8.1 线性空间

定义:

设V是非空集合,F是数域,若$\exists V$中定义了两种运算(分别为加法和数乘),即对V中任意两元素α,β,$\exists V$中唯一的元素$\alpha+\beta$(称为加法封闭)及对V中任意一个元素α和F中任意一个数k,$\exists V$中唯一元素$k\alpha$(称为对乘法封闭),且这两种运算必须满足以下8条公理:

(1) 对V中任意两个元素α,β, $\alpha+\beta=\beta+\alpha$(加法交换律)

(2) 对V中任意三个元素α,β,γ, $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$(加法结合律)

(3) V中存在一个记为0的元素,使得对V中任一元素α,都有$\alpha+0=\alpha$

(4) 对V中每个元素α,$\exists V$中的元素β(称为α的负元素) s.t. $\alpha+\beta=0$

(5) 对V中每个元素α，$1\alpha=\alpha$

(6) 对F中任意两个数k,l和V中每个元素α，$(kl)\alpha=k(l\alpha)$

(7) 对F中每个数k和V中任意两个元素α,β，$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

(8) 对F中任意两个数k,l和V中每个元素α，$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

则称V是数域F上的线性空间，其中元素$\alpha+\beta$称为α与β的和，$k\alpha$称为k与α的乘积

系8.1（加法消去律）

设V是线性空间，若α,β,γ是V中满足$\alpha+\gamma=\beta+\gamma$的任意向量，则$\alpha=\beta$

系8.2：在数域$\mathbb{F}$的线性空间V中，下列结论成立：

(1) 对V中任何向量α，$0\alpha=0$

(2) 对V中任何向量α和$\mathbb{F}$中任何数k，$(-k)\alpha=-k\alpha=k(-\alpha)$

(3) 对$\mathbb{F}$中的任何数k和V的零向量0，$k0=\vec{0}$

(4) 若对$k\in\mathbb{F}$和$\alpha\in V$，有$k\alpha=0$成立，则$k=0$ or $\alpha=\vec{0}$

定义：

对于V中的向量组$\alpha_1,\cdots\alpha_m$，若$\exists\,\mathbb{F}$中的m个不全为零的数$k_1,k_2\cdots k_m$，

s.t. $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则称$\alpha_1\cdots\alpha_m$线性相关，否则称线性无关

定理：V中向量组$\alpha_1\cdots\alpha_m$ $(m\geq 2)$线性相关$\Leftrightarrow\alpha_1\cdots\alpha_m$中有一个

向量α_i可由其余向量$\alpha_1 \cdots \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1} \cdots \alpha_m$线性表出,

定理：设$\alpha_1 \cdots \alpha_m$, β是V中向量,若$\alpha_1 \cdots \alpha_m$线性无关,且$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m \beta$线性相关,则$\beta$可由$\alpha_1 \cdots \alpha_m$线性表出,且表示方法唯一.

定理：设$\alpha_1 \cdots \alpha_m$和$\beta_1 \cdots \beta_s$是V中两组向量,$\beta_1 \cdots \beta_s$可由$\alpha_1 \cdots \alpha_m$线性表出,且$s > m$,则$\beta_1 \cdots \beta_s$线性相关

定理：设$\alpha_1 \cdots \alpha_m$和$\beta_1 \cdots \beta_s$是V中两个向量,$\beta_1 \cdots \beta_s$可由$\alpha_1 \cdots \alpha_m$线性表出,且$\beta_1 \cdots \beta_s$线性无关,则$s \le m$

定理：V中两个等价的线性无关向量组含有相同个数的向量.

例：设V为由全体定义在$(-\infty,+\infty)$上的连续实函数组成的实数域上的线性空间，线性运算是通常的函数加法$f+g$和数乘kf $(k\in\mathbb{R})$，判断$\cos x,\cos 2x\cdots\cos nx,\cos^n x$ $(n\geq 2)$在V中是否线性相关？

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$$

$$\cos^n x=\frac{(e^{ix}+e^{-ix})^n}{2^n}$$

首先证明$\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx$线性无关

当$n=2$时 $\cos x,\cos 2x$显然线性无关

设$n=t$ $(t\geq 2$且$t\in N)$时，对于$\cos x\cdots\cos tx$线性无关成立

则当$n=t+1$时，设$\exists$不全为0的$k_1,\cdots k_{t+1}$,

使得 $k_1\cos x+k_2\cos 2x+\cdots+k_{t+1}\cos(t+1)x=0$

$-k_1\cos x-2^2k_2\cos 2x-\cdots-(t+1)^2k_{t+1}\cos(t+1)x=0$

$\therefore \sum_{i=1}^{t}\left[(t+1)^2-i^2\right]k_i\cos ix=0$

又 $\because \cos x \cdots \cos tx$ 线性无关

$\therefore \left[(t+1)^2-i^2\right]k_i=0 \quad (i\in[1,t],i\in N)$

$k_i\neq 0 \quad (t+1)^2-i^2\neq 0$ 矛盾

$\therefore \cos x,\cdots,\cos(t+1)x$ 线性无关

再观察 $\cos^n x$ 与 $\cos x\cdots\cos nx$ 的关系

$$\cos^n x=\frac{(e^{ix}+e^{-ix})^n}{2^n}=\frac{e^{inx}+C_n^1e^{i(n-2)x}+\cdots+C_n^1e^{i(n-2)x}+e^{inx}}{2^n}$$

I. 当n为奇数时，

$$\cos^n x=\frac{(e^{inx}+e^{-inx})+C_n^1(e^{i(n-2)x}+e^{-i(n-2)x})+\cdots+C_n^{\frac{n-1}{2}}(e^{ix}+e^{-ix})}{2^n}$$

$$= \frac{\cos nx + C_n^1 \cos(n-2)x + \cdots + C_n^{\frac{n-1}{2}} \cos x}{2^n}$$

$\therefore$ 线性相关

Ⅱ. n为偶数时，

$$\cos^n x = \frac{(e^{inx}+e^{-inx}) + C_n^1(e^{i(n-2)x}+e^{-i(n-2)x}) + \cdots + C_n^{\frac{n}{2}-1}(e^{i2x}+e^{-i2x}) + C_n^{\frac{n}{2}}(1+1)}{2^n}$$

$\therefore$ 线性无关

在 $\mathbb{F}^n$空间中，$\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n$ 可以线性表出 $\mathbb{F}^n$中的任意向量 $(x_1 \cdots x_n)^T$，即 $(x_1 \cdots x_n)^T = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n$

定义：

V中满足下列两条件的向量组$\alpha_1 \cdots \alpha_m$，称为V的一个基，

(1) $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 线性无关

(2) V 中每个向量都可以由 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 线性表出

此时，我们称这个基所含的向量个数 m 为 V 的维数，记为 $\dim V$

定理 8.8:

若 $\dim V = n$，则 V 中任意 $n+1$ 个向量都线性相关

定理 8.9:

若 $\dim V = n$，则 V 中任意 n 个线性无关的向量都是 V 的一个基

例：在 $\mathbb{F}^n$ 中证明向量组 $\alpha_1 = (1,1,\cdots 1)^T$ $\alpha_2 = (0,1,\cdots 1)^T, \cdots,$

$\alpha_n = (0,0\cdots 1)^T$ 是一个基，且求向量 β 在这个基下的坐标.

若存在 $k_1 \cdots k_n \in \mathbb{F}$, s.t. $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \cdots + k_n\alpha_n = 0$

即 $\begin{cases} k_1=0 \\ k_1+k_2=0 \\ \quad\vdots \\ k_1+k_2+\cdots+k_n=0 \end{cases}$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

∴方程组只有零解，$k_1=k_2=\cdots k_n=0$ ∴$\alpha_1\cdots\alpha_n$线性无关

又∵$\dim F^n=n$ ∴$\alpha_1\cdots\alpha_n$是F^n的一个基

$$(\alpha_1,\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \beta$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & a_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2-a_1 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 & a_3-a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 & a_n-a_{n-1} \end{pmatrix}$$

∴β在$(\alpha_1\cdots\alpha_n)$下的坐标为$(a_1, a_2-a_1, \cdots a_n-a_{n-1})$

8.3 过渡矩阵与坐标变换

定理8.10:

设$\alpha_1 \cdots \alpha_n$是n维线性空间V的一个基，且$\beta_1 \cdots \beta_n$可由$\alpha_1 \cdots \alpha_n$

线性表出： $(\beta_1 \cdots \beta_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)A$，

则$\beta_1 \cdots \beta_n$是V的一个基$\Leftrightarrow A$可逆

若∃可逆A，$(\beta_1 \cdots \beta_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)A$，称$A$为$\alpha_1 \cdots \alpha_n$到

$\beta_1 \cdots \beta_n$的过渡矩阵，且$(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = (\beta_1 \cdots \beta_n)A^{-1}$，称

A^{-1}为$\beta_1 \cdots \beta_n$到$\alpha_1 \cdots \alpha_n$的过渡矩阵

若∃可逆A, B, s.t. $(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = (\eta_1, \cdots \eta_n)A$，$(\beta_1 \cdots \beta_n) = (\eta_1 \cdots \eta_n)B$

则$(\beta_1 \cdots \beta_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) = A^{-1}B$

例：在线性空间 $\mathbb{F}[x]_3$ 中，已知向量组 $\alpha_1=x^3$ $\alpha_2=x^3-x^2$ $\alpha_3=x^3+x^2+x$ $\alpha_4=x^3-x^2+x-1$ 和 $\beta_1=x+1$ $\beta_2=x^2+x+1$ $\beta_3=2x^3+x$ $\beta_4=x^2-x$

(1) 证：$\alpha_1\cdots\alpha_4$ 和 $\beta_1\cdots\beta_4$ 是 $\mathbb{F}[x]_3$ 的基

(2) 写出由 $\alpha_1\cdots\alpha_4$ 到 $\beta_1\cdots\beta_4$ 的过渡矩阵

(1) 设 $A=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&1\\0&-1&1&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&-1\\0&1&0&1\\0&0&2&0\end{pmatrix}$ $\eta=(1,x,x^2,x^3)$

s.t. $\alpha=\eta A$ $\beta=\eta B$

$\because |A|=1$ $|B|=-2$ $\therefore A.B$ 可逆 $\therefore$ 证

(2) $\beta=\alpha A^{-1}B$ 即求 $A^{-1}B$

$(A\quad B)\longrightarrow(I\quad A^{-1}B)$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}0&0&0&-1&1&1&0&0\\0&0&1&1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-1&0&1&0&1\\1&1&1&1&0&0&2&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-4&-3&0&3\\0&1&0&0&3&2&1&-2\\0&0&1&0&2&2&1&-1\\0&0&0&1&-1&-1&0&0\end{array}\right)$$

$$\therefore\quad A^{-1}B=\begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.4 子空间

定理 8.11：

设 W 是数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 的一个非空子集，若 W 对 V 的加法和数乘封闭时，则 W 本身也是 $\mathbb{F}$ 上的一个线性空间

定义：

设 W 是数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 的一个非空子集，若 W 对于 V 的加法、数乘封闭，称 W 是 V 的一个子空间

Specially $\{0\}$ 称为零子空间，$\{0\}$ 和 V 为 V 的平凡子空间

定理 8.12：

数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 的一个非空子集 W 是 V 的子空间 $\Leftrightarrow$

对 $\forall k, l \in \mathbb{F}$ 及 $\alpha, \beta \in W$，都有 $k\alpha + l\beta \in W$

定理 8.13：

设 W 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的一个子空间，则 $\dim V \leq n$

定理 8.14：

设 W 是域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的子空间，且 $\dim V = \dim W$，

则 $W = V$

定义:

设V是数域$\mathbb{F}$上的线性空间且$\alpha_1, \cdots \alpha_n \in V$, 将$\alpha_1 \cdots \alpha_n$组成$W$, W显然为V的子空间,称为由$\alpha_1, \cdots \alpha_n$的生成子空间,记$W=L(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$, 其中$\alpha_1, \cdots \alpha_n$称为生成元

Specially, 设$A \in M_n(\mathbb{F})$ 若A的互异的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, 都属于$\mathbb{F}$, 且对每个$i=1,2,\cdots,m$来说, $(\lambda_i I-A)X=0$的基础解系是$\alpha_{i1}, \cdots \alpha_{ir_i}$, 则由它们生成的$\mathbb{F}^n$的子空间

$$V_{\lambda_i}=L(\alpha_{i1} \cdots \alpha_{ir_i})=\{k_1\alpha_{i1}+\cdots+k_{r_i}\alpha_{ir_i} \mid k_1 \cdots k_{r_i} \in \mathbb{F}\}$$

称为A的属于λ_i的特征子空间, 这个子空间的全部非零向量就是A的属于λ_i的全部特征向量

例如：对于一个 $A_{3\times3}$ 有 $\lambda_1=-4$ $\lambda_2=2$（2重），

当 $\lambda_1=-4$ 时，$\alpha_1=(-2,1,0)^T$，$\lambda_2=2$ 时，$\alpha_2=(-2,1,0)^T$ $\alpha_3=(1,0,1)^T$

则 A 的特征子空间是 $V_{\lambda_1}=L(\alpha_1)$ $V_{\lambda_2}=L(\alpha_2,\alpha_3)$，

且有 $\dim V_{\lambda_1}=1$ 及 $\dim V_{\lambda_2}=2$，这两个维数相当于几何重数.

例：在 $\mathbb{F}^4$ 中，求由向量组 $\alpha_1=(1,2,1,5)^T$，$\alpha_2=(5,3,-9,4)^T$，

$\alpha_3=(3,7,5,18)^T$，$\alpha_4=(3,5,1,12)^T$，$\alpha_5=(-2,1,8,5)^T$ 生成子空间的一个

基和维数　等价于求极大无关组

$$A=\begin{pmatrix}1&5&3&3&-2\\2&3&7&5&1\\1&-9&5&1&8\\5&4&18&12&5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&26&0&6&-17\\0&-7&1&-1&5\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

不妨取 α_1，α_3 作为一组基

$\alpha_2=26\alpha_1-7\alpha_3$　$\alpha_4=6\alpha_1-\alpha_3$　$\alpha_5=-17\alpha_1+5\alpha_3$

$\therefore W=L(\alpha_1,\alpha_3)$ 且 $\dim W=2$

8.5 子空间的交与和

有在 $\mathbb{F}$ 上的两个空间 V_1, V_2, 定义:

V_1 和 V_2 的交: $V_1 \cap V_2 = \{\alpha \mid \alpha \in V_1, \alpha \in V_2\}$

V_1 和 V_2 的和: $V_1 + V_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\}$

定理 8.15:

设 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 和 $\beta_1 \cdots \beta_r$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 的两个向量组,

则 $L(\alpha_1 \cdots \alpha_m) + L(\beta_1 \cdots \beta_r) = L(\alpha_1 \cdots \alpha_m, \beta_1 \cdots \beta_r)$

定理 8.16 (子空间的交与和的维数公式):

设 V_1 与 V_2 都是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 的有限维子空间, 则 $V_1 + V_2$

也是 V 的有限维子空间，且有 $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$

例：在 $\mathbb{R}^4$ 空间中，$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ $V_2=L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，其中

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\3\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix}$ $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-6\end{pmatrix}$ $\beta_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\4\end{pmatrix}$ $\beta_3=\begin{pmatrix}3\\3\\1\\-5\end{pmatrix}$

求 V_1+V_2、$V_1\cap V_2$ 的一个基与维数

$V_1+V_2=L(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&2\\1&1&2&2&-2&3\\0&-1&1&0&2&1\\2&3&-2&-6&4&-5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&10&2\\0&1&0&0&-6&-1\\0&0&1&0&-4&0\\0&0&0&1&1&1\end{pmatrix}=B$$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$ 为 V_1+V_2 的一个基

$\therefore \dim(V_1+V_2)=4$

$\because \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 线性无关

$\therefore \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 为 V 的一个基 $\dim V_1=3$

$\because \operatorname{rank}\begin{pmatrix}0&10&2\\0&-6&-1\\0&-4&0\\1&1&1\end{pmatrix}=3$

$\therefore \dim V_2 = 3$

由 $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2) = 2$

又 $\because \beta_2 = 10\alpha_1 - 6\alpha_2 - 4\alpha_3 + \beta_1 \quad \beta_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + \beta_1$

$\therefore$ 整理得 $\beta_2 - \beta_1 = 10\alpha_1 - 6\alpha_2 - 4\alpha_3 \quad \beta_3 - \beta_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2$

$\beta_2 - \beta_1 = (0, -4, 2, 10)^T \quad \beta_3 - \beta_1 = (1, 1, 1, 1)^T$ 为 $V_1 \cap V_2$ 的基

8.6 子空间的直和

定义：

设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间，若 $V_1 + V_2$ 中每个向量 α 都可以唯一表示成 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ 其中 $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$，则称 $V_1 + V_2$ 是直和，记作 $V_1 \oplus V_2$

定理8.17:

设V_1, V_2都是数域F上线性空间V的有限维子空间,则以下命题等价:

(1) V_1+V_2是直和

(2) V_1+V_2中零向量表示方法唯一

(3) V_1的一个基与V_2的一个基合起来是V_1+V_2的一个基

(4) $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

(5) $V_1\cap V_2=\{0\}$

定义:

设V_1, V_2都是线性空间的子空间,若$V_1\oplus V_2=V$,则称V_1是

V_2的一个直和补，反过来V_2是V_1的一个直和补

定理 8.18:

设W是n维线性空间V的一个非平凡子空间，则∃W的直和补

定理 8.19:

设V_1, V_2都是有限维线性空间V的非平凡子空间，

若$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$，并且$V_1 \cap V_2 = \{0\}$，则$V = V_1 \oplus V_2$

定义:

设$V_1, V_2, \cdots, V_m$都是线性空间V的子空间，若$V_1 + V_2 + \cdots + V_m$

中每一个向量α都可以唯一表示成$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$，其中$\alpha_i\in V_i$，$i=1,2,\cdots,m$，

则称$V_1+V_2+\cdots+V_m$是直和，记为$V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$

定理8.20：

设$V_1,V_2,\cdots,V_m$都是数域F上线性空间V的有限维子空间，

则以下命题等价：

(1) $V_1+V_2+\cdots+V_m$是直和

(2) $V_1+V_2+\cdots+V_m$中零向量的表法唯一

(3) 把V_1的一个基，V_2的一个基，$\cdots$，V_m的一个基全部合起来，是$V_1+V_2+\cdots+V_m$的一个基

(4) $\dim(V_1+V_2+\cdots+V_m)=\dim V_1+\dim V_2+\cdots+\dim V_m$

(5) $\forall i=2,3\cdots m$，$V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1})=\{0\}$

定理8.2.1：

设$V_1,V_2,\cdots,V_m$都是有限维线性空间V的子空间，则

$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m\Leftrightarrow$将$V_1,V_2,\cdots,V_m$各自的一个基全部合起来是$V$的一个基

例：设线性空间$V=\mathbb{F}^n$，其中$\mathbb{F}$是数域，记齐次线性方程组

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$$

的解空间为V_1，齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1-x_2=0 \\ x_1-x_3=0 \\ \quad\vdots \\ x_1-x_n=0 \end{cases}$$
的解空间为V_2，证明：$V=V_1\oplus V_2$

任取$\alpha=(x_1,x_2\cdots x_n)^T\in V_1\cap V_2$，则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ \vdots \\ x_1 - x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

$\therefore V_1 \cap V_2 = \{0\}$

V_1: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$

$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(1 \ 1 \ \cdots \ 1) = 1$

$\dim V_1 = n-1$

$$V_2: \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ \vdots \\ x_1 - x_n = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ 1 & & -1 & \\ \vdots & & & \ddots \\ 1 & & & & -1 \end{pmatrix} = n-1$$

$\therefore \dim V_2 = n-(n-1) = 1$

$\therefore \dim V_1 + \dim V_2 = n-1+1 = n = \dim V$

$\therefore V = V_1 \oplus V_2$