OpenGL投影矩阵(Projection Matrix)构造方法

(翻译，图片也来自原文)

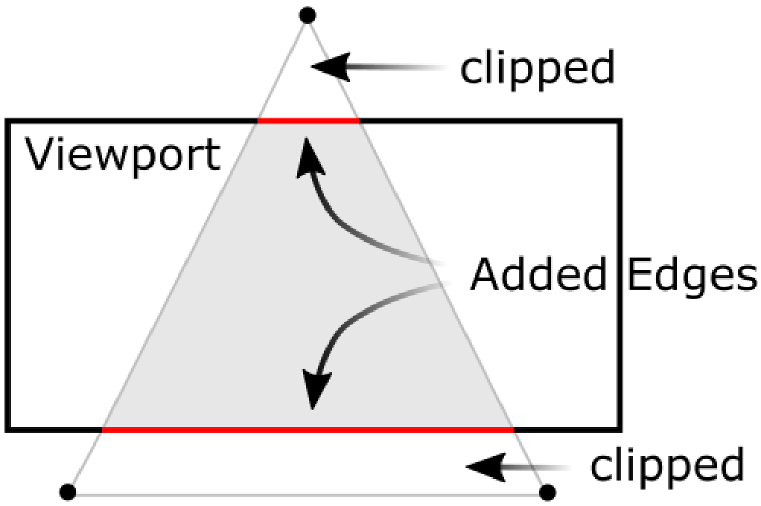
一、概述

绝大部分计算机的显示器是二维的(a 2D surface)。在OpenGL中一个3D场景需要被**投影**到屏幕上成为一个2D图像(image)。这称为投影变换(参见这或这)，需要用到投影矩阵(projection matrix)。

首先，**投影矩阵会把所有顶点坐标从eye coordinates(观察空间，eye space或view space)变换到裁剪坐标(clip coordinated，属于裁剪空间，clip space)。然后，这些裁剪坐标被变换到标准化设备坐标(normalized device coordinates, NDC，即坐标范围在-1到1之间)，这一步是通过用用裁剪坐标的w_c分量除裁剪坐标实现的。**

因此，我们要记住**投影矩阵干了两件事**: 裁剪clipping(即frustum culling，视景体剔除)和生成NDC。下文会讲述如何根据6个参数(left, right, bottom, top, near和far边界值)来构建投影矩阵。

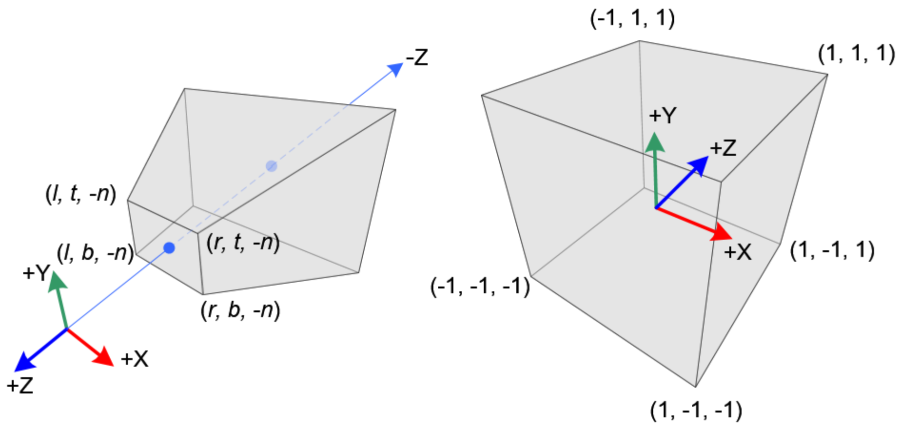
注意视景体剔出(也即clipping)是在裁剪坐标下完成的，是早于用w_c(即上面提到的w分量,c表示clipping)除裁剪坐标的(它会生成NDC)。裁剪坐标x_c, y_c, z_c会与w_c进行比较。如果裁剪坐标比$-w_c$小或者比w_c大，则丢弃这个顶点(vertex)。即经裁剪后剩余的顶点的裁剪坐标满足:$-w_c < x_c, y_c, z_c < w_c$。OpenGL会成发生裁剪的地方生成新的边，如下图1，一个三角形经裁后，成了一个梯形，两条红色的边就是裁剪后新生成的。



(图1. 一个被视体裁剪的三角形)

一般常用的有透视投影和正交投影，相应地也就有两种投影矩阵。

二、透视投影(Perspective Projection)

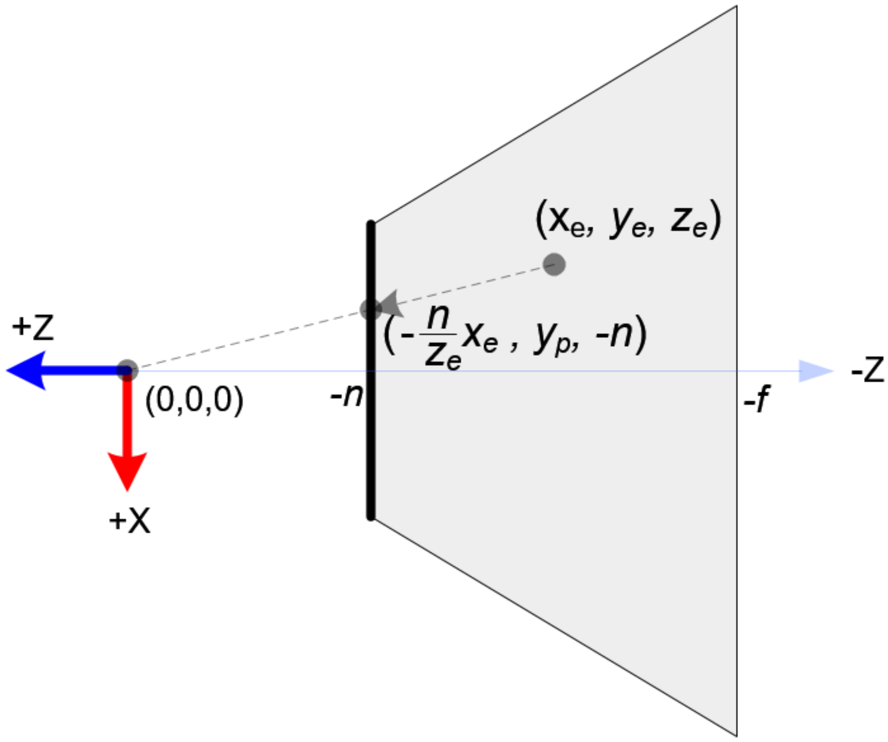


(图2. 透视投影中的视景体和标准化设备坐标NDC)

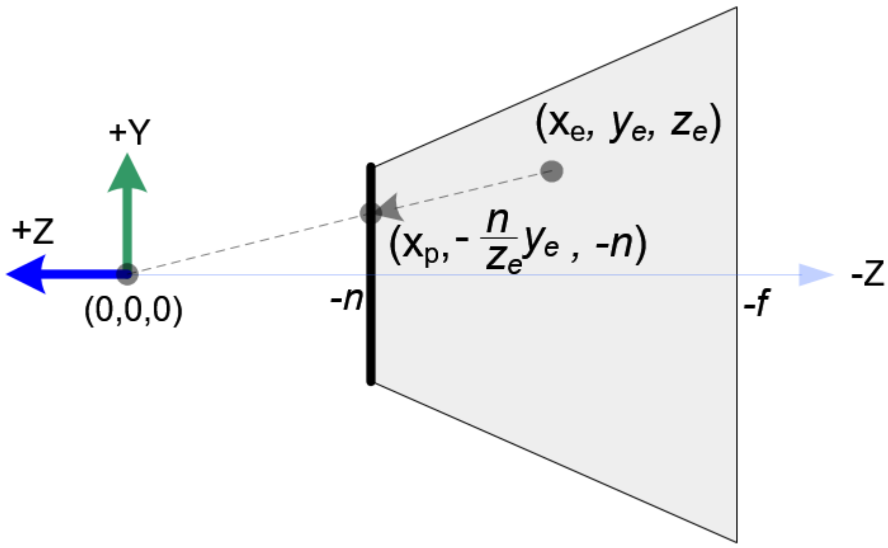
在透视投影中，一个3D point是在一个截头锥体中(truncated pyramid frustum, 上面图2左图，即一个棱台)，会被映射到一个立方体(NDC坐标空间)中，x坐标范围从[1, r]变成了[-1, 1]，y坐标范围从[b, t]变成了[-1, 1]，z坐标从[-n, -f]变成了[-1, 1]。

注意在view space中(即eye coordinate)，OpenGL使用的是右手坐标系(上面图2左图)，但是在NDC中使用的是左手坐标系(上面图2右图)。这样的话，在view space中camera位于坐标原点看向-z轴，而在NDC中camera是看向+z轴的。上面图2中的n表示近裁剪面(near plane)，是正值。因为**glFrustum()**接受的near、far的值是正的，所以在在构造投影矩阵时，要为它们取负(negate them)。

在OpenGL中，view space(又称为eye space)中的一个3D point被投影到近裁剪面(此处用近裁剪面作投影平面，projection plane)上。下图3和图4显示了eye space中的一个点(x_e, y_e, z_e)是怎样被投影成近裁剪面上的一个点(x_p, y_p, z_p)。



(图3. 视景体的俯视图)



(图4.视景体的侧视图)

从视景体的俯视图(图3)看，x轴坐标x_e被映射成为x_p，而x_p可以根据三角形相似形计算出来:

$$\frac{x_p}{x_e} = \frac{-n}{z_e} \Longrightarrow x_p = \frac{-n \cdot x_e}{z_e} = \frac{n \cdot x_e}{-z_e}$$

从视景体的侧视图(图4)看，可以用相似的方法计算出y_p:

$$\frac{y_p}{y_e} = \frac{-n}{z_e} \Longrightarrow y_p = \frac{-n \cdot y_e}{z_e} = \frac{n \cdot y_e}{-z_e}$$

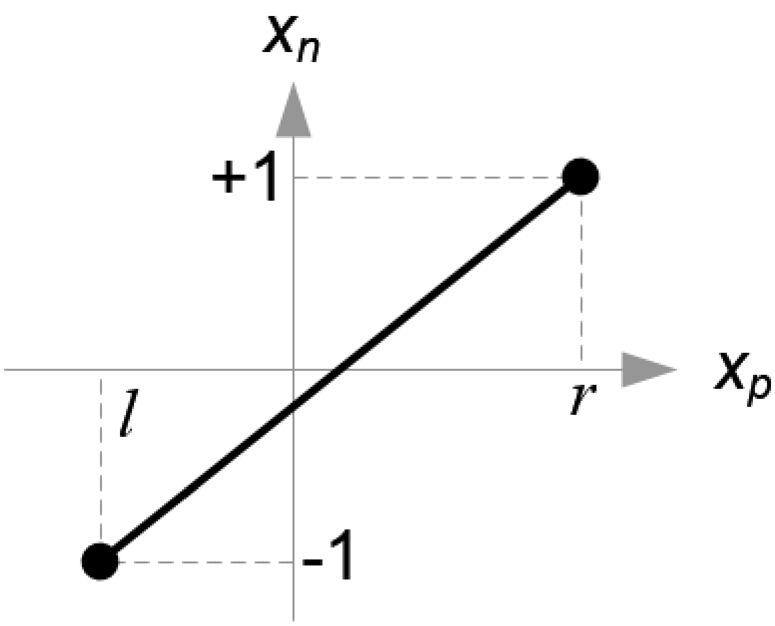
注意x_p和y_p都依赖z_e并与$-z_e$成反比。这是**构建投影矩阵的第一个线索**。在eye coordinates被投影矩阵乘后，得到的裁剪坐标仍然是齐次坐标(homogeneous coordinates)。最终它需要除以裁剪坐标的w分量，才能变成标准化设备坐标(NDC)。

$$\begin{pmatrix} x_{clip} \\ y_{clip} \\ z_{clip} \\ w_{clip} \end{pmatrix} = M_{projection} \cdot \begin{pmatrix} x_{eye} \\ y_{eye} \\ z_{eye} \\ w_{eye} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{ndc} \\ y_{ndc} \\ z_{ndc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_{clip}}{w_{clip}} \\ \frac{y_{clip}}{w_{clip}} \\ \frac{z_{clip}}{w_{clip}} \end{pmatrix}$$

因此，我们可以把裁剪坐标的w分量设置为$-z_e$，则投影矩阵第4行变为(0, 0, -1, 0)。

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ w_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{pmatrix}, \therefore w_c = -z_e$$

接下来，我们把刚计算得到的x_p, y_p线性地(with linear relationship)映射到NDC中的x_n, y_n(这里的n表示NDC)：$[l, r] \Rightarrow [-1, 1]$，$[b, t] \Rightarrow [-1, 1]$。



(图5. 把x_p映射到x_n)

因为x_p和x_n之间是线性映射关系，如图5，所以可设两者之间的映射函数为:

$$x_n = \frac{1-(-1)}{r-l} \cdot +\beta$$

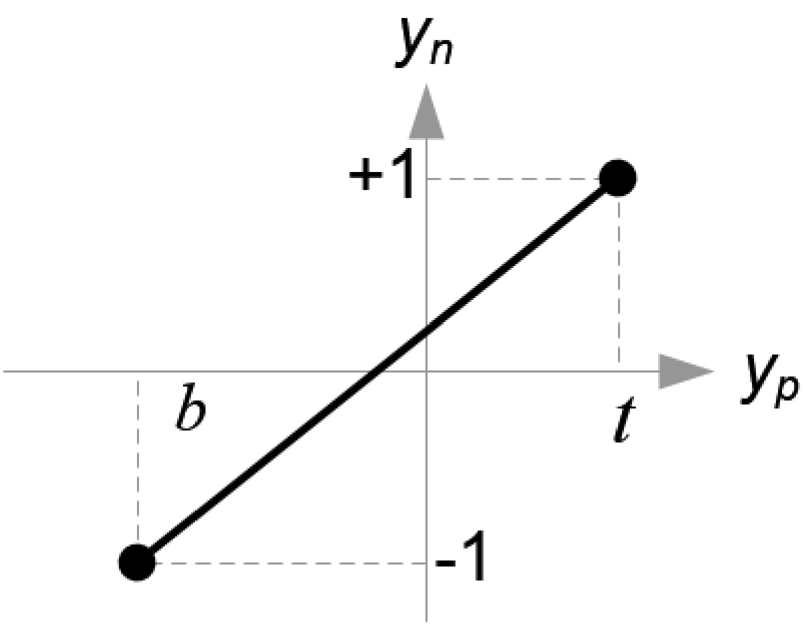
把$(x_p, x_n) = (r, l)$代入上面方程得:

$$1 = \frac{2r}{r-l} + \beta$$

所以

$$
\begin{aligned}
\beta &= 1 - \frac{2r}{r-l} = \frac{r-l}{r-l} - \frac{2r}{r-l} \\
&= \frac{r-l-2r}{r-l} = \frac{-r-l}{r-l} = -\frac{r+l}{r-l} \\
\therefore x_n &= \frac{2x_p}{r-l} - \frac{r+l}{r-l}
\end{aligned}
$$

同理，可以求出y_p和y_n之间的关系表达式，如图6及以下公式：



(图6.把y_p映射到y_n)

$$
y_n = \frac{1-(-1)}{t-b} \cdot y_p + \beta
$$

用$(y_p, y_n) = (t, 1)$代入上式得

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{2t}{t-b} + \beta \\
\beta &= 1 - \frac{2t}{t-b} = \frac{t-b}{t-b} - \frac{2t}{t-b} \\
&= \frac{t-b-2t}{t-b} = \frac{-t-b}{t-b} = -\frac{t+b}{t-b} \\
\therefore y_n &= \frac{2y_p}{t-b} - \frac{t+b}{t-b}
\end{aligned}
$$

接下来，把上上面求得的$x_p = \frac{nx_e}{-z_e}$和$y_p = \frac{ny_e}{-z_e}$代入刚刚求到的线性关系式得:

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{2x_p}{r-l} - \frac{r+l}{r-l} \\
&= \frac{2 \cdot \frac{n \cdot x_e}{-z_e}}{r-l} - \frac{r+l}{r-l} \\
&= \frac{2n \cdot x_e}{(r-l)(-z_e)} - \frac{r+l}{r-l} \\
&= \frac{\frac{2n}{r-l} \cdot x_e}{-z_e} - \frac{r+l}{r-l} \\
&= \frac{\frac{2n}{r-l} \cdot x_e}{-z_e} + \frac{\frac{r+l}{r-l} \cdot z_e}{-z_e} \\
&= \left(\underbrace{\frac{2n}{r-l} \cdot x_e + \frac{r+l}{r-l} \cdot z_e}_{x_c} \right) \Bigg/ (-z_e)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_n &= \frac{2y_p}{t-b} - \frac{t+b}{t-b} \\
&= \frac{2 \cdot \frac{n \cdot y_e}{-z_e}}{t-b} - \frac{t+b}{t-b} \\
&= \frac{2n \cdot y_e}{(t-b)(-z_e)} - \frac{t+b}{t-b} \\
&= \frac{\frac{2n}{t-b} \cdot y_e}{-z_e} - \frac{t+b}{t-b} \\
&= \frac{\frac{2n}{t-b} \cdot y_e}{-z_e} + \frac{\frac{t+b}{t-b} \cdot z_e}{-z_e} \\
&= \left(\underbrace{\frac{2n}{t-b} \cdot y_e + \frac{t+b}{t-b} \cdot z_e}_{y_c} \right) \Bigg/ (-z_e)
\end{aligned}
$$

注意上面刚刚求得的x_n, y_n是NDC坐标，而NDC应该是由裁剪坐标除以w_c得到，也即透视除法(perspective division), $(x_c/w_c, y_c/w_c)$。又因为，之前我们把w_c的值设置为$-z_e$，所以上面x_n, y_n表达式中括号里的部分表示裁剪空间的坐标x_c, y_c。

加上上面的两个方程，我们可以找到投影矩阵的第1行和第2行:

$$
\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ w_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{pmatrix}
$$

现在矩阵只剩下第三行是待求解的。在eye space中z_e总是被投影到近裁剪面(near plane)上，即值总是为-n。但是我们为了完成裁剪(clipping)和深度测试(depth test)，每一个顶点应该具有不同的z值。此外，投影变换应该是可逆的。既然我们知道z不依赖于x和y的值，那么我们就借用w分量来找到z_n和z_e之间的关系。因此，我们可以指定第三行长这样:

$$
\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ w_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{pmatrix}, z_n = z_c/w_c = \frac{Az_e + Bw_e}{-z_e}
$$

因为在eye space中，w_e总是等于1，因此:

$$z_n = \frac{Az_e + B}{-z_e}$$

(注意，$w_c = -z_e, w_e = 1$别搞混淆了)

为了找到系数A和B，我们把(z_e, z_n)之间的关系: (-n, -1)和(-f, 1)，代入上面这个等式中，得到:

$$\begin{cases} \frac{-An+B}{n} = -1 \\ \frac{-Af+B}{f} = 1 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} -An + B = -n & (1) \\ -Af + B = f & (2) \end{cases}$$

由方程(1)可得:

$$B = An - n \quad (1')$$

把方程(1')代入到方程(2)，可解出A:

$$\begin{aligned} &-Af + (An - n) = f \quad (2') \\ &-(f-n)A = f + n \\ &A = -\tfrac{f+n}{f-n} \end{aligned}$$

把A的值代入方程(1')可求得B:

$$\begin{aligned} B &= -n - \left(\frac{f+n}{f-n}\right)n = -\left(1 + \frac{f+n}{f-n}\right)n \\ &= -\frac{2fn}{f-n} \end{aligned}$$

有了A和B，则z_e和z_n之间的关系表达式为:

$$z_n = \frac{-\frac{f+n}{f-n} z_e - \frac{2fn}{f-n}}{-z_e} \quad (3)$$

最后，**完整的投影矩阵**为:

$$\begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(f+n)}{f-n} & \frac{-2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

上面这是一个通用视景体的投影矩阵。当视景体是对称时，即r=-l, t=-b，则:

$$\begin{cases} r + l = 0 \\ r - l = 2r \end{cases}$$

$$\begin{cases} t + b = 0 \\ t - b = 2t \end{cases}$$

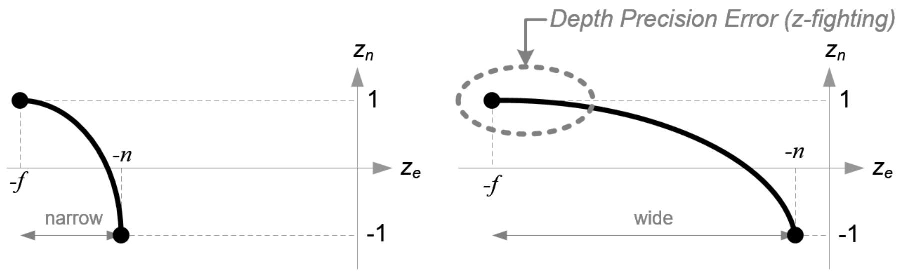
故投影矩阵可以简化为:

$$\begin{pmatrix} \frac{n}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(f+n)}{f-n} & \frac{-2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

透视投影矩阵我们已经求出来了，在继续往下探讨之前，请再看一下上面的方程(3)，即：

$$z_n = \frac{-\frac{f+n}{f-n} z_e - \frac{2fn}{f-n}}{-z_e} \quad (3)$$

可以看到它是一个有理函数(rational function)，且是一个非线性函数。这意味着在近裁剪面(near plane)附近，它具有很高的精度(very high precision)，而在远裁剪面(far plane)附近具有非常小的精度(very little precision)。如果[-n, -f]的范围比较大，它会造成深度值精度问题(z-fighting)，即可能在离far plane比较近的地方，当z_e的值差异较小时，它们对应的z_n值相同，或者说当一个z_e值发生小的变化时，对应的z_n不受影响(即值不变)。这会产生错误的视觉效果。如下面图7所示，在远裁剪面附近，z_n的值几乎不随z_e发生变化。



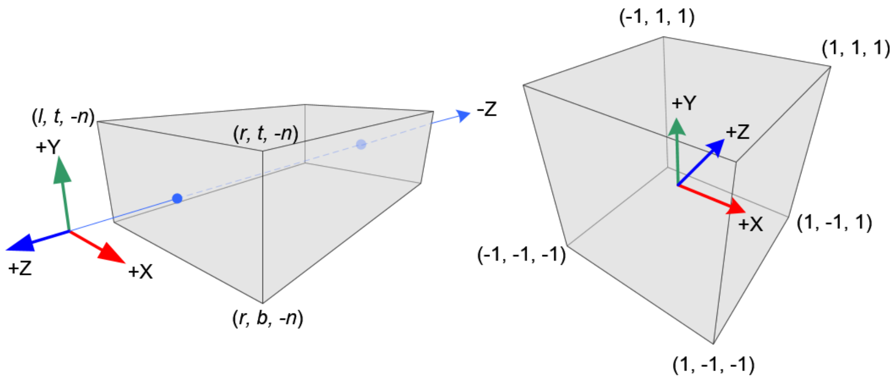
(图7. 深度缓存的精度比较)

一些避免z-fighting的方法:

- 首先也是最重要的技巧是不要把物体放的太近。即使是视觉效果上贴在一块的物体，也可以把它们稍微分开一点，只要肉眼看不到即可。
- 把近裁剪面设置的尽可能远。因为上面说过，离近裁剪面近的地方，精度会高。但这样可能造成离camera很近的物体被裁剪掉。这需要大量实验才能找到适合的距离。
- 尽量缩短n和f之间的距离。这和上一条其实一样。
- 使用更高精度的depth buffer。现在一般depth bufer中depth value使用16, 24或32 bit的flotas。大部分系统使用的是24 bits的floats。因此可以改成使用32 bits的depth buffer。但这样会增加一点性能负担。

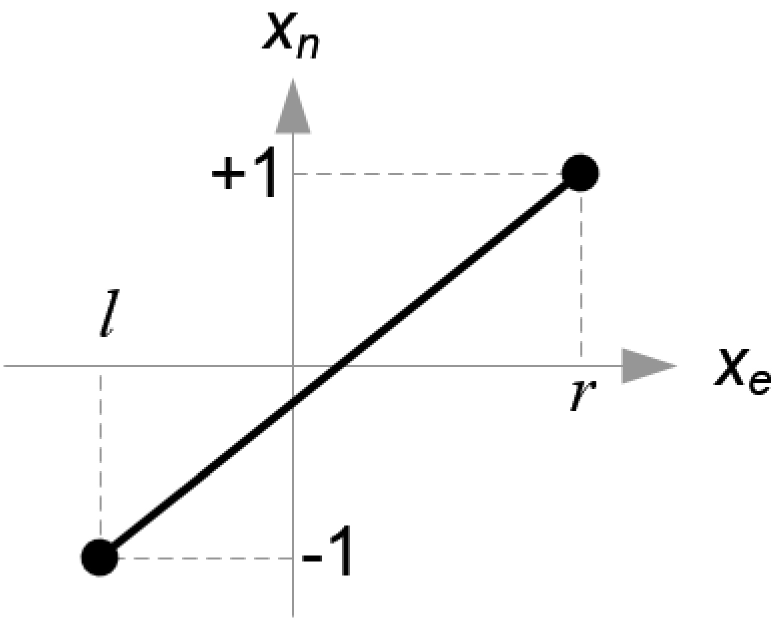
三、正交投影

构建正交投影矩阵相对来说会简单一些。



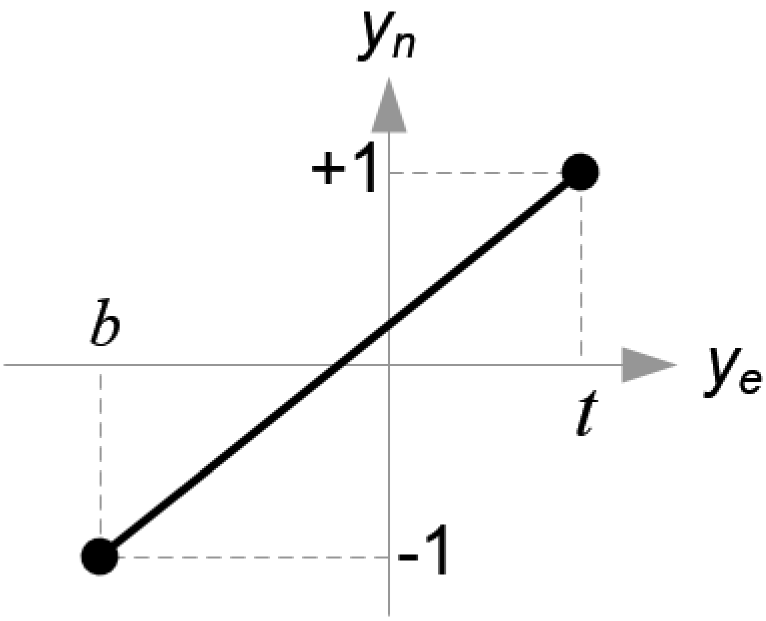
(图8. 正交投影视景体及对应的NDC)

在eye space中，所有x_e, y_e, z_e分量是线性映射到NDC中的。我们只需要把一个长方体(rectangular volume)所表达的体积缩放成一个立方体(cube)，并把它移动到原点(如图8)。下面我们将使用线性映射关系(linear relationship)来找到正交投影矩阵的各个元素。



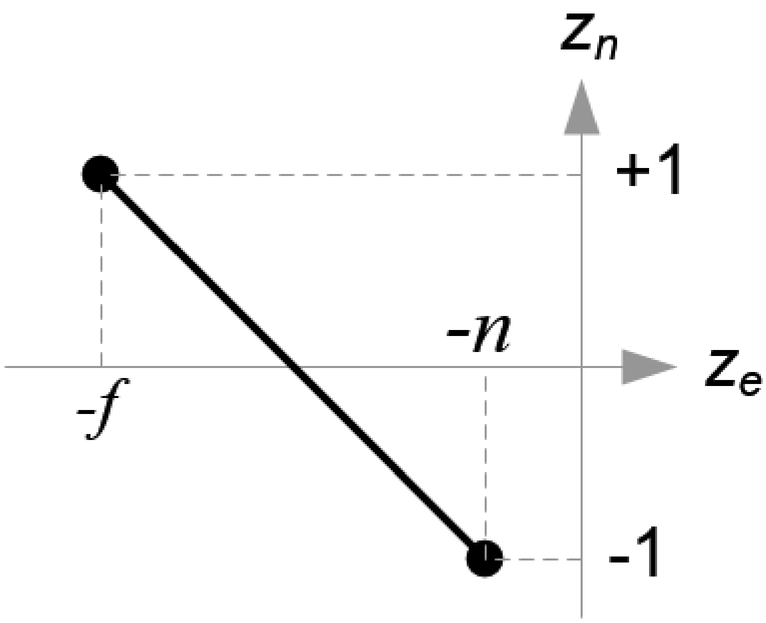
(图9. 把x_e映射到x_n)

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{1-(-1)}{r-l} \cdot x_e + \beta \\
1 &= \frac{2r}{r-l} + \beta, (substitute(r,1) for(x_e, x_n)) \\
\beta &= 1 - \frac{2r}{r-l} = -\frac{r+l}{r-l} \\
\therefore x_n &= \frac{2}{r-l} \cdot x_e - \frac{r+l}{r-l}
\end{aligned}
$$



(图10. 把y_e映射到y_n)

$$
\begin{aligned}
y_n &= \frac{1-(-1)}{t-b} \cdot y_e + \beta \\
1 &= \frac{2t}{t-b} + \beta, (substitute(t,1) for (y_e, y_n)) \\
\beta &= 1 - \frac{2t}{t-b} = -\frac{t+b}{t-b} \\
\therefore y_n &= \frac{2}{t-b} \cdot y_e - \frac{t+b}{t-b}
\end{aligned}
$$



(图11. 把z_e映射到z_n)

$$
\begin{aligned}
z_n &= \frac{1-(-1)}{-f-(-n)} \cdot z_e + \beta \\
1 &= \frac{2f}{f-n} + \beta, (substitute(-f,1) for (z_e, z_n)) \\
\beta &= 1 - \frac{2f}{f-n} = -\frac{f+n}{f-n} \\
\therefore z_n &= \frac{-2}{f-n} \cdot z_e - \frac{f+n}{f-n}
\end{aligned}
$$

因为对于正交投影w分量不是必须的，所以正交投影矩阵的第4行为(0, 0, 0, 1)。
因此完整的正交投影矩阵为:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

如果视景体对称的话，即r=-l, t=-b, 则:

$$\begin{cases} r+l=0 \\ r-l=2r \end{cases}$$

$$\begin{cases} t+b=0 \\ t-b=2r \end{cases}$$

故正交投影矩阵被简化为:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

References:

- OpenGL Projection Matrix
- Depth-testing