t^2A_xA_z \\ 2t^2A_xA_y & 2t^2A_y^2 & 2t^2A_yA_z \\ 2t^2A_xA_y & 2t^2A_yA_z & 2t^2A_z^2 \end{bmatrix}\mathbf{P} \qquad (19)\end{aligned}$$

把四元数$\mathbf{q}$写成四维向量的形式$\mathbf{q} = \langle w, x, y, z\rangle$，其中$w = s, x = tA_x, y = tA_y, z = tA_z$。因为$\mathbf{A}$是单位向量，所以：

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \quad A^2 = t^2$$

用w, x, y, z的形式来重写方程(19)：

$$\begin{aligned}\mathbf{qPq^{-1}} = &\begin{bmatrix} w^2-x^2-y^2-z^2 & 0 & 0 \\ 0 & w^2-x^2-y^2-z^2 & 0 \\ 0 & 0 & w^2-x^2-y^2-z^2 \end{bmatrix}\mathbf{P} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -2wz & 2wy \\ 2wz & 0 & -2wx \\ -2wy & 2wx & 0 \end{bmatrix}\mathbf{P} + \begin{bmatrix} 2x^2 & 2xy & 2xz \\ 2xy & 2y^2 & 2yz \\ 2xz & 2yz & 2z^2 \end{bmatrix}\mathbf{P} \qquad (20)\end{aligned}$$

因为$\mathbf{q}$是一个单位四元数，则$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$，所以

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2$$

结合上面这个等式及方程(20)中的三个矩阵，我们可以得到对应于四元数$\mathbf{q}$的旋转矩阵：

$$
\mathbf{R_q} = \begin{bmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy-2wz & 2xz+2wy \\ 2xy+2wz & 1-2x^2-2z^2 & 2yz-2wx \\ 2xz-2wy & 2yz+2wx & 1-2x^2-2y^2 \end{bmatrix} \tag{21}
$$

参考文献:

- Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics 英文版第三版，第2、3、4章。