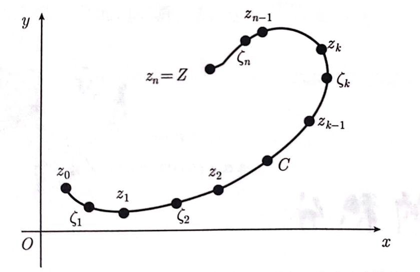
3.1 复变函数积分的概念

对于闭曲线 C，规定，逆时针方向为曲线的正方向，记作 C；

顺时针方向为曲线负方向，记作 C^-.

对于非闭曲线 C，指明起点和终点来确定方向，规定由起点到终点为正方向，记 C，相反方向为负方向，记 C^-.

若曲线 C 的参数方程为 $z=z(t)=x(t)+iy(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$，其中 t 为实参数，规定 t 增加方向为曲线 C 的正方向，即 $z_0=z(\alpha)$ 到 $Z=z(\beta)$ 方向为正方向.



定义：

设 C 是以 z_0 为始点、Z 为终点的曲线，复变函数 $f(z)$ 在 C 上有定义，在 C 上沿着由 z_0 到 Z 的方向依次取分点，$z_0, z_1 \cdots z_{n-1}, z_n=Z$，将 C 分成 n 个小弧段，

对应于每段作乘积 $f(\zeta_k)\Delta z_k$ ，$k=1,2,\cdots,n$ ，其中 ζ_k 是以 z_{k-1} 及 z_k 为端点的那小弧段上的任意一点.，$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$. 再作出和式 $S_n=\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k$，令 δ 为所有小弧段的弧长最大值，当 $\delta\to0$ 时，若不论对曲线 C 分法及 ζ_k 取法如何，和式 S_n 都有唯一极限，则称 $f(z)$ 在 C 上可积，称此极限为 $f(z)$ 沿 C 的积分，记 $\int_C f(z)dz=\lim_{\delta\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k=\lim_{\delta\to0}S_n$

若 C 为闭曲线，且为逆时针方向，则沿此闭曲线积分记为 $\oint_C f(z)dz$

性质：

(1) $\int_{C^-}f(z)dz=-\int_C f(z)dz$

(2) $\int_{C_1\cup C_2}f(z)dz=\int_{C_1}f(z)dz+\int_{C_2}f(z)dz$

(3) $\int_C[f(z)\pm g(z)]dz=\int_C f(z)dz\pm\int_C g(z)dz$

(4) $\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$

(5) 设曲线C长度为L，f(z)在C上可积，且$|f(z)|\le M$，则

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|ds \le ML$$

定理：

若f(z)在光滑(或按段光滑)的曲线C上连续，则f(z)在C上可积

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

若C由参数方程形式给出：$x=x(t)$ $y=y(t)$ $(a\le t\le b)$，则

$z(t)=x(t)+iy(t)$，$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$

例：$\int_C \mathrm{Re}z\,dz$，其中曲线C是：(1) 连接0到i+1的直线段；

(2) 从0到1的直线段C_1与从1到1+i的直线段C_2所连成的折线；

(3) 半圆$|z|=1$，$0\le \arg z\le \pi$（始点为1）

(1) $C:\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases} \quad (0\le t\le 1)$

$z=(1+i)t \quad z'(t)=1+i$

$\therefore \int_C \mathrm{Re}z\,dz=\int_0^1 \mathrm{Re}[(1+i)t](i+1)dt$

$=(1+i)\int_0^1 t\,dt=\frac{i+1}{2}$

(2) C_1: $x=t \quad y=0 \quad (0\le t\le 1)$ $\quad\therefore \int_{C_1}\mathrm{Re}z\,dz=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}$

C_2: $x=1 \quad y=t \quad (0\le t\le 1)$ $\therefore \int_{C_2}\mathrm{Re}z\,dz=\int_0^1 1\cdot i\,dt=i$

$\therefore \int_C \mathrm{Re}z\,dz=\int_{C_1}\mathrm{Re}z\,dz+\int_{C_2}\mathrm{Re}z\,dz=\frac{1}{2}+i$

看出复变函数的积分与路径有关

(3) $C: z=e^{i\theta} \quad 0\le\theta\le\pi$

$$\therefore \int_C \mathrm{Re}\,z\,dz = \int_0^{\pi} \cos\theta \, i e^{i\theta} d\theta = i\int_0^{\pi} \frac{e^{2i\theta}+1}{2} d\theta$$

$$= \frac{i}{2}\left(\frac{e^{2i\theta}}{2i}\Big|_0^{\pi} + \frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} \right) = \frac{\pi}{2} i$$

例：求 $\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}$，其中，$n\in N$，$C$是以$z_0$为圆心$R$为半径的圆周，

圆周C取逆时针方向

$C: z = z_0 + Re^{i\theta} \ (0\le\theta\le 2\pi)$

此时，$z'(\theta) = iRe^{i\theta}$

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} [\cos(n-1)\theta - i\sin(n-1)\theta] d$$

$$= \begin{cases} 2\pi i & n=1 \\ 0 & n\ne 1 \end{cases}$$

3.2 Cauchy积分定理

Cauchy积分定理:

如果$f(z)$在简单光滑(或逐段光滑)闭曲线C上及其内部D内解析,

则$\oint_C f(z)dz=0$

定理:

若$f(z)$在单连通区域D内处处解析,则$f(z)$沿D内任何一条简单光滑

闭曲线C的积分为零,即$\oint_C f(z)dz=0$

定理:

设$f(z)$是单连通区域D内的一个解析函数,而C_1和C_2是D内连接

z和z_0的任意两条逐段光滑曲线则 $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$

定理:

若 $f(z)$在单连通区域D内解析,则 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 也在D内解析,且 $F'(z)=f(z)$

定理:

若 $f(z)$在单连通区域D内解析,$H(z)$为$f(z)$的一个原函数,则

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = H(z)-H(z_0)$$

∴许多关于初等函数的积分公式形式上与实函数相应公式一样,如:

$$\int_{z_0}^{z} z^n dz = \frac{1}{n+1}(z^{n+1}-z_0^{n+1}) \quad n\in N$$

$$\int_{z_0}^{z} e^z dz = e^z - e^{z_0}$$

$$\int_{z_0}^{z} \cos z dz = \sin z - \sin z_0$$

例: $\int_C (2+iz)^2 dz$，其中 C 是从 1 到 i 的线段

$$\int_C (2+iz)^2 dz = -i\int_1^i (2+iz)^2 d(2+iz) = -i\frac{(2+iz)^3}{3}\Big|_1^i = -\frac{11}{3}+\frac{1}{3}i$$

若 C 的内部不完全含于 D，则 f(z) 沿 C 的积分就不一定为零。设多连通区域 D 的边界为 n+1 条闭曲线所构成，其中 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 在 C_0 的内部且它们之间互不相交，互不包含，此时关于 D 的正方向的边界曲线组成复合闭路 $C = C_0 + C_1^- + \dots + C_n^-$

复合闭路定理:

设 $f(z)$ 在以 $C=C_0+C_1^-+\cdots+C_n^-$ 表示的复合闭路 C 上及其边界的区域 D 内解析，则 $\oint_C f(z)dz=0$，即 $\oint_{C_0} f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)dz$

Specially:

闭路变形原理:

若 D 是由内外两条闭路 C_0, C_1 所围成的一个环行域，而 $f(z)$ 在 D 及其边界上解析，则有 $\oint_{C_0} f(z)dz=\oint_{C_1} f(z)dz$

即在区域 D 内的一个解析函数沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值.

例：求 $\oint_C \frac{dz}{z^2-z}$，此处 C 是包含单位圆盘的简单闭曲线.

$f(z)=\frac{1}{z^2-z}$ 在 C 内除 $z_1=0$ 与 $z_2=1$ 两个奇点外处处解析，在 C 内作内边界 C_1. C_2.

$$\therefore \oint_C \frac{dz}{z^2-z} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z^2-z} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z^2-z} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z-1} - \oint_{C_1} \frac{dz}{z} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z-1} - \oint_{C_2} \frac{dz}{z}$$

$$= 0-2\pi i+2\pi i-0=0$$

3.3 Cauchy积分公式

Cauchy积分公式:

设$f(z)$在闭路C上及其内部D内是解析的,而z_0是D内任意一点,

则 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$

∴对于解析函数,只要知道它区域边界上的值,那么,区域内部的点上的值就完全确定了.

系:

若两个解析函数在区域边界处处相等,则它们在整个区域上都相等

推广:

若 $f(z)$ 在以 $C=C_0+C_1^-+\cdots+C_n^-$ 表示的复合闭路 C 上及以其为边界的区域 D 内解析，而 z_0 为 D 内任意一点，则 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$

例：求 $\oint_C \frac{e^z}{z(z-2i)}dz$，其中 C 是圆心在 $3i$，半径为2的圆周.

$f(z)=\frac{e^z}{z}$ 在 C 内部解析

$\therefore$ 由Cauchy公式 $\oint_C \frac{e^z dz}{z(z-2i)}=\oint_C \frac{f(z)}{z-2i}dz=2\pi i f(2i)=2\pi i\frac{e^{2i}}{2i}=\pi e^{2i}$

例：$f(z)=\oint_C \frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}d\xi$，其中 C 为圆周，$|z|=3$ 求 $f'(1+i)$ 的值.

$f(z)$ 的奇点为 $\xi=z$

当 $|z|<3$ 时，$f(z)=\oint_C \frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}d\xi=2\pi i(3\xi^2+7\xi+1)\big|_{\xi=z}$

$=2\pi i(3z^2+7z+1)$

当 $|z|>3$ 时，$\frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}$ 在 C 内解析 $\therefore f(z)=0$

$\because |z|=\sqrt{2}<3 \qquad \therefore f(z)=2\pi i(3z^2+7z+1) \Rightarrow f'(1+i)=2\pi i(13+6i)$

例：利用 $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz$ 计算实积分

$\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)d\theta \qquad \int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta$

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}=2\pi i$$

令 $z=e^{i\theta}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$，有

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=\int_0^{2\pi}\frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}}ie^{i\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}ie^{\cos\theta+i\sin\theta}d\theta$$

$$=-\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)d\theta+i\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=2\pi i$$

$\therefore \int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)d\theta=0 \qquad \int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=2\pi$

例：设 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 内解析，当 z 为实数时取实值，且 $f(0)=0$，

又设 $v(x,y)=\mathrm{Im}\,f(x+iy)$，证明当 $-1<a<1$ 时，有

$$\int_0^{2\pi}\frac{a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}v(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\pi f(a)$$

I. 当 $a=0$ 时，等式自然成立

II. 当 $a\neq 0$ 时，$\int_0^{2\pi}\frac{a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}v(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\operatorname{Im}f(\cos\theta+i\sin\theta)d\theta$$

$$=\operatorname{Im}\int_0^{2\pi}\frac{a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}f(\cos\theta+i\sin\theta)d\theta$$

令 $z=e^{i\theta}\ (0\le\theta\le 2\pi)$，则

$$\int_0^{2\pi}\frac{a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}f(\cos\theta+i\sin\theta)d\theta$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{a\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})}{1-2a(z+\frac{1}{z})\frac{1}{2}+a^2}f(z)\frac{1}{iz}dz$$

$$=-\frac{a}{2}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)f(z)}{(z-a)(1-az)z}dz$$

在 $|z|=1$ 内，分别以 a, 0 为圆心，充分小 $r\ (r>0)$ 为半径作小圆 C_1. C_2,

使 C_1 与 C_2 互不相交且与 $|z|=1$ 也不相交，则有

$$\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)f(z)}{(z-a)(1-az)z}dz=\oint_{C_1}\frac{\frac{(z^2-1)f(z)}{(1-az)z}}{z-a}dz+\oint_{C_2}\frac{\frac{(z^2-1)f(z)}{(z-a)(1-az)}}{z}dz$$

$$=2\pi i\frac{(a^2-1)f(a)}{(1-a^2)a}+2\pi i\frac{-f(0)}{-a}=-2\pi i\frac{f(a)}{a} \quad \therefore \#$$

定理:

若$f(z)$在闭路C上及其所围成的单连通区域D内是解析的,

则在D内任意一点z_0,$f(z)$有任意阶导数,并在D内下列公式成立:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad (n=1,2,\cdots)$$

例:求$\oint_C\frac{\cos z\,dz}{(z-z_0)^3}$,其中$C$是包含点$i$的简单闭曲线

$f(z)=\cos z$ $\quad$ $\oint_C\frac{\cos z\,dz}{(z-z_0)^3}=\frac{2\pi i}{2!}f^{(2)}(i)=-\pi i\cos i$

平均值公式

设C是以点z_0为圆心,R为半径的一个圆周,设$f(z)$在C上及其内部

解析，则 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\theta})\,d\theta$

$f(z)$ 在圆心处的值恰好等于它圆周上的值的平均.

Cauchy 不等式:

设 M 为 $|f(z)|$ 在上述圆周 C 上的上界，则有

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!M}{R^n}$$

Specially，当 $n=1$ 时 $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}$

整函数：在 z-平面上解析的函数

关于整函数的 Liouville 定理:

若整函数 $f(z)$ 在 z-平面上是有界的，即满足 $|f(z)|\leq M$，则 $f(z)$ 必为常数.

代数学基本定理：

任意一个复系数多项式 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n \ (n\geq1, a_0\neq0)$

在z-平面上必有零点，即 $f(z)=0$ 必有根

例：利用 Liouville定理证明代数学基本定理.

如若不然，∵ $f(z)$ 在全平面解析，且处处不为零，

∴ $F(z)=\frac{1}{f(z)}$ 也是整函数

∵ $\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{f(z)}=0$

∴ $F(z)$ 在全平面有界

∴ $F(z)$ 必为常数

∴ $f(z)$ 也为常数

∴ 矛盾 ∴ #

Morrera定理:

设$f(z)$为区域D内的连续函数，且对D内任意一条其内部属于D的简单光滑曲线C都有$\oint_C f(z)=0$，则$f(z)$是D内的解析函数

Poisson积分公式:

设$f(z)$在以z_0为圆心，R为半径的圆C内及C上是解析的，则

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi$$

∴任何一个在圆内调和且在闭圆盘上的调和函数，其在圆内的值都可以用圆周上的值和积分表示

Specially，若取$z=z_0$，即$r=0$时，有

调和函数的平均值公式:

$$U(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2\pi R}\oint_C u\,ds,$$

其中C表圆周，ds是圆周上的弧单元，而u则是函数在C上的值.