5.1 孤立奇点

若$f(z)$在z_0的邻域内除去z_0外处处解析的,即$f(z)$在去心圆域D:

$0<|z-z_0|<\delta\ (\delta>0)$内处处解析,则称$z_0$为$f(z)$的一个孤立奇点.

据由Laurent展开定理,我们可在D上将$f(z)$展开为Laurent级数

$$f(z)=\cdots+a_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots \quad z\in D$$

∴有如下分类

(1) 若$(z-z_0)$的负幂项系数$a_{-1},a_{-2},\cdots,a_{-m},\cdots$均为零,那么孤立奇点$z_0$

为$f(z)$的可去奇点.

例: $z=0$是$\frac{e^z-1}{z}$的可去奇点.

$$\frac{e^z-1}{z}=\frac{1}{z}\left(z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots\right)=1+\frac{z}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n!}+\cdots \quad 0<|z|<+\infty$$

中不含z的负幂项,不妨令$\frac{e^z-1}{z}$在$z=0$处值为1, $\frac{e^z-1}{z}$在$z=0$就解析了.

(2) 若$f(z)$中只有有限个$(z-z_0)$的负幂数项的系数不为零，则孤立奇点z_0称为$f(z)$的极点。

Specially，关于$(z-z_0)^{-1}$的最高幂为$(z-z_0)^{-m}$，即

$$f(z)=a_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+a_{-2}(z-z_0)^{-2}+a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots\ (m\geq 1,\ a_{-m}\neq 0)$$

则z_0称为$f(z)$的m阶极点。

定理：

设$f(z)$在$0<|z-z_0|<\delta$内解析，则z_0是$f(z)$的m阶极点$\Leftrightarrow$

$f(z)$在$0<|z-z_0|<\delta$内可表示成$f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^m}g(z)$的形式，其中

$g(z)=a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+a_0(z-z_0)^m+a_1(z-z_0)^{m+1}+\cdots$ 在$|z-z_0|<\delta$内解析且$g(z_0)\neq 0$

例：$f(z)=\frac{\cos z}{z^3(z-1)^4}$ 在 $z=0$ 处有三阶极点，$z=1$ 是 $f(z)$ 四阶极点.

$f(z)=\frac{1}{z^3}g(z)$ 且 $g(z)=\frac{\cos z}{(z-1)^4}$

$g(0)=\cos 0=1\neq 0$ $\therefore$ $z=0$ 是三阶极点.

$f(z)=\frac{1}{(z-1)^4}h(z)$ 且 $h(z)=\frac{\cos z}{z^3}$

$h(1)=\cos 1\neq 0$ $\therefore$ $z=1$ 是四阶极点.

(3) $f(z)$ 中 $(z-z_0)$ 的负幂项系数有无穷多个不为零，则 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点.

例：$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$，$z=0$ 为其本性奇点.

$0<|z|<+\infty$，$e^{\frac{1}{z}}=1+z^{-1}+\cdots+\frac{1}{m!}z^{-m}+\cdots$

$\therefore$ $z=0$ 为 $e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点.

定理:

设$f(z)$在$0<|z-z_0|<\delta$内解析,则z_0是$f(z)$的可去奇点$\Leftrightarrow$

$\exists$有限极限$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$

定理:

设$f(z)$在$0<|z-z_0|<\delta$ $(0<\delta\leq+\infty)$内解析,则z_0是$f(z)$的极点$\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$

定理:

设$f(z)$在$0<|z-z_0|<\delta$ $(0<\delta\leq+\infty)$内解析,则z_0为$f(z)$的本性奇点

$\Leftrightarrow$不存在有限或无穷的极限$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$

例：讨论下列各函数在有限z平面上有何种奇点、

(1) $\frac{\sin 2z}{z}$ (2) $\frac{z+1}{z(z^2+4)^2(z+2i)^2}$ (3) $e^{\frac{1}{z}}$

(1) $\because \lim_{z\to 0}\frac{\sin 2z}{z}=2$ $\therefore$ 可去奇点、

(2) $z=0$ 为一阶极点、

$z=2i$ 为二阶极点、

$z=-2i$ 为四阶极点、

(3) $\lim_{z=x\to 0^+} e^{\frac{1}{z}}=+\infty$ $\lim_{z=x\to 0^-} e^{\frac{1}{z}}=0$ $\therefore$ 极限不存在 $\therefore z=0$ 为本性奇点、

设函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域 $N(z_0,\delta)=\{z:|z-z_0|<\delta\}$ 内解析，且

$f(z_0)=0$，则 z_0 为 $f(z)$ 的一个零点、、

设 $f(z)$ 在 $N(x_0,\delta)$ 内 Taylor 展开式为 $f(z)=a_1(z-z_0)+\cdots a_n(z-z_0)^n+\cdots$

若 $a_1, a_2 \cdots a_n \cdots$ 不全为零，则 $\exists m \in N^+$，$a_m \neq 0$，而对于 $n=1,2 \cdots m-1$，$a_n=0$，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点。

定理：

$f(z)$ 在 z_0 解析，则 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点 $\Leftrightarrow f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$，$f^{(m)}(z_0) \neq 0$

定理：

z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点 $\Leftrightarrow$ z_0 为 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点，

若 $f(z)$ 在 $D: R<|z|<+\infty \ (R>0)$ 内解析，则称 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点。

可以令 $\zeta=\frac{1}{z}$ 有 $g(\zeta)=f(\frac{1}{\zeta})$ $D': 0<|\zeta|<\frac{1}{R}$

$\therefore$ $\zeta=0$ 在 $g(\zeta)$ 的孤立奇点类型即为 $z=\infty$ 在 $f(z)$ 的孤立奇点类型

同样有 $g(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\zeta^{n}+a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^{-n}$

$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta \quad n=0,\pm1,\pm2\cdots$

C为D内绕原点的任何一条简单闭曲线

$\therefore$ (1) 当 $a_n=0$，$n=1,2,\cdots$ 时 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点、

(2) 当 $a_m\neq0$, $a_{m+1}=a_{m+2}=\cdots=0$ $(m\in N)$, $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的 m 阶极点、

(3) 当有无穷多个自然数 n, s.t. $a_n\neq0$, $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的本性奇点。

定理:

设 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点、极点或本性奇点 $\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to\infty} f(z)$ 存在有限、无穷大或不存在也不为无穷大

例: $f(z)=\frac{1}{z-z^3}$, ∞是$f(z)$的可去奇点

$f(z)=\frac{1}{z-z^3}=-\frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}}=-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^5}-\frac{1}{z^7}-\cdots$

∵ 正幂项系数全部为零 ∴ 为可去奇点.

5.2 留数

$f(z)$在孤立奇点z_0的留数定义为$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$，记$Res[f(z),z_0]$

C为包含在D内且围绕z_0的任何一条正向简单闭曲线.

$Res[f(z),z_0]=a_{-1}$ （a_{-1}为Laurent级数$\frac{1}{z-z_0}$的系数）

若$z=\infty$为$f(z)$的孤立奇点，即$f(z)$在$R<|z|<+\infty$内解析，则

$Res[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz$，其中C为包含在区域D内且围

绕原点的任意一条正向简单闭曲线.

$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-a_{-1}$ (a_{-1} 为Laurent级数 $\frac{1}{z}$ 的系数)

定理:

若 $z_0\in\mathbb{C}$ 为 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}$$

系:

若 $z_0\in\mathbb{C}$ 为 $f(z)$ 的一阶极点, 则 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

系:

设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在 $z_0\in\mathbb{C}$ 点解析, 若 $P(z_0)\neq 0$,

$Q(z_0)=0$, $Q'(z_0)\neq 0$，则z_0为$f(z)$的一阶极点，且 $\text{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

例：计算 $I=\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\sin z}{z^2(1-e^z)}dz$

$I=2\pi i\,\text{Res}[f(z),0]$ $\qquad \frac{\sin x}{x^2(1-e^x)}\sim\frac{1}{x^2}$ $\quad\therefore\frac{\sin z}{z^2(1-e^z)}$有二阶极点

$\text{Res}[f(z),0]=\lim\limits_{z\to 0}\frac{d}{dz}z^2f(z)$

$$\frac{\sin z}{1-e^z}=\frac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots}{-(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots)}=\frac{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots}{-(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots)}$$

$$\therefore\quad\frac{d}{dz}z^2f(z)=\frac{-(-\frac{2}{3!}z+\frac{4}{5!}z^3-\cdots)(1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots)}{(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots)^2}+$$

$$\frac{(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots)(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}z+\cdots)}{(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots)^2}=\frac{1}{2}\qquad z\to 0$$

$\therefore\ I=2\pi i\,\text{Res}[f(z),0]=\pi i$

留数基本定理：

设C为一条正向简单闭曲线，若$f(z)$在C上及C的内部D除去有限个孤立

奇点、$z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外处处解析，那么 $\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f(z), z_k]$

推广的留数基本定理：

若 $f(z)$ 在扩充的复平面内只有有限个孤立奇点，则 $f(z)$ 在各孤立奇点（包括∞点）的留数之和等于零.

定理：

$$Res[f(z), \infty] = -Res[f(\tfrac{1}{z})\tfrac{1}{z^2}, 0]$$

例：计算 $\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz$ C为正向圆周：$|z|=2$

解一：极点 $\pm 1, \pm i$ $\quad \frac{P(z)}{Q'(z)} = \frac{z}{4z^3} = \frac{1}{4z^2}$

$$\therefore \oint_C \frac{z}{z^4-1}dz = 2\pi i\left\{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right\}=0$$

解二：$\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz = -2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),\infty] = -2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-z^4},0\right] = 0$

5.3 留数在定积分计算中的应用

一、形如 $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$

令 $z=e^{i\theta}$

$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2z}(z^2+1)$ $\quad \sin\theta = \frac{1}{2iz}(z^2-1)$ $\quad d\theta = \frac{1}{iz}dz$

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta = \oint_{|z|=1} R\left[\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]\frac{dz}{iz}$$

令 $F(z) = R\left[\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]\frac{1}{iz}$

$F(z)$ 为有理函数，若 $a_1 \cdots a_n$ 为 $F(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内的极点，则

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(z),a_k]$$

例: $I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta \quad (a>b>0)$

令 $z=e^{i\theta}$

$$\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}=\frac{z(z^2-1)^2}{-2bz^2(z^2+\frac{2a}{b}z+1)}$$

$$\therefore I=\frac{i}{2b}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2+2\frac{a}{b}z+1)}dz$$

设 $z^2+2\frac{a}{b}z+1=0$ 的解为 α,β $\quad \alpha\beta=1$

$$\alpha=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b} \qquad \beta=\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

$$Res[F(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z^2-1)^2 i}{(z-\alpha)(z-\beta)2b}\right)=\frac{i}{2b}(\alpha+\beta)$$

$$Res[F(z),\alpha]=\lim_{z\to\alpha}\frac{(z^2-1)^2 i}{z^2(z-\beta)2b}=\frac{i}{2b}(\alpha-\beta)$$

$$\therefore I=2\pi i\left(\frac{i}{2b}(\alpha+\beta)+\frac{i}{2b}(\alpha-\beta)\right)=-\frac{2\pi}{b}\alpha=\frac{2\pi}{b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2})$$

二、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$ 的积分

$R(x)$ 为有理函数，而分母的次数至少比分子的次数高二次，

且 $R(x)$ 在实轴上没有奇点时，积分存在，设 $R(z)$ 在上半平面 $\mathrm{Im}\, z>0$ 的

极点为 $a_1, a_2, \cdots, a_p$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}[f(z), a_k]$

Specially, $R(x)$ 为偶函数，则 $\int_0^{+\infty} R(x)dx = \pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), a_k]$

例：$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$

当 $n=0$ 时，$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)} = \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

当 $n\geq 1$ 时，$z=i$ 为 $n+1$ 阶极点、

$$\mathrm{Res}[R(z), i] = \frac{1}{n!} \lim_{z\to i} \frac{d^n}{dz^n} (z+i)^{-n-1}$$

$$= \frac{(-1)^n (n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n!\,(2i)^{2n+1}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2 2i}$$

$\therefore I_n = \pi i \,\mathrm{Res}[R(z), i] = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \qquad n\in N$

三. 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}dx\ (a>0)$

$R(x)$ 为有理函数，分母次数至少比分子的次数高一次，且 $R(x)$ 在实轴上没有奇点时，积分存在，设 $R(x)$ 在上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 内的极点为 $a_1 \cdots a_p$,

则 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}[f(z), a_k]$

例: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}dx\ (a>0)$

$I = \mathrm{Re}\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}dx \right\}$

$\mathrm{Res}[R(z)e^{iaz}, i] = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{iaz}}{(1+z^2)} = \frac{1}{2i}e^{-a}$

$\therefore I = \mathrm{Re}\left(2\pi i \frac{1}{2i}e^{-a}\right) = \pi e^{-a}$

同理: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{1+x^2}dx = 0$

当 $R(z)$ 在实轴上有奇点时，以 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}dx\ (a>0)$ 为例:

设 $R(z)$ 在实轴上除去有限多个一阶极点 $x_1 \cdots x_q$ 外处处解析，在上半平面

$\operatorname{Im} z>0$ 内除去有限多个极点 $z_1 \cdots z_p$ 外处处解析，则积分存在且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Res}[R(z)e^{iaz}, z_k] + \pi i \sum_{k=1}^{q} \operatorname{Res}[R(z)e^{iaz}, x_k]$$

例：$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-5x+6}dx$

$z^2-5z+6=0 \Rightarrow z=2$ 或 $z=3$

$$I = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ze^{iz}}{z^2-5z+6}dz\right) = \operatorname{Re}\left[\pi i\left(-2e^{2i}+3e^{3i}\right)\right]$$

$$= \pi(2\sin 2 - 3\sin 3)$$

例：$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z}dz\right]$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z}, 0\right]\right\} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}[\pi i] = \frac{\pi}{2}$$

5.4 辐角原理与儒歇定理

定理:

若$f(z)$在光滑闭曲线C上解析且不为零，在C的内部除去有限个极点b_j $(j=1,2,\cdots,m)$外也处处解析，a_k $(k=1,2,\cdots,n)$是$f(z)$在C内的零点，函数$\varphi(x)$在C上及C内部处处解析，则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi(a_k)-\sum_{j=1}^{m}\beta_j\varphi(b_j)$$

其中α_k为$f(z)$的零点a_k的阶数，β_j为$f(z)$的极点b_j的阶数，C取正向

系:

若$f(z)$在简单闭曲线C上不为0且处处解析，在C内部除去有限个极点外处处解析，则$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=Z-P$，

$f(z)$关于闭曲线C的对数留数

其中，Z为$f(z)$在C内的零点总数，P为$f(z)$在C内极点总数，且C取正向

辐角原理：

若$f(z)$在简单闭曲线C上与C内部解析，且在C上不等于0，则$f(z)$在C内的零点个数为当z沿C正方向绕行一周$f(z)$的辐角改变量除以2π

Rouché定理：

设$f(z)$与$g(z)$在简单闭曲线C上和C内解析，在C上满足条件$|f(z)-g(z)|<|f(z)|$，则$f(z)$与$g(z)$在C内有相同的零点。