4.1 多项式的整除

定理：

若 $a.b.c.q \in \mathbb{Z}$ 满足 $a=qb+c$，则 $(a,b)=(b,c)$

例：求 $(10780,4200)$

$10780=2\times4200+2380$

$4200=2380+1820$

$2380=1820+560$

$1820=3\times560+140$

$560=4(140)$

$\therefore (10780,4200)=140$

定理:

设 $a,b\in\mathbb{Z}$，则 $\exists\, u,v\in\mathbb{Z}$, s.t. $(a,b)=ua+vb$

例：设 $140=u\cdot 10780+v\cdot 4200$，求 u,v

$$140=1820-3(560)=1820-3(2380-1820)$$

$$=-3(2380)+4(1820)=-3(2380)+4(4200-2380)$$

$$=4(4200)-7(2380)=4(4200)-7(10780-2(4200))$$

$$=-7\times 10780+18\times 4200$$

定理:

若 $a,b\in\mathbb{Z}$ 且 $(a,b)=1$，则 $\exists\, u,v\in\mathbb{Z}$, s.t. $ua+vb=1$，反之亦然

定理:

若$a.b.c\in\mathbb{Z}$且$(a,b)=1$与$(a,c)=1$,则$(a,bc)=1$且$\forall n\in\mathbb{Z}^+$,$(a,b^n)=1$

定理:

若$a.b.c\in\mathbb{Z}$,满足$a|bc$与$(a,b)=1$,则$a|$

定理:

若$a.b.c\in\mathbb{Z}$满足$a|c$.$b|c$及$(a,b)=1$,则$ab|c$

定理:

设p为素数,则对$\forall a\in\mathbb{Z}$,有$p|a$,或$(p,a)=1$

定理:

设p为素数,若$p|ab$,则$p|a$或$p|b$

定义:

对$a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$,称$f(x)=a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0$为系数在$\mathbb{F}$上的一元多项式,在$\mathbb{F}$上的一元多项式全体组成的集合记为$\mathbb{F}[x]$.

若$a_n \neq 0$,称$a_n x^n$为多项式的首项,称n为$f(x)$的次数记$\partial(f(x))$.

定义:

设$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$,

$g(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1 x+b_0=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j$

则 $f(x) \pm g(x) = \sum_{j=0}^{\max(m,n)} (a_j \pm b_j) x^j$ $\quad \partial(f(x)+g(x)) \le \max\{\partial(f(x)), \partial(g(x))\}$

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k$$

若 $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, 则 $\partial(f(x)g(x)) = \partial(f(x)) + \partial(g(x))$

定理:

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 其中 $g(x) \neq 0$, 则 $\exists$ 唯一的 $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$,

s.t. $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, 且 $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$, 或 $r(x) = 0$

例: 求 $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$ $\quad g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$.

求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式和余式

$$\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} \\
\hline
3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 & x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3 \\
 & x^4 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x \\
\hline
 & -\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - 3x - 3 \\
 & -\frac{1}{3}x^3 - \frac{10}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{3} \\
\hline
\end{array}$$

$$-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}$$

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}\right)g(x)+\left(-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}\right)$$

余数定理:

设 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$, $a\in\mathbb{F}$, 则 $\exists$ 唯一的 $q(x)\in\mathbb{F}[x]$, s.t.

$$f(x)=(x-a)q(x)+f(a)$$

因式定理:

设 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$, $c\in\mathbb{F}$, 则 $f(c)=0 \Leftrightarrow (x-c)\mid f(x)$

例: 求 $x-2$ 除 $f(x)=3x^4-4x^3-12x-5$ 所得的商和余数

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 3 & -4 & 0 & -12 & -5 \\
2 & & 6 & 4 & 8 & -8 \\
\hline
 & 3 & 2 & 4 & -4 & -13
\end{array}$$

$\therefore q(x)=3x^3+2x^2+4x-4 \qquad r(x)=-13$

例: $f(x)=x^3-4x^2-5x+2$ 求 $f(-3)$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -4 & -5 & 2 \\
-3 & & -3 & 21 & -48 \\
\hline
 & 1 & -7 & 16 & -46
\end{array}
$$

$\therefore f(-3)=-46$

4.2 最大公因式

定义:

设 $f(x), g(x), d(x) \in \mathbb{F}[x]$, 若满足条件:

(1) $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式都是 $d(x)$ 的因式

则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式

定理:

设 $f(x), g(x), q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ 且有 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, 则

$$(f(x), g(x)) = (g(x), r(x))$$

定理:

若 $d(x)$ 是多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式, 则 $\exists\, u(x), v(x) \in \mathbb{F}[x]$, s.t.

$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$

例: $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$　$g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$, 求 $u(x), v(x)$,

s.t. $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$

$$4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9 = (2x^3 - x^2 - 5x + 4)\,2x - 6x^2 - 3x + 9$$

$$2x^3 - x^2 - 5x + 4 = (-6x^2 - 3x + 9)\left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) - x + 1$$

$$-6x^2-3x+9=(-x+1)(6x+9)$$

$$(f(x),g(x))=x-1$$

$$f(x)=2xg(x)+(-6x^2-3x+9)$$

$$g(x)=(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3})(-6x^2-3x+9)-(x-1)$$

$$\therefore (f(x),g(x))=x-1=(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3})(-6x^2-3x+9)-g(x)$$

$$=(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3})(f(x)-2xg(x))-g(x)$$

$$=(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3})f(x)+(\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1)g(x)$$

$$u(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \quad v(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$$

定理:

$\mathbb{F}[x]$中两个多项式$f(x)$与$g(x)$互素$\Leftrightarrow \exists u(x),v(x)\in\mathbb{F}[x]$

s.t. $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$

证明：若$(f(x),g(x))=1$，则$(f^2(x),g^3(x))=1$

$\exists\, u(x),v(x)$ s.t. $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$

$(u(x)f(x)+v(x)g(x))^4=1$

$(u(x)f(x))^4+4v(x)g(x)(u(x)f(x))^3+6(v(x)g(x)u(x)f(x))^2+$

$4(v(x)g(x))^3u(x)f(x)+(v(x)g(x))^4=1$

$f(x)^2\left[u^4(x)f^2(x)+4v(x)g(x)u^3(x)f(x)+6\left(v(x)g(x)u(x)\right)^2\right]+$

$g^3(x)\left[4v^3(x)u(x)f(x)+v^4(x)g(x)\right]=1$

$\therefore (f^2(x),g^3(x))=1$

定理：

若$(f(x),g(x))=1$，且$f(x)\mid g(x)h(x)$，则$f(x)\mid h(x)$

定理:

若 $f_1(x)|g(x)$, $f_2(x)|g(x)$, 且 $(f_1(x), f_2(x))=1$, 则

$f_1(x)f_2(x)|g(x)$

4.3 因式分解定理

定义:

设 $f(x)\in \mathbb{F}[x]$, 且 $\partial(f(x))>0$, 若 $\exists h(x), g(x)\in \mathbb{F}[x]$, s.t. $f(x)=g(x)h(x)$

其中 $\partial(g(x))>0$ $\partial(h(x))>0$, 则称 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上可约, 否则, 称 $f(x)$ 为 $\mathbb{F}$ 上

不可约.

例: x^2+1 在 $\mathbb{R}$ 上, $\mathbb{C}$ 上是否可约

$x^2+1=(x+i)(x-i)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不可约, 在 $\mathbb{C}$ 上可约

定理:

若$p(x)$在$\mathbb{F}$上不可约,则对$\forall f(x)\in\mathbb{F}[x]$,有$(p(x),f(x))=1$或$p(x)\mid f(x)$

定理:

设$p(x)$在$\mathbb{F}$上不可约,则对$\forall f(x),g(x)\in\mathbb{F}[x]$,若$p(x)\mid f(x)g(x)$,则有$p(x)\mid f(x)$,或$p(x)\mid g(x)$

定理:

若$p(x)$在$\mathbb{F}$上不可约,且成立$p(x)\mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_t(x)$,其中$f_i(x)\in\mathbb{F}[x]$ $(i=1,2,\cdots,t)$,则$\exists$某个j $(1\le j\le t)$, s.t. $p(x)\mid f_j(x)$

定理：

$\mathbb{F}[x]$ 中任何一个次数大于零的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解成数域 $\mathbb{F}$ 上不可约因式的乘积。

Commonly, $\mathbb{F}[x]$ 中任意一个多项式 $f(x)$ 都可以写成下面形式：

$f(x)=p_1^{r_1}(x)\,p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$，其中 $r_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 是正整数且 $p_i(x)\ (i=1,2,\cdots,s)$ 是互不相同的不可约因式，将此分解式称为 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上的标准分解式.

定理：

若 $f(x)\in\mathbb{C}[x]$，则 $f(x)=0$ 恰有 n 个复根（包括重根）

例：求 $f(x)=x^n-1$ 在复数域上的分解式

设根 $\alpha=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$$\rho^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=1 \Rightarrow \rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=1$$

$$\rho=1 \quad \varphi=\frac{2k\pi}{n}\ (k=0,1,\cdots n-1)$$

$$\therefore W_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad k=0,1,2,\cdots,n-1$$

记 $w=w_1$ $\quad w_k=w^k\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)$

$$\therefore f(x)=\prod_{k=0}^{n-1}(x-w^k)$$

定理：

设 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$，$c\in\mathbb{C}$，若 $f(c)=0$，则 $f(\bar{c})=0$，其中 $\bar{c}$ 为 c 的共轭复数

定理:

设 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, $\partial(f(x))=n\geq 1$, 则 $f(x)=c\prod_{k=1}^{s}(x-c_k)^{r_k}\prod_{j=1}^{t}(x^2+p_jx+q_j)^{m_j}$

其中 $c\in\mathbb{R}$, $c_1,c_2,\cdots,c_s\in\mathbb{R}$ 且互异, $p_j,q_j\in\mathbb{R}$ 且 $p_j^2-4q_j<0\ (j=1,2,\cdots,t)$

$r_k\ (k=1,2,\cdots,s)$ 与 $m_j\ (j=1,2,\cdots,t)$ 都是正整数, 且 $\sum_{k=1}^{s}r_k+\sum_{j=1}^{t}2m_j=n$

例: 求 $f(x)=x^n-1$ 在 $\mathbb{R}$ 中的标准分解式

$$w_k+w_{n-k}=w_k+\overline{w_k}=2\cos\frac{2k\pi}{n}$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}(x-1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1\right) & n\text{为奇数}\\ (x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1\right) & n\text{为偶数}\end{cases}$$

4.4 有理数域上的多项式

有理根判别法:

设 $f(x)\in\mathbb{Z}(x)$ 且 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,

若 $f(\frac{r}{s})=0$，其中 $r,s\in\mathbb{Z}$，且最大公因子 $(r,s)=1$，则 $r|a_0$，$s|a_n$

例：求 $x^3-4x^2+2x+4=0$ 的根

试 ±1. ±2. ±4. 发现2为一个根

$\therefore$ $x^3-4x^2+2x+4=(x-2)(x^2-2x-2)$　$\therefore$ 根为2. $1\pm\sqrt{3}$

例：证 $f(x)=x^3+3x-1$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 不可约

$f(\pm1)\neq0$　$\therefore$ 不可约

Eisenstein判别法：

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$，若$\exists$一个素数 p, s.t.

(1) p 不整除 a_n　(2) $p\,|\,a_0.a_1.\cdots.a_{n-1}$　(3) p^2 不整除 a_0，

则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

Gauss引理:

两个本原多项式的乘积仍是本原多项式

本原多项式是指各项系数是互素的多项式. 如 $f(x)=6x^3+3x^2+4$, $(6,3,4)=1$

定理:

若$f(x)\in\mathbb{Z}[x]$在有理数域上可约,则它在整数集$\mathbb{Z}$上也可约.

例: $f(x)=x^7-7x+13$ 在$\mathbb{Q}[x]$中是否可约

令$x=y+1$ $\quad g(y)=f(y+1)=y^7+7y^6+21y^5+35y^4+35y^3+21y^2+7$

取$p=7$ $\quad\therefore f(x)$不可约

补:

Osada判别法: $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 且

$|a_0|>1+\sum_{i=1}^{n-1}|a_i|$, $|a_0|$为素数, 则$f(x)$在$\mathbb{Q}$上不可约

Peron判别法:

设 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, $a_0\neq 0$, 若 $|a_{n-1}|>1+\sum_{i=0}^{n-2}|a_i|$,

则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约

系:

设 $|k|\geq 3$, 则 $f(x)=x^n+kx\pm 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约

4.5 复数域上多项式的重根

若 $x-a\mid f(x)$ 但 $(x-a)^2\nmid f(x)$, 则 a 称为 $f(x)$ 的单根.

若 $k>1$, $(x-a)^k\mid f(x)$ 但 $(x-a)^{k+1}\nmid f(x)$, 则 a 称为 $f(x)$ 的 k 重根,

$(x-a)$ 为 $f(x)$ 的重因式.

定义:

对于$\mathbb{F}[x]$中多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，将$\mathbb{F}[x]$中多项式

$na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$，称$f(x)$导数，记$f'(x)$。

定理:

对$\forall\mathbb{F}[x]$中的多项式$f(x).g(x)$和$\forall c.a\in\mathbb{F}$，有

(1) $(cf(x))'=cf'(x)$

(2) $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

(3) 对$\forall n\in\mathbb{Z}^+$，$((x-a)^ng(x))'=n(x-a)^{n-1}g(x)+(x-a)^ng'(x)$

定理:

(1) 多项式的单根不是它的导数的根

(2) 多项式的重根是它的导数的根，但重数少1

定理:

a是$f(x)$的重根$\Leftrightarrow$ $(x-a)$为$f(x)$和$f'(x)$的公因式

定理:

$f(x)$无重根 $\Leftrightarrow$ $(f(x), f'(x))=1$

4.6 多项式的根与系数的关系

Vieta定理:

对于 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，有

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_nx_{n-1}=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$\cdots\cdots$

$x_1 x_2 x_3 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

例：证三次方程 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 三根成等差数列 $\Leftrightarrow$

$2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0$

设 $\alpha_1=\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)$ 或 $\alpha_2=\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_3)$ $\alpha_3=\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$

$(2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3)=0$

$\therefore (2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3)=$

$2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^3-9(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)+27\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

$$\therefore \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-a_1 \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1=a_2 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3=-a_3 \end{cases}$$

$\therefore 2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0$