9.1 线性变换的概念

保持原点不动的平面仿射变换的变换式是

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$ 其中 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

(1) 伸缩变换，如：$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$ $a、b \neq 0$.

(2) 关于x轴反射变换 $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

(3) 绕原点逆时针方向旋转θ角的旋转变换

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

对于仿射变换式写成矩阵形式，有 $\sigma\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x & a_{12}y \\ a_{21}x & a_{22}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

变换 $\sigma: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的一个本质特征是它满足以下两个条件：

(1) $\forall \alpha = (x, y)^T, \beta = (u, v)^T \in \mathbb{R}^2, \sigma(\alpha+\beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$

(2) $\forall k\in\mathbb{R}$ 及 $\alpha=(x,y)^T\in\mathbb{R}^2$，$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$

定义:

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，σ 为 V 上的一个变换，若满足

(1) $\forall\alpha,\beta\in V$，$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$

(2) $\forall\alpha\in V$，$k\in\mathbb{F}$，$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$，则称 σ 是 V 上的线性变换

以下常用的线性变换:

(1) 在线性空间 $\mathbb{F}^n$ 中，令 $\sigma\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

即 $\sigma(X)=AX$

(2) 在线性空间 $\mathbb{F}[x]$ 中，求导变换，$D(f(x))=f'(x)$

(3) 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$k\in\mathbb{F}$ 为固定数，数乘变换: $\forall\alpha\in V$，$P(\alpha)=k\alpha$

Specially，当 $k=0$ 时，有零变换，$\forall \alpha \in V, \theta(\alpha)=0$

(4) 线性空间 $M_n(\mathbb{F})$ 中和 $Z \in M_n(\mathbb{F})$，记变换 $\sigma(Z)=MZ-ZM$

(5) 在 $\mathbb{R}^3$ 的几何空间中，直线投影变换：$\pi_b(a)=a_b=\left(\frac{a \cdot b}{b \cdot b}\right)b$

线性变换的性质

(1) $\sigma(0)=0$，$\forall \alpha \in V, \sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$

(2) 线性变换保持向量组的线性组合与线性性质不变

定义：

设 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 的所有线性变换的集合 $\mathcal{L}(V)$，

$\forall \sigma, \tau \in \mathcal{L}(V)$，$(\sigma+\tau)(\alpha)=\sigma(\alpha)+\tau(\alpha)$

$\forall \alpha \in V$, $(k\sigma)(\alpha)=k\sigma(\alpha)$

例: $\sigma\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix}$ 与 $\tau\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\z\\0\end{pmatrix}$，求 $\sigma+\tau$ 和 5σ

$$(\sigma+\tau)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\sigma\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x+z\\y\end{pmatrix}$$

$$(5\sigma)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=5\sigma\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5x\\5y\end{pmatrix}$$

定义:

设 F 上的线性空间 V 的所有线性变换的集合 $\mathcal{L}(V)$,

$\forall \sigma,\tau\in\mathcal{L}(V)$, $(\sigma\tau)(\alpha)=\sigma(\tau(\alpha))$

Specially, $(\sigma^2)(\alpha)=\sigma(\sigma(\alpha))$

例: $\sigma\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix}$ 与 $\tau\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\z\\0\end{pmatrix}$，求 $\sigma\tau,\tau\sigma,\sigma^2$ 及 $(\sigma+\tau)^2$

$$(\sigma\tau)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x\\z\end{pmatrix}\quad \tau\sigma\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}\quad \sigma^2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\x\end{pmatrix}$$

$$(\sigma+\tau)^2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\sigma^2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\tau^2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\sigma\tau\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\tau\sigma\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x+y\\x+z\end{pmatrix}$$

一般地，$\sigma\tau\neq\tau\sigma$

但对于恒等变换ε，有$\varepsilon\sigma=\sigma\varepsilon=\sigma$

还有以下性质

(i) 对于$\forall\sigma,\tau,\rho\in\mathcal{L}(V)$，有$(\sigma\tau)\rho=\sigma(\tau\rho)$

(ii) 对于$\forall\sigma,\tau,\rho\in\mathcal{L}(V)$，有$\sigma(\tau+\rho)=\sigma\tau+\sigma\rho$ 和$(\tau+\rho)\sigma=\tau\sigma+\rho\sigma$

(iii) $\forall\sigma\in\mathcal{L}(V)$，$\sigma^0=\varepsilon$

(iv) $\forall\sigma\in\mathcal{L}(V)$，$\sigma^m\sigma^n=\sigma^{m+n}$ $(\sigma^m)^n=\sigma^{mn}$

但一般地，$(\sigma\tau)^n\neq\sigma^n\tau^n$

定义:

设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$为$\mathbb{F}[x]$中的一个多项式，$\sigma\in\mathcal{L}(V)$，有

$f(\sigma)=a_n\sigma^n+\cdots+a_0\varepsilon$，称为$\sigma$的多项式

定义：

若对于$\sigma\in\mathcal{L}(V)$，$\exists\tau\in\mathcal{L}(V)$，s.t. $\sigma\tau=\tau\sigma=\varepsilon$，称

σ可逆，τ为σ的逆变换，记σ^{-1}

9.2 线性变换矩阵

定义：

$\left(\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)\right)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$，称$A$为$\sigma$在$\alpha_1\cdots\alpha_n$下

的矩阵

例：设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为V上一个基，且V上的线性变换$\sigma$将此映成

$\sigma(\alpha_1)=2\alpha_1+\alpha_3$，$\sigma(\alpha_2)=3\alpha_2-4\alpha_3$，$\sigma(\alpha_3)=\alpha_1$，若V中向量$\alpha$在这个基下坐

标为$(2,-1,1)^T$，求$\sigma(\alpha)$在基下坐标

法一：

$\alpha=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$

$\sigma(\alpha)=2\sigma(\alpha_1)-\sigma(\alpha_2)+\sigma(\alpha_3)=5\alpha_1-3\alpha_2+6\alpha_3$

即为$(5,-3,6)^T$

法二：

$(\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\sigma(\alpha_3))=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&-4&0\end{pmatrix}$

$\sigma(\alpha)=2\sigma(\alpha_1)-\sigma(\alpha_2)+\sigma(\alpha_3)$

$\therefore\ \sigma(\alpha)=(\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\sigma(\alpha_3))\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&-4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}5\\-3\\6\end{pmatrix}$

定理:

设线性空间V上线性变换σ在V的一个基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵是$A$，$V$中向量$\alpha$在基$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$下坐标是$(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$，则$\sigma(\alpha)$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下坐标$(y_1,y_2\cdots y_n)^T$可按公式 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 计算

例: 设线性空间$M_2(F)$上的线性变换σ为，$\sigma(Z)=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}Z$，

求σ在基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的矩阵

$$\sigma(E_{11})=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}=-E_{11}+4E_{21}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(E_{12})=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(E_{21})=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(E_{22})=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

定理：

设线性空间V上的线性变换σ在V的两个基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$与$\beta_1\cdots\beta_n$下的矩阵分别是A、B，且由基$\alpha_1\cdots\alpha_n$到基$\beta_1\cdots\beta_n$的过渡阵为P，则有

$$B=P^{-1}AP$$

例：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为$V$的一个基，且$V$上的线性变换$\sigma$在这个基下的矩阵是
$$A=\begin{pmatrix}-1&-2&-2&-2\\2&6&5&2\\0&0&-1&-2\\0&0&2&6\end{pmatrix}$$

设$\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=-\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_3=-\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_4=-\alpha_3+\alpha_4$

(1) 证：$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4$也是$V$的一个基

(2) 求σ在$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4$下的矩阵$B$

(3) 设$\gamma=3\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4$ 求$\sigma(\gamma)$在基$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4$下的坐标

(1) $P=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ $\quad |P|=1\neq0\quad \therefore P$可逆 $\quad\therefore$ ※

(2) $B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2&-2&-2\\2&6&5&2\\0&0&-1&-2\\0&0&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\2&4&0&0\\0&0&1&3\\0&0&2&4\end{pmatrix}$

(3) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)P^{-1}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$\gamma=3\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)P^{-1}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\begin{pmatrix}3\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\sigma(\gamma)=B\begin{pmatrix}3\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\4\\6\end{pmatrix}$

定理:

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$为数域$\mathbb{F}$上线性空间$V$的一个基,则对$\forall\sigma,\tau\in\mathcal{E}(V)$

和 $k\in\mathbb{F}$,若σ与τ在这个基下的矩阵分别为$A.B$,则

(1) $\sigma+\tau$在这个基下的矩阵为$A+B$

(2) $k\sigma$ 在这个基下的矩阵为 kA

(3) $\sigma\tau$ 在这个基下的矩阵为 AB

(4) σ 可逆 $\Leftrightarrow A$ 可逆，且 σ^{-1} 在这个基下的矩阵为 A^{-1}

Cayley-Hamilton定理：

设 V 为有限维线性空间，$\sigma \in \mathcal{L}(V)$，若 σ 在 V 的一个基下的矩阵为 A，

则 $f_A(\sigma)=0$，其中 $f_A(\lambda)$ 为 A 的特征多项式

9.3 线性变换的核与值域

定义：

设 σ 是数域 F 上线性空间 V 的线性变换，所有被 σ 映成零向量

的向量集合称为σ的核，记为$Ker(\sigma)$，即 $Ker(\sigma)=\{\alpha\in V \mid \sigma(\alpha)=0\}$

定义：

设σ是数域F上线性空间V的线性变换，σ的全体像的集合称为σ的值域，记$Im(\sigma)$，即 $Im(\sigma)=\{\sigma(\alpha) \mid \alpha\in V\}$

定理：

设σ是数域F上n维线性空间V的线性变换，$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$是$V$的一个基，且$A$为$\sigma$在这个基下的矩阵，则

(1) $Im(\sigma)=L(\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots\sigma(\alpha_n))$

(2) $\dim(Im(\sigma))=rank(A)$

定理：

设 σ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则有

$$\dim(\mathrm{Ker}(\sigma))+\dim(\mathrm{Im}(\sigma))=n$$

系：

设 σ 为 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则以下命题等价

(1) σ 为满射

(2) $\mathrm{Ker}(\sigma)=\{0\}$

(3) σ 为可逆线性变换

(4) σ 为单射

(5) σ 把线性无关的向量组变成线性无关的向量组

9.4 线性变换的不变子空间

定义:

设σ为线性空间V的线性变换,W是V的子空间,若$\forall \alpha \in W$,都有$\sigma(\alpha) \in W$,则称W为σ的不变子空间

例:在$\mathbb{F}^3$中有线性变换 $\sigma\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

判断$V_1 = \{(0, x_2, 0)^T \mid x_2 \in \mathbb{F}\}$和$V_2 = \{(x_1, x_2, 0)^T \mid x_1, x_2 \in \mathbb{F}\}$是否为$\sigma$的不变子空间

$\because \sigma\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1$ $\quad \therefore$ 是

$\sigma(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin V_2$ $\quad \therefore$ 不是

定理：

设σ是P上的n维线性空间V的线性变换，则在V中$\exists$一个基$\alpha_1 \cdots \alpha_n$, s.t. σ在这个基下的矩阵是准对角矩阵$\Leftrightarrow$ V可分解成σ的不变子空间$V_1 \cdots V_m$的直和 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$，其中每个$V_i$的维数等于准对角矩阵中对应的分块矩阵的阶数 $(i=1,2,\cdots m)$

例：若线性空间V上的两个线性变换σ与τ满足 $\sigma\tau = \tau\sigma$，证：τ的核与值域都是σ的不变子空间

$\forall \alpha \in Ker(\tau)$ $\quad \tau(\sigma(\alpha)) = \tau\sigma(\alpha) = \sigma\tau(\alpha) = \sigma(\tau(\alpha)) = \sigma(0) = 0$

$\therefore \sigma(\alpha) \in Ker(\tau)$

$\forall \beta \in Im(\tau)$ $\exists \gamma \in V$, s.t. $\beta = \tau(\gamma)$,

$\sigma(\beta) = \sigma(\tau(\gamma)) = \sigma\tau(\gamma) = \tau\sigma(\gamma) = \tau(\sigma(\gamma)) \in Im(\tau)$ $\quad \therefore$ #

9.5 线性变换的对角化

定义:

设 σ 是 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换，若对于 $\mathbb{F}$ 中的一个数 λ_0，$\exists$ 非零向量 $\alpha\in V$, s.t. $\sigma(\alpha)=\lambda_0\alpha$，称 λ_0 为线性变换 σ 的一个特征值，α 是 σ 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量.

定理:

设 σ 是 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换，且 σ 在 V 的一个基 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 下的矩阵是 A，则有

(1) λ_0 为 σ 的特征值 $\Leftrightarrow$ λ_0 为 A 的特征值

(2) $\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$ 是 σ 属于 λ_0 的特征向量 $\Leftrightarrow(x_1\cdots x_n)^T$ 为 A 属于 λ_0

的特征向量。

定理：

设V是$\mathbb{F}$上n维线性空间，σ为V上一个线性变换，则σ可对角化$\Leftrightarrow$ σ有n个线性无关的特征向量，即$\exists V$的一个基$\alpha_1 \cdots \alpha_n$, s.t. $\sigma(\alpha_i)=\lambda_i\alpha_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，这里所有$\lambda_i\in\mathbb{F}$

定理：

设σ为$\mathbb{F}$上n维线性空间V的线性变换，则σ的属于不同特征值的特征向量是线性无关的，设$\lambda_1\cdots\lambda_m$为σ不同特征值，且对$\forall i=1,2,\cdots,m$来说，$\alpha_{i1},\cdots\alpha_{ir_i}$为$\sigma$的属于$\lambda_i$的线性无关特征向量，则向量组$\alpha_{11}\cdots\alpha_{1r_1},\alpha_{21},$

$\cdots,\alpha_{2r_2},\cdots,\alpha_{m1},\cdots,\alpha_{mr_m}$也线性无关

定理:

设σ是$\mathbb{F}$上n维线性空间V的线性变换,且σ在V的一个基$\alpha_1\cdots\alpha_n$下的

矩阵是A,则σ可对角化$\Leftrightarrow A$可对角化

定义:

σ的属于λ_0的特征值λ_0的特征子空间,显然V_{λ_0}是σ的不变子空间.

例:线性空间$\mathbb{R}[x]_2$上线性变换σ定义如下:

$$\sigma(f(x))=f(1)+f'(0)x+(f'(0)+f^{(2)}(0))x^2,$$

求σ的特征值及其特征子空间

$\sigma(1)=1 \qquad \sigma(x)=1+x+x^2 \qquad \sigma(x^2)=1+2x^2$

$$\therefore\ (\sigma(1),\sigma(x),\sigma(x^2))=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\0&\lambda-1&0\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

当$\lambda_1=1$时, $\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&0&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\therefore x_1=(1,0,0)^T$

$x_2=(0,1,-1)^T$

当$\lambda_2=2$时, $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\therefore x_3=(1,0,1)^T$

$\therefore V_{\lambda_1}=L(1,x-x^2) \qquad V_{\lambda_2}=L(x^2+1)$

定理:

设σ是数域F上n维线性空间V的线性变换, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是$\sigma$的全部不同的特征值,它们的特征子空间分别是$V_{\lambda_1},V_{\lambda_2},\cdots,V_{\lambda_m}$,则成立以下结论:

(1) $V_{\lambda_1}+V_{\lambda_2}+\cdots+V_{\lambda_m}=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_m}$

(2) σ 可对角化 $\Leftrightarrow$ $V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_m}$

例：若 $A^2=A$，则 A 可对角化

取一个 P 上的 n 维线性空间 V，并指定一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，有

$(\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n))=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$

$\because A^2=A \quad \therefore \sigma^2=\sigma$

若 λ_0 为 σ 特征值，则 $\exists$ 非零向量 $\alpha\in V$，s.t. $\sigma(\alpha)=\lambda_0\alpha$

$\because \sigma^2=\sigma$

$\therefore \lambda_0^2\alpha=\lambda_0(\lambda_0\alpha)=\sigma(\lambda_0\alpha)=\sigma(\sigma(\alpha))=\sigma^2\alpha=\sigma\alpha=\lambda_0\alpha$

$\therefore (\lambda_0^2-\lambda_0)\alpha=0 \quad \therefore \lambda_0^2-\lambda_0=0 \quad \therefore \lambda_1=0 \quad \lambda_2=1$

对 $\forall\beta\in V$，有 $\beta=(\beta-\sigma(\beta))+\sigma(\beta)$

$$\sigma(\beta-\sigma(\beta))=\sigma(\beta)-\sigma^2(\beta)=0=\lambda_1(\beta-\sigma(\beta))$$

$\therefore \beta-\sigma(\beta)\in V_{\lambda_1}$

$\because \sigma^2=\sigma \quad \therefore \sigma(\sigma(\beta))=\sigma^2(\beta)=\sigma(\beta)=\lambda_2\sigma(\beta)$

$\therefore \sigma(\beta)\in V_{\lambda_2}$

$\therefore \beta\in V_{\lambda_1}+V_{\lambda_2}$

$\therefore V\subseteq V_{\lambda_1}+V_{\lambda_2}$

又$\because V_{\lambda_1}+V_{\lambda_2}=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}$

$\therefore V=V_{\lambda_1}+V_{\lambda_2}=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}$

$\therefore A$可对角化

定理:

设σ为数域F上n维线性空间V的线性变换，若σ的特征多项式$f_\sigma(\lambda)$

在$\mathbb{F}$上能分解成一次因式的乘积式，且其中的$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$两两不同，则

对每个特征值λ_i来说，总有$r_i\le n_i\ (i=1,2,\cdots,m)$

定理：

设数域$\mathbb{F}$上n维线性空间V的线性变换σ满足上述定理的条件，则

σ可对角化$\Leftrightarrow r_i=n_i\ (i=1,2,\cdots,m)$

9.6 从线性变换角度看Jordan标准型

定理：

若$\mathbb{F}[x]$中m个多项式$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)\ (m\geq 2)$的最大公因式

是$d_m(x)$，则$\exists\ m$个多项式$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_m(x)\in\mathbb{F}[x]$，s.t.

$$\sum_{i=1}^{m} u_i(x) f_i(x) = d_m(x)$$

定理:

设数域F上n维线性空间V的线性变换σ的特征多项式是

$f_\sigma(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{n_m}$，其中$\lambda_1 \cdots \lambda_m$两两不同，则V可

分解为不变子空间的直和 $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$，这里对每个$i=1,2,\cdots,m$

来说，$W_i = \{\alpha \in V \mid (\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{n_i}(\alpha)=0\}$，称为特征值$\lambda_i$的根子空间，而

$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$ 为σ的根子空间分解

例：设$\mathbb{R}^3$中线性变换σ在标准基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的矩阵是$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

求σ的根子空间分解，且求一个基，s.t. σ在这个基下矩阵为Jordan标准形

$$f_\sigma(\lambda) = f_A(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda+1)(\lambda+2)^2$$

当$\lambda_1=-1$时 $\alpha_1=(1,1,1)^T$

当$\lambda_2=-2$时，$\alpha_2=(2,1,-1)^T$

$V_{\lambda_1}=L(\alpha_1)$ $V_{\lambda_2}=L(\alpha_2)$

$W_1=\{\alpha \mid (\sigma-\lambda_1\varepsilon)(\alpha)=0\}=\{\alpha \mid (A+I)\alpha=0\}=V_{\lambda_1}$

$W_2=\{\alpha \mid (\sigma-\lambda_2\varepsilon)^2(\alpha)=0\}=\{\alpha \mid (A-\lambda_2 I)^2(\alpha)=0\}$

$=\{\alpha \mid (A+2I)^2\alpha=0\}$

$(A+2I)^2=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore$有$(A+2I)^2 X=0$ $\beta_1=(4,3,0)^T$ $\beta_2=(2,0,-3)^T$

$\therefore W_2=L(\beta_1,\beta_2)$

$\therefore V_{\lambda_2}=L(\alpha_2)\subseteq W_2$

令$\beta_3=(\sigma+2\varepsilon)\beta_1=(A+2I)\beta_1=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\therefore \sigma(\beta_3)=A\beta_3=-2\beta_3$

又$\because$ $\sigma(\beta_1)=A\beta_1=\beta_3-2\beta_1$

$\therefore (\sigma(\alpha_1),\sigma(\beta_3),\sigma(\beta_1))=(\alpha_1,\beta_3,\beta_1)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{pmatrix}$

例：σ在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下矩阵是$\begin{pmatrix}-4&2&10\\-4&3&7\\-3&1&7\end{pmatrix}$，求$\sigma$的根子空间分解，并求一个基 s.t. σ的根子空间分解，且求一个基，使得σ在这基下的矩阵是Jordan标准形.

$$f_\sigma(\lambda)=f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+4&-2&-10\\5&\lambda-3&-7\\3&-1&\lambda-7\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3$$

$\alpha_1=(2,1,1)^T$

$\therefore$不能对角化　　　$V_{\lambda_1}=L(\alpha_1)$

$(A-2I)^3=0$

取ε_1　有$\alpha_2=(A-2I)\varepsilon_1=\begin{pmatrix}-6\\-4\\-3\end{pmatrix}$

$$\alpha_3=(A-2I)\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\therefore(\sigma-\lambda_1\varepsilon)\alpha_3=(A-2I)\alpha_3=(A-2I)^2\alpha_2=(A-2I)^3\varepsilon_1=0$$

$\sigma(\alpha_3)=2\alpha_3$ $\quad\sigma(\alpha_2)=\alpha_3+2\alpha_2$ $\quad\sigma(\varepsilon_1)=\alpha_2+2\varepsilon_1$

$$\therefore(\sigma(\alpha_3),\sigma(\alpha_2),\sigma(\alpha_1))=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

定义:

若σ为n维线性空间V上的线性变换，λ_i为σ的一个特征值，且V的m维子空间W是由向量组$\alpha,(\sigma-\lambda_i\varepsilon)(\alpha),\cdots,(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{m-1}(\alpha)$所生成，称$W$为$\sigma-\lambda_i\varepsilon$的循环子空间

定理:

设$\mathbb{F}$上n维线性空间V的线性变换σ的特征多项式是

$f_\sigma(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{n_m}$，其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$两两不同，

它们的根子空间分别为$W_i=\{\alpha\in V\mid(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{n_i}(\alpha)=0\}$ $(i=1,2,\cdots,m)$，

则$\dim W_i=n_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$

定理：

设$\mathbb{F}$上n维线性空间V的线性变换σ的特征多项式是

$f_\sigma(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{n_m}$ 其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$两两不同，且

σ可对角化，则$V_{\lambda_i}=W_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$

定理：

设V是$\mathbb{C}$上的n维线性空间，σ为V上的线性变换，则在V中存在一个基

s.t. σ在这个基下矩阵为Jordan标准型.

定理:

设σ为K上n维线性空间V的线性变换，σ的特征多项式是

$f_\sigma(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{n_m}$，其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$两两不同，则$V$可分解

为σ的全部子空间的直和 $V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_m$，此处$W_i$为$\lambda_i$的

根子空间，且每个根子空间W_i进一步分解为$\sigma-\lambda_i\varepsilon$的循环子空间的直和

$W_i=V_{i_1}\oplus V_{i_2}\oplus\cdots\oplus V_{ir_i}$ $(i=1,2,\cdots,m)$，其中r_i是特征值λ_i的几何重数

另外，由Jordan标准型唯一性，有空间直和分解除去循环子空间的排

列顺序外也是唯一的.