2.1 高斯消元法

定义 2.1 数域：

设 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个子集，若 $\mathbb{F}$ 满足

(1) $\mathbb{F}$ 中至少有一个不为零的数

(2) $\forall a,b\in\mathbb{F}$，$a+b$，$a-b$，$ab\in\mathbb{F}$，且当 $b\neq0$ 时，$\frac{a}{b}\in\mathbb{F}$，

则称 $\mathbb{F}$ 是一个数域

定理 2.1：

任何数域都包含有理数域 $\mathbb{Q}$

数学归纳法：

(1) $1 \to 2 \to \cdots$ (1) 证明 $k=1$ 成立

(2) 设 $k=n$ $(k \in N^+)$ 成立，证明 $k=n+1$ 成立

(2) $\left.\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow n$ (1) 证明 $n=1$ 成立

(2) 设 $\forall k < n$ $(k \in N^+)$ 成立，证明 $k=n$ 成立

有 n 元线性方程组：
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2.1)$$

系数矩阵：
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

增广矩阵：
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n} & b_n \end{pmatrix}$$

方程组的解：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

高斯消元法：利用初等行变换将线性方程变为同解的线性方程组。

初等变换（有且仅有以下三种）：

(1) 用非零的数乘矩阵某一行

(2) 交换矩阵中两行的位置

(3) 将一行的k倍加到另一行上

设有m个n元线性方程组成的非齐次方程组且记方程组

的系数矩阵为A,则 $\begin{cases} |A|=0 \Leftrightarrow \text{方程组无解或无穷解} \\ |A|\neq 0 \Leftrightarrow \text{方程组有唯一解} \end{cases}$

设有n个n元线性方程组成的齐次方程组且记方程组的系数矩阵为A,则 $\begin{cases} |A|=0 \Leftrightarrow \text{方程组有无穷解} \\ |A|\neq 0 \Leftrightarrow \text{方程组有唯一零解} \end{cases}$

求线性方程组的解可以将其增广矩阵进行初等行变换,将其转化为一个简化阶梯阵求解

*例: $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+4x_4+x_5=7 \\ 2x_1+6x_2+5x_4+2x_5=5 \\ 4x_1+11x_2+8x_3+5x_5=3 \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4+x_5=-2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & 6 & 0 & 5 & 2 & 5 \\ 4 & 11 & 8 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{19}{2} & 4 & \frac{71}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{71}{2} + \frac{19}{2}k_1 - 4k_2 \\ x_2 = -11 - 4k_1 + k_2 \\ x_3 = -\frac{9}{4} + \frac{3}{4}k_1 \\ x_4 = k_1 \\ x_5 = k_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1i_2} & \cdots & c_{1i_r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \cdots & c_{2i_2} & \cdots & c_{2i_r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & & c_{ri_r} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2.13)

定理:(非齐次线性方程组求解定理)

对线性方程组2.1的增广矩阵运用高斯消元法,可以得到阶梯形矩阵(2.13),若其中$d_{r+1}\neq 0$,无解,若$d_{r+1}=0$,有解且当$r=n$时,有唯一解,当$r<n$时无穷多解

定理 2.3（齐次线性方程组非零解存在定理）

若在齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$
中有 $m<n$，

则其一定有非零解

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & -3 \\ 1 & k & 1 & -3 \\ 1 & 1 & k & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & -3 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & k^2+k-2 & -3k+3 \end{pmatrix}$$

Ⅰ. 当 $k^2+k-2=0$ 且 $-3k+3\neq0$ 即 $k=-2$ 时，无解

Ⅱ. 当 $k=1$ 时，有无穷解 $\begin{cases} x_1=k_1 \\ x_2=k_2 \\ x_3=-3-k_1-k_2 \end{cases}$

Ⅲ. 当 $k\neq1$ 且 $k\neq-2$ 时，有唯一解 $x_1=x_2=x_3=\dfrac{-3}{k+2}$

*补：讨论下列线性方程组的解
$$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=-3 \\ x_1+kx_2+x_3=-3 \\ x_1+x_2+kx_3=-3 \end{cases}$$

2.2 矩阵的运算

定义：由 mn 个数排成 m 行 n 列矩形数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵，其中 a_{ij} 称为矩阵中第 i 行第 j 列元素，记 $M_{m,n}(F)$

一些特殊矩阵：

(1) 若有 n^2 个元素组成的 $n\times n$ 的矩阵，称为 n 阶方阵，记 $M_n(F)$

(2) 只有一列 (行) 的矩阵，称为列 (行) 矩阵

(3) 元素全为零的 $m\times n$ 矩阵称为零矩阵，记 $O_{m\times n}$

(4) 只有对角线上有元素的方阵，称为对角阵，记 $diag(a_{11}\cdots a_{nn})$

(5) 元素全为 c 的对角阵称为纯量阵，记 cI_n

(6) $c=1$ 的纯量阵，称为单位阵，记 I_n

(7) 满足当 $i<j$ 时 $a_{ij}=0$ 的方阵称为上三角阵

定义

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$　$B=(b_{ij})_{m\times n}$　$C=(C_{ij})_{m\times n}$，若 $C_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$，

则称 $C=A+B$

定理：若A、B、C是三阶同型矩阵，则有以下性质

(1) $A+B=B+A$

(2) $A+(B+C)=(A+B)+C$

(3) $A+O=O+A=A$，O为A的同型零矩阵

(4) $A+(-A)=O$，O为A的同型零矩阵

定义：

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，k为常数，则$(ka_{ij})_{m\times n}$为k与A的数乘，

记kA.

例：A为3阶方阵，$|A|=5$，求$|3A|=?$

$|3A|=3^3|A|=27\times 5=135$

定理：设 A、B是两个同型矩阵，则有以下性质：

(1) $k(A+B)=kA+kB$

(2) $(k+l)A=kA+lA$

(3) $(kl)A=k(lA)$

(4) $1A=A$, $0\cdot A=0$, $(-1)A=-A$

定义： $m\times \underline{n\quad a}\times s \Rightarrow m\times s$

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $B=(b_{ij})_{n\times p}$，则 $C=AB$，其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

定理：若以下矩阵加法、乘法皆可进行，则有

(1) $(AB)C=A(BC)$

(2) $A(B+C)=AB+AC$

(3) $IA=AI=A$

(4) $0A=A0=0$

(5) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

* 一般情况下：$AB\neq BA$

定理：当 $AB=BA$ 时，$(A+B)^n=A^n+C_n^1A^{n-1}B+\cdots+B^n$

例：$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$，求 A^{100}

$A=\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 此两矩阵可交换

$\because \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}^n=k^nI_{3\times3}$ 　令 $N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$N^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 　$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^k=0_{3\times3}\ (k\geq3)$

$$\therefore A^{100}=(kI)^{100}+C_{100}^{1}(kI)^{99}N+C_{100}^{2}(kI)^{98}N^{2}$$

$$=k^{100}I+C_{100}^{1}k^{99}N+C_{100}^{2}k^{98}N^{2}$$

$$=\begin{pmatrix} k^{100} & C_{100}^{1}k^{99} & C_{100}^{2}k^{98} \\ & k^{100} & C_{100}^{1}k^{99} \\ & & k^{100} \end{pmatrix}$$

2.3 矩阵的转置与分块

定义: $m\times n$矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 的转置矩阵是互换A的行与列而得到的$n\times m$矩阵，记为A^T，即

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

定义: 对称阵:

若方阵A满足$A^T=A$，则称A为对称阵，且$a_{ij}=a_{ji}$

定义：反对称阵

若方阵A满足$A^T=-A$，则称A为反对称阵，且$a_{ij}=-a_{ji}$，

$a_{ii}=0$

定理：矩阵转置有如下性质：

(1) $(A^T)^T=A$

(2) $(A+B)^T=A^T+B^T$

(3) $(kA)^T=kA^T$

(4) $(AB)^T=B^TA^T$　　* AB顺序相反

例：设$\alpha\in M_{1,n}(\mathbb{R})$且$\alpha\neq 0$，$A=I-\alpha^T\alpha$，证明：$A^2=A \Leftrightarrow \alpha\alpha^T=1$

“$\Rightarrow$”

$A^2=(I-\alpha^T\alpha)^2=I^2-2\alpha^T\alpha+\alpha^T\alpha\alpha^T\alpha=I-\alpha^T\alpha=A$

$$\alpha^T\alpha\alpha^T\alpha = \alpha^T\alpha$$

$$(\alpha\alpha^T)\alpha^T\alpha = \alpha^T\alpha$$

$$\alpha\alpha^T = 1$$

"$\Leftarrow$" 设$\alpha\alpha^T=1$ $\quad A^2 = I - 2\alpha^T\alpha + \alpha^T(\alpha\alpha^T)\alpha = I - \alpha^T\alpha = A$

可以将一矩阵分块以达到简化计算的效果

例: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 求AB

令$A=\begin{pmatrix} C_{2\times2} & O_{2\times1} \\ O_{2\times2} & D_{2\times1} \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} E_{2\times3} \\ F_{1\times3} \end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix} CE+OF \\ OE+DF \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} CE \\ DF \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 11 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

例: A为$m\times n$矩阵，若$\forall\, n\times1$列矩阵X都有$AX=0$，

证明$A=0$

不妨取 $e_i \in X$，A可分块为列矩阵组 $A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$

$$Ae_i=(A_1,A_2,\cdots,A_n)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=A_i=0$$

$\therefore A=0$

$$*A^T=\begin{pmatrix}A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{n1}^T\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1m}^T & A_{2m}^T & \cdots & A_{nm}^T\end{pmatrix}$$

2.4 方阵的逆矩阵

n个未知量n个方程的线性方程组可写成 $AX=\beta$，

则 $X=A^{-1}\beta$

定义：A为n阶方阵，若$\exists$n阶方阵B，s.t. $AB=BA=I$，

则称A为可逆阵，且 $A^{-1}=B$，若不存在矩阵B，则称A为奇异阵

例：设 $A^2=A$，证明 $I+A$ 可逆且 $(I+A)^{-1}=I-\frac{1}{2}A$

$$A^2+A-2A-2I=-2I \Rightarrow A(A+I)-2(A+I)=-2I$$

$-\frac{1}{2}(A-2I)(A+I)=I$ ∴ $(A+I)$ 可逆，且 $(A+I)^{-1}=-\frac{1}{2}(A-2I)$

定理：可逆阵有如下性质：

(1) I 可逆，且 $I^{-1}=I$

(2) A 可逆，A^{-1} 可逆，$(A^{-1})^{-1}=A$

(3) 若 A, B 可逆，则 $A\cdot B$ 可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ *

(4) 若 A 可逆，则 A^T 可逆，$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

(5) A可逆 $k\neq 0$，则 kA可逆，且 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$

初等矩阵：

单位矩阵I经过一次行初等变换得到的矩阵称为初等矩阵，它们一共有三种：

(1) 在I的第i行乘非零的数c，得

$$E(i(c))=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

(2) 对换I的第i行和第j行，得

$$E(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ (j\text{行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

(3) 把I的第i行的d倍加到第j行，得

$$E(i(d),j)=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccccc}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & d & \cdots 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ (j\text{行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

定理：对一个$n\times p$矩阵A作行初等变换相当于用相应的n阶初等矩阵左乘A.

定义：对于两个同型矩阵A和B来说，若$\exists$一连串的初等矩阵$E_1,E_2,\cdots,E_k$, s.t. $B=E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1A$,

则称B行等价于A

定理：(可逆矩阵的判定定理I)

设A是n阶方阵，那么以下条件等价：

(1) A可逆

(2) 齐次线性方程组 $AX=0$ 只有零解

(3) 非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 有唯一解

(4) A行等价于 I

(5) A是初等矩阵的乘积

用初等变换求逆矩阵：

$$(A\ I) \Rightarrow (I\ A^{-1})$$

*例：初等行变换方法求下面矩阵的逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

补：$E^n(i(c)) = E(i(c^n))$

$$E^n(i,j) = \begin{cases} E(i,j) & 当n为奇 \\ I & 当n为偶 \end{cases}$$

$E^n(i(d),j) = E(i(d^n),j)$

$E^{-1}(i(c)) = E(i(\frac{1}{c}))$

$E^{-1}(i,j) = E(i,j)$

$E^{-1}(i(d),j) = E(i(-d),j)$

2.5 方阵的行列式

定义:

n阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的行列式$|A|$是一个数,

它通过以下方式得到

(1) 选择A的任意一行(第i行):$(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})$, 记$M_{ij}$

为A中划去元素a_{ij}所在第i行和第j列,由剩下的元素按原

来的排法构成一个n-1阶方阵的行列式,称为a_{ij}的余式

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & \boxed{a_{ij}} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

再记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为a_{ij}的代数余子式,则

定义 $|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$，称为按第i行展开

(2)选择A的任意一列(第j列)：

$$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$，称为按第j列展开

n阶行列式的性质：

(1)转置不变性：$|A^T|=|A|$

(2)交换$|A|$中两行(列)位置，行列式反号

(3)若$|A|$中有两行(列)相同，那么行列式为零

(4)非零的数c乘行列式$|A|$的一行(列)，相当于用这个数乘这个行列式，即行(列)的公因子可以提出来

(5)若$|A|$中两行(列)成比例，则$|A|=0$

(6) $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

(7) 把$|A|$中一行(列)的某个倍数加到另一行(列),行列式的值不变

*例: 计算 $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 \\ 8 & -1 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ -8 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = D$

$D = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & -7 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 18\cdot(-1)\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$

$= 324$

定义:

在1,2,⋯n这n个数字组成排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$中,一个大的数排在一个小数之前,称为构成一个逆序,一个排列逆序的总数称为

逆序数，用记号 $T(i_1, i_2 \cdots i_n)$ 来表示

*例：求 $T(2\ 4\ 1\ 3) = 3$

*例：求 $n\ n-1 \cdots 3\ 2\ 1$ 的逆序数

$$T = (n-1) + (n-2) + \cdots + 0 = \frac{(n-1) \times n}{2}$$

定理：设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶方阵，则其行列式 $|A|$ 等于

$$|A| = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n} (-1)^{T(i_1, i_2, \cdots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

其中求和跑遍 $1, 2, \cdots n$ 的所有排列 $i_1, i_2 \cdots i_n$

2.6 行列式的应用

定理：设 A 为 n 阶方阵，E 为 n 阶初等矩阵，则 $|EA| = |E||A|$

定理：若A,B为n阶方阵，则 $|AB|=|A||B|$

定理：n阶方阵A是奇异阵 $\Leftrightarrow |A|=0$

定理：(可逆矩阵判定定理Ⅱ) n阶方阵A可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

定理：设 $A=(a_{ij})$ 是n阶方阵，其元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，则

成立关系式：$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A| & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

定义：方阵A的伴随阵 $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$，且有

$AA^*=|A|I$

定理：当$|A|\neq 0$时，$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

当$|A|=0$时，$|A^*|=0$

例：设A、B都是n阶矩阵，$|A|=2$ $|B|=-3$，则$|2A^*B^{-1}|=?$

$$|2A^*B^{-1}|=\left|2\,|A|A^{-1}B^{-1}\right|=|4A^{-1}B^{-1}|=\frac{4^n}{|A||B|}=-\frac{4^n}{6}$$

系：设A为n阶矩阵，$|A^*|=|A|^{n-1}$

Cramer's Rule：

设A为n阶可逆矩阵，$\beta=(b_1,b_2,\cdots b_n)^T$是n维向量，

用D_i表示将β代替n阶行列式$|A|$第i列而得的行列式，即

$$D_i=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则线性方程组 $AX=\beta$ 的唯一解 $X=(x_1, x_2 \cdots x_n)^T$ 的分量为

$$x_i=\frac{D_i}{|A|} \quad i=1,2,\cdots,n$$

补: $|E(i(c))| = c$

$|E(i,j)| = -1$

$|E(i(d),j)| = 1$

行列式

1. 箭形

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & & & & a_n \end{vmatrix} \xlongequal[\text{减至第1列}]{\text{第}i\text{列}\times\frac{1}{a_i}} \begin{vmatrix} a_1-\frac{1}{a_2}-\cdots-\frac{1}{a_n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=2}^{n}a_i$$

2. 两三角形

(1) [化为箭形]

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b & \cdots & b \\ b & a_2 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{所有行减第1行}} \begin{vmatrix} a_1 & b & \cdots & b \\ b-a_1 & a_2-b & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ b-a_1 & & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{加至第1列}]{\text{第}i\text{列}\times\frac{a_1-b}{a_i-b}} \begin{vmatrix} a_1+\frac{a_1-b}{a_2-b}\cdot b+\cdots+\frac{a_1-b}{a_n-b}\cdot b & b & \cdots & b \\ 0 & a_2-b & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

$$=\left[a_1+(a_1-b)b\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i-b}\right]\prod_{i=2}^{n}(a_i-b)$$

(2) [拆行法]

令 $x_n = b + x_n - b$

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & & a \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a+0 \\ b & x_2 & \cdots & a+0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & b+x_n-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & 0 \\ b & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & x_n-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1-a & 0 & \cdots & a \\ b-a & x_2-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} + (x_n-b)D_{n-1}$$

$$= b\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-a) + (x_n-b)D_{n-1} \qquad (1)$$

令 $x_n = a + x_n - a$，同理有 $D_n = a\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-b) + (x_n-a)D_{n-1}$ (2)

$(1)\cdot(x_n-a) - (2)\cdot(x_n-b) \Rightarrow D_n = \frac{1}{a-b}\left[a\prod_{i=1}^{n}(x_i-b) - b\prod_{j=1}^{n}(x_j-a)\right]$

(3) [类两三角形]

$$D_n=\begin{vmatrix} d & b & b & \cdots & b \\ c & x & a & \cdots & a \\ \vdots & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{第1列}\times\frac{a}{c}]{\text{第1行}\times\frac{a}{b}} \frac{bc}{a^2}\begin{vmatrix} \frac{a^2d}{bc} & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{令}\, m=a-\frac{a^2d}{bc}]{\text{所有行减第1行}} \frac{bc}{a^2}\begin{vmatrix} \frac{a^2d}{bc} & a & a & \cdots & a \\ m & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ m & 0 & x-a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ m & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{减至第1列}]{\text{所有列}\times\frac{m}{x-a}} \frac{bc}{a^2}\begin{vmatrix} \frac{a^2d}{bc}-\frac{am}{x-a}(n-1) & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & x-a \end{vmatrix}$$

$$=\left[d-\frac{(bc-ad)}{x-a}(n-1)\right](x-a)^{n-1}=d(x-a)^{n-1}+(ad-bc)(n-1)(x-a)^{n-2}$$

(4) [升阶法]

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{减至第i行}]{\text{第1行乘}x_i} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 & x_1 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1+\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$* \quad D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = ?$$

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\prod_{i=1}^{n}(y-x_i)$$

$$D_{n+1} = P_0 + P_1 y + P_2 y^2 + \cdots + P_{n-2}y^{n-2} + P_{n-1}y^{n-1} + P_n y^n$$

$$P_{n-1} = (-1)^{2n+1} D_n = -D_n \Rightarrow D_n = -P_{n-1}$$

$$P_{n-1} = -\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\therefore D_n = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\sum_{i=1}^{n} x_i$$

3. 两条线型行列式

(1) 降阶：

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix} = a_n\begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & \iddots & & \\ & & a_1 \ b_1 & & & \\ & & c_1 \ d_1 & & & \\ c_{n-1} & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & & & & & d_n \end{vmatrix} - b_n\begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & \iddots & \\ & & & a_1 \ b_1 & & \\ & & & c_1 \ d_1 & & \\ & & \iddots & & \ddots & d_{n-1} \\ c_n & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_n d_n D_{2(n-1)} - b_n c_n D_{2(n-1)} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2n-2}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix}$$

Laplace定理:

在D中任取k(k∈[1,n-1])行,由这k行元素组成的一切k阶子式与其代数余子式的乘积和等于D

例:求$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 消去一.三行

$M_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-2$ $M_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ $M_3=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-1$

$M_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2$ $M_5=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=6$ $M_6=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-1$

$A_1=1$ $A_2=-2$ $A_3=5$ $A_4=0$ $A_5=0$ $A_6=0$

$$D=\sum_{i=1}^{6} M_iA_i=-7$$

(2) Laplace展开

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{从}1,n\text{行展开}} \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix}(-1)^{1+2n+2n+1}D_{2n-2}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix}$$

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & b_{n-1} \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{以}1,n\text{行展开}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_n & 0 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+n+1+2} b_2\cdots b_{n-1}+$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ b_n & a_n \end{vmatrix}(-1)^{1+n+1+n} a_2\cdots a_{n-1}+\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & a_n \end{vmatrix}(-1)^{1+n+2+n}\begin{vmatrix} 0 & b_2 & & \\ \vdots & a_3 & \ddots & \\ 0 & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n} b_i+\prod_{i=1}^{n} a_i$$

4. Hessenbarg型(累加消去法)

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&-1&0&\cdots&0\\0&2&-2&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&\ddots&\\0&&&n-1&1-n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)}{2}&2&3&\cdots&n\\0&-1&0&\cdots&0\\0&2&-2&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&\ddots&\\0&&&n-1&1-n\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-1)\cdot(-2)\cdots\cdots(1-n)=(-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{2}$$

5. 三对角型行列式(递推法)(特征方程)

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&&&\\c&a&b&&\\&c&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&b\\&&&c&a\end{vmatrix}=aD_{n-1}-bcD_{n-2}\Leftrightarrow\begin{cases}D_n-x_1D_{n-1}=x_2(D_{n-1}-x_1D_{n-2})\\D_n-x_2D_{n-1}=x_1(D_{n-1}-x_2D_{n-2})\end{cases}$$

x_1、x_2为$x^2-bx+ac=0$的两根$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=b\\x_1x_2=ac\end{cases}$

$$D_n-x_1D_{n-1}=x_2(D_{n-1}-x_1D_{n-2})=x_2^2(D_{n-2}-x_1D_{n-3})=\cdots\cdots$$

$$=x_2^{n-2}(D_2-x_1D_1)$$

$D_2 = a^2 - bc \qquad D_1 = a$

$$D_n - x_1 D_{n-1} = x_2^{n-2}(b^2 - ac - bx_1) = x_2^{n-2}\left[(x_1+x_2)^2 - x_1x_2 - (x_1+x_2)x_1\right]$$

$= x_2^n$ 同理有 $D_n - x_2 D_{n-1} = x_2^n$

I. $x_1 \neq x_2$ 时，

$$\begin{cases} D_n - x_1 D_{n-1} = x_2^n \Leftrightarrow x_2 D_n - x_1 \cdot x_2 D_{n-1} = x_2^{n+1} \\ D_n - x_2 D_{n-1} = x_1^n \Leftrightarrow x_1 D_n - x_1 x_2 D_{n-1} = x_1^{n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_n = \frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{x_2 - x_1}$$

II. $x_1 = x_2$ 时， $\begin{cases} 2x_1 = b \\ x_1^2 = ac \end{cases}$

$$D_n - x_1 D_{n-1} = x_1^n \Leftrightarrow D_n = x_1 D_{n-1} + x_1^n = x_1^2 D_{n-2} + 2x_1^n = \cdots$$

$$= x_1^{n-1} D_1 + (n-1)x_1^n = 2x_1^n + (n-1)x_1^n$$

$$= (n+1)x_1^n$$

$$\therefore D_n=\begin{cases}\dfrac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_1-x_2} & x_1\neq x_2\\ (n+1)x_1^n & x_1=x_2\end{cases}$$

例: $D_n=\begin{vmatrix}5&3&&&\\2&5&3&&\\&2&5&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&3\\&&&2&5\end{vmatrix}$

$D_n=5D_{n-1}-6D_{n-2}\Rightarrow$ 有特征方程 $x^2-5x+6=0$

$\Rightarrow x_1=3\quad x_2=2\Rightarrow D_n=\dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3-2}=3^{n+1}-2^{n+1}$

例: $D_n=\begin{vmatrix}2n&n&&&\\n&2n&\ddots&&\\&\ddots&\ddots&n\\&&n&2n\end{vmatrix}$

$D_n=2nD_{n-1}-n^2D_{n-2}\Rightarrow$ 有特征方程 $x^2-2nx+n^2=0$

$\Rightarrow x_1=x_2=n\Rightarrow D_n=(1+n)n^n$

6. 各元素和相等

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1&a_1&\cdots&a_1\\a_2&1+a_2&\cdots&a_2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n&a_n&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}=(1+a_1+\cdots+a_n)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_2&1+a_2&\cdots&a_2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n&a_n&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^n a_i\right)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\&1&&\vdots\\&&\ddots&\vdots\\&&&1\end{vmatrix}=1+\sum_{i=1}^n a_i$$

7. 相邻两行差k倍

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{前行减后行}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第1列加至后n列}} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ -1 & -2 & -2 & & -2 & \\ n-1 & \cdots & \cdots & \cdots & & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\cdot 2^{n-2}(n-1)$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \cdots & a^{n-4} & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a^2 & a^3 & a^4 & \cdots & 1 & a \\ a & a^2 & a^3 & \cdots & a^{n-1} & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{后一行的a倍}]{\text{前一行减去}} \begin{vmatrix} 1-a^n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1-a^n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1-a^n & 0 \\ a & a^2 & \cdots & \cdots & a^{n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(1-a^n)^{n-1}$$

8. Vandermonde 行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & \cdots & a_1 b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_2 b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n+1} a_i^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \cdots & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1} a_i^n \prod_{1\le i<j\le n+1}\left(\frac{b_j}{a_j}-\frac{b_i}{a_i}\right)$$

9. 拆成矩阵乘积

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix}$$

$$\because \quad (a_i+b_j)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_i^k b_j^{n-k}$$

$$\therefore \quad D_{n+1} = \left|\begin{pmatrix} 1 & C_n^1 a_0 & C_n^2 a_0^2 & \cdots & C_n^n a_0^n \\ 1 & C_n^1 a_1 & C_n^2 a_1^2 & \cdots & C_n^n a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_n^1 a_n & C_n^2 a_n^2 & \cdots & C_n^n a_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0^n & b_1^n & \cdots & b_n^n \\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \prod_{i=1}^{n} C_n^i \prod_{0\le i<j\le n}(a_j-a_i)\prod_{0\le i<j\le n}(b_i-b_j)$$

10. 以 $A\cdot A^T$ 化简

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & -z & w \\ y & -x & -w & -z \\ z & -w & x & y \\ w & z & y & -x \end{vmatrix}$$

令 $u = x^2+y^2+z^2+w^2$

$$|A\cdot A^T| = \begin{vmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{vmatrix} = u^4 \Rightarrow |A| = u^2$$

$\therefore |A| = (x^2+y^2+z^2+w^2)^2$