1.1 二阶三阶行列式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=d_1 \\ a_2x+b_2y=d_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

以上称为二元情形的 Cramer 法则

*使用条件：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

设 $a=(x_1,y_1)$, $b=(x_2,y_2)$, a 与 b 共线 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}=0$

定理：二阶行列式性质

(1) 转置不变

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

(2)行列可提出常数

$$\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

(3)行列的线性拆分

$$\begin{vmatrix} a\pm a_1 & b \\ c\pm c_1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix}$$

(4)交换两行或列，行列式改变符号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$$

(5)若行列有两行或两列的元素对应成比例，其值为0

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

(6)对角线法则 *仅二.三阶行列式成立

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

三阶行列式与二阶行列式有相同性质

例：求 $\begin{vmatrix} 97 & 203 \\ 100 & 200 \end{vmatrix} = J$

$J = \begin{vmatrix} 100-3 & 200+3 \\ 100 & 200 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 & 200 \\ 100 & 200 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 100 & 100 \end{vmatrix} = -900$

例：若 $\begin{vmatrix} 2 & 5 & x \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$，则求 x 的值

$-8+25+3x-2x+10-30=0 \quad \Rightarrow x=3$

定理：

若齐次线性方程组有非零解，则它的系数行列式为零

1.2 空间向量线性运算

若 $r=(x_1,y_1,z_1)^T$，$p=(x_2,y_2,z_2)^T$ 则 $p+r=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)^T$

若$r=(x_1, y_1, z_1)^T$ $k\in\mathbb{R}$，则 $kr=(kx_1, kx_2, kx_3)^T$

有基向量$e_1=(1,0,0)^T$，$e_2=(0,1,0)^T$ $e_3=(0,0,1)^T$

空间向量的性质：

$\forall a.b.c\in\mathbb{R}^3$，$\forall k.l\in\mathbb{R}$

(1) $a+b=b+a$

(2) $(a+b)+c=a+(b+c)$

(3) $\exists\vec{0}$ s.t. $\forall a$，$a+\vec{0}=a$

(4) $\forall a$，$\exists -a$，s.t. $a+(-a)=0$

(5) $k(a+b)=ka+kb$

(6) $(k+l)a=ka+la$

(7) $k(la)=kla$

(8) $\forall a,\ 1\cdot a=a$

定比分点定理:

$\overrightarrow{OP}=(x,y,z)^T$ $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1,z_1)^T$ $\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2,z_2)^T$

若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$ $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$ $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ $z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$

定理:

$\mathbb{R}^3$中两个非零向量$a.b$共线$\Leftrightarrow$ $\exists$不全为零的$k.p$, s.t. $ka+pb=0$

定理:

$\mathbb{R}^3$中三个非零向量$a.b.c$共面$\Leftrightarrow$ $\exists$不全为零的k,p,q, s.t. $ka+pb+qc=0$

定理：

$\mathbb{R}^3$中三个非零向量 $a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ $c=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ 共面 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0$

1.3 内积、

内积的性质：

(1) $a\cdot b = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

(2) $a\cdot b=b\cdot a$

(3) $(a+b)+c=a+(b+c)$

(4) $(ka)b = ka\cdot b$

(5) 当 $a\neq 0$ 时，$a\cdot a>0$

(6) $a\perp b \Leftrightarrow a\cdot b=0$

(7) $a \cdot b = |a||b| \cos\langle a, b\rangle$

对于 $a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 的长度，记为 $|a| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$a \cdot a = |a|^2$ $\quad |e_i| = 1$ $\quad |0| = 0$

投影向量：$a_b = \frac{a \cdot b}{b \cdot b} b$

以 a, b 张成的平行四边形面积 S 是 $S = \sqrt{(a\cdot a)(b \cdot b) - (a\cdot b)^2}$

例：$a = (2,2,5)^T$ $\quad b = (1,2,6)^T$，则求以 a, b 为边的平行四边形面积

$S = \sqrt{33 \times 41 - 36^2} = \sqrt{57}$

1.4 外积与混合积

设 $a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$，则 $a\times b=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}e_1&e_2&e_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$

$a\times a=\vec{0}$ $\quad$ $(a\times b)\cdot a=0$

外积的性质：

设 $a.b.c\in\mathbb{R}^3, k\in\mathbb{R}$,

(1) $a\times a=\vec{0}$

(2) $b\times a=-a\times b$

(3) $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

(4) $(ka)\times b=k(a\times b)$

(5) $|a\times b| = |a||b|\sin\langle a,b\rangle$

(1) a.b张成的平行四边形面积S是 $S = |a\times b|$

例: $a=(2,2,5)^T$ $b=(1,2,6)^T$, 则求以 a.b为边的平行四边形面积

$$S = |(2,-7,2)| = \sqrt{57}$$

设 $a=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ $c=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ $(a\times b)\cdot c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(1) a.b.c张成的平行六面体体积为 $V = |(a\times b)\cdot c|$

定理:

三个向量 $a.b.c$ 共面 $\Leftrightarrow (a\times b)\cdot c=0$

定理:

对任意三个向量 $a.b.c\in\mathbb{R}^3$,有 $(a\times b)\cdot c=(b\times c)\cdot a=(c\times a)\cdot b$

双重外积公式:

$$(a\times b)\times c=(a\cdot c)\cdot b-(b\cdot c)\cdot a$$

Langrange恒等式:

$$(a\times b)\cdot(c\times d)=(a\cdot c)(b\cdot d)-(a\cdot d)(b\cdot c)$$

Specially, $|a\times b|^2=(a\cdot a)(b\cdot b)-(a\cdot b)^2$

1.5 平面方程

1. 点法式方程：

由定点 (x_0,y_0,z_0) 及法向量 $\vec{n}=(A,B,C)^T$ 确定的平面

方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

例：$M_1(1,-2,3)$，$M_2(3,0,-1)$，求 M_1M_2 垂直平分面方程

定点为 M_1M_2 中点 $P_0(2,-1,1)$

法向量为 $\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}=(2,2,-4)$

$\therefore \quad 2(x-2)+2(y+1)-4(z-1)=0$

$$x+y-2z+1=0$$

2. 三点式

由三点、$A(x_1,y_1,z_1)$ $B(x_2,y_2,z_2)$ $C(x_3,y_3,z_3)$

确定的平面方程：$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 定点 A

3. 截距式：若平面在 x、y、z 轴上截距为 a、b、c，

有平面方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

4. 一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$，

其中 (A,B,C) 为平面法向量，$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$

5. 平面束方程：过 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与 $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 交线

的平面束方程为 $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

其中 λ 和 μ 不全为零

例：过平面 $x+y-1=0$ 与 $2x-y+z=0$ 交线且与 $x-y+1=0$ 垂直的平面束方程

设有不同时为零的 λ、μ，$\lambda(x+y-1)+\mu(2x-y+z)=0$

$$(\lambda+2\mu)x+(\lambda-\mu)y+\mu z-\lambda=0$$

$$1\cdot(\lambda+2\mu)-1(\lambda-\mu)+0\cdot\mu=0$$

$$\mu=0.$$

$$\therefore\ x+y-1=0$$

从 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

两平行平面 $Ax+By+Cz+D_1=0$ 与 $Ax+By+Cz+D_2=0$ 之间的距离：

$$d=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

平面规律：$D=0 \Leftrightarrow$ 平面过原点、

$D\neq0, C=0 \Leftrightarrow$ 平面平行x轴

$D\neq0, C=B=0 \Leftrightarrow$ 平面平行于yOz面

记法：A、B、C 等于0的数量与平行于的东西的维数一样

D=0 过原点、轴、面。

1.6 空间直线

1、点斜式：由定点、$P_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量 $\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 确定

的直线方程为 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ 且有参数方程

$$\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0 \\ z=ct+z_0 \end{cases}$$

例：A(1,0,-2) 向 $2x-2y-z+2=0$ 所作垂线的垂足坐标

$P_0=(1,0,-2)$ $\vec{v}=\vec{n}=(2,-2,-1)^T$

l: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+2}{-1} \xRightarrow{参方} x=2t+1$ $y=-2t$ $z=-t-2$

$2(2t+1)-2(-2t)-(-t-2)+2=0 \Rightarrow t=-\frac{2}{3}$

$\therefore \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

2. 两点式：由两个点、$A(x_1,y_1,z_1)$ $B(x_2,y_2,z_2)$ 确定的

直线方程为：$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

3. 一般方程：由平面π_1，π_2确定的直线方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_2=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

两直线之间的关系：

if（方向向量成比例）：

if（一条直线上取一点，代入另一直线方程成立）：

重合

else：平行

else:

if (两直线参数方程有解):

相交

else: 异面

设 M_0 为已知点, M_1 为直线 L 上任意一点, 直线方向向量为 $\vec{v}$, 则 M_0 到 L 的距离 $d=\dfrac{|\vec{v}\times\overrightarrow{M_0M_1}|}{|\vec{v}|}$

例: $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-8}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$ 与 $\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y-10}{-1}=\dfrac{z-5}{1}$ 的距离

$\because (3,-1,1)^T=(3,-1,1)^T$

且将 $(3,8,3)$ 代入 $\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y-10}{-1}=\dfrac{z-5}{1}$ 不成立

$\therefore$ 两直线平行

$\therefore\ \vec{v}=(3,-1,1)^T\quad \overrightarrow{M_1M_2}=(3,2,2)^T$

$\therefore\ d=\sqrt{\frac{100}{11}}$

*例：$L_1:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}\quad L_2:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{-1}$，求两直线距离及其公垂线方程

$\vec{v_1}=(-1,2,1)\quad \vec{v_2}=(1,0,-1)\quad \vec{v}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}=2(-1,0,-1)$

$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,1,3)$

$\Rightarrow d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|}=\sqrt{2}$

设 $M(x,y,z)$ 为中垂线上的点..

$\overrightarrow{MM_1},\ \vec{v_1},\ \vec{v}$ 共面 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-x & -y & -1-z \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow x+y-z-2=0$

$\overrightarrow{MM_2}, \vec{v_2}, \vec{v}$共面$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -x & 1-y & 2-z \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 1-y=0$

∴公垂线方程 $\begin{cases} x+y-z-2=0 \\ 1-y=0 \end{cases}$

*例，求过$P(2,1,1)$且与$L_1: \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y-z=2 \end{cases}$与$L_2: \begin{cases} x-y-z=3 \\ 2x+4y-z=4 \end{cases}$

相交的直线方程

设直线方向向量为$\vec{v}=(a,b,c)^T$

$\vec{V_1}=3(0,1,-1)^T$ $\vec{V_2}=(5,-1,6)^T$ $M_1(1,0,0)^T$ $M_2(1,0,-2)$

有$\vec{v}, \vec{v_1}, \overrightarrow{M_1P}$共面$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a-b-c=0$ ①

有$\vec{v}, \vec{v_2}, \overrightarrow{M_2P}$共面$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3a+3b-2c=0$ ②

联立①、② $\Rightarrow \vec{v}=(5,1,9)^T \Rightarrow L: \frac{x-2}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{9}$