6.1 空间曲面与曲线方程

$F(x,y,z)=0$ 为空间曲面的隐式方程，$z=f(x,y)$ 为空间曲面的显式方程

若 (x_0,y_0,z_0) 为球心，半径为 r，则球面方程 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

球面参数方程 $\begin{cases} x=r\cos\theta\cos\varphi \\ y=r\cos\theta\sin\varphi \\ z=r\sin\theta \end{cases}$ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ $-\pi\le\varphi\le\pi$

$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ 表示空间曲线的一般方程.

例：求 $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+z=3 \end{cases}$ 的参数方程

$\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \\ z=3-2\cos t \end{cases}$

6.2 柱面、锥面与旋转面

空间中由平行于定方向且与一条定曲线相交的一族平行直线（母线）所产生的曲面称为柱面.

若垂直于母线截面为抛物线，则为抛物柱面，如 $z=y^2$，同理可以定义椭圆柱面、双曲柱面，此三种柱面统称二次柱面.

设空间曲线 L 由两曲面 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，则通过空间曲线 L 可作三个柱面，使其母线平行为 x 轴、y 轴、z 轴的柱面方程分为 $F_1(y,z)=0$ $F_2(x,z)=0$ $F_3(x,y)=0$ 此三柱面叫 L 对 yOz，xOz，xOy 的射影柱面. 即从 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 中分别消去一个变量，即有射影柱面.

将空间曲线方程中变量 z 消去后得到的方程称为空间曲线在 xOy 坐标面上的投影曲线方程.

在空间中,通过一定点且与定曲线相交的一族曲线(母线)所产生的曲面叫做锥面.

$ax^2+by^2+cz^2=0$ $(abc\neq 0,\ bc$异号$)$的曲面称为二次锥面.

在空间中,一条平面曲线(母线)绕着同平面内的一条直线(称旋转轴)旋转一周所产生曲面叫旋转面.

设yOz坐标面上有一条平面曲线L: $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 先让L绕着y轴旋转一周生成一个旋转面,L上每一点经过旋转后都生成了一个圆,称纬圆.

设$P(x,y,z)$为纬圆上的一点,则必有一个纬圆过P并与L交于$Q(x_1,y_1,z_1)$,

则有纬圆方程: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2 \\ y=y_1 \end{cases}$,且有旋转面方程$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$

若L绕z轴转一周,有旋转面方程$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$ ，若 a.b.c 中有一个负数，则为单叶双曲面

若a.b.c 中有二个负数，则为双叶双曲面

6.3 二次曲面

二次曲面指方程为 $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2hxz+2kyz+2lx+2py+2qz+r=0$ 的空间曲面

名称与标准方程	几何图形	主要性质
椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		平面 $x=k, y=k, z=k$ 的截线都是椭圆（如果相交） 对称轴与坐标轴重合 当 $a=b=c$ 时称为半径为 a 的球面
单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$		平面 $z=k$ 的截线是椭圆 平面 $x=k(k\neq a)$ 的截线是双曲线 平面 $y=k(k\neq b)$ 的截线是双曲线 对称轴与带负号项的变量同名
双叶双曲面 $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		平面 $z=k(k>c$ 或 $k<-c)$ 的截线是椭圆 平面 $x=k, y=k$ 的截线都是双曲线 对称轴与带正号项的变量同名
椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$		平面 $z=k(k>0)$ 的截线是椭圆 平面 $x=k, y=k$ 的截线都是抛物线 对称轴与一次项的变量同名．顶点是原点
双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$		平面 $z=k(k\neq 0)$ 的截线是双曲线 平面 $x=k, y=k$ 的截线都是抛物线 马鞍的方向朝着与带正号项变量同名的坐标轴

6.4 直线曲面

对于双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z \Rightarrow \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=z$

$\therefore \begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\lambda \\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=z \end{cases}$ 同理: $\begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\mu \\ \mu\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=z \end{cases}$ 即有两组直母线

对于单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\left(1+\frac{z}{c}\right)\left(1-\frac{z}{c}\right)$

$\therefore \begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=u\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=w\left(1-\frac{y}{b}\right) \end{cases}$ 同理 $\begin{cases} w\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=u\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=w\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases}$