

# Proiect Teoria Sistemelor

Ciurezu G. Gheorghe-Dragoș \*

Martie-Mai 2021



**UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA**

**Indrumător Proiect: Mircea Susca**

**Departament: Ingineria Sistemelor**

**Facultate: Automatică și Informatica Aplicată**

---

\*Proiect Grupa 30124

# Contents

<b>1</b>	<b>Introducere</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Model matematic intrare-stare-iesire <math>x/u/y</math></b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Model intrare-iesire. Funcția de transfer</b>	<b>7</b>
3.1	Determinarea modelului intrare-ieșire . . . . .	7
3.2	Determinarea funcției de transfer. . . . .	8
3.2.1	Folosind modelul intrare-ieșire . . . . .	8
3.2.2	Folosind relația sa cu spațiul stărilor . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Determinare singularități. Afișare în plan complex.</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Determinare formă canonică de control(FCC) și formă canonică de observare(FCO). Realizare schemă simulink.</b>	<b>12</b>
5.1	Determinare formă canonică de control (FCC). . . . .	12
5.1.1	Realizare FCC simulink. . . . .	13
5.1.2	Simulare simulink. . . . .	13
5.2	Determinare forma canonică de observare (FCO). . . . .	13
5.2.1	Realizare FCO simulink. . . . .	14
5.2.2	Simulare simulink. . . . .	15
<b>6</b>	<b>Determinare funcția de transfer in forma minimala.</b>	<b>16</b>
<b>7</b>	<b>Stabilitatea interna si externa.</b>	<b>18</b>
7.1	Stabilitatea interna . . . . .	18
7.2	Stabilitatea externa . . . . .	19
<b>8</b>	<b>Determinare stabilitate interna folosind Lyapunov</b>	<b>20</b>
<b>9</b>	<b>Determinarea funcției pondere, raspunsului indicial, raspunsul la rampa si grafice.</b>	<b>21</b>
9.1	Funcția pondere. . . . .	21
9.2	Raspunsul Indicial. . . . .	22
9.3	Raspunsul la rampa . . . . .	22
<b>10</b>	<b>Performante circuit si grafice sugestive.</b>	<b>24</b>
10.1	Performante in regim tranzitoriu. . . . .	24
10.2	Performante in regim stationar. . . . .	24
10.2.1	Determinare eroare la pozitie. . . . .	24
10.2.2	Determinare eroare la viteza. . . . .	25
<b>11</b>	<b>Analiza sistem de reglare cu regulator proportional.</b>	<b>26</b>
11.1	Funcție de transfer bucla inchisa. . . . .	26
11.2	Analiza locului radacinilor in functie de $\frac{R_2}{R_1}$ . . . . .	27
11.3	Determinare performante in functie de $\frac{R_2}{R_1}$ . . . . .	28
<b>12</b>	<b>Analiza sistem de reglare cu regulator de tip Lead/Lag.</b>	<b>29</b>
12.1	Funcție de transfer a regulatorului. . . . .	29
12.2	Funcția de transfer a sistemului. . . . .	30
12.3	Analiza locului radacinilor in functie de un T. . . . .	31
12.4	Determinare performante in functie de un T fixat . . . . .	34

# 1 Introducere

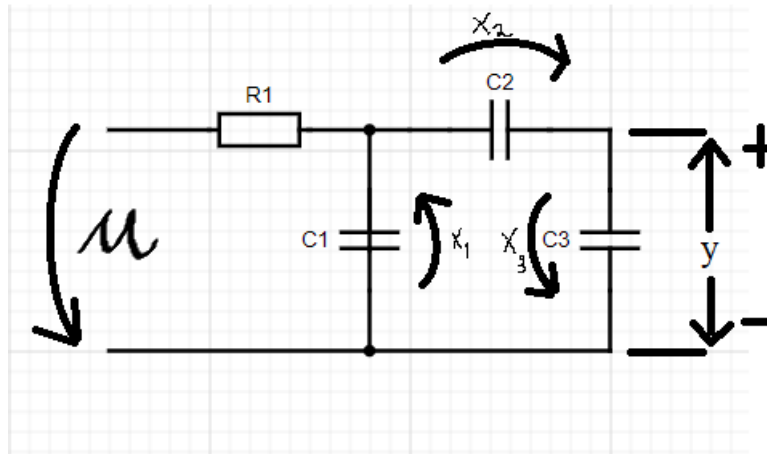


Figure 1: Circuit electric cu 3 condensatoare si o rezistență

Parametrii circuitului sunt:

$$R_1 = 2 \, \Omega, C_1 = 2\text{F}, C_2 = 1\text{F}, C_3 = 3\text{F}$$

Pentru acest  $R_1$  proiect s-a ales un circuit electric cu 3 elemente active(3 condensatoare) din cartea "Chen

Ca semnale de intrare s-a folosit sinusuri cu diferite frecvențe pentru a deduce natura filtrului, semnale de tip treaptă, rampă, impuls pentru a determina performanțele cerute. În funcție de semnalul dat ca intrare, la ieșire s-a așteptat pentru un sinus, ca semnalele joase sa fie trecute iar pentru cele înalte sa fie taiate, doar că pentru parametrii de mai sus, acest lucru nu prea a fost posibil, decat se se observe faptul că la semnale joase, se încearcă să ajungă la frecvența de tăiere. Dintr-un semnal de tip treapă s-a putut observa timpul de răspuns, coeficientul de proporționalitate, eroarea la poziție. Dintr-un semnal de tip rampă, s-a putut deduce eroarea la viteză.

## 2 Model matematic intrare-stare-iesire x/u/y

Considerăm variabilele de stare  $x_1, x_2, x_3$ , unde:

$$i_{C_1} = C_1 * \dot{x}_1$$

$$i_{C_2} = C_2 * \dot{x}_2$$

$$i_{C_3} = C_3 * \dot{x}_3$$

Aplicăm teoremele lui Kirchoff:

$$\text{TK I: } \begin{cases} i_{R_1} + i_{C_1} = i_{C_2} \\ i_{C_2} = i_{C_3} \end{cases} \quad (1)$$

$$TKII: \begin{cases} u = u_{R_1} + x_2 + x_3 \\ u = u_{R_1} - x_1 \\ 0 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y = x_3 \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

$$(5)$$

$$(6)$$

Derivând (5) obținem (d/dt):

$$\dot{x}_1 = -\dot{x}_2 - \dot{x}_3 \quad (7)$$

Din ecuația (2) avem:

$$\begin{aligned} C_2 * \dot{x}_2 &= C_3 * \dot{x}_3 \\ \Rightarrow \dot{x}_3 &= \frac{C_2 * \dot{x}_2}{C_3} \end{aligned} \quad (8)$$

Băgăm (8) în (7):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\dot{x}_2 - \frac{C_2 * \dot{x}_2}{C_3} \\ \dot{x}_1 &= -\frac{C_3 + C_2}{C_3} * \dot{x}_2 \quad \Rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{C_3}{C_3 + C_2} * \dot{x}_1 \end{aligned} \quad (9)$$

Din (4) obținem:

$$u_{R_1} = u + x_1 \quad \Rightarrow i_{R_1} = \frac{u + x_1}{R_1} \quad (10)$$

Băgăm (10) și (9) în (1):

$$\begin{aligned} \frac{u + x_1}{R_1} + C_1 * \dot{x}_1 &= C_2 * \dot{x}_2 \\ &= -C_2 * \frac{C_3}{C_3 + C_2} * \dot{x}_1 \\ \Rightarrow \dot{x}_1 * \left( C_1 + \frac{C_2 * C_3}{C_2 + C_3} \right) &= -\frac{u + x_1}{R_1} \\ \Leftrightarrow \dot{x}_1 * \left( \frac{C_1 * C_2 + C_1 * C_3 + C_2 * C_3}{C_2 + C_3} \right) &= -\frac{u + x_1}{R_1} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}_1 = - \left( \frac{C_2 + C_3}{C_1 * C_2 + C_1 * C_3 + C_2 * C_3} \right) * \frac{1}{R_1} * x_1 - \left( \frac{C_2 + C_3}{C_1 * C_2 + C_1 * C_3 + C_2 * C_3} \right) * \frac{1}{R_1} * u \quad (11)$$

Din (11) în (9) se obține:

$$\dot{x}_2 = - \frac{C_3}{C_3 + C_2} * \dot{x}_1 = \left( \frac{C_3}{C_1 * C_2 + C_1 * C_3 + C_2 * C_3} \right) * \frac{1}{R_1} * x_1 + \left( \frac{C_3}{C_1 * C_2 + C_1 * C_3 + C_2 * C_3} \right) * \frac{1}{R_1} * u \quad (12)$$

Din (12) în (8) se obține:

$$\dot{x}_3 = - \frac{C_2}{C_3} * \dot{x}_2 = - \left( \frac{C_2}{C_1 * C_2 + C_1 * C_3 + C_2 * C_3} \right) * \frac{1}{R_1} * x_1 - \left( \frac{C_2}{C_1 * C_2 + C_1 * C_3 + C_2 * C_3} \right) * \frac{1}{R_1} * u \quad (13)$$

Din (6) știm:

$$y = x_3$$

Ajungem la:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = - \frac{C_2 + C_3}{C_1 * C_2 + C_1 * C_3 + C_2 * C_3} * \frac{1}{R_1} * x_1 - \frac{C_2 + C_3}{C_1 * C_2 + C_1 * C_3 + C_2 * C_3} * \frac{1}{R_1} * u \\ \dot{x}_2 = \frac{C_3}{C_1 * C_2 + C_1 * C_3 + C_2 * C_3} * \frac{1}{R_1} * x_1 + \frac{C_3}{C_1 * C_2 + C_1 * C_3 + C_2 * C_3} * \frac{1}{R_1} * u \\ \dot{x}_3 = - \frac{C_2}{C_1 * C_2 + C_1 * C_3 + C_2 * C_3} * \frac{1}{R_1} * x_1 - \frac{C_2}{C_1 * C_2 + C_1 * C_3 + C_2 * C_3} * \frac{1}{R_1} * u \\ y = x_3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = \begin{pmatrix} - \frac{C_2 + C_3}{C_1 * C_2 + C_1 * C_3 + C_2 * C_3} * \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ \frac{C_3}{C_1 * C_2 + C_1 * C_3 + C_2 * C_3} * \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ - \frac{C_2}{C_1 * C_2 + C_1 * C_3 + C_2 * C_3} * \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} * X + \begin{pmatrix} - \frac{C_2 + C_3}{C_1 * C_2 + C_1 * C_3 + C_2 * C_3} * \frac{1}{R_1} \\ \frac{C_3}{C_1 * C_2 + C_1 * C_3 + C_2 * C_3} * \frac{1}{R_1} \\ - \frac{C_2}{C_1 * C_2 + C_1 * C_3 + C_2 * C_3} * \frac{1}{R_1} \end{pmatrix} * u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * X + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} * u \end{array} \right.$$

Înlocuim cu valorile circuitului nostru:

$$C_1 = 2F$$

$$C_2 = 1F$$

$$C_3 = 3F$$

$$R_1 = 2Ohm$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = \begin{pmatrix} - \frac{1+3}{2*1+2*3+1*3} * \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2*1+2*3+1*3} * \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ - \frac{1}{2*1+2*3+1*3} * \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} * X + \begin{pmatrix} - \frac{1+3}{2*1+2*3+1*3} * \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2*1+2*3+1*3} * \frac{1}{2} \\ - \frac{1}{2*1+2*3+1*3} * \frac{1}{2} \end{pmatrix} * u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * X + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} * u \end{array} \right.$$

**Într-un final ajungem la:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{22} & 0 & 0 \\ \frac{3}{22} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} * X \quad + \begin{pmatrix} -\frac{4}{22} \\ \frac{3}{22} \\ -\frac{1}{22} \end{pmatrix} * u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * X \quad + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} * u \end{array} \right.$$

$$\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} -\frac{4}{22} & 0 & 0 & -\frac{4}{22} \\ \frac{3}{22} & 0 & 0 & \frac{3}{22} \\ -\frac{1}{22} & 1 & 0 & -\frac{1}{22} \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

### 3 Model intrare-iesire. Funcția de transfer

#### 3.1 Determinarea modelului intrare-ieșire

Având în vedere sistemul aflat anterior:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{C_2+C_3}{C_1*C_2+C_1*C_3+C_2*C_3} * \frac{1}{R_1} * x_1 - \frac{C_2+C_3}{C_1*C_2+C_1*C_3+C_2*C_3} * \frac{1}{R_1} * u \\ \dot{x}_2 = \frac{C_3}{C_1*C_2+C_1*C_3+C_2*C_3} * \frac{1}{R_1} * x_1 + \frac{C_3}{C_1*C_2+C_1*C_3+C_2*C_3} * \frac{1}{R_1} * u \\ \dot{x}_3 = -\frac{C_2}{C_1*C_2+C_1*C_3+C_2*C_3} * \frac{1}{R_1} * x_1 - \frac{C_2}{C_1*C_2+C_1*C_3+C_2*C_3} * \frac{1}{R_1} * u \\ y = x_3 \end{cases}$$

Notăm  $a = C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3$  pentru a înțelege mai ușor calculele

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{C_2+C_3}{a} * \frac{1}{R_1} * x_1 - \frac{C_2+C_3}{a} * \frac{1}{R_1} * u \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{C_3}{a} * \frac{1}{R_1} * x_1 + \frac{C_3}{a} * \frac{1}{R_1} * u \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = -\frac{C_2}{a} * \frac{1}{R_1} * x_1 - \frac{C_2}{a} * \frac{1}{R_1} * u \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} y = x_3 \end{cases} \quad (4)$$

Derivăm ecuația (4):

$$\dot{y} = \dot{x}_3 = -\frac{C_2}{a} * \frac{1}{R_1} * x_1 - \frac{C_2}{a} * \frac{1}{R_1} * u \quad (5)$$

Derivăm ecuația (5):

$$\ddot{y} = -\frac{C_2}{a} * \frac{1}{R_1} * \dot{x}_1 - \frac{C_2}{a} * \frac{1}{R_1} * \dot{u} \quad (6)$$

Băgăm (1) în (6):

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\frac{C_2}{a} * \frac{1}{R_1} * \left( -\frac{C_2+C_3}{a} * \frac{1}{R_1} * x_1 - \frac{C_2+C_3}{a} * \frac{1}{R_1} * u \right) - \frac{C_2}{a} * \frac{1}{R_1} * \dot{u} \\ \ddot{y} &= \frac{C_2 * (C_2+C_3)}{R_1^2 * a^2} * x_1 + \frac{C_2 * (C_2+C_3)}{R_1^2 * a^2} * u - \frac{C_2}{R_1 * a} * \dot{u} \\ \Rightarrow -\frac{C_2 * (C_2+C_3)}{R_1^2 * a^2} * x_1 &= -\ddot{y} + \frac{C_2 * (C_2+C_3)}{R_1^2 * a^2} * u - \frac{C_2}{R_1 * a} * \dot{u} \end{aligned} \quad (7)$$

Înmulțim ecuația (7) cu  $(-\frac{R_1^2 * a^2}{C_2 * (C_2+C_3)}) = \Rightarrow$

$$x_1 = \frac{R_1^2 * a^2}{C_2 * (C_2+C_3)} * \ddot{y} - u + \frac{R_1 * a}{C_2+C_3} * \dot{u} \quad (8)$$

Băgăm ecuația (8) în ecuația (5):

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -\frac{C_2}{a} * \frac{1}{R_1} * \left[ \frac{R_1^2 * a^2}{C_2 * (C_2 + C_3)} * \ddot{y} - u + \frac{R_1 * a}{C_2 + C_3} * \dot{u} \right] - \frac{C_2}{a} * \frac{1}{R_1} * u \\ \dot{y} &= -\frac{R_1 * a}{C_2 + C_3} * \ddot{y} + \frac{C_2}{R_1 * a} * u - \frac{C_2}{C_2 + C_3} * \dot{u} - \frac{C_2}{R_1 * a} * u \\ \Rightarrow \frac{R_1 * a}{C_2 + C_3} * \ddot{y} + \dot{y} &= -\frac{C_2}{C_2 + C_3} * \dot{u}\end{aligned}\quad (9)$$

Înmulțim ecuația (9) cu  $\frac{C_2 + C_3}{R_1 * a}$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{C_2 + C_3}{R_1 * a} * \dot{y} = -\frac{C_2}{R_1 * a} * \dot{u}\quad (10)$$

Înlocuind în ecuația (10) pe "a", ajungem la modelul intrare-ieșire:

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{C_2 + C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1} * \dot{y} = -\frac{C_2}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1} * \dot{u}\quad (11)$$

### 3.2 Determinarea funcției de transfer.

#### 3.2.1 Folosind modelul intrare-ieșire

Foliesindu-ne de ecuația (11) :

$$y''(t) + \frac{C_2 + C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1} * y'(t) = -\frac{C_2}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1} * u'(t)$$

Notăm  $a = C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3$ , pentru lizibilitatea calculelor

$$\Rightarrow y''(t) + \frac{C_2 + C_3}{R_1 * a} * y'(t) = -\frac{C_2}{R_1 * a} * u'(t)\quad (12)$$

Aplicăm Laplace pentru condiții inițiale nule (CI=0):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''(t)\}(s) + \mathcal{L}\left\{\frac{C_2 + C_3}{R_1 * a} * y'(t)\right\}(s) &= -\mathcal{L}\left\{\frac{C_2}{R_1 * a} * u'(t)\right\}(s) \\ \Leftrightarrow s^2 * \mathcal{L}\{y(t)\}(s) + s * \frac{C_2 + C_3}{R_1 * a} * \mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= -s * \frac{C_2}{R_1 * a} * \mathcal{L}\{u(t)\}(s) \\ \Leftrightarrow s^2 * Y(s) + s * \frac{C_2 + C_3}{R_1 * a} * Y(s) &= -s * \frac{C_2}{R_1 * a} * U(s) \\ \Leftrightarrow Y(s) \left( s^2 + s * \frac{C_2 + C_3}{R_1 * a} \right) &= -s * \frac{C_2}{R_1 * a} * U(s) \\ \Leftrightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} &= -\frac{s * \frac{C_2}{R_1 * a}}{\left( s^2 + s * \frac{C_2 + C_3}{R_1 * a} \right)}\end{aligned}$$

Înlocuind pe "a", în ecuația de mai sus, funcția de transfer este:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-s * \frac{C_2}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1}}{s^2 + s * \frac{C_2 + C_3}{R_1 * C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1}}\quad (13)$$



### 3.2.2 Folosind relația sa cu spațiul stărilor

Descrierea sistemului în planul stărilor este:

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{pmatrix} -\frac{C_2+C_3}{C_1*C_2+C_1*C_3+C_2*C_3} * \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ \frac{C_3}{C_1*C_2+C_1*C_3+C_2*C_3} * \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ -\frac{C_2}{C_1*C_2+C_1*C_3+C_2*C_3} * \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} * X + \begin{pmatrix} -\frac{C_2+C_3}{C_1*C_2+C_1*C_3+C_2*C_3} * \frac{1}{R_1} \\ \frac{C_3}{C_1*C_2+C_1*C_3+C_2*C_3} * \frac{1}{R_1} \\ -\frac{C_2}{C_1*C_2+C_1*C_3+C_2*C_3} * \frac{1}{R_1} \end{pmatrix} * u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * X + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} * u \end{cases}$$

Funcția de transfer este definită ca:

$$H(s) = C * (s * I - A)^{-1} * B + D$$

$$H(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \frac{adj(sI - A)}{det(sI - A)} * \begin{pmatrix} -\frac{C_2+C_3}{C_1*C_2+C_1*C_3+C_2*C_3} * \frac{1}{R_1} \\ \frac{C_3}{C_1*C_2+C_1*C_3+C_2*C_3} * \frac{1}{R_1} \\ -\frac{C_2}{C_1*C_2+C_1*C_3+C_2*C_3} * \frac{1}{R_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Facând o analiză se poate observa că trebuie să aflăm doar ultima linie din adjuncta.

O să folosim notația  $a = C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3$ , pentru lizibilitate

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s + \frac{C_2+C_3}{R_1*a} & 0 & 0 \\ -\frac{C_3}{R_1*a} & s & 0 \\ \frac{C_2}{R_1*a} & 0 & s \end{pmatrix}, adj(sI - A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$a_{13} = (-1)^{1+3} * \begin{vmatrix} -\frac{C_3}{R_1*a} & s \\ \frac{C_2}{R_1*a} & 0 \end{vmatrix} = -s * \frac{C_2}{R_1 * a} \quad (15)$$

$$a_{23} = (-1)^{2+3} * \begin{vmatrix} s + \frac{C_2+C_3}{R_1*a} & 0 \\ \frac{C_2}{R_1*a} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

$$a_{33} = (-1)^{3+3} * \begin{vmatrix} s + \frac{C_2+C_3}{R_1*a} & 0 \\ -\frac{C_3}{R_1*a} & s \end{vmatrix} = s^2 + s * \frac{C_2 + C_3}{R_1 * a} \quad (17)$$

$$det(sI - A) = \begin{vmatrix} s + \frac{C_2+C_3}{R_1*a} & 0 & 0 \\ -\frac{C_3}{R_1*a} & s & 0 \\ \frac{C_2}{R_1*a} & 0 & s \end{vmatrix} = s^3 + s^2 * \frac{C_2 + C_3}{R_1 * a} \quad (18)$$

Băgăm (18),(17),(16),(15) în (14) :

$$H(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \frac{\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ -s * \frac{C_2}{R_1 * a} & 0 & s^2 + s * \frac{C_2+C_3}{R_1 * a} \end{pmatrix}}{s^3 + s^2 * \frac{C_2+C_3}{R_1 * a}} * \begin{pmatrix} -\frac{C_2+C_3}{R_1 * a} \\ \frac{C_3}{R_1 * a} \\ -\frac{C_2}{R_1 * a} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow H(s) = \frac{\begin{pmatrix} -s * \frac{C_2}{R_1 * a} & 0 & s^2 + s * \frac{C_2+C_3}{R_1 * a} \end{pmatrix}}{s^3 + s^2 * \frac{C_2+C_3}{R_1 * a}} * \begin{pmatrix} -\frac{C_2+C_3}{R_1 * a} \\ \frac{C_3}{R_1 * a} \\ -\frac{C_2}{R_1 * a} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow H(s) = \frac{s * \frac{C_2(C_2+C_3)}{R_1^2 a^2} - s^2 * \frac{C_2}{R_1 * a} - s * \frac{C_2(C_2+C_3)}{R_1^2 * a_1^2}}{s^3 + s^2 * \frac{C_2+C_3}{R_1 * a}}$$

$$\Leftrightarrow H(s) = \frac{-s^2 * \frac{C_2}{R_1 * a}}{s^3 + s^2 * \frac{C_2+C_3}{R_1 * a}} = \frac{-s * \frac{C_2}{R_1 * a}}{s^2 + s * \frac{C_2+C_3}{R_1 * a}}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{-s * \frac{C_2}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1}}{s^2 + s * \frac{C_2+C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1}} \quad (19)$$

Se poate face verificarea, și se observă că prin ambele metode s-a ajuns la același rezultat, ecuația (19) = (13)

**Singurul motiv pentru care una a fost în formă mai simplă este faptul că nu am derivat ecuația să avem numărul derivatei lui y, de atâtea ori de cât avem numărul elementelor active.**

**Înlocuind cu valorile corespunzătoare în forma nesimplificată:**

$$H(s) = \frac{-s^2 * \frac{1}{2*1+2*3+1*3} * \frac{1}{2}}{s^3 + s^2 * \frac{1+3}{2*1+2*3+1*3} * \frac{1}{2}} = \frac{-s^2 * \frac{1}{22}}{s^3 + s^2 * \frac{4}{22}}$$

$$H(s) = \frac{-\frac{1}{22} * s^2}{s^3 + \frac{4}{22} * s^2} \quad (20)$$

## 4 Determinare singularității. Afișare în plan complex.

Determinare singularitati Cunoaștem funcția de transfer ca fiind:

$$H(s) = \frac{-s^2 * \frac{C_2}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1}}{s^3 + s^2 * \frac{C_2 + C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1}} \quad (1)$$

Egalăm numărătorul cu 0 pentru a afla zerourile:

$$-s^2 * \frac{C_2}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{s}_1 = \dot{s}_2 = 0$$

Egalăm numitorul cu 0 pentru a afla polii sistemului:

$$s^3 + s^2 * \frac{C_2 + C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1} = 0$$

$$\Rightarrow s^2 \left( s + \frac{C_2 + C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{s}_1 = \hat{s}_2 = 0, \hat{s}_3 = -\frac{C_2 + C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1} = -\frac{1+3}{2*1+2*3+1*3} * \frac{1}{2} = -\frac{4}{22}$$

Singularitățile sistemului sunt:

$$\dot{s}_1 = 0,$$

$$\dot{s}_2 = 0,$$

$$\hat{s}_1 = 0,$$

$$\hat{s}_2 = 0,$$

$$\hat{s}_3 = -\frac{4}{22}$$

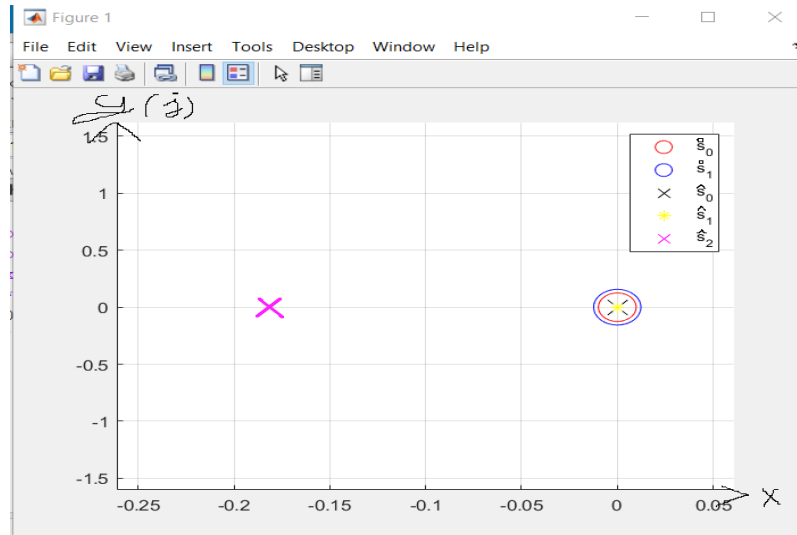


Figure 2: Singularitățile în planul complex

## 5 Determinare formă canonică de control(FCC) și formă canonică de observare(FCO). Realizare schemă simulink.

### 5.1 Determinare formă canonică de control (FCC).

Funcția de transfer este:

$$H(s) = \frac{-s^2 * \frac{C_2}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1}}{s^3 + s^2 * \frac{C_2 + C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1}} \quad (1)$$

Conform definiției, FCC este:

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{FCC} & B_{FCC} \\ \hline C_{FCC} & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} -\frac{C_2 + C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{C_2}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (2)$$

Înlocuind cu valorile corespunzătoare rezultă:

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{FCC} & B_{FCC} \\ \hline C_{FCC} & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} -\frac{1+3}{2*3+2*3+1*3} * \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2*3+2*3+1*3} * \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} -\frac{4}{22} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{22} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (3)$$

Din (2) scoatem relațiile pentru variabilele de stare ca să le putem implementa în simulink:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\frac{C_2 + C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1} * x_1 + 0 + 0 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 0 + 0 \\ \dot{x}_3 &= 0 + x_2 + 0 \\ y &= -\frac{C_2}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1} * x_1 + 0 + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\frac{4}{22}x_1 + u \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 &= x_1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 &= x_2 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} y &= -\frac{1}{22}x_1 \end{cases} \quad (7)$$

### 5.1.1 Realizare FCC simulink.

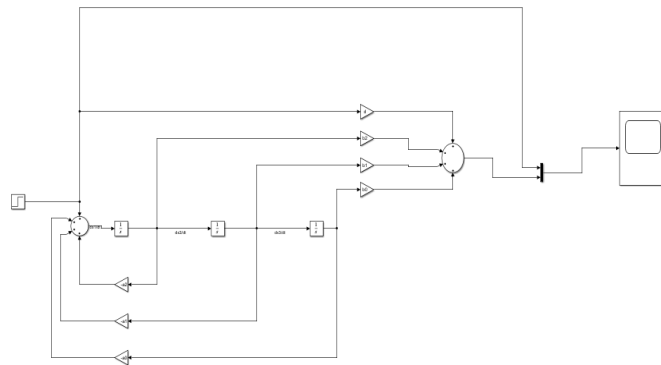


Figure 3: Realizare simulink FCC

### 5.1.2 Simulare simulink.

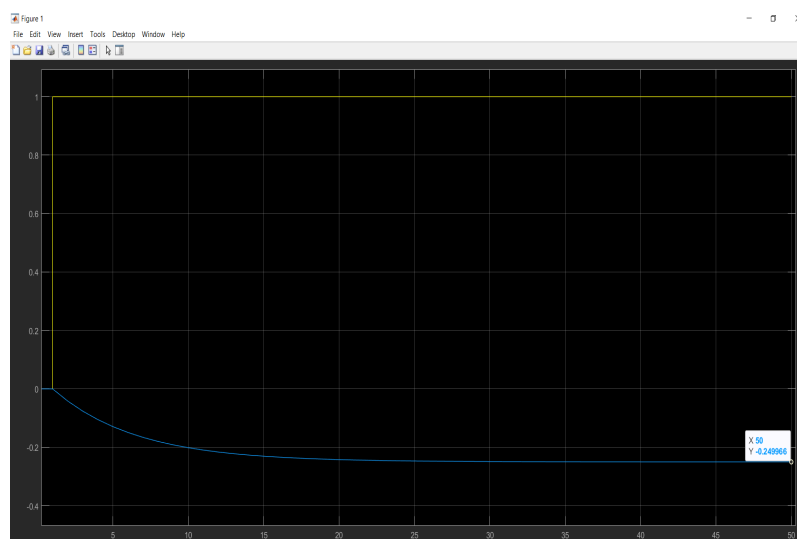


Figure 4: Simulare sistem FCC simulink

## 5.2 Determinare forma canonica de observare (FCO).

Funcția de transfer este:

$$H(s) = \frac{-s^2 * \frac{C_2}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1}}{s^3 + s^2 * \frac{C_2 + C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} * \frac{1}{R_1}} \quad (8)$$

Conform definiției, FCO este:

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{FCO} & B_{FCO} \\ \hline C_{FCO} & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} A_{FCC}^T & C_{FCC}^T \\ \hline B_{FCC}^T & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} -\frac{C_2+C_3}{C_1C_2+C_1C_3+C_2C_3} * \frac{1}{R_1} & 1 & 0 & -\frac{C_2}{C_1C_2+C_1C_3+C_2C_3} * \frac{1}{R_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (9)$$

Înlocuind cu valorile corespunzătoare rezultă:

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{FCO} & B_{FCO} \\ \hline C_{FCO} & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} -\frac{1+3}{2*1+2*3+1*3} * \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2*1+2*3+1*3} * \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} -\frac{4}{22} & 1 & 0 & -\frac{1}{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (10)$$

Din (10) scoatem relațiile pentru variabilele de stare ca să le putem implementa în simulink:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{C_2+C_3}{C_1C_2+C_1C_3+C_2C_3} * \frac{1}{R_1} * x_1 + x_2 + 0 - \frac{1}{22} * u \\ \dot{x}_2 = 0 + 0 + x_3 \\ \dot{x}_3 = 0 + 0 + 0 \\ y = x_1 + 0 + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{4}{22}x_1 + x_2 - \frac{1}{22} * u \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = x_3 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} y = x_1 \end{cases} \quad (14)$$

### 5.2.1 Realizare FCO simulink.

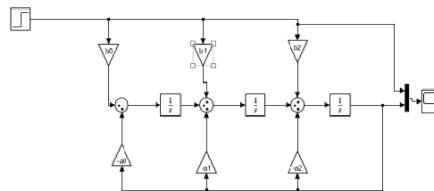
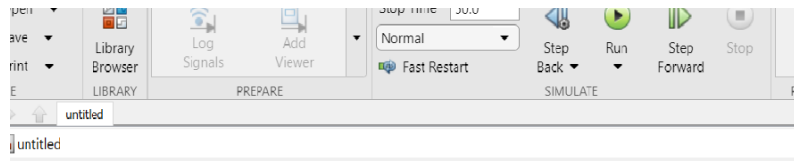


Figure 5: Realizare simulink FCO

## 5.2.2 Simulare simulink.

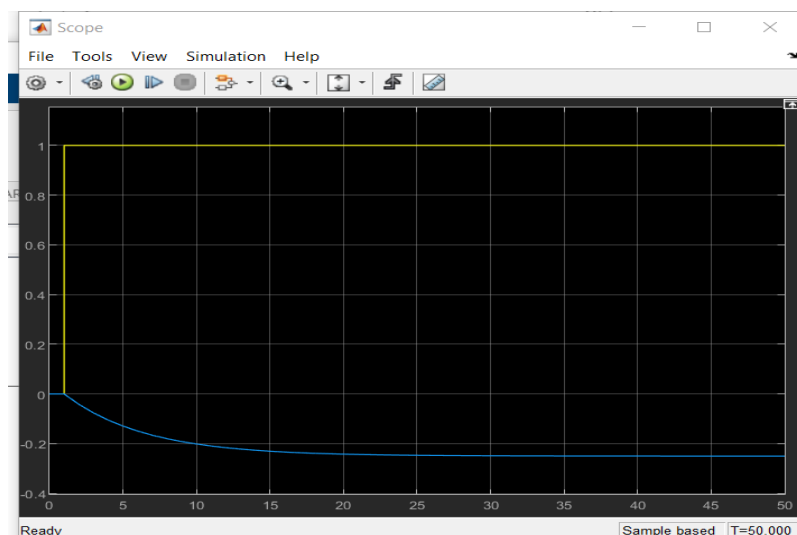
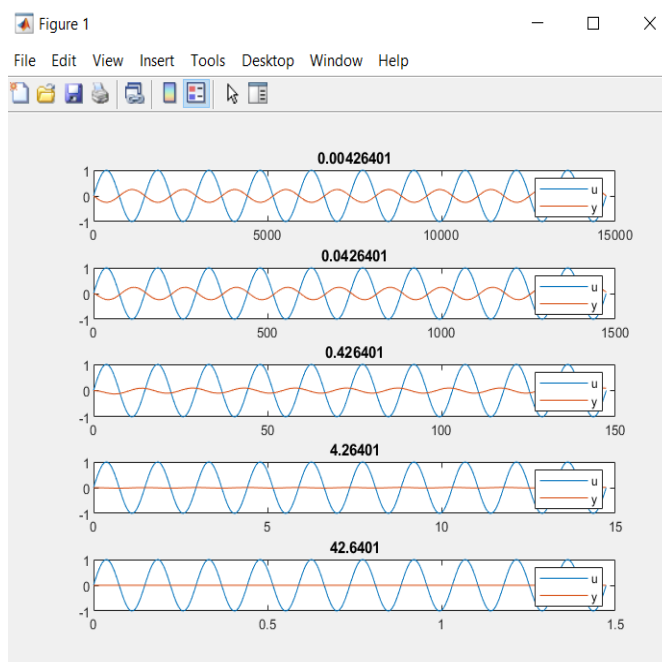


Figure 6: Simulare sistem FCO simulink

Hai sa analizăm și filtrul, pentru valori ale lui omega diferite față de radicalul termenului liber.



Se poate observa că pentru nici o valoare nu trece semnalul, pentru o valoare apropiată de 0, parcă ar încerca. Dacă ne uităm atent la funcția de transfer putem observa că dacă oferim o valoare pentru  $C_2$  mult mai mare decât a lui  $C_3$ , atunci filtrul s-ar comporta ca un filtru trece jos. Spre exemplu dacă  $C_2 = 10F, C_3 = F$ , atunci la limita spre 0 ar fi  $\frac{10}{11}$  care este trecut.

## 6 Determinare funcția de transfer in forma minimala.

Impartim polinoamele din funcția de transfer pentru aflarea coeficientiilor Markov:

$$H(s) = \frac{-\frac{1}{22} * s^2}{s^3 + \frac{4}{22} * s^2}$$

$$\left( \begin{array}{c|c} -\frac{1}{22}s^2 & s^3 + s^2 * \frac{4}{22} \\ \hline +\frac{1}{22}s^2 & 0 - \frac{1}{22}s^{-1} + \frac{4}{22^2}s^{-2} - \frac{4}{22^3}s^{-3} + \frac{4}{22^4}s^{-4} - \frac{4}{22^5}s^{-5} \\ +\frac{4}{22^2}s & \\ -\frac{4}{22^2}s & \\ -\frac{4^2}{22^3} & \\ +\frac{4^2}{22^3} & \\ +\frac{4^3}{22^4}s^{-1} & \\ -\frac{4^3}{22^4}s^{-1} & \\ -\frac{4^4}{22^5}s^{-2} & \\ +\frac{4^4}{22^5}s^{-2} & \\ +\frac{4^5}{22^6}s^{-3} & \\ \hline +\frac{4^5}{22^6}s^{-3} & \end{array} \right)$$

Se poate observa ca am obtinut coeficientii Markov:

$$\gamma_0 = 0, \gamma_1 = -\frac{1}{22}, \gamma_2 = \frac{4}{22^2}, \gamma_3 = -\frac{4^2}{22^3}, \gamma_4 = \frac{4^3}{22^4}, \gamma_5 = -\frac{4^4}{22^5}$$

Matricea Hankel este urmatoarea:

$$H_{3,3} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{22} & \frac{4}{22^2} & -\frac{4^2}{22^3} \\ \frac{4}{22^2} & -\frac{4^2}{22^3} & \frac{4^3}{22^4} \\ -\frac{4^2}{22^3} & \frac{4^3}{22^4} & -\frac{4^4}{22^5} \end{pmatrix}$$

Calculam rangul matricei Hankel:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{22} & \frac{4}{22^2} & -\frac{4^2}{22^3} \\ \frac{4}{22^2} & -\frac{4^2}{22^3} & \frac{4^3}{22^4} \\ -\frac{4^2}{22^3} & \frac{4^3}{22^4} & -\frac{4^4}{22^5} \end{vmatrix} = -\frac{4^6}{22^9} - \frac{4^6}{22^9} - \frac{4^6}{22^9} + \frac{4^6}{22^9} + \frac{4^6}{22^9} + \frac{4^6}{22^9} = 0$$

Uitandu-ne atent, se poate observa ca daca am alege orice determinant de gradul doi, ne-ar da 0. Din acest motiv, rangul matricei Hankel este 1,  $\text{rang}(H_{3,3}) = 1$



**Aplicam formulele:**

$$\begin{aligned} -(\gamma_2) &= (\gamma_1) * (a_0) \\ -(\gamma_1)^{-1} * (\gamma_2) &= (a_0) \end{aligned} \tag{1}$$

$$-(-\frac{1}{22})^{-1} * \frac{4}{22^2} = 22 * \frac{4}{22^2} = a_0$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{4}{22}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{22} & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{22} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b_1 = 0$$

$$\Rightarrow b_0 = -\frac{1}{22}$$

**Funcția de transfer in forma minimala este:**

$$H(s) = \frac{b_1 * s + b_0}{s + a_0} = \frac{-\frac{1}{22}}{s + \frac{4}{22}}$$

## 7 Stabilitatea interna si externa.

### 7.1 Stabilitatea interna

In planul starilor avem:

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{22} & 0 & 0 \\ \frac{3}{22} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} * X + \begin{pmatrix} -\frac{4}{22} \\ \frac{3}{22} \\ -\frac{1}{22} \end{pmatrix} * u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * X + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} * u \end{cases}$$

Pentru a studia stabilitatea externa, aplicam criteriul lui Routh-Hurwitz:  
Calculam polinomul caracteristic:

$$\det(\lambda * I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{4}{22} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{22} & \lambda & 0 \\ \frac{1}{22} & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + \frac{4}{22} * \lambda^2 \quad (1)$$

Scriem tabelul lui Routh-Hurwitz:

$\lambda^3$	1	0
$\lambda^2$	$\frac{4}{22}$	0
$\lambda^1$	$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{22} & 0 \end{vmatrix}}{\frac{4}{22}} = 0$	0
$\lambda^1 = (\lambda^2)'$	$\frac{8}{22}$	0
$\lambda^0$	$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{8}{22} & 0 \end{vmatrix}}{\frac{8}{22}} = 0$	0
$\lambda^0 = (\lambda^1)'$	$\frac{8}{22}$	0

(2)

Tabelul semnelor este:

$\lambda^3$	+
$\lambda^2$	+
$\lambda^1$	+
$\lambda^0$	+

(3)

Se poate observa ca nu avem nici o schimbare de semn si am fi tentați sa spunem ca sistemul este stabil, doar ca din cauza ca am derivat de 2 ori, s-ar putea sa avem 2 valori proprii in 0

Plecam de la ideea  $P(\lambda) = 0$  :

$$\lambda^3 + \frac{4}{22} * \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda + \frac{4}{22}) = 0$$

Valoriile proprii sunt:  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -\frac{4}{22}$

Se pot observa 2 valori proprii in 0, deci sistemul nostru este instabil, deoarece are un mod "t", care tiinde spre infinit, inducand instabilitatea.

## 7.2 Stabilitatea externa

Funcția de transfer in forma minimala este:  $H(s) = \frac{-\frac{1}{22}}{s + \frac{4}{22}}$

Calculam polii sistemului:  $s + \frac{4}{22} = 0 \Rightarrow \hat{s}_1 = -\frac{4}{22}$

Se poate observa ca singurul pol se afla in semiplanul stang, deci sistemul este stabil extern, avand modul:  $e^{\hat{s}_1 t} = e^{-4t}$

## 8 Determinare stabilitate interna folosind Lyapunov

Pentru a verifica stabilitatea sistemului folosind lyapunov, trebuie ca:  $A^T P + P A = -Q$

Daca ecuatia are solutii pentru orice  $Q = Q^T$  pozitiv definit ales, astfel incat  $P$  sa fie poz-

itiv definita, atunci sistemul este stabil. Consideram Matricea  $P = P^T : \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix}$

si  $A = \begin{pmatrix} -\frac{4}{22} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{22} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A^T P + P A &= \begin{pmatrix} -\frac{4}{22} & \frac{3}{22} & -\frac{1}{22} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -\frac{4}{22} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{22} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{4}{22}p_{11} + \frac{3}{22}p_{12} - \frac{1}{22}p_{13} & -\frac{4}{22}p_{12} + \frac{3}{22}p_{22} - \frac{1}{22}p_{23} & -\frac{4}{22}p_{13} + \frac{3}{22}p_{23} - \frac{1}{22}p_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ &\begin{pmatrix} -\frac{4}{22}p_{11} + \frac{3}{22}p_{12} - \frac{1}{22}p_{13} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{22}p_{12} + \frac{3}{22}p_{22} - \frac{1}{22}p_{23} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{22}p_{13} + \frac{3}{22}p_{23} - \frac{1}{22}p_{33} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{8}{22}p_{11} + \frac{6}{22}p_{12} - \frac{2}{22}p_{13} & -\frac{4}{22}p_{12} + \frac{3}{22}p_{22} - \frac{1}{22}p_{23} & -\frac{4}{22}p_{13} + \frac{3}{22}p_{23} - \frac{1}{22}p_{33} \\ -\frac{4}{22}p_{12} + \frac{3}{22}p_{22} - \frac{1}{22}p_{23} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{22}p_{13} + \frac{3}{22}p_{23} - \frac{1}{22}p_{33} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se poate observa din nefericire ca nu se poate folosi metoda lui lyapunov pentru a verifica stabilitatea deoarece avem 2 integrale in 0, iar din cauza lor, am ajuns intr-un stadiu in care nu putem sa initializam un  $Q$  astfel incat sa fie pozitiv definit. Ca să afişăm o energie, am preferat să luăm un  $P$  matrice unitară, pentru că ecuația de mai sus nu a putut fi rezolvată.

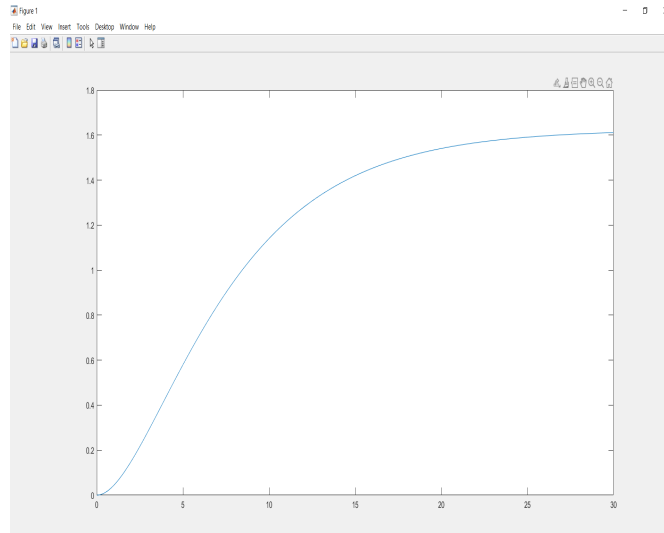


Figure 7: Grafic energie pentru P luat ca matrice unitară

## 9 Determinarea funcției pondere, răspunsului indicial, răspunsul la rampa și grafice.

### 9.1 Funcția pondere.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{22} * s^2}{s^3 + \frac{4}{22} * s^2}\right\} = -\frac{1}{22} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{4}{22}}\right\} = \frac{-1}{22} * e^{-4t}$$

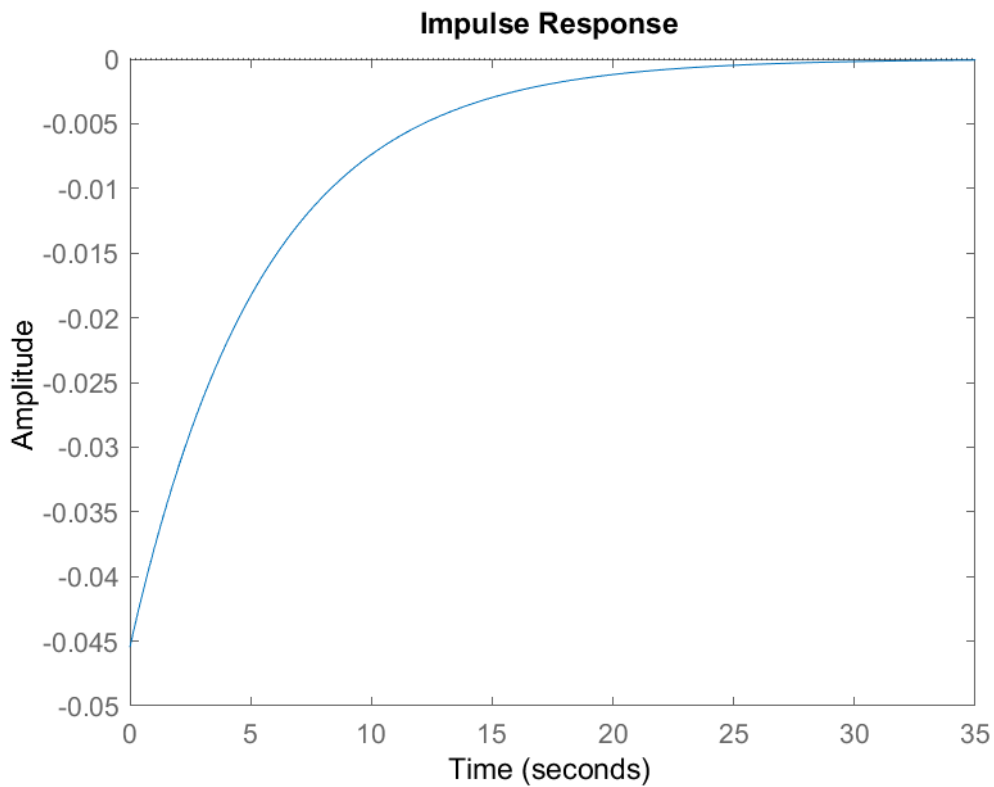


Figure 8: Răspunsul la impuls

## 9.2 Raspunsul Indicial.

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(s) * \frac{1}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\frac{1}{22} * s^2}{s^3 + \frac{4}{22} * s^2} * \frac{1}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\frac{1}{22}}{s + \frac{4}{22}} * \frac{1}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s + \frac{4}{22}} + \frac{B}{s} \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{As + Bs + \frac{4B}{22}}{s(s + \frac{4}{22})} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s(A + B) + \frac{4B}{22}}{s(s + \frac{4}{22})} \right\} \\
&\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \Rightarrow A = -B = \frac{1}{4} \\ \frac{4B}{22} = -\frac{1}{22} \Rightarrow B = -\frac{1}{4} \end{cases} \\
&\Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s + \frac{4}{22}} + \frac{B}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{4} * \frac{1}{s + \frac{4}{22}} - \frac{1}{4} * \frac{1}{s} \right\} = \frac{1}{4} * \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{4}{22}} \right\} - \frac{1}{4} * \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} \\
&= \frac{1}{4} * e^{-\frac{4}{22}t} - \frac{1}{4}(t)
\end{aligned}$$

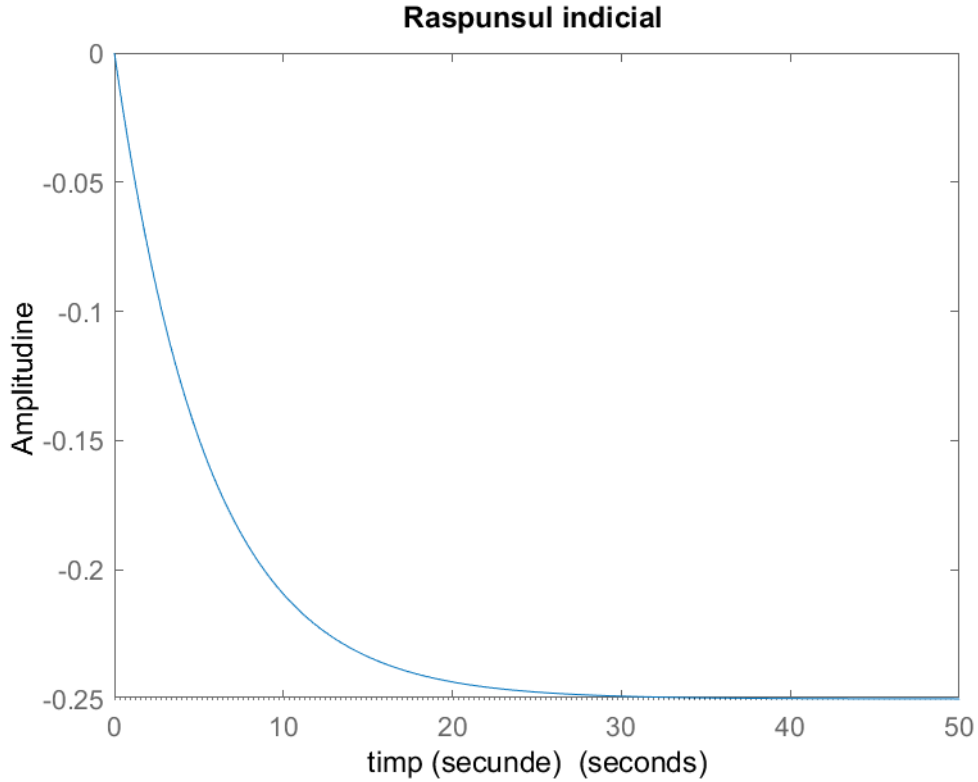


Figure 9: Raspunsul la treapta

## 9.3 Raspunsul la rampa

$$\begin{aligned}
y_v(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(s) * \frac{1}{s^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\frac{1}{22} * s^2}{s^3 + \frac{4}{22} * s^2} * \frac{1}{s^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\frac{1}{22}}{s + \frac{4}{22}} * \frac{1}{s^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s + \frac{4}{22}} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{As^2 + Bs(s + \frac{4}{22}) + C(s + \frac{4}{22})}{s^2(s + \frac{4}{22})} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2(A + B) + s(\frac{4B}{22} + C) + \frac{4C}{22}}{s^2(s + \frac{4}{22})} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \Rightarrow A = -B = \frac{-11}{8} \\ \frac{4B}{22} + C = 0 \Rightarrow B = \frac{-22C}{4} = \frac{22}{16} = \frac{11}{8} \\ \frac{4C}{22} = \frac{-1}{22} \Rightarrow C = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s + \frac{4}{22}} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-11}{8} * \frac{1}{s + \frac{4}{22}} + \frac{11}{8} * \frac{1}{s} + \frac{-1}{4} * \frac{1}{s^2} \right\}$$

$$= -\frac{11}{8} * \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{4}{22}} \right\} + \frac{11}{8} * \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \frac{1}{4} * \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\}$$

$$= -\frac{11}{8} * e^{-\frac{4}{22}t} + \frac{11}{8}(t) - \frac{1}{4}$$

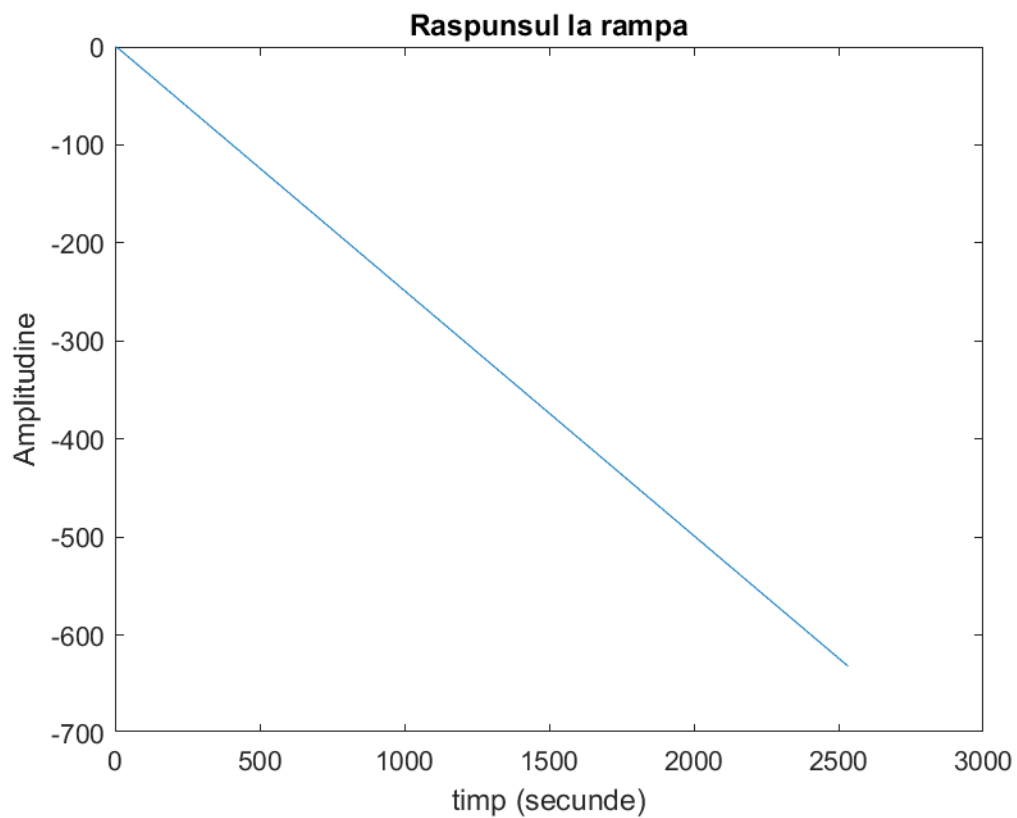


Figure 10: Raspunsul la rampa

## 10 Performante circuit si grafice sugestive.

### 10.1 Performante in regim tranzitoriu.

Plecam de la functia de transfer:

$$H(s) = \frac{-\frac{1}{22}s^2}{s^3 + \frac{4}{22}s^2} = \frac{-\frac{1}{22}}{s + \frac{4}{22}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{22}{4}s + 1}$$

Se poate observa ca este un sistem de ordin I, de tipul  $\frac{K}{Ts+1}$ , deci avem urmatoorii parametrii:

\*Coeficientul de proportionalitate:  $K = -\frac{1}{4}$ ,

\*Perioada de timp este:  $T = \frac{22}{4}$  secunde,

\*Timpul de raspuns  $t_r \approx 4T = 4 * \frac{22}{4} = 22$  secunde.

Din nefericire, fiind un sistem de gradul I, nu avem suprareglaj, factor de amortizare, pulsatie naturala, pulsatie oscilatiilor.

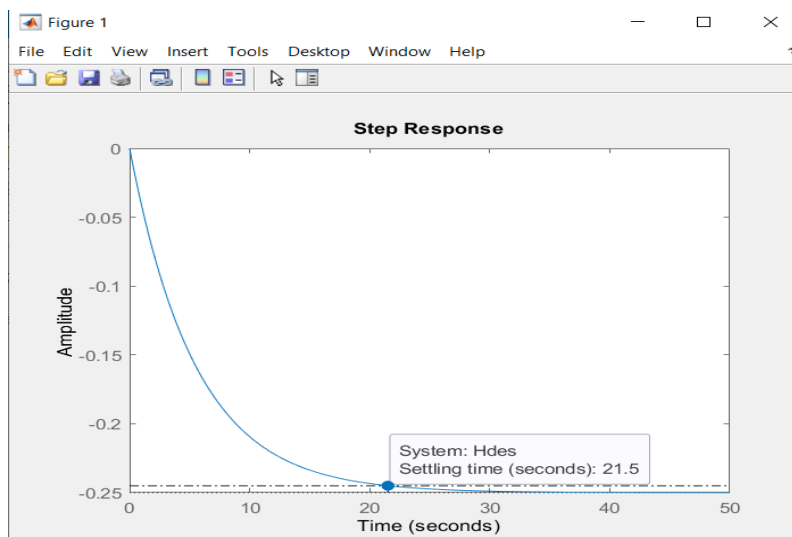


Figure 11: Raspunsul la treapta

Se poate observa in graficul de mai jos ca timpul de raspuns este 21.5 secunde si cum sistemul se stabilizeaza in -0.25, avand un semnal de intrare treapta, se poate observa ca semnalul este amplificat cu "-0.25", deci factorul de proportionalitate este  $K=-0.25$

### 10.2 Performante in regim stationar.

#### 10.2.1 Determinare eroare la pozitie.

$$e_{ssp} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (u(t) - y(t)) = \lim_{s \rightarrow +0} s(U(s) - Y(s)) = \lim_{s \rightarrow +0} s \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s} H(s) \right) = 1 - H(0)$$

$$e_{ssp} = 1 - \frac{-\frac{1}{22}}{0 + \frac{4}{22}} = 1 + \frac{1}{4}$$



$$e_{ssp} = 1.25$$

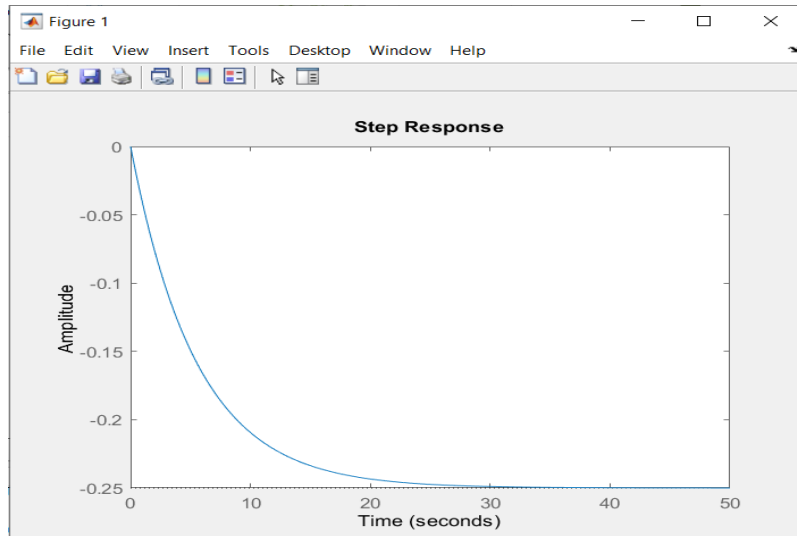


Figure 12: Raspunsul la treapta

Se poate observa mai jos ca eroarea la pozitie este 1.25 din cauza ca dinstanta de la 1 la  $y_{st} = 1.25$ .

### 10.2.2 Determinare eroare la viteza.

Avand in vedere faptul ca eroarea la pozitie este diferita de 0, eroarea la viteza va fi  $+\infty$  sau  $-\infty$ .

$$e_{ssv} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (u(t) - y(t)) = \lim_{s \rightarrow +0} s(U(s) - Y(s)) = \lim_{s \rightarrow +0} s \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} H(s) \right) = \lim_{s \rightarrow +0} s \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} * \frac{\frac{-1}{22}}{s + \frac{4}{22}} \right)$$

$$e_{ssv} = \lim_{s \rightarrow +0} s \left( \frac{s + \frac{4}{22} + \frac{1}{22}}{s^2 \left( s + \frac{4}{22} \right)} \right) = \lim_{s \rightarrow +0} \left( \frac{s + \frac{5}{22}}{s \left( s + \frac{4}{22} \right)} \right)$$

$$e_{ssv} = +\infty$$

Se poate observa ca cele doua linii nu sunt paralele, se duc in directii diferite, se separa, deci eroarea la viteza va fi infinita.

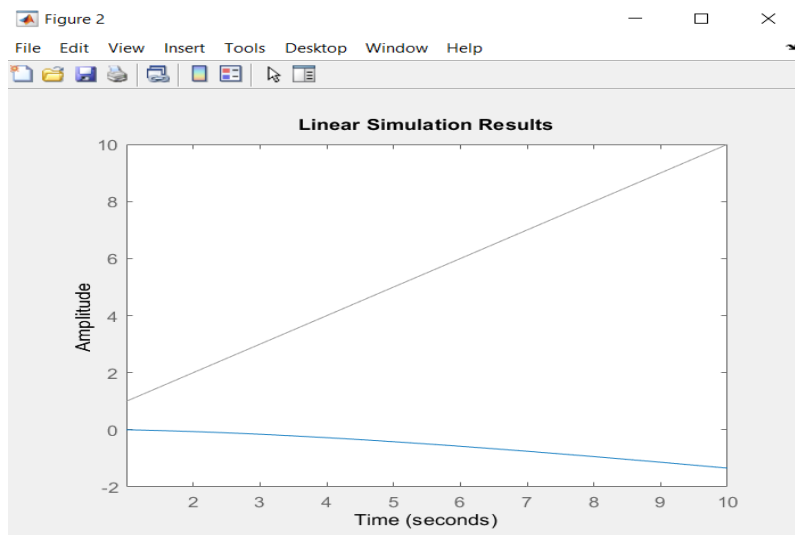


Figure 13: Raspunsul la rampa

## 11 Analiza sistem de reglare cu regulator proportional.

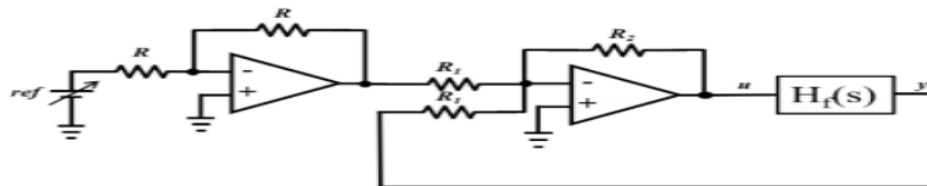
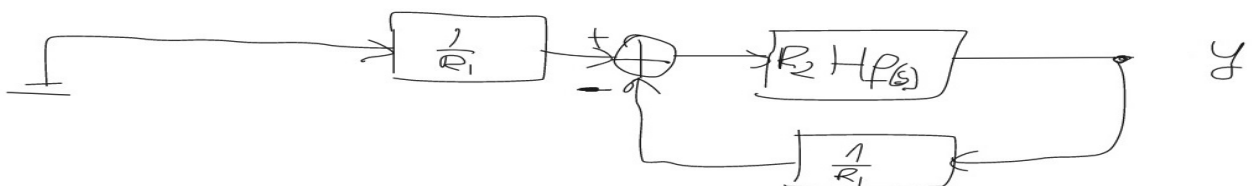
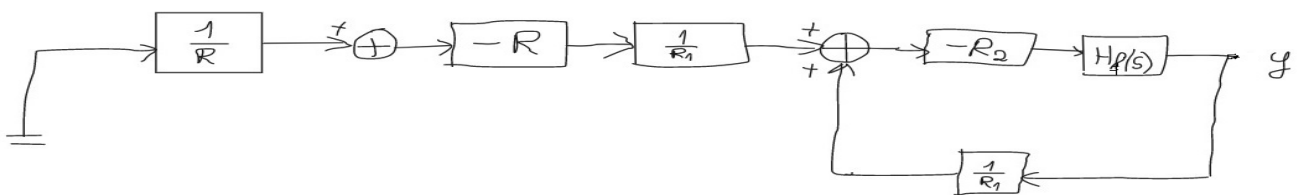


Figure 14: Structura unui sistem de reglare cu regulator proportional.

### 11.1 Functie de transfer bucla inchisa.

Rezolvam sistemul folosind schema bloc.



Dupa calculele de mai sus se poate observa:

$$* H_d = R_2 * H_f(s)$$

$$* H_r = \frac{1}{R_1}$$

$$* H_{des} = \frac{R_2}{R_1} * H_f(s)$$

$$* H_0 = \frac{R_2 * H_f(s)}{1 + \frac{R_2}{R_1} H_f(s)} = \frac{R_2 * \frac{-\frac{1}{22}}{s + \frac{4}{22}}}{1 + \frac{R_2}{R_1} \frac{-\frac{1}{22}}{s + \frac{4}{22}}} - \text{Sistemul in bucla inchisa}$$

## 11.2 Analiza locului radacinilor in functie de $\frac{R_2}{R_1}$ .

Pentru sistemul de mai sus, considerand  $k = \frac{R_2}{R_1}$  am putea spune ca:

$$H_{des} = \frac{-\frac{1}{22}}{s + \frac{4}{22}}$$

Se poate observa  $k' < 0$ .

Polii sistemului sunt:  $\hat{s}_1 = -\frac{4}{22}$ . Sistemul nu are zerouri.

\* Excesul de poli-zerouri:  $e = 1 - 0 = 1$ ,

\* Centrul de greutate  $\sigma_a = \frac{-4}{22}$ ,

\* Unghiul de plecare al asimptotei:  $\Phi = \left\{ \frac{2\pi}{1} = 0 \right\}$

\*  $k' < 0$ , in dreapta lui  $\hat{s}_1$  avem numar par de singularitati (0), deci locul radacinilor se afla in dreapta, in stanga o sa fie interzis.

\*  $\frac{R_2}{R_1}$  astfel incat sa gasim o valoare unde s-ar desprinde/apropria polii daca am fi avut mai multi:

$$\begin{cases} 1 + \frac{R_2}{R_1} * H_{des} = 0 \\ \frac{d}{ds} H_{des}(s) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{ds} * \frac{-\frac{1}{22}}{s + \frac{4}{22}} = 0 \Leftrightarrow \frac{0 - (-\frac{1}{22})}{s + \frac{4}{22}} = 0 \end{cases}$$

Se poate observa ca din a doua relatie nu se poate gasi un pol, deci nu exista  $\frac{R_2}{R_1}$  pentru care s-ar putea desprinde/apropria polii, ceea ce este corect mai ales prin faptul ca noi avem un singur pol.

\* Determinare  $\frac{R_2}{R_1}$  pentru care polul nostru este pe axa imaginara::

$$1 + \frac{R_2}{R_1} * H_{des} = 0$$

$$1 + \frac{R_2}{R_1} * \frac{-\frac{1}{22}}{s + \frac{4}{22}} = 0 \Leftrightarrow s + \frac{4}{22} - \frac{1}{22} * \frac{R_2}{R_1} = 0$$

Tabel Routh-Hurwitz:

$$\begin{array}{c|c} \lambda^1 & 1 \\ \lambda^0 & \frac{1}{22} * \left( 4 - \frac{R_2}{R_1} \right) \end{array}$$

Tabel semn:

	$\frac{R_2}{R_1} < 4$	$\frac{R_2}{R_1} > 4$
$\lambda^1$	+	+
$\lambda^0$	+	-

Se poate deduce astfel ca pentru  $\frac{R_2}{R_1} = 4$ , polul nostru se afla la limita de stabilitate fiind pe axa imaginara.

**\* Regimuri si moduri:**

$\frac{R_2}{R_1} \in (0, 4)$  - regim aperiodic amortizat cu modul:  $e^{\hat{s}_1 t}$

$\frac{R_2}{R_1} = 4$  - regim aperiodic amortizat, BIBO instabil cu modul:  $e^{0t} = 1$

$\frac{R_2}{R_1} \in (4, +\infty)$  - regim aperiodic neamortizat cu modul:  $e^{\hat{s}_1 t}$

**\* Sensibilitate:** Sistemul are o sensibilitate mare din cauza ca se schimba regimul de functionare, din stabil devine instabil, fiind cea mai mare parte instabil

### 11.3 Determinare performante in functie de $\frac{R_2}{R_1}$ .

Sistemul este de ordin I, deci nu o sa avem suprareglaj.

Incercare reducere timp de raspuns cu 25%:

$$\text{timp nou redus: } t'_r = 22 * \frac{75}{100} = 16.5 \text{ secunde.}$$

$$\frac{4}{Re\{\hat{s}\}} = 16.5 \Rightarrow Re\{s\} = \frac{4}{16.5} = 0.242;$$

Teoretic am avea nevoie de un pol in "-0.242", pentru a reduce timpul cu 25%, doar ca acest pol nu se afla pe locul radacinilor ă, deci nu putem sa reducem timpul de raspuns cu 25%.

Din cate am calculat, polul nostru se indreapta spre infinit, deci timpul de raspuns cel mai scurt ar fi in  $\frac{R_2}{R_1} = 0$ , fix la inceput adică aproximativ 22 secunde.

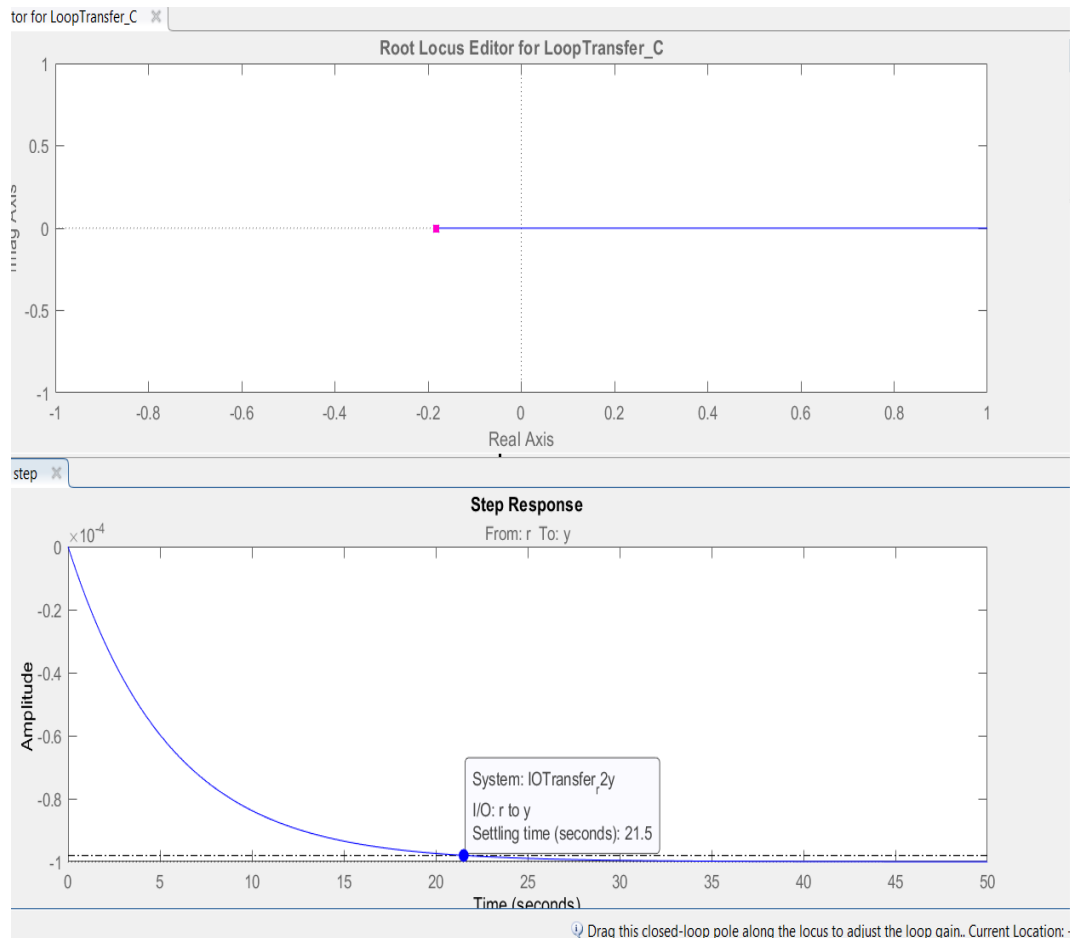


Figure 15: timp de răspuns minim

## 12 Analiza sistem de reglare cu regulator de tip Lead/Lag.

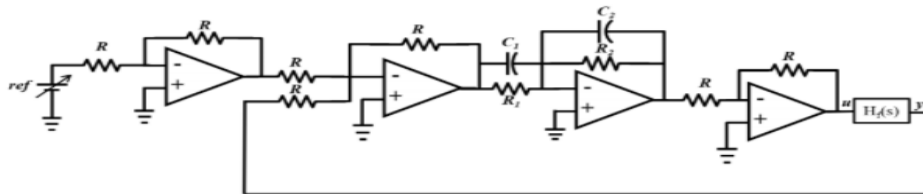


Figure 16: Structura unui sistem de reglare cu regulator de tip Lead-Lag.

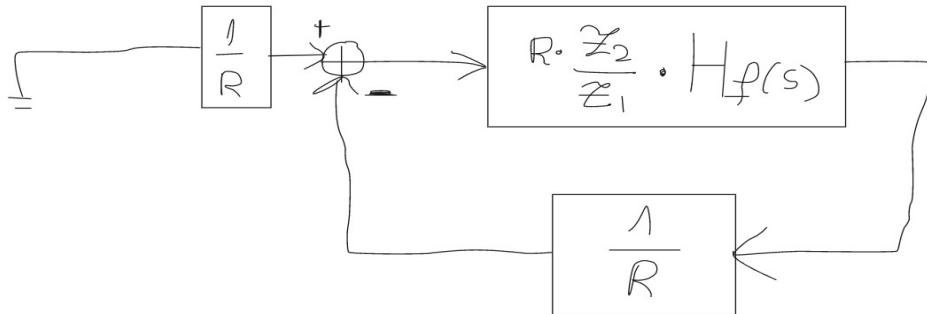
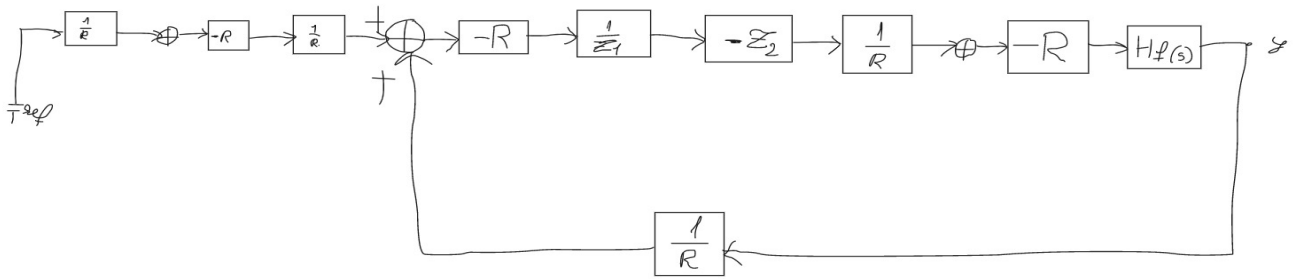
### 12.1 Funcție de transfer a regulatorului.

Rezolvăm sistemul folosind schema bloc, considerând  $z_1$  conexiunea paralelă dintre  $C_1$  și  $R_1$  și  $z_2$  conexiunea paralelă dintre  $R_2$  și  $C_2$ :

Dupa calculele de mai sus se poate observa:

$$* H_d = R * \frac{z_2}{z_1} * H_f(s)$$

$$* H_r = \frac{1}{R}$$



miro

$$* H_{des} = \frac{z_2}{z_1} * H_f(s)$$

$$z_1 = R_1 || C_1 = \frac{R_1 * \frac{1}{sC_1}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1}$$

$$z_2 = R_2 || C_2 = \frac{R_2 * \frac{1}{sC_2}}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{R_2}{R_2 C_2 s + 1}$$

Deci vom avea funcția de transfer a regulatorului:

$$* H_R = R * \frac{z_2}{z_1} = R * \frac{R_2(R_1 C_1 s + 1)}{R_1(R_2 C_2 s + 1)} = \frac{RR_2}{R_1} * \frac{(R_1 C_1 s + 1)}{(R_2 C_2 s + 1)}$$

Unde coeficientul de proportionalitate este,  $K = \frac{RR_2}{R_1}$   
 Și perioada te timp,  $T_1 = R_1 C_1$ ,  $T_2 = R_2 C_2$

## 12.2 Funcția de transfer a sistemului.

Daca ne uităm peste schema de mai sus putem extrage:

$$* H_r = \frac{1}{R}$$

$$* H_{des} = \frac{R_2(R_1 C_1 s + 1)}{R_1(R_2 C_2 s + 1)} * H_f(s) = \frac{R_2(R_1 C_1 s + 1)}{R_1(R_2 C_2 s + 1)} * \frac{-\frac{1}{s+2}}{s+\frac{4}{22}}$$

$$* H_0 = \frac{Hd}{1+H_{des}} = \frac{R_2 \frac{R_1 C_1 s+1}{R_1(R_2 C_2 s+1)} * \frac{-\frac{1}{22}}{s+\frac{4}{22}}}{1 + \frac{R_2(R_1 C_1 s+1)}{R_1(R_2 C_2 s+1)} * \frac{-\frac{1}{22}}{s+\frac{4}{22}}} - \text{fdt a sistemului în buclă închisă.}$$

Funția de transfer a sistemului este:

$$H(s) = \frac{1}{R} * H_0 = \frac{\frac{R_2(R_1 C_1 s+1)}{R_1(R_2 C_2 s+1)} * \frac{-\frac{1}{22}}{s+\frac{4}{22}}}{1 + \frac{R_2(R_1 C_1 s+1)}{R_1(R_2 C_2 s+1)} * \frac{-\frac{1}{22}}{s+\frac{4}{22}}}$$

### 12.3 Analiza locului radacinilor în functie de un T.

Analiza se va face după  $T_2$ , rescriem funcția de transfer în buclă închisă astfel încât să puntem  $T_2$  sub forma de "k"

$$H_0 = \frac{R_2 \frac{R_1 C_1 s+1}{R_1(R_2 C_2 s+1)} * \frac{-\frac{1}{22}}{s+\frac{4}{22}}}{1 + \frac{R_2(R_1 C_1 s+1)}{R_1(R_2 C_2 s+1)} * \frac{-\frac{1}{22}}{s+\frac{4}{22}}} = \frac{R_2 \frac{T_1 s+1}{R_1(T_2 s+1)} * \frac{-\frac{1}{22}}{s+\frac{4}{22}}}{1 + \frac{R_2(T_1 s+1)}{R_1(T_2 s+1)} * \frac{-\frac{1}{22}}{s+\frac{4}{22}}} = \frac{RR_2(T_1 s+1) * (-\frac{1}{22})}{R_1(T_2 s+1) * (s+\frac{4}{22}) + R_2(T_1 s+1) * \frac{-1}{22}}$$

$$H_0 = \frac{RR_2(T_1 s+1) * \frac{-1}{22}}{T_2(R_1 s^2 + \frac{4s}{22}) + R_1 s + \frac{4}{22} + R_2(T_1 s+1) * \frac{-1}{22}}$$

$$H_0 = \frac{\frac{RR_2(T_1 s+1) * \frac{-1}{22}}{T_2(R_1 s^2 + \frac{4s}{22})}}{1 + \frac{1}{T_2} * \frac{R_1 s + \frac{4}{22} + R_2(T_1 s+1) * \frac{-1}{22}}{R_1 s^2 + \frac{4s}{22}}}$$

Vom lucra cu următoarele seturi de valori:

$$R = 1\Omega, R_1 = 1\Omega, R_2 = 3.3\Omega, C_1 = 5.6F$$

Cu toate că un condensator cu o capacitate de 5.6F este greu de găsit, putem să legăm mai multe condensatoare în paralel pentru a ajunge la acea capacitate.

Deci vom avea următoarea funcție:

$$H_0 = \frac{\frac{1 * 3.3(5.6s+1) * \frac{-1}{22}}{T_2(s^2 + \frac{4s}{22})}}{1 + \frac{1}{T_2} * \frac{s + \frac{4}{22} + 3.3(5.6s+1) * \frac{-1}{22}}{s^2 + \frac{4s}{22}}}$$

$$H_0 = \frac{\frac{(18.48s+3.3) * \frac{-1}{22}}{T_2(s^2 + \frac{4s}{22})}}{1 + \frac{1}{T_2} * \frac{s + \frac{4}{22} + (18.48s+3.3) * \frac{-1}{22}}{s^2 + \frac{4s}{22}}}$$

Se poate observa că:

$$H'_{des} = \frac{s + \frac{4}{22} + (18.48s + 3.3) * \frac{-1}{22}}{s^2 + \frac{4s}{22}} = \frac{0.145s + 0.03182}{s^2 + 0.1818s}$$

Singularitățile sistemului sunt:

$$\begin{aligned}\hat{s}_{o1} &= 0, \\ \hat{s}_{o2} &= -0.1818, \\ \dot{s}_{o1} &= -0.2194\end{aligned}$$

**Analiza LR:**

\*  $k' > 0$  se poate analiza astfel, pentru polul din 0, in dreapta lui nu avem locul rădăcinilor pentru ne trebuie număr par de singularități și avem doar număr par(0). În dreapta primului pol Avem LR pentru că avem un număr impar de singularități(1). În dreapta față de zero avem un număr par de singularități deci nu o sa avem LR, iar în stânga lui o să avem, deoarece ar fi practic (3) singularități, adică un număr impar.

\* Excesul poli-zero:  $2-1 = 1$ . Deci avem o asimptotă.

\* Centrul de greutate:  $\sigma = \frac{0.1818+0-(-0.2194)}{2-1} = 0.0376$

\* Unghi plecare asimptotă:  $\Phi \in \left\{ \frac{(2-1)*\pi}{1} = \pi \right\}$

\* Determinare unghi desprindere/apropiere:

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{T_2} * H_{des} = 0 \\ \frac{d}{ds} * H_{des} = 0 \Leftrightarrow \frac{0.145*(s^2+0.1818s)-(0.145s+0.03182)*(2s+0.1818)}{(s^2+0.1818s)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-0.145s^2-0.1186s-0.03182}{(s^2+0.1818s)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0.145s^2 - 0.0636s - 0.0058 = 0$$

$$\hat{s}_{o1} = -0.3093 \in LR$$

$$\hat{s}_{o2} = -0.1293 \in LR$$

$$\Rightarrow k_{desprindere} = \frac{-1}{H_{des}(-0.1293)} = 0.52 \Rightarrow \frac{1}{T_2} = 0.52 \Rightarrow R_2 C_2 = \frac{1}{0.52} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{0.52 * 3.3} = 0.58F$$

$$\Rightarrow k_{apropiere} = \frac{-1}{H_{des}(-0.3093)} = 3.02 \Rightarrow \frac{1}{T_2} = 3.02 \Rightarrow R_2 C_2 = \frac{1}{3.02} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{3.3 * 3.02} \Rightarrow C_2 = 0.1F$$

\* Determinare punct intersecție cu axa imaginară:

$$1 + k * H_{des}(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + k * \frac{0.145s + 0.03182}{s^2 + 0.1818s} = 0 \Leftrightarrow s^2 + 0.1818s + k * 0.145s + k * 0.03182 = 0$$

**Tabel Routh-Hurwitz:**

$\lambda^2$	1	$0.03182k + 0.145$
$\lambda^1$	$0.1818 + 0.145k$	0
$\lambda^0$	$b_1 = 0.03182k + 0.145$	0

Știind că  $k = \frac{1}{T_2} > 0$ , se poate observa că nu există o schimbare de semn, deci niciun pol nu schimbă semiplanul, deci nu avem un punct de intersecție cu axa imaginară

\* Determinare unghiuri pornire poli și sosire zero:uri:



$$\underline{\angle s + \frac{0.03182}{0.145}} - \underline{\angle s + 0} - \underline{\angle s + 0.1818} = (2l - 1)\pi$$

**\* Pentru  $\hat{s}_{o1} = 0$**

$$\underline{\angle \frac{0.03182}{0.145}} - \phi_{\hat{s}_{o1}} - \underline{\angle 0.1818} = (2l - 1)\pi$$

$$0 - \phi_{\hat{s}_{o1}} - 0 = (2l - 1)\pi$$

$$\phi_{\hat{s}_{o1}} = \pi$$

**\* Pentru  $\hat{s}_{o2} = -0.1818$**

$$\underline{\angle 0.0376} - \underline{\angle -0.1818} - \phi_{\hat{s}_{o2}} = (2l - 1)\pi$$

$$0 - \pi - \phi_{\hat{s}_{o2}} = (2l - 1)\pi$$

$$\Rightarrow \phi_{\hat{s}_{o2}} = 0$$

**\* Pentru  $\dot{s}_{o1} = -0.2194$**

$$\phi_{\dot{s}_{o1}} - \underline{\angle 0.2194} - \underline{\angle -0.0376} = (2l - 1)\pi$$

$$\phi_{\dot{s}_{o1}} - \pi - \pi = (2l - 1)\pi$$

$$\Rightarrow \phi_{\dot{s}_{o1}} = \pi$$

**\* Sistemul este stabil pentru orice  $T_2 > 0$**

**\* Regimuri și moduri:**

$$\frac{1}{T_2} \in (0, 0.52) \Leftrightarrow R_2 C_2 \in (\frac{1}{0.52}, +\infty) \Leftrightarrow C_2 \in (0.58, +\infty)$$

**Regim aperiodic amortizat cu modurile:**  $e^{\hat{s}_{o1}}, e^{\hat{s}_{o2}}$

$$\frac{1}{T_2} = 0.52 \Leftrightarrow C_2 = 0.58F$$

**Regim aperiodic critic amortizat cu modurile:**  $e^{\hat{s}_{o1}}, t * e^{\hat{s}_{o1}}$

$$\frac{1}{T_2} \in (0.52, 3.02) \Leftrightarrow C_2 \in (0.1F, 0.58F)$$

**Regim oscilant amortizat cu modurile:**  $e^{Re\{\hat{s}_{o1}\}} * Im\{\hat{s}_{o1}\}$

$$\frac{1}{T_2} = 3.02 \Leftrightarrow C_2 = 0.1F$$

Regim aperiodic critic amortizat cu modurile:  $e^{\hat{s}_{o1}}, t * e^{\hat{s}_{o1}}$

$$\frac{1}{T_2} \in (3.02, +\infty) \Leftrightarrow C_2 \in (0, 0.1F)$$

Regim aperiodic amortizat cu modurile:  $e^{\hat{s}_{o1}}, e^{\hat{s}_{o2}}$

\* Sistemul este stabil pentru orice  $T_2$

\* Sistemul are o sensibilitate mică, deoarece nu își schimbă stabilitatea, iar polul dominant rămâne stabil într-un punct.

## 12.4 Determinare performante in functie de un T fixat

Pulsația de oscilație maximă este 0.0908, la un gain de 1.82, deci  $\frac{1}{T_2} = 1.82 \Leftrightarrow T_2 = \frac{1}{1.82} \Leftrightarrow C_2 = 0.166F$

Pulsația de oscilație minimă este 0, deoarece pleacă dintr-un pol dominant real, ce nu are oscilație. Deci am avea  $\frac{1}{T_2} = 0$ , deci am avea nevoie de un  $T_2 \rightarrow \infty$

Pulsația naturală maximă este: 0.31 pentru un gain 3.03. Deci am avea nevoie de un  $T_2 = \frac{1}{3.03} = 0.330$  Pulsația naturală minimă este: 0, deoarece polul dominant real este la limita de stabilitate.

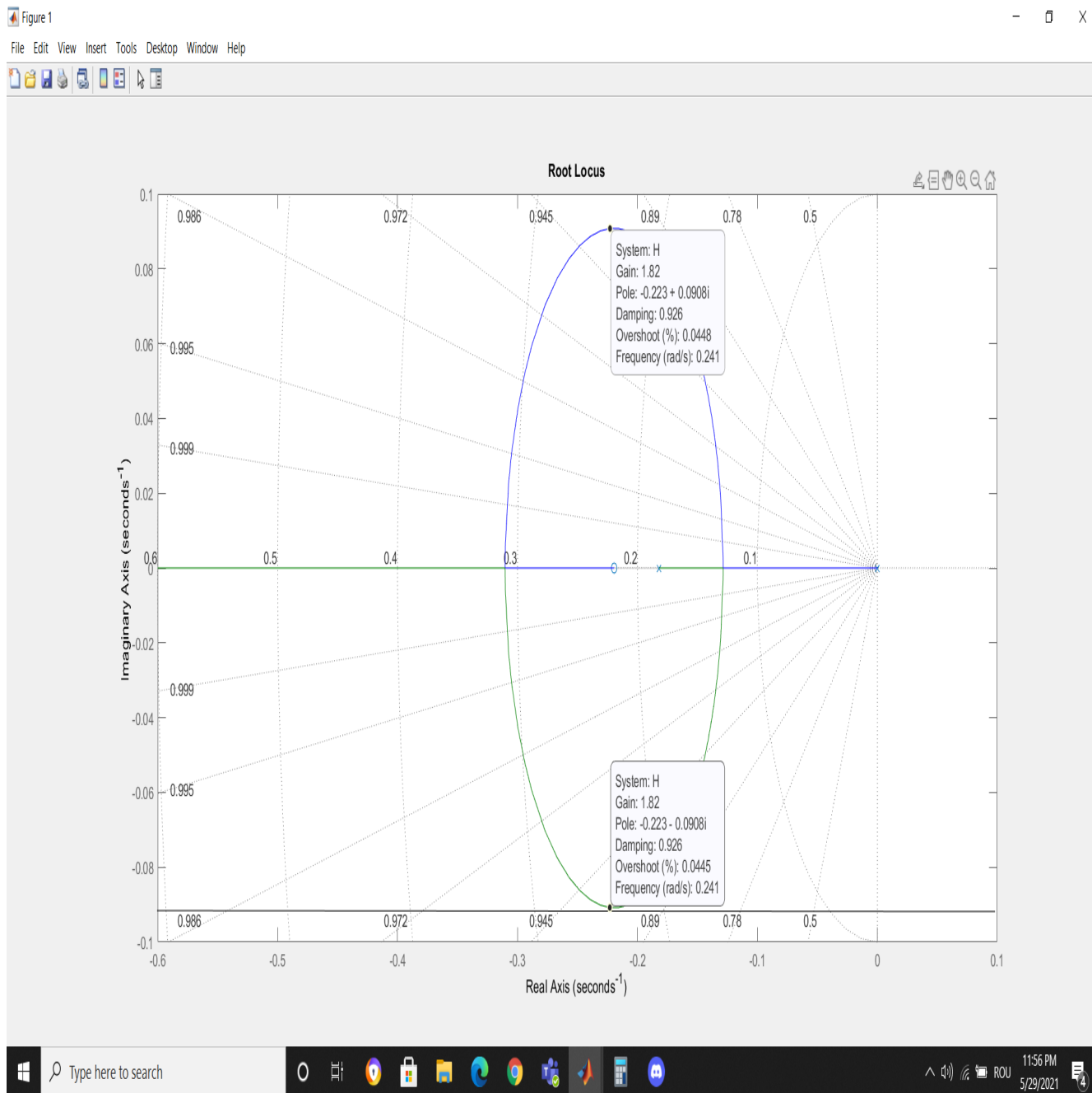


Figure 17: Pulsația de oscilație maximă.

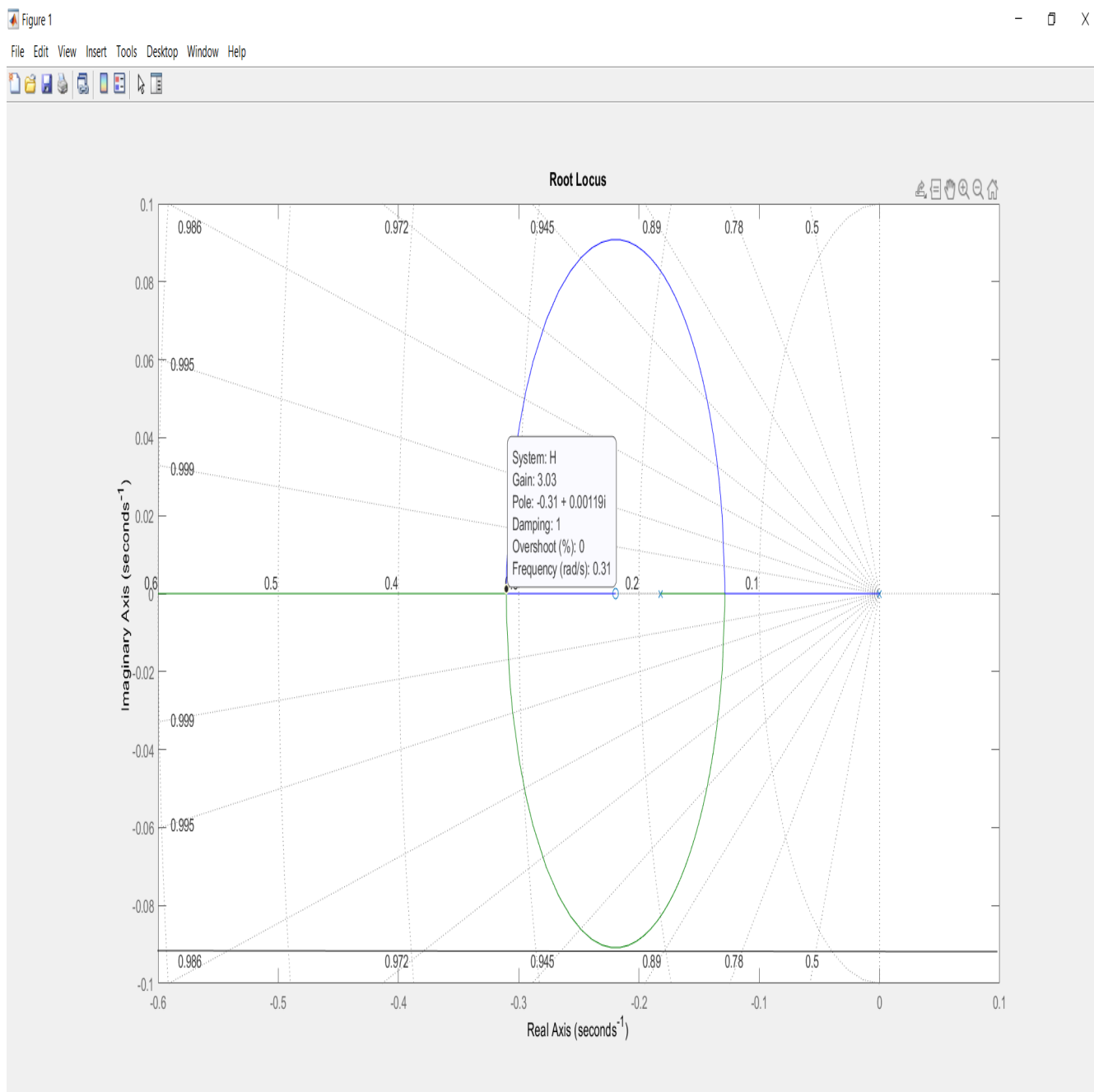


Figure 18: pulsația naturală maximă