7.1 Fourier积分与Fourier积分定理

若一个以T为周期函数$f_T(t)$在$[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$上满足Dirichlet条件，

即 (1)除去有限个第一类间断点外，处处连续；

(2)分段单调，单调区间的个数有限.

则$f_T(x)$的Fourier级数$f_T(t) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)]$

在$[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$上处处收敛，且在$f_T(t)$的连续点处级数收敛于$f_T(t)$，其中

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \qquad a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\,dt$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

用Euler公式：$\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \qquad \sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$

有 $f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{in\omega t}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-in\omega t}\right)$

记 $c_0=\frac{a_0}{2} \qquad c_n=\frac{a_n-ib_n}{2} \qquad c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2} \quad (n=1,2,\cdots)$

则 $f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inwt}$

其中 $C_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)dt$

$C_n=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-inwt}dt \quad (n=1,2,3\cdots)$

$C_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{inwt}dt \quad (n=1,2,3\cdots)$

可统一写为 $C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-inwt}dt \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

若记 $w_n=nw\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

则有 $f_T(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-iw_nt}dt\right]e^{iw_nt}$

当 $T\to+\infty$ 时，$f_T(t)$ 转化为 $f(t)$ 即 $\lim_{T\to+\infty} f_T(t)=f(t)$

于是 $f(t)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-iw_nt}dt\right]e^{iw_nt}$

记 $F_T(w_n)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-iw_nt}dt$

有 $f(t)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_T(w_n)e^{-iw_nt}$

相距两点之间距离为 $\Delta\omega_n = \omega = \frac{2\pi}{T}$ 或 $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega_n}$

则 $f(t) = \lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} [F_T(\omega_n) e^{-i\omega_n t}] \Delta\omega_n$

$$= \lim_{\Delta\omega_n\to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [F_T(\omega_n) e^{-i\omega_n t}] \Delta\omega_n$$

有 $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt\right] e^{i\omega t} d\omega$

Fourier积分定理:

若定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数$f(t)$满足以下条件:

(1) $f(t)$在任一有限区间上满足Dirichlet条件

(2) $f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积,即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$

则Fourier积分收敛,且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt\right] e^{i\omega t} d\omega = \begin{cases} f(t) & t\text{为}f(t)\text{连续点、} \\ \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & t\text{为}f(t)\text{第一类间断点、} \end{cases}$$

例: $f(t)=\begin{cases} 0, & -\infty < t \leq -\frac{T}{2} \\ E, & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0, & \frac{T}{2} \leq t < +\infty \end{cases}$ $(T, E > 0)$, 求$f(t)$的Fourier积分

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt\right] e^{i\omega t} d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E e^{-i\omega t} dt\right] e^{i\omega t} d\omega$$

$$=\frac{E}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega} e^{i\omega t} d\omega$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\, d\tau + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\, d\tau\right] d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\, d\tau\right] d\omega$$

记 $a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\, dt$

$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\, dt$

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}\left[a(\omega)\cos\omega t+b(\omega)\sin\omega t\right] d\omega$$

例：求 $f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-\beta t} & t>0\end{cases}$ $(\beta>0)$ 的Fourier积分公式的三角形式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{+\infty} e^{-\beta\tau}\cos\omega(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t+\frac{\omega}{\beta^2+\omega^2}\sin\omega t$$

$$\therefore f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega$$

7.2 Fourier变换与Fourier逆变换

定义：

设 $f(t)$ 满足Fourier积分定理条件，称 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ 为 $f(t)$ 的Fourier变换式，记 $F(\omega)=F[f(t)]$，称 $F(\omega)$ 为 $f(t)$ 的Fourier变换，称 $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ 为Fourier逆变换式，

$f(t)=F^{-1}[F(\omega)]$，称 $f(t)$ 为 $F(\omega)$ 的Fourier逆变换

例: $f(t)=\begin{cases}\frac{2E}{\tau}(t+\frac{\tau}{2}) & -\frac{\tau}{2}<t<0\\ -\frac{2E}{\tau}(t-\frac{\tau}{2}) & 0\le t<\frac{\tau}{2}\\ 0 & |t|\ge\frac{\tau}{2}\end{cases}$ 的Fourier变换及其积分表达式

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\tau}{2}}\left[-\frac{2E}{\tau}(t-\frac{\tau}{2})\cos\omega t\right]dt$$

$$=\frac{8E}{\tau\omega^2}\sin^2\frac{\omega\tau}{4}$$

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{8E}{\pi\tau}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{\omega\tau}{4}\cos\omega t}{\omega^2}d\omega$$

7.3 单位脉冲函数

定义:

称一个函数为δ函数,并记之为δ(t),若它满足 $\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq0\\ \infty & t=0\end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

定义:

设依赖于参数λ的函数族$\{\varphi_\lambda(t)\}$中的每一个函数均在(a,b)内有定义,

若$\forall$在(a,b)内连续的函数$f(t)$,恒有$\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0}\int_a^b f(t)\varphi_\lambda(t)dt=\int_a^b f(t)\varphi(t)dt$

成立,则称$\{\varphi_\lambda(t)\}$在(a,b)内,当$\lambda\to\lambda_0$时弱收敛于$\varphi(t)$,或称$\varphi(t)$与$\{\varphi_\lambda(t)\}$

在(a,b)内,当$\lambda\to\lambda_0$的弱极限,记$\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0}\varphi_\lambda(t)\overset{\text{弱}}{=\!=}\varphi(t)\quad a<t<b$ 或

$\varphi_\lambda(t)\xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{\text{弱}}\varphi(t)\quad a<t<b$

例: $\delta(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{\lambda} & 0\le t<\lambda\ (\lambda>0)\\ 0 & t>\lambda\end{cases}$,求证$\lim\limits_{\lambda\to 0}\delta_\lambda(t)\overset{\text{弱}}{=\!=}\delta(t)$

$\forall f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,恒有$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta_\lambda(t)dt=\int_0^\lambda f(t)\frac{1}{\lambda}dt=\frac{1}{\lambda}f(\theta\lambda)\lambda$
$(0<\theta<1)$

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta_\lambda(t)dt=\lim\limits_{\lambda\to 0}f(\theta\lambda)=f(0)$

$\because f(t)$在$t=0$处连续 $\therefore\forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0$ 当$|t|<\eta$时,有$f(0)-\varepsilon<f(t)<f(0)+\varepsilon$

$\therefore (f(0)-\varepsilon)\delta(t)<f(t)\delta(t)<(f(0)+\varepsilon)\delta(t)$

$$\therefore (f(0)-\varepsilon)\int_{-\eta}^{\eta}\delta(t)dt<\int_{-\eta}^{\eta}f(t)\delta(t)dt<(f(0)+\varepsilon)\int_{-\eta}^{\eta}\delta(t)dt$$

有 $\int_{-\infty}^{-\eta}\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{-\eta}f(t)\delta(t)dt=\int_{\eta}^{+\infty}\delta(t)dt=\int_{\eta}^{+\infty}f(t)\delta(t)dt=0$

$$\therefore f(0)-\varepsilon=(f(0)-\varepsilon)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt<\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)dt<(f(0)+\varepsilon)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=f(0)+\varepsilon$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)dt=f(0)$$

$$\therefore \lim_{\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta_\lambda(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)dt$$

$$\therefore \lim_{\lambda\to 0}\delta_\lambda(t)\overset{\text{弱}}{=}\delta(t)$$

定义:

设 $f(t)$ 为定义在实轴上的实值函数，即 $\forall t\in\mathbb{R}$，$f(t)\in\mathbb{R}$，令

$\operatorname{supp}f=\{t\in\mathbb{R},\ f(t)\neq 0\}$ 的闭包，称实数集合 $\operatorname{supp}f$ 为 f 的支集

定义:

C^{∞}表示在实轴上处处有定义且无限次连续可微函数的全体，若$f\in C^{\infty}$，且f的支集$\operatorname{supp} f$总是一个有界闭集，称f为一个具有紧支集的C^{∞}函数，其全体记作C_0^{∞}.

定义:

$\forall f(t)\in C_0^{\infty}$，定义$\delta(t)$的导数为$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)f(t)\,dt=-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f'(t)\,dt$

同样有$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t)f(t)\,dt=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f^{(n)}(t)\,dt$，$n\in N$

定义:

若对$\forall$在$(-\infty,+\infty)$上连续函数$f(t)$，恒有$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\varphi(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\psi(t)\,dt$

则称$\varphi(t)$与$\psi(t)$在弱意义下相等，记 $\varphi(t) \overset{弱}{=} \psi(t)$ 或简记 $\varphi(t)=\psi(t)$

性质:

1. 设$f(t)$为任意连续函数，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)$

2. 设$a\in\mathbb{R}$，$a\neq0$，则 $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$

3. 设$n\in\mathbb{N}$，则 $\delta^{(n)}(-t)=(-1)^n\delta^{(n)}(t)$，其中$\delta^{(n)}(-t)$表示将$\delta(-t)$关于$-t$求n阶导

系:

当n为偶数时，$\delta^{(n)}(t)$为偶函数；当n为奇数时，$\delta^{(n)}(t)$为奇函数

Specially, $\delta'(t)$为奇函数　$\delta(t)$为偶函数

4. 设$g(t)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，则 $g(t)\delta(t-t_0)=g(t_0)\delta(t-t_0)$　$t_0\in(-\infty,+\infty)$

5. 设 $f(t)\in C_0^{\infty}$，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t)f(t)dt=(-1)^nf^{(n)}(0)$，

$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t-t_0)f(t)dt=(-1)^nf^{(n)}(t_0)$

7.4 广义 Fourier 变换

有 $F[\delta(t-t_0)]=e^{-i\omega t_0}$ $\quad F^{-1}[e^{-i\omega t_0}]=\delta(t-t_0)$,

称为广义 Fourier 变换

例：证 $sgn(t)=\begin{cases}-1 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$ 的 Fourier 变换为 $\frac{2}{i\omega}$

$$f(t)=F^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{i\omega}e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t+i\sin\omega t}{i\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega-i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\omega}d\omega\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\pi\, sgn(t)=\begin{cases}-1 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases} \qquad \therefore \#$$

$$F(\cos\omega_0 t)=\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$F(\sin\omega_0 t)=i\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$F(e^{-at})=\frac{1}{a+i\omega}$$

7.5 Fourier变换的性质

1. 线性性：

设 $F_1(\omega)=\mathcal{F}[f_1(t)]$，$F_2(\omega)=\mathcal{F}[f_2(t)]$ k_1, k_2为常数，

则 $\mathcal{F}[k_1f_1(t)+k_2f_2(t)]=k_1\mathcal{F}[f_1(t)]+k_2\mathcal{F}[f_2(t)]$

同样 $\mathcal{F}^{-1}[k_1F_1(t)+k_2F_2(t)]=k_1\mathcal{F}^{-1}[F_1(t)]+k_2\mathcal{F}^{-1}[F_2(t)]$

2. 对称性

若已知 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，则有 $\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$

Specially，若$f(t)$为偶函数，则 $\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(\omega)$

例：求 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$

$$f(t)=\begin{cases} E & |t|\le\frac{\tau}{2} \\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases} \quad (\tau>0)$$

有 $F(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ee^{-i\omega t}dt=\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}$

$\because f(t)$ 为偶函数

有 $F[F(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2E}{t}\sin\frac{\tau t}{2}e^{-i\omega t}dt=2\pi f(\omega)$

即：
$$2E\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\frac{\tau t}{2}\cos\omega t}{t}dt=\begin{cases}2\pi E & |\omega|<\frac{\tau}{2}\\ 0 & |\omega|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$$

令 $\omega=0$，$\tau=2$，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\pi \Rightarrow \int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$

3、位移性质

设 $F[f(t)]=F(\omega)$，则 $F[f(t\pm t_0)]=e^{\pm i\omega t_0}F[f(t)]$

$$F^{-1}[F(t\pm t_0)]=e^{\mp i\omega t_0}f(t)$$

系：

设 $F[f(t)]=F(\omega)$，则 $F[f(t)\cos\omega t]=\frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$

$$F[f(t)\sin wt]=\frac{i}{2}[F(w+w_0)-F(w-w_0)]$$

例：求 $f(t)=\begin{cases}E & 0<t<T\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ $(E,T>0)$ 的Fourier变换

$$F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iwt}dt=E\int_0^T e^{iwt}dt=\frac{2E}{w}$$

注意到 $f_1(t)=\begin{cases}E & |t|<\frac{T}{2}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$

$F_1(w)=F[f_1(t)]=\frac{2E}{w}\sin\frac{wT}{2}$ 且 $f(t)=f_1(t-\frac{T}{2})$

$$F(w)=e^{-iw\frac{T}{2}}F[f_1(t)]=\frac{2E}{w}e^{-iw\frac{T}{2}}\sin\frac{wT}{2}$$

4. 坐标缩放性质

设 a 为非零实常数，若 $F[f(t)]=F(w)$，则 $F[f(at)]=\frac{1}{|a|}F(\frac{w}{a})$

5. 乘积定理

记 $F_1(w)=F[f_1(t)]$，$F_2(w)=F[f_2(t)]$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(w)}\,F_2(w)\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(w)\,\overline{F_2(w)}\,dw$$

6. Parseval 定理：

若记 $F(w)=F[f(t)]$，则有 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(w)|^2 dw$

例：求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$

记 $F(w)=\frac{\sin w}{w}$

$\bar{f}(t)=\begin{cases} E & |t|\le\frac{T}{2} \\ 0 & |t|>\frac{T}{2}\end{cases}$ 的 Fourier 变换 $F[\bar{f}(t)]=\frac{2E}{w}\sin\frac{wT}{2}$

若令 $E=\frac{1}{2}$ $T=2$ 有 $f(t)=\begin{cases} \frac{1}{2} & |t|<1 \\ 0 & |t|>1\end{cases}$

$F[f(t)]=\frac{\sin w}{w}=F(w)$

$\therefore$ 有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 w}{w^2}dw=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)dt=2\pi\int_{-1}^{1}(\frac{1}{2})^2dt=\pi$

7.6 卷积

定义:

给定在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$，称由含量变量 t 的广义积分所确定函数 $g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ 为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积，记 $g(t)=f_1(t)*f_2(t)$

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

表明 $f(t)$ 与 $\delta(t-t_0)$ 的卷积等于把 $f(t)$ 延迟了 t_0

卷积的性质：

1. $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$

2. $[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$

3. $[k_1f_1(t)+k_2f_2(t)]*g(t)=k_1f_1(t)*g(t)+k_2f_2(t)*g(t)$

4. 设 $g(t)=f_1(t)*f_2(t)$，则 $f_1(t-\alpha)*f_2(t-\beta)=g(t-\alpha-\beta)$

5. 设 $g(t)=f_1(t)*f_2(t)$，则 $f_1(at)*f_2(at)=\frac{1}{|a|}g(at)\ (a\neq 0)$

6. 卷积定理：

若给定 $f_1(t)$、$f_2(t)$，记 $F_1(\omega)=F[f_1(t)]$，$F_2(\omega)=F[f_2(t)]$，则

$F[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$，$F[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$

Fourier变换的微分定理:

设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$ $n\in\mathbb{N}$, 则有 $\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$, $\mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)]=(-it)^n f(t)$

Fourier 的积分定理:

设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$, 则 $\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau\right]=\frac{F(\omega)}{i\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$

例: 求解 $a x'(t)+b x(t)+c\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau=f(t)$, 其中 $a.b.c\in\mathbb{R}$

且 $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,d\tau=0$

设 $X(\omega)=\mathcal{F}[x(t)]$ $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$

$$a i\omega X(\omega)+bX(\omega)+\frac{c}{i\omega}X(\omega)+c\pi F(0)\delta(\omega)=F(\omega)$$

$$X(0)=\lim_{\omega\to 0}X(\omega)=\lim_{\omega\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\,d\tau=0$$

有 $a i\omega X(\omega)+bX(\omega)+\frac{c}{i\omega}X(\omega)=F(\omega)$

或 $X(\omega)=\dfrac{F(\omega)}{b+i(a\omega-\frac{c}{\omega})}=\dfrac{\omega F(\omega)}{b\omega+i(a\omega^2-c)}$

$\therefore x(t)=F^{-1}[X(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{i\omega t}dt$

7.7 相关函数

定义:

对于两个不同的函数$f_1(t)$与$f_2(t)$,则$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t+\tau)dt$称为$f_1(t)$与$f_2(t)$的互相关函数,记作$R_{12}(\tau)$,即$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t+\tau)dt$

$R_{12}(t)=f_1(-t)*f_2(t)$

相关函数性质:

1. $R_{12}(\tau)=R_{21}(-\tau)$

2. $|R_{12}(\tau)|^2 \le R_{11}(0)R_{22}(0)$

记 $F_1(w)=F[f_1(t)]$，$F_2(w)=F[f_2(t)]$，有

$$R_{12}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(w)}F_2(w)e^{iw\tau}dw$$

定义：

$S_{12}(w)=\overline{F_1(w)}F_2(w)$ 为互能量谱密度.

有 $S_{12}(w)=S_{21}(w)$，且 $F[R_{12}(\tau)]=S_{12}(\tau)$ $F^{-1}[S_{12}(w)]=R_{12}(\tau)$

即互能量谱密度与互相关函数构成一个Fourier变换对

定义：

令 $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(t+\tau)dt$ 为 $f(t)$ 的自相关函数

(简称相关函数)，记$R(\tau)$，即 $R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t+\tau)dt$

显然 $R(-\tau)=R(\tau)$ ，$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(w)|^2 e^{iw\tau}dw$

记 $S(w)=|F(w)|^2$ 为$f(t)$能量谱密度，有

$$\mathcal{F}[R(\tau)]=S(w) \qquad \mathcal{F}^{-1}[S(w)]=R(\tau)$$

即 能量谱密度与自相关函数构成 Fourier 变换对

$$F(-w)=\overline{F(w)} \qquad S(-w)=S(w)$$

7.8 Fourier变换的应用

满足 Dirichlet 条件且周期为T的函数$f_T(t)$有三角级数展开式

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$$

其中 $a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\cos n\omega t\,dt \qquad (n=0,1,2,\cdots)$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\sin n\omega t\,dt \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

且 $f_T(t)$ 第 n 次谐波函数 $a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t$ 的振幅为

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \quad (0,1,2,\cdots)$$

其刻画了各次频波的振幅随频率变化的分布情况.这种分布情况在直角坐标系下的图形表示即是所谓的频谱图.

由于 A_n 下标 n 取离散值,决定了它的图形是不连续的,这种频谱称为离散谱.

对非周期函数 $f(t)$,称 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F(\omega)=F[f(t)]$ 为 $f(t)$ 的频谱函数,其模 $|F(\omega)|$ 称为 $f(t)$ 的频谱.它是频率 ω 的连续函数.

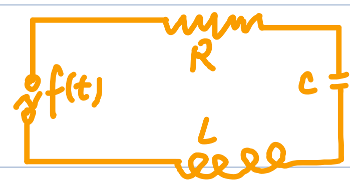
谱线是连续变化的,所以称为连续谱

频谱函数$F(\omega)$不仅其模$|F(\omega)|$为频率ω的函数，其辐角

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt}$$ 也为ω的函数

以下例题涉及物理，欣赏即可

例：求具有$f(t)$的LRC电路(图7.8.5)的电流，其中，L为电感、R为电阻、C为电容、$f(t)$为电动势



设$I(t)$表示电路在t时刻的电流，由Kirchhoff定律$I(t)$适合如下积分、微分方程

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I\,dt=f(t)$$

两端求导

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=f'(t)$$

记$I(\omega)=F[I(t)]$　$F(\omega)=F[f(t)]$，有

$$-L\omega^2 I(\omega)+R(i\omega)I(\omega)+\frac{1}{C}I(\omega)=i\omega F(\omega)$$

$$I(\omega)=\frac{i\omega F(\omega)}{Ri\omega+\frac{1}{C}-L\omega^2}$$

$$\therefore I(t)=F^{-1}[I(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i\omega F(\omega)e^{i\omega t}}{Ri\omega+\frac{1}{C}-L\omega^2}d\omega$$

例：求解热传导的Cauchy问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) & -\infty<x<+\infty \quad t\geq 0\\ u(x,0)=\varphi(x) & -\infty<x<+\infty\end{cases}$$

记 $U(\omega,t)=F[u(x,t)]$，$F(\omega,t)=F[f(x,t)]$

则有 $$\begin{cases}\dfrac{dU(\omega,t)}{dt}=-a\omega^2U(\omega,t)+F(\omega,t) & (1)\\ U(\omega,0)=\Phi(\omega) & (2)\end{cases}$$

$$U(\omega,t)=Ce^{-a^2\omega^2t}+\int_0^t F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$$

由(2)得 $C=\Phi(\omega)$

$$U(\omega,t)=\Phi(\omega)e^{-a^2\omega^2t}+\int_0^t F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$$

注意到 $F^{-1}[e^{-a^2w^2t}]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$

$\therefore F^{-1}[e^{-a^2w^2(t-\tau)}]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}$

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau$$

7.9 多维 Fourier 变换

设 $f(s,t)$ 在 $-\infty<s,t<+\infty$ 内有定义且绝对可积，有

$F(w_1,w_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,s)e^{-i(w_1t+w_2s)}dt\,ds$ 称为 $f(t,s)$ 的二维 Fourier 变换式，记 $F(w_1,w_2)=F^2[f(t,s)]$，同样有

$f(t,s)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w_1,w_2)e^{i(w_1t+w_2t)}dw_1\,dw_2$ 为 $F(w_1,w_2)$ 的二维 Fourier 逆变换式，记 $f(t,s)=F^{-2}[F(w_1,w_2)]$

Commonly, 在 n 维空间中，设 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 在 $-\infty<t_1,t_2,\cdots,t_n<+\infty$ 中有定义，则可定义其的 Fourier 变换及逆变量，

$$F(w_1,w_2,\cdots,w_n)=F^n[f(t_1,\cdots,t_n)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(t_1,\cdots,t_n)e^{-i(w_1t_1+\cdots+w_nt_n)}dt_1\cdots dt_{n-1}dt_n$$

$$f(t_1\cdots t_n)=F^{-n}[F(w_1\cdots w_n)]=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}F(w_1\cdots w_n)e^{i(w_1t_1+\cdots w_nt_n)}dw_1\cdots dw_{n-1}dw_n$$

多维 Fourier 变换的性质：

1. 线性性：

$$F^n\left[\sum_{i=1}^{m}k_if_i(t_1\cdots t_n)\right]=\sum_{i=1}^{m}k_iF_i(w_1,w_2,\cdots,w_n)$$

$$F^{-n}\left[\sum_{i=1}^{m}k_iF_i(w_1\cdots w_n)\right]=\sum_{i=1}^{m}k_if_i(t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

2. 位移性

$$F^n[f(t_1\pm t_1^0,t_2\pm t_2^0,\cdots t_n\pm t_n^0)]=e^{\pm i(t_1^0w_1+t_2^0w_2+\cdots+t_n^0w_n)}F(w_1\cdots w_n)$$

$$F^n[e^{\pm i(t_1\omega_1^0+t_2\omega_2^0+\cdots+t_n\omega_n^0)}f(t_1,\cdots,t_n)]=F(\omega_1\mp\omega_1^0,\cdots,\omega_n\mp\omega_n^0)$$

3. 微商性

$$F^n\left[\frac{\partial F(\omega_1\cdots\omega_n)}{\partial \omega_j}\right]=(i\omega_j)F(\omega_1,\cdots,\omega_n)\quad j=1,2,\cdots n$$

4. 卷积定理:

$$F^{-n}[F_1(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)*F_2(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)]=2\pi f_1(t_1,t_2,\cdots,t_n)\cdot f_2(t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

$$F^n[f_1(t_1,\cdots,t_n)\cdot f_2(t_1,\cdots,t_n)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)*F_2(\omega_1,\cdots,\omega_n)$$

定义:

n元函数卷积如下:

$$f_1(t_1,\cdots,t_n)*f_2(t_1,\cdots,t_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau_1,\tau_2\cdots\tau_n)f_2(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2\cdots t_n-\tau_n)d\tau_1 d\tau_2\cdots d\tau_n$$