# 3.1 $n$维向量空间$\mathbb{F}^n$中向量组的线性相关性

定义:

$n$个数域$\mathbb{F}$中的数$a_1, a_2, \cdots, a_n$组成有序数组，$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$称为$\mathbb{F}$上的$n$维向量，其中$a_i$称为$n$维向量的第$i$个分量$(i=1,2,3,\cdots,n)$，

向量$\alpha$可以等同于一个$n\times 1$矩阵

定义:

两个$n$维向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$和$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$称为相等的向量$\Leftrightarrow a_i=b_i$，$i=1,2,\cdots,n$

定义:

两个$n$维向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$与$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$的和$\alpha+\beta$定义为：$\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)^T$

定义:

数域$\mathbb{F}$中的数$k$与$n$维向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$的数乘是一个$n$维向量

$k\alpha$: $k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)^T$，若取$k=-1$，则有$\alpha$的负向量$-\alpha=(-a_1,\cdots,-a_n)^T$，

则$\alpha$与另一个$n$维向量$\beta$的差为$\alpha+(-\beta)$，记$\alpha-\beta$

定义:

在定义了上述$n$维向量的加法和数乘后，全体$n$维向量组成的集合

称为$n$维向量空间，记为$\mathbb{F}^n$

定理:

设$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{F}^n$，$k,l\in\mathbb{F}$，则$n$维向量的加法与数乘有以下八条性质:

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(3) $\alpha+0=\alpha$

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$

(5) $1\alpha=\alpha$

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

定义:

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in\mathbb{F}^n$, $k_1,k_2,\cdots,k_m\in\mathbb{F}$, 称$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$

是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的线性组合,或称向量$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出

例: $\alpha_1=(-1,0,1,2)^T$ $\alpha_2=(3,4,-2,5)^T$ $\alpha_3=(0,4,1,11)^T$ $\beta=(1,-1,0,0)^T$,

$\gamma=(5,4,-4,1)^T$，$\beta$、$\gamma$能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出

$$\begin{pmatrix}-1&3&0&1\\0&4&4&-1\\1&-2&1&0\\2&5&11&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&3&0&1\\0&4&4&-1\\0&1&1&1\\0&0&0&-9\end{pmatrix}$$ $\therefore\ \beta$无法由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出

$$\begin{pmatrix}-1&3&0&5\\0&4&4&4\\1&-2&1&-4\\2&5&11&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-5\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ $\therefore\ \gamma=(3t-5)\alpha_1+t\alpha_2+(1-t)\alpha_3$

定义：

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in\mathbb{F}^n$，若∃不全为零的$m$个数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，s.t. $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，若不存在这样不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m\in\mathbb{F}$，s.t. $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$成立，则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关.

定理：

向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关$\Leftrightarrow$若$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$成立，则

必有 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$

例：求 $\alpha_1=(-1,0,1,2)^T$，$\alpha_2=(3,4,-2,5)^T$，$\alpha_3=(0,4,1,11)^T$ 的线性相关性

$$\begin{pmatrix}-1&3&0&0\\0&4&4&0\\1&-2&1&0\\2&5&11&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 线性相关

例：$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$，$\beta_1.\beta_2.\beta_3$ 线性无关

证明：$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$ 线性无关

即证：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，$k_1=k_2=k_3$

设 $l_1\beta_1+l_2\beta_2+l_3\beta_3=0$　　$l_1=l_2=l_3=0$

$\alpha_1=\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2+\beta_3)$　$\alpha_2=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2-\beta_3)$　$\alpha_3=\frac{1}{2}(-\beta_1+\beta_2+\beta_3)$

$(k_1+k_2-k_3)\beta_1+(-k_1+k_2+k_3)\beta_2+(k_1-k_2+k_3)\beta_3=0$

$$\therefore\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=0$$

$\therefore k_1=k_2=k_3$　　　$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

定理:

$n$维向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ $(m\geq 2)$线性相关$\Leftrightarrow$其中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

定理:

设$n$维向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关,且$\alpha_1 \cdots \alpha_m, \beta$线性相关,则$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表出,且表示式唯一

定理:

$n$维向量组线性相关$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}=0$有非零解.

定理:

$n$个$n$维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关$\Leftrightarrow|A|=0$,其中$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

定理:

$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\vdots\\a_{1r}\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\\\vdots\\a_{2r}\end{pmatrix},\cdots,$ $\alpha_m=\begin{pmatrix}a_{m1}\\a_{m2}\\\vdots\\a_{mr}\end{pmatrix}$ $m\leq r$,若对每个向量,

增加$n-r$个数,而把它变成$n$维"延伸"向量:

$$\alpha_1^*=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\vdots\\a_{1r}\\a_{1,r+1}\\\vdots\\a_{1n}\end{pmatrix},\alpha_2^*=\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\\\vdots\\a_{2r}\\a_{2,r+1}\\\vdots\\a_{2n}\end{pmatrix},\cdots,\alpha_m^*=\begin{pmatrix}a_{m1}\\a_{m2}\\\vdots\\a_{mr}\\a_{m,r+1}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix},$$

若$\alpha_1\cdots\alpha_m$线性无关,则$\alpha_1^*,\alpha_2^*\cdots\alpha_m^*$线性无关

例：设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是两两不同的数，$m<n$，令

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^{n-1} \end{pmatrix}$ $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^{n-1} \end{pmatrix}$ $\cdots$ $\alpha_m = \begin{pmatrix} 1 \\ a_m \\ a_m^2 \\ \vdots \\ a_m^{n-1} \end{pmatrix}$，证 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 线性无关

取 $\beta_i = \begin{pmatrix} 1 \\ a_i \\ a_i^2 \\ \vdots \\ a_i^{m-1} \end{pmatrix}$ $i=1,2,\cdots,m$

$\therefore A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \cdots & a_m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le m} (a_j - a_i)$ 又 $\because a_j \ne a_i$

$\therefore A \ne 0$

$\therefore \beta_1 \cdots \beta_m$ 线性无关

$\therefore \alpha_1 \cdots \alpha_m$ 线性无关

## 3.2 向量组的秩与矩阵的秩

定理：

设向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出，若 $s>m$，

则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 必线性相关.

定理:

若向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出,且$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$线性无关,那么$s\le m$.

定理:

两个等价的线性无关向量组必含有相同个数的向量

定义:

$n$维向量组的一个部分组称为极大无关组,若这个部分组本身是线性无关的,但从这向量组的其余向量中任取一个添加进去,得到的新的部分组线性相关.

定理:

向量组的任意两个极大无关组所含向量的个数相等

定义:

$n$维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的极大无关组所含向量的个数,称为这个向量组的秩,记为$\mathrm{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$

定理:

矩阵的行初等变换不改变矩阵列向量组中各向量之间的线性关系

例:求$\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\\1\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}-5\\3\\11\\7\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}8\\-5\\-19\\-13\end{pmatrix}$ $\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\1\\7\\5\end{pmatrix}$ $\alpha_5=\begin{pmatrix}-17\\5\\1\\-3\end{pmatrix}$,求$\{\alpha_1,\cdots\alpha_5\}$的秩和一个极大无关组,并将其余向量用该极大无关组来线性表出

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \operatorname{rank}(A)=3$ 极大无关组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$

$\alpha_3=\alpha_1-2\alpha_2$ $\alpha_5=\alpha_1+3\alpha_2-5\alpha_4$

定理:

设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出, 则

$\operatorname{rank}\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\} \le \operatorname{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$

定理:

等价的向量组有相同的秩

定义:

一个矩阵行向量组的秩为行秩,列向量组的秩为列秩

定理:

行初等变换不改变矩阵的行秩

定理:

矩阵的行秩等于列秩

定义:

矩阵A的行秩与列秩称为A的秩,记作rank(A)

例: $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\\3&5&1&7\end{pmatrix}$ $\text{rank}(A)=3$,求 $a,b$

$A\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&0&a-1&2-b\\0&0&0&4-2b\end{pmatrix}$ $\because \text{rank}(A)=3$

$\therefore a=1$ $b\neq 2$ 或 $b=2$ $a\neq 1$

定理:

n阶矩阵A的行列式 $|A|=0 \Leftrightarrow \text{rank}(A)<n$

定理:

n阶矩阵A的行列式 $|A|\neq 0 \Leftrightarrow \text{rank}(A)=n$

定义:

设A为 $m\times n$ 矩阵,任取A的k行与k列,位于这些行与列交点上的 $k^2$ 个元素

按其原来的顺序组成一个k阶方阵,称其为A的一个k阶子块,这个子块的行列式

称为矩阵的k阶子式,在这里$k \le \min\{m,n\}$

定理:

设A为$m\times n$矩阵,则$\operatorname{rank}(A)=r \Leftrightarrow$ A中有一个r阶子式不为零,r+1阶子式都为零

补:

1. $\operatorname{rank}(A\pm B) \le \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

2. $\operatorname{rank}(AB) \le \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$

3. $\operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(A)$

4. $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$

5. $\max\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\} \le \mathrm{rank}(A\ B) \le \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$

6. 若A、C可逆，则有$\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(BC)$

7. 设A为n阶方阵，则以下结论等价

(i) $|A| \neq 0$ (ii) A可逆 (iii) A等价于I (iv) $\mathrm{rank}(A) = n$

(v) A满秩 (vi) A是初等矩阵乘积 (vii) $AX=0$只有零解

(viii) $AX=\beta$只有唯一解

8. 设A为n阶方阵，则以下结论等价

(i) $|A| = 0$ (ii) A奇异 (iii) A不等价于I (iv) $\mathrm{rank}(A) < n$

(v) A不满秩 (vi) A不是初等矩阵乘积 (vii) $AX=0$有无穷解

(viii) $AX=\beta$无解或无穷解

# 3.3 线性方程组解的结构

定理：

若 $n$ 元齐次线性方程组的系数矩阵 $A$ 的秩 $r<n$，则其有非零解

定义：

向量组 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 称为齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，若

(1) $AX=0$ 的任一解向量都可由 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 线性表出

(2) $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 是 $AX=0$ 的一组线性无关的解向量

齐次线性方程组解的结构定理

设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\operatorname{rank}(A)=r<n$，则齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解

總有$n-r$个向量.

例: 求 $\begin{cases} x+3y-5z-w+2u=0 \\ 2x+6y-8z+5w+3u=0 \\ x+3y-3z+6w+u=0 \end{cases}$ 的基础解系

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -8 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \frac{33}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3k_1 - \frac{33}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3 \\ y = k_1 \\ z = -\frac{7}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3 \\ w = k_2 \\ u = k_3 \end{cases}$$

$$\therefore X = k_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{33}{2} \\ 0 \\ -\frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{33}{2} \\ 0 \\ -\frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

定理:

设$A$是$m\times n$矩阵, $B$是$n\times s$矩阵, 若$AB=0$, $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)\le n$

定理:

$\mathrm{rank}(AB) \ge \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-n$

## 定理:

非齐次线性方程组有解⇔其系数矩阵与增广矩阵有相同的秩

## 非齐次线性方程组解的结构定理:

设非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 有解,且 $\operatorname{rank}(A)=r$, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 为 $AX=\beta$ 的导出组 $AX=0$ 的基础解系,以及 $\eta_0$ 为 $AX=\beta$ 的一个已知特解,则 $AX=\beta$ 的通解为 $X=\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$ $\quad k_i\in\mathbb{F}$ $\quad i=1,2,\cdots,n-r$

例:求 $\begin{cases} x+y-3w-u=2 \\ x-y+2z-w=1 \\ 4x-2y+6z+3w-4u=8 \\ 2x+4y-2z+4w-7u=9 \end{cases}$ 的通解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 8 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} & \frac{13}{6} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{5}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

补:

1. 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵 $(n\geq 2)$，则 $rank(A^*)=\begin{cases} n & rank(A)=n \\ 1 & rank(A)=n-1 \\ 0 & rank(A)<n-1 \end{cases}$

2. 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵，$n>2$，$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

3. $A$ 为 $m\times n$ 的实矩阵，$rank(A^TA)=rank(A)$

## 3.4 分块矩阵方法的进一步应用

定理:

对任意 $m\times n$ 矩阵 $A$ 总存在 $m$ 阶可逆矩阵 $P$ 和 $n$ 阶可逆矩阵 $Q$，

s.t. $PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $I_r$ 为 $r$ 阶单位阵，且 $r=rank(A)$，

$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 称为 $A$ 的等价标准形

分块初等变换公式:

(i) $\begin{pmatrix} P & O \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} O & I_s \\ I_t & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} I_t & Q \\ O & I_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+QC & B+QC \\ C & D \end{pmatrix}$

例: $M = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}$, $A$.$D$可逆,求$M^{-1}$

$$\begin{pmatrix} A & O & I & O \\ C & D & O & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & O & A^{-1} & O \\ C & D & O & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & O & A^{-1} & O \\ O & D & -CA^{-1} & I \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I & O & A^{-1} & O \\ O & I & -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix} \quad \therefore M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

补:

1. 设$A$可逆,则 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(D)$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(D - CA^{-1}B)$$

2. $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$

3. 若$A$为$m\times n$矩阵,$B$为$n\times m$矩阵,则 $|I_n - BA| = |I_m - AB|$

例: 求 $|A| = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{vmatrix}$

$$A = -I_n + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (-1)^n \left| I_2 - \begin{pmatrix} \Sigma a_i^2 & \Sigma a_i \\ \Sigma a_i & n \end{pmatrix} \right|$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} 1-\Sigma a_i^2 & -\Sigma a_i \\ -\Sigma a_i & 1-n \end{vmatrix} = (-1)^n\left[ (\Sigma a_i^2 - 1)(n-1) - (\Sigma a_i)^2 \right]$$

4. Cauchy-Bint 公式:

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $B=(b_{ij})_{n\times m}$

(1) 若 $m>n$, 则 $|AB|=0$

(2) 若 $m\le n$, 则 $|AB| = \sum\limits_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_m \\ 1 & \cdots & m \end{pmatrix}$

6. Langrange恒等式:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=\sum_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)^2$$

7. Cauchy 不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

例: 设$A$为$n$阶方阵, $A^2=I$, 证: $\operatorname{rank}(A+I)+\operatorname{rank}(A-I)=n$

$\because A^2-I=0 \quad \therefore (A+I)(A-I)=0$

$\therefore \operatorname{rank}(A+I)+\operatorname{rank}(A-I)\le n$

$$\begin{pmatrix}A+I & 0\\ 0 & A-I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A+I & 0\\ A-I & A-I\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A+I & 0\\ -2I & A-I\end{pmatrix}$$

$\therefore \operatorname{rank}(A+I)+\operatorname{rank}(A-I)\ge n$

$\therefore$ #