5.1 矩阵对角化

对n阶方阵A，若$\exists$对角阵D和可逆矩阵P，s.t. $P^{-1}AP=D$，则称A可对角化

设$A=(a_{ij})$为$\mathbb{F}$上的n阶方阵，若对$\mathbb{F}$内的一个数λ_0，$\exists$非零向量$\alpha\in\mathbb{F}^n$，

s.t. $A\alpha=\lambda_0\alpha$，则称λ_0为A的一个特征值，且称α是A的属于λ_0的一个特征向量

对n阶方阵$A=(a_{ij})$，由于$A\alpha=\lambda_0\alpha$等价于$(\lambda_0 I-A)\alpha=0$，所以非零的特征

向量α是n个未知量n个方程的齐次线性方程组$(\lambda_0 I-A)X=0$的解，这个

线性方程组称为λ_0的特征方程组.

此方程组有非零解$\Leftrightarrow$ $|\lambda_0 I-A|=0$，记$f_A(\lambda)=|\lambda_0 I-A|$为$A$的特征多项式

例：求 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量，可逆 P s.t. $P^{-1}AP$ 为对角阵，求 P 及对角阵

$|\lambda I-A| = (\lambda-2)^2(\lambda+4)=0 \Rightarrow \lambda_1=2 \quad \lambda_2=-4$

当 $\lambda=2$ 时，$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\xi_1=(1,0,1)^T \qquad \xi_2=(0,1,2)^T$

当 $\lambda=-4$ 时，$\begin{pmatrix} -7 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\xi_3=(1,-2,3)^T$

$\therefore P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad$ 对角阵 $=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

定理：

n 阶方阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量

定理:

设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$为n阶方阵A的不同特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为A的依次分别属于$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$的特征向量，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关

定理:

若n阶方阵A有n个不同的特征值，则A可对角化.

定理:

设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是n阶方阵A的不同特征值，且对每个$i=1,2,\cdots,m$，设$\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i}$为A的属于特征值$\lambda_i$的线性无关的特征向量，则

$\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{m1},\cdots,\alpha_{mr_m}$线性无关

5.2 特征多项式的性质

定义:

对方阵$A=(a_{ij})$的主对角元素的和记为$tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$，称为A的迹.

若F上的n阶方阵A的特征多项式$f_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$,

则 (1) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$ (2) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=tr(A)$

例：求$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&1&-1\end{pmatrix}$的特征值

$|A|=2=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ $tr(A)=-2=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$

猜测$\lambda=1, -1, -2$

$$(I-A)=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\-5&4&-3\\1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&-2\\-5&4&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(-I-A)=\begin{pmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(-2I-A)=\begin{pmatrix}-4 & 1 & -2\\ -5 & 1 & -3\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\therefore$ A的特征值为1，-1，-2

定义：

$f_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{n_m}$，其中 n_i 为特征值 λ_i 的几何重数。显然有 $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$.

设 λ_i 的特征方程组 $(\lambda_i I-A)X=0$ 的基础解系 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{ir_i}$，即A有 r_i 个线性无关的特征向量属于 λ_i，r_i 称为特征值 λ_i 的几何重数

定理：

设 $\mathbb{F}$ 上的n阶方阵A的特征多项式 $f_A(\lambda)$ 在 $\mathbb{F}$ 上能分解成一次因式的乘积，并且A的全部相异的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，则对 $\forall\lambda_i$ 来说，总有 $r_i\le n_i$

定理:

设$\mathbb{F}$上的n阶方阵A的特征多项式$f_A(\lambda)$在$\mathbb{F}$上能分解成一次因式的乘积,并且A的全部相异的特征值是$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$,则以下命题等价:

(1) A可对角化

(2) A的所有相异特征值的几何重数之和$r_1+r_2+\cdots+r_m=n$;

(3) A的每个特征值的几何重数与代数重数相等

定理:

设$\mathbb{F}$上的n阶方阵A的特征多项式$f_A(\lambda)$在$\mathbb{F}$上能分解成一次因式的乘积,并且A的全部相异的特征值是$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$,则$A$可对角化$\Leftrightarrow$

对每个k重特征值λ_0来说,$\operatorname{rank}(\lambda_0 I-A)=n-k$

Cayley-Hamilton定理:

设A为$\mathbb{F}$上的n阶方阵，$f_A(\lambda)$是A的特征多项式，则$f_A(A)=0$

例：求$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$的逆

$$f_A(\lambda)=(\lambda-1)^3=0$$

$$\therefore\ f_A(A)=(A-I)^3=0 \quad \Rightarrow A(A^2-3A+3I)=I$$

$$A^{-1}=A^2-3A+3I=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

5.3 相似矩阵

定义：

设A,B为$\mathbb{F}$上n阶的方阵，若$\exists$可逆P，s.t. $P^{-1}AP=B$，则A相似于B，

记$A\sim B$

相似的性质

1. 若 $A\sim B$，则 $f(A)\sim f(B)$ specially, $A^m\sim B^m$，m 为任意正整数

2. 若 $A\sim B$, $C\sim D$，则 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}$

3. 若 $A\sim B$，则 $f_A(\lambda)=f_B(\lambda)$，从而两个相似矩阵具有完全相同的特征值

4. $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$

5. $|A|=|B|$

6. $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$

7. $A^{-1}\sim B^{-1}$

8. $(\lambda I-A)^k\sim(\lambda I-B)^k$

5.4 相似矩阵的应用

定理:

设F上的二阶方阵A有一个2重特征值a,且不能对角化,则A与一个对角元素为a的Jordan标准形相似,即∃可逆的P, s.t. $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

5.5 三阶方阵的Jordan标准形

(1) 当A只有一个特征值a (3重根) 且它的几何重数为2时,

$$A \sim \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} 或 A \sim \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad (1)$$

(2) 当A只有一个特征值a (3重根) 且它的几何重数为1时,

$$A \sim \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad (2)$$

(3) 当A只有一个特征值a (2重根) 且它的几何重数为1时,

$A \sim \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ (3)

此三式子与A相似的矩阵称Jordan标准形

$A \sim B \Leftrightarrow \lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 等价

当J为(1)中两个Jordan标准形时，$\lambda I - J$ 等价于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - a & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - a)^2 \end{pmatrix}$

当J为(2)中两个Jordan标准形时，$\lambda I - J$ 等价于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - a)^3 \end{pmatrix}$

当J为(3)中两个Jordan标准形时，$\lambda I - J$ 等价于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - a)^2(\lambda - b) \end{pmatrix}$

例：求 $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的Jordan标准形J及可逆P，s.t. $P^{-1}AP = J$

$|\lambda I - A| = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$

$\lambda = 2$ 时，$\alpha_1 = (2, 0, 1)^T$

$\lambda = 1$ 时，$\alpha_2 = (1, -1, 0)^T$

$\lambda I - A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) \end{pmatrix}$ $\therefore J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

∴求$\lambda=1$的广义特征向量.

$AP=PJ$

∴ $P=(\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_1)$, s.t. $AP=(A\alpha_2, A\alpha_3, A\alpha_1)=(\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_1)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

∴ $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$ ∴ $(I-A)\alpha_3=-\alpha_2$

∴ $\begin{pmatrix}-3&-3&4&-1\\1&1&-2&1\\-1&-1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

∴ $\alpha_3=(-1,0,-1)^T$

∴ $P=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

5.6 n阶矩阵的Jordan标准形

定义:

如下形式的k阶矩阵属于数λ_0的k阶Jordan块,记为

$$J_k(\lambda_0)=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0\end{pmatrix}$$

而由Jordan块构成n阶准对角矩阵 $J=\begin{pmatrix}J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_s}(\lambda_s)\end{pmatrix}$

称Jordan标准形。其中 $k_1+k_2+\cdots+k_s=n$

对λ-矩阵而言，也有行列式 $|A(\lambda)|$，若存在另个λ-矩阵 $B(\lambda)$，s.t.

$A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=I$，则称其可逆，记 $A^{-1}(\lambda)$

对λ-矩阵，可进行以下三种行(列)初等变换：

(1) 用非零的数乘λ-矩阵某一行(列)

(2) 交换λ-矩阵中的两行(列)

(3) 将λ-矩阵某一行(列)的 $f(\lambda)$ 倍加到另一行(列)上，其中 $f(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$

定理:

若n阶λ-矩阵$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价，则∃可逆的$P(\lambda)$. $Q(\lambda)$

s.t. $B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$

定理:

设A.B是两个n阶方阵，则$A\sim B \Leftrightarrow \lambda I-A$与$\lambda I-B$等价

n阶标准对角λ-矩阵为一个对角的λ-矩阵 $\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n(\lambda) \end{pmatrix}$,

其中对角元素满足以下性质:

(1) $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$ $i=1,2,\cdots,n-1$

(2) 每个$d_i(\lambda)\neq 0$，且其首项系数为1

定理:

任何一个行列式不为0的n阶λ-矩阵$A(\lambda)$都等价于唯一的标准λ-矩阵

定理:

每个n阶方阵A的特征矩阵$\lambda I-A$都等价于唯一的标准λ-矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_{n-q+1}(\lambda) & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & d_{n-1}(\lambda) & \\ & & & & & d_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

其中q满足$1\le q\le n$，且$d_i(\lambda)(i=n-q+1,\cdots,n)$

是首项系数为1的多项式，它们满足整除关系 $d_{i-1}(\lambda)\mid d_i(\lambda)$ $i=n-q+2,\cdots,n$

其中，$d_{n-q+1}(\lambda),\cdots,d_{n-1}(\lambda),d_n(\lambda)$称为A的不变因子

定理:

k阶Jordan块$J_k(\lambda_0)$的初等因子是$(\lambda-\lambda_0)^k$

定理:

若$F[\lambda]$中m个多项式$f_1(\lambda),f_2(\lambda),\cdots,f_m(\lambda)$两两互素，那么

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & & & \\ & f_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_m(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \prod_{i=1}^{m} f_i(\lambda) \end{pmatrix}$$ 等价

例：求
$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & & & & & & & \\ & 5 & 1 & & & & & & \\ & & 5 & & & & & & \\ & & & 5 & & & & & \\ & & & & 8 & 1 & & & \\ & & & & & 8 & & & \\ & & & & & & 8 & 1 & \\ & & & & & & & 8 & \\ & & & & & & & & 5 \end{pmatrix}$$
的不变因子

初等因子：$(\lambda-5)^3$、$(\lambda-5)$、$(\lambda-8)^2$、$(\lambda-8)^2$、$(\lambda-5)$

$$\begin{cases} \lambda-5 & \\ \lambda-5 & (\lambda-8)^2 \\ (\lambda-5)^3 & (\lambda-8)^2 \end{cases}$$

∴ 不变因子：$\lambda-5$　　$(\lambda-5)(\lambda-8)^2$　　$(\lambda-5)^3(\lambda-8)^2$

定理：

任意一个 n 阶复矩阵 A 都与形如 $J=\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$ 的Jordan矩阵

相似，即∃可逆 P，s.t. $P^{-1}AP=J$. 若不计 J 的各个Jordan块的次序，则

这个Jordan矩阵是唯一的.

例：A的不变因子为 $\lambda-5$，$(\lambda-5)(\lambda-8)^2$，$(\lambda-5)^3(\lambda-8)^2$，求A的初等因子及A相似的Jordan标准形

初等因子：$\lambda-5$、$\lambda-5$、$(\lambda-8)^2$、$(\lambda-5)^3$、$(\lambda-8)^2$

$$J=\begin{pmatrix}
5 & & & & & & & & \\
 & 5 & & & & & & & \\
 & & 5 & 1 & & & & & \\
 & & & 5 & 1 & & & & \\
 & & & & 5 & & & & \\
 & & & & & 8 & 1 & & \\
 & & & & & & 8 & & \\
 & & & & & & & 8 & 1 \\
 & & & & & & & & 8
\end{pmatrix}$$

5.7 Jordan标准形的一些理论推导

定理：

对于∀不为零矩阵的n阶数字矩阵A和n阶λ-矩阵$U(\lambda)$与$V(\lambda)$，一定∃λ-矩阵$Q(\lambda)$与$R(\lambda)$及数字矩阵U_0与V_0，s.t. $U(\lambda)=(\lambda I-A)Q(\lambda)+U_0$，

$V(\lambda)=R(\lambda)(\lambda I-A)+V_0$

设$A(\lambda)$是一个行列式不为零的n阶λ-矩阵，对$\forall$满足$1\le k\le n$的正整数k，$A(\lambda)$中全部k阶子式的首项系数为1的最大公因式就称为$A(\lambda)$的k阶行列式因子，记$D_k(\lambda)$

定理：

初等变换不改变λ-矩阵的各阶行列式因子.

不变因子与行列式因子的关系：

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)\quad d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)},\ \cdots,\ d_n(\lambda)=\frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}$$

A的不变因子的次数之和$=A$的初等因子次数之和$=A$的阶数n