8.1 Laplace变换的概念

定义:

设$f(t)$在$t\geq 0$上有定义,且积分$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ (s为复参量)对复平面上某一范围的s收敛,则$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$称为$f(t)$的Laplace变换,记$\mathcal{L}[f(t)]$,其中$F(s)$为$f(t)$的像函数,$f(t)$称为$F(s)$的像原函数.

若$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$,则$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

$f(t)$ ($t\geq 0$)的Laplace变换,实际上为$f(t)u(t)e^{-\beta t}$的Fourier变换

其中$u(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$ 单位阶跃函数.

$\mathcal{L}[1]=\frac{1}{s}$ $\mathcal{L}[e^{kt}]=\frac{1}{s-k}$

Laplace变换存在性定理:

设$f(t)$在$t\geq 0$的任何有限区间内按段连续,当$t\to+\infty$时,$f(t)$的增速不超过某一指数函数,即$\exists M>0$和$c_0>0$, s.t. $[0,+\infty)$上 $|f(t)|\leq Me^{c_0 t}$,则在$\mathrm{Re}\,s>c_0$上 $L[f(t)]$存在,且$F(s)=L[f(t)]$为s的解析函数,其中c_0为$f(t)$的增长指数,此外,$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$ 在$\mathrm{Re}\,s>0$上绝对收敛,在$\mathrm{Re}\,s\geq c_1>c_0$上一致收敛.

定理:

(1) 若$\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$在$s_1=\beta_1+i\omega_1$处收敛,则其在$\mathrm{Re}\,s>\beta_1$上处处收敛,且由其确定的函数$F(s)$在$\mathrm{Re}\,s>\beta_1$上解析

(2) 若$\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$在$s_2=\beta_2+i\omega_2$处发散,则其$\mathrm{Re}\,s<\beta_2$上处处

发散.

即 $\exists \sigma \in \mathbb{R}$, s.t. 在 $\mathrm{Re}\,s > \sigma$ 上 $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ 收敛，而在 $\mathrm{Re}\,s < \sigma$ 上 $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ 发散. 称 σ 为 $L[f(t)]$ 的收敛坐标

$L[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ $\qquad L[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

$L[t^\alpha] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ $\quad (\alpha > -1, \mathrm{Re}\,s > 0)$

若 $f(t)$ 是以 T 为周期的函数，即 $f(t) = f(t+T)$ $(t>0)$，且在一个周期内逐段连续，则 $F[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st}dt$

当 $f(t)$ 在 $t=0$ 包含脉冲函数时称 $L_+[f(t)] = \int_{0^+}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ 为 0^+ 系统，表示电路换路后初始时刻；$L_-[f(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ 为 0^- 系统，表示

电路换路前终止时刻. $L_-[f(t)]=\int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st}dt+L_+[f(t)]$

当$f(t)$有界时，有 $L_-[f(t)]=L_+[f(t)]=L[f(t)]$

当$f(t)$在$t=0$包含脉冲函数时，$L_-[f(t)]\neq L_+[f(t)]$

∴我们将Laplace变换扩充成 $L[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$

$L[\delta(t)]=1$ $\qquad$ $L[\delta(t-t_0)]=e^{-st_0}$

8.2 Laplace变换的性质(一)

1. 线性性:

设α,β为常数，$F_1(s)=L[f_1(t)]$，$F_2(s)=L[f_2(t)]$，则

$$L[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha L[f_1(t)]+\beta L[f_2(t)]$$

$$L^{-1}[\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)]=\alpha L^{-1}[F_1(s)]+\beta L^{-1}[F_2(s)]$$

2. 微分性:

设 $f(t)$ 对 $t>0$ 可微，且 $|f'(t)|\leq Me^{c_0t}$，$M, c_0>0$，则

$f(0^+)=\lim\limits_{t\to0^+}f(t)$ 存在，且 $F(s)=L[f(t)]$ 在 $\operatorname{Re}s>c_0$ 存在，且

$$L[f'(t)]=sF(s)-f(0^+)$$

系:

对 $n\in N$，设 $f(t)$ 对于 $t>0$，n 次可微，且 $|f^{(n)}(t)|\leq Me^{-c_0t}$，

M、$c_0>0$，则 下列极限 $f(0^+)=\lim\limits_{t\to0^+}f(t)$ $f'(0^+)=\lim\limits_{t\to0^+}f'(t)$，…，

$f^{(n-1)}(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}f^{(n-1)}(t)$ 存在，且 $F(s)=L[f(t)]$ 在 $\operatorname{Re}s>c_0$ 存在，且

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)$$

$$L[t^m] = \frac{m!}{s^{m+1}} \quad (m \in \mathbb{Z}^+)$$

若 $F(s) = L[f(t)]$，则 $F'(s) = L[-tf(t)]$ $(\mathrm{Re}\,s > 0)$，

Commonly，对 $n \in \mathbb{N}$，有 $F^{(n)}(s) = (-1)^n L[t^n f(t)]$ $(\mathrm{Re}\,s > 0)$

3. 积分性：

设 $|f(t)| \le Me^{c_0 t}$，$M, c_0 > 0$，$F(s) = L[f(t)]$，则

$$L\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

Commonly，有 $L\Big[\underbrace{\int_0^t dt \int_0^t dt \cdots \int_0^t}_{n\text{次}} f(t)\,dt\Big] = \frac{1}{s^n} F(s)$

系:

设 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$ 存在，且 $\int_s^{+\infty}F(u)du$ 收敛，则 $\int_s^{\infty}F(u)du=L\left[\frac{f(t)}{t}\right]$

Commonly，若 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{t^n}$ 存在，有 $L\left[\frac{f(t)}{t^n}\right]=\underbrace{\int_s^{+\infty}ds\int_s^{+\infty}ds\cdots\int_s^{+\infty}}_{n次}F(s)ds$, $n=1,2\cdots$

系:

若 $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt$ 收敛，则 $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=\int_0^{+\infty}F(s)ds$

4. 位移性:

若 $L[f(t)]=F(s)$，则有 $L[e^{at}f(t)]=F(s-a)$ $(Re(s-a)>c_0)$

其中 c_0 为增长指数

5.延迟性

若 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，又 $t<0$ 时 $f(t)=0$，则 $\forall \tau\geq 0$ 有

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau)$$

6.相似性：

设 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ 则 $\forall a>0$，有 $\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$ $(\mathrm{Re}\,s>ac_0)$

8.3 Laplace变换的性质(二)

设 $f(t)$ 为 Laplace变换中的原像函数，称 $f(0^+)=\lim_{t\to 0^+}f(t)$ 为 $f(t)$ 的初值；称 $f(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}f(t)$ 为 $f(t)$ 的终值

定理:

设 $|f'(t)| \le Me^{C_0 t}$，$M, C_0 > 0$，$F(s) = L[f(t)]$，若 $L[f(t)] = F(s)$

且 $\lim_{s\to\infty} sF(s)$ 存在，则有 $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to+\infty} sF(s)$

定理:

设 $|f'(t)| \le Me^{C_0 t}$，$M, C_0 > 0$，$F(s) = L[f(t)]$，且 $sF(s)$ 的所有

奇点都在 s 平面的左半部，则 $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

在 Laplace 变换中，$f_1(t)$，$f_2(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积，则

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

定理:

设$f_1(t)$、$f_2(t)$满Laplace变换存在定理条件,且$\mathcal{L}[f_1(t)]=F_1(s)$,$\mathcal{L}[f_2(t)]=F_2(s)$,则$f_1(t)*f_2(t)$的Laplace变换一定存在,且

$$\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)*F_2(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)*F_2(s)]=f_1(t)*f_2(t)$$

Commonly,若$f_k(t)$ $(k=1,2,\cdots,n)$满足Laplace变换存在定理中的条件,且$\mathcal{L}[f_k(t)]=F_k(s)$ $(k=1,2,\cdots,n)$,则

$$\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)*\cdots*f_n(t)]=F_1(s)*F_2(s)*\cdots*F_n(s)$$

系:

设$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$,则$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(s)}{s}$

8.4 Laplace 逆变换

Laplace 反演积分: $f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(s)e^{st}ds\ (t>0)$，其中 $\beta>c_0$，

c_0为$f(t)$的增长指数. 积分路径是右半平面$Res>c_0$上任意一条直线

$Res=\beta$上

定理:

若$F(s)$在z-平面上除有限个孤立奇点s_1、s_2、…、s_n外处处解析.

适当选取β，st. 奇点在$Res<\beta$的范围内且当$s\to\infty$时，$F(s)\to 0$，则有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(s)e^{st}ds=\sum_{k=1}^{n}Res\left[F(s)e^{st},s_k\right]$$

即在$f(t)$的连续点处成立 $f(t)=\sum_{k=1}^{n}Res\left[F(s)e^{st},s_k\right]\ (t>0)$，

在$f(t)$间断点 $t_0>0$处，上式左边应代为$\frac{1}{2}\left[f(t+0)+f(t-0)\right]$

定理：

若$F(s)$为有理函数：$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}$，其中$A(s)$、$B(s)$互质，$A(s)$次数为n，$B(s)$次数为m，且$n<m$，假定$B(s)$零点为$s_1 \cdots s_k$，其阶数为$p_1 \cdots p_k$，则在$f(t)$连续处成立

$$f(t)=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(p_j-1)!}\lim_{s\to s_j}\frac{d^{p_j-1}}{ds^{p_j-1}}\left[(s-s_j)^{p_j}\frac{A(s)}{B(s)}e^{st}\right]\quad(t>0)$$

Specially，若$B(m)$有m个单零点、$s_1 \cdots s_m$，则$f(t)$的连续点处成立

$$f(t)=\sum_{j=1}^{m}\frac{A(s_j)}{B'(s_j)}e^{s_j t}\quad(t>0)$$

在$f(t)$的间断点、$t_0>0$处，上两式左端应代以$\frac{1}{2}[f(t_0^+)+f(t_0^-)]$

8.5 Laplace变换在解微分方程中的应用

设 $L[f(t)]=F(s)$，有 $L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^kf^{(n-1-k)}(0)$

例：求 $y''+y=t$ 满足 $y(0)=1 \quad y'(0)=-2$ 的解

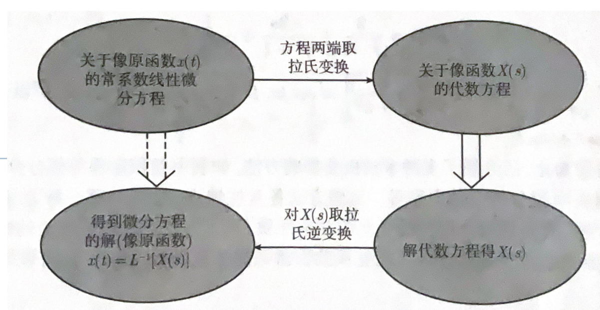
设 $L[y(t)]=Y(s)$ ，$L[y'']+L[y]=L[t]$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2(s^2+1)}+\frac{s-2}{s^2+1}=\frac{1}{s^2}+\frac{s}{s^2+1}-\frac{3}{s^2+1}$$

$$y(t)=t+\cos t-3\sin t$$

微分方程求解法



$$L[t^n f(t)]=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}L[f(t)]$$

例：求 $ty''+y'+4ty=0$ 满足 $y(0)=3, y'(0)=0$ 的解

设 $L[y(t)]=Y(s)$，$-\frac{d}{ds}[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+sY(s)-y(0)-4\frac{d}{ds}Y(s)=0$

$$(s^2+4)\frac{dY}{ds}+sY=0$$

$$Y(s)=Ce^{-\int\frac{s}{s^2+4}ds}=\frac{C}{\sqrt{s^2+4}}$$

$$y(t)=CJ_0(2t)$$

$\because J_0(0)=1 \quad \therefore C=3 \qquad \therefore y(t)=3J_0(2t)$