4.1 复变函数项级数

给定一列无穷多个有序复数 $z_1=a_1+ib_1, z_2=a_2+ib_2, \cdots, z_n=a_n+ib_n, \cdots$

称为复数序列，记 $\{z_n\}$

定义：

给定一个 $\{z_n\}$，设 $z_0=a+ib$ 是一个复常数，对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in N^+$，

当 $n>N$ 时，有 $|z_n-z_0|<\varepsilon$，则称 $\{z_n\}$ 当 n 趋于 $+\infty$ 时，以 z_0 为极限，

或称 $\{z_n\}$ 收敛于 z_0，记 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$ 或 $z_n\to z_0\ (n\to+\infty)$

若 $\{z_n\}$ 不收敛，则称其发散

定理：

对一个 $\{z_n\}$，其中 $z_n=a_n+ib_n$，$n=1,2,\cdots$，$z_0=a+ib$，则

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$

定理:

若 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n' = z'$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n'' = z''$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(z_n' \pm z_n'') = z' \pm z'',$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n' z_n'' = z' z'',$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n'}{z_n''} = \frac{z'}{z''} \quad z_n'' \neq 0 \ (n=1,2,\cdots) \quad z'' \neq 0$$

定义:

给定一个 $\{z_n\}$, 称 $z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$ 为一个复数项级数, 记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$

定义:

记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 前 n 项和为 $S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ 称为部分和.

若 n 分别取自然数, 可得一复数序列 $\{S_n\}$, 当部分和序列 $\{S_n\}$ 存在

极限时，称$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$收敛，称$s=\lim_{n\to\infty} s_n$为$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$的和，记$s=\sum_{n=1}^{\infty} z_n$，

反之，若$\{s_n\}$不收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$发散

例：求$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n-1}$的敛散性

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)}=\frac{1+i}{i}=1-i$$

定理：

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ $(z_n=a_n+ib_n \quad n=1,2,\cdots)$ 收敛$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty} a_n$及$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$同时收敛

定理：

若$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty} z_n=0$

定义:

给定$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$，其中$z_n=a_n+ib_n$，$n=1,2,\cdots$，若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$收敛，称$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$绝对收敛．若$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$发散，称$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$条件收敛

定理:

每个绝对收敛的复数项级数其本身一定是收敛的

给定一个复变函数序列$\{f_n(z)\}$，其中$f_n(z)$ $n=1,2,\cdots$，在集合E上有定义，称$f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$为复变函数项级数，记$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$．

设z_0为E上固定点，则$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$为一复数项级数，若$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$收敛，称$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$z_0$处收敛，反之，则称$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$z_0$处发散．

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$的收敛点的全体叫做收敛域，记作$D$.

另记$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$的部分和为$S_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)$，于是在

D上得到一个复变函数$S(z)=\lim_{n\to\infty} S_n(z)$ $z\in D$，称为$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$的和函数，

记作$S(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$

定义：

给定$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$，其中$f_n(z)(n=1,2,\cdots)$均定义在$E$上，若对于$\forall \varepsilon>0$，

$\exists N=N(\varepsilon)\in N^+$，当$n>N$时，有$|S(z)-S_n(z)|<\varepsilon$在$E$上恒成立.

称$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$E$上一致收敛于和函数$S(z)$

Weierstrass M判别法

若$f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$均定义在E上，且有不等式$|f_n(z)|\le M_n$ $(n=1,2\cdots)$

成立，若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$E$上一致收敛.

定理:

若$f_n(z)\ (n=1,2,\cdots)$均在D连续,且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$在D内一致收敛于和函数$s(z)$,则$s(z)$在D内处处连续.

定理:

若$f_n(z)\ (n=1,2,\cdots)$均在光滑或逐段光滑曲线C上连续,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$在C上一致收敛于和函数$s(z)$,则$s(z)$在C上可积,且有

$$\int_C \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\,dz = \int_C s(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_C f_n(z)\,dz$$

定理:

若$f_n(z)\ (n=1,2,\cdots)$均在D内解析,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$在D内一致收敛于

和函数 $s(z)$，则 $s(z)$ 在D内解析，并且有 $s^{(p)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(p)}(z)\quad z\in D,\ p=1,2,\cdots$

4.2 幂级数

若在 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 中取 $f_n(z)=a_{n-1}(z-z_0)^{n-1}$，其中 $z_0, a_n, n=0,1,2,\cdots$，均为复常数，则得如下类型的函数项级数 $a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots$ 称为幂级数，简记作 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$，令 $z_0=0$，得幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0+a_1 z+\cdots+a_n z^n+\cdots$$ 此处主要讨论这个.

Abel 定理：

(1) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z_0(\neq 0)$ 处收敛，则它在以原点为圆心、$|z_0|$ 为半径的圆周内绝对收敛，在所有半径小于 $|z_0|$ 的闭同心圆盘 $|z|\leq \rho|z_0|\ (0<\rho<1)$ 上一致收敛

(2) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 z_0 ($\neq 0$) 处发散，则它在满足 $|z|>|z_0|$ 点 z 处发散

若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在圆周 C_R 的内部一致收敛，在 C_R 外部发散，则称 C_R 为收敛圆，

收敛圆半径 R 称为收敛半径

在 C_R 上无法判断 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是否收敛.

d'Alembert 定理:

对于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$，则其收敛半径为 $R=\begin{cases} +\infty & \lambda=0 \\ \dfrac{1}{\lambda} & 0<\lambda<+\infty \\ 0 & \lambda=+\infty \end{cases}$

Cauchy 定理:

对于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$，则其收敛半径 $R=\begin{cases} +\infty & \lambda=0 \\ \dfrac{1}{\lambda} & 0<\lambda<+\infty \\ 0 & \lambda=+\infty \end{cases}$

定理:

设 $\sum a_n z^n$ 的收敛半径为 $R>0$，则其和函数 $s(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析，且

$s^{(k)}(z)=k!a_k+\frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}z+\frac{(k+2)!}{2!}a_{k+2}z^2+\cdots \quad k=1,2,3\cdots$

定理:

设 $\sum a_n z^n$ 的收敛半径 $R>0$，C 为收敛圆盘 $|z|<R$ 内任一光滑曲线，

则 $\sum a_n z^n$ 和 $s(z)$ 在 C 上可积，且 $\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \int_C s(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty}\int_C a_n z^n dz$

设级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$ 的收敛半径为 $R_1>0$，$\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n z^n$ 收敛半径为 $R_2>0$，定义幂运算

如:

加减法: $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n\right)\pm\left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n z^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\pm\beta_n)z^n$

乘法: $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n z^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{i+j=n\\0\le i\le n}}\alpha_i\beta_j z^n$

例: $f(z)=\dfrac{1}{z^3+z^2-z-1}$ 表示成形如 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 的幂级数

$\because \dfrac{1}{z^3+z^2-z-1}=\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{(z+1)^2}$

$\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad \dfrac{-1}{(z+1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)z^n \quad |z|<1$

$\therefore \dfrac{1}{z^3+z^2-z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{i+j=n\\0\le i\le n}}1^i(-1)^{j+1}(j+1)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z^{2n+1}-z^{2n}) \quad |z|<1$

除法:

设 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$ 的收敛半径 $R_1>0$，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n z^n$ 的收敛半径 $R_2>0$，且 $\beta_0\neq0$，

若有 $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n z^n$ 满足 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n z^n\right)$，称 $\sum\gamma_n z^n$ 为 $\sum\alpha_n z^n$

和 $\sum\beta_n z^n$ 的商.

例: $f(z)=\dfrac{\ln(1+z)}{1-z+z^2}$ 表示成如 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 的幂级数

$\ln(1+z)=z-\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n}+\cdots,\ |z|<1$

$$
\begin{array}{r|l}
z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+\cdots & 1-z+z^2 \\
\hline
z-z^2+z^3 & z+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{6}z^3-\frac{11}{12}z^4\cdots \\
\hline
\frac{1}{2}z^2-\frac{2}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4 & \\
\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}z^3+\frac{1}{2}z^4 & \\
\hline
-\frac{1}{6}z^3-\frac{3}{4}z^4+\frac{1}{5}z^5 & \\
-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{6}z^4-\frac{1}{6}z^5 & \\
\hline
-\frac{11}{12}z^4+\frac{11}{30}z^5-\cdots & \\
-\frac{11}{12}z^4+\frac{11}{12}z^5+\frac{11}{12}z^6 & \\
\hline
-\frac{11}{20}z^5+\cdots &
\end{array}
$$

$$\therefore \frac{\ln(1+z)}{1-z+z^2}=z+\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{6}-\frac{11}{12}z^4-\cdots \quad |z|<1$$

4.3 Taylor级数

Taylor展开定理:

设$f(z)$在D解析，z_0是D内一点，R为z_0到D的边界的距离，

则当$|z-z_0|<R$时，有$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots$

其中$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ $n=1,2,\cdots$，C为以z_0为圆心且落在

$|z-z_0|<R$ 内的任一圆周.

称上等式右端的幂级数称为 $f(z)$ 在 z_0 处的 Taylor 级数

定理:

$f(z)$ 在 z_0 处解析 $\Leftrightarrow$ $f(z)$ 在 z_0 附近可用幂级数表示

定理:

若 $f(z)$ 在 z_0 处附近可用形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 的幂级数表示,则此幂级数只能是 $f(z)$ 在 z_0 的 Taylor 级数.

常用 Taylor 展开式:

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\cdots+z^n \qquad |z|<1$$

$$\frac{1}{1+z} = 1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots \qquad |z|<1$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \cdots \quad |z|<1$$

$$\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \cdots - \frac{z^n}{n} - \cdots \quad |z|<1$$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad |z|<+\infty$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad |z|<+\infty$$

$$\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\arcsin z = z + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\times\frac{z^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)} + \cdots$$

$$\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15}z^5 + o(z^5) \quad |z| < \frac{\pi}{2}$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}z^n + \cdots$$

级数代入法:

设 $f(z)=F[g(z)]$,其中 $F(\zeta)=a_0+a_1\zeta+\cdots+a_n\zeta^n+\cdots$ 的收敛圆盘为

$|\zeta|<r$, $g(z)=\beta_0+\beta_1 z+\cdots+\beta_n z^n+\cdots$ 的收敛圆盘为 $|z|<R$,且当 $|z|<R$ 时,

$|g(z)|<r$

$\therefore f(z)=F[g(z)]$ 在 $|z|<R$ 内解析,且有 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_k\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_n z^n\right)^k$ $|z|<R$

例: $f(z)=\frac{z-a}{z+a}$, $a\neq0$. 求 $\oint_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$,其中 c 为任一条包含原点且落在

圆周: $|z|=|a|$ 内的简单曲线

$z=-a$ 为奇点、,故 $|z|<|a|$ 内解析.

积分曲线 c 落在圆周 $|z|=|a|$ 内,由高阶导数公式及Taylor展开定理有:

$$\oint_c \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(0)=2\pi i\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=2\pi i\alpha_n$$

其中 α_n 为 $f(z)$ 在 $|z|<|a|$ 内的Taylor系数

$\therefore f(z)=\frac{z-a}{z+a}=1-\frac{2a}{z+a}=1-2\frac{1}{1+\frac{z}{a}}=1-2\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{a}\right)^n$

$$=-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a^n}(-1)^{n-1}z^n \quad |z|<|a|$$

$$a_n=\begin{cases}-1 & n=0\\ (-1)^{n-1}\frac{2}{a^n} & n=1,2,\cdots\end{cases}$$

$$\therefore \oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\begin{cases}2\pi i & n=0\\ (-1)^{n-1}\frac{4\pi i}{a^n} & n=1,2\cdots\end{cases}$$

4.4 Laurent级数

定义:

形如$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$的级数为Laurent级数，其中$z_0, a_n, n=0,\pm1,\pm2\cdots$均为复常数。

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k(z-z_0)^k+\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}a_{-k}(z-z_0)^{-k}$$

定理:

若Laurent级数有收敛域,则该域必为圆环域D: $R_1<|z-z_0|<R_2$ $(0\le R_1<R_2\le+\infty)$,且Laurent级数在D内绝对收敛,在闭圆环域D': $R_1'\le|z-z_0|\le R_2'$ $(R_1<R_1'<R_2'<R_2)$上一致收敛,其和函数在D内解析,且可逐项积分,逐项求导.

例:求Laurent级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(z-3)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{z}{3}\right)^n$的收敛圆环域

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(z-3)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{z}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}2^n(z-3)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}(z-3)^n$$

$$R_1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n}=2\qquad R_2=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}}}=3$$

$\therefore\ 2<|z-3|<3$

若Laurent级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$在$R_1<|z-z_0|<R_2$内收敛,记

$$\varphi(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots$$

$$\varphi(z)=a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_{-2}(z-z_0)^{-2}+\cdots+a_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots$$

则$\psi(z)$在$|z-z_0|<R_2$内解析，称$\psi(z)$为Laurent级数的解析部分，

而$\varphi(z)$在$R_1<|z-z_0|<+\infty$内解析，且当$\varphi(z)=0$时Laurent级数退化为

幂级数，所以称$\varphi(z)$为Laurent级数的主要部分

Laurent级数展开定理：

若$f(z)$在圆环域$D: R_1<|z-z_0|<R_2\ (0\le R_1<R_2\le+\infty)$内解析，则

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

其中，$a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

此处C为任意的圆周$|z-z_0|=R$，$R_1<R<R_2$

定理：

若 $f(z)$ 在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析，则 $f(z)$ 在这个圆环域内的 Laurent 级数展开唯一。即若 $f(z)$ 在 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内具有形如 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ 的展式，则其系数 a_n 只能由 $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad n=0,\pm1,\pm2\cdots$ 表达

例：(1) $f(z)=\frac{2z^2-z+5}{z^3-3z^2+z-3}$ ① $1<|z|<3$ ② $3<|z|<+\infty$

(2) $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}$ $1<|z|<2$

(1) $f(z)=\frac{2}{z-3}-\frac{1}{z^2+1}$

① 当 $1<|z|<3$ 时，有 $\left|\frac{z}{3}\right|<1$，$\left|\frac{1}{z^2}\right|<1$ 成立

有 $f(z)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}-\frac{1}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}=-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n-\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3^{n+1}}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}$$

② 当 $3<|z|<+\infty$ 时有 $\left|\frac{3}{z}\right|<1$，$\left|\frac{1}{z^2}\right|<1$ 成立

$$f(z)=\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}}-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z^2}\right)}=\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n-\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}2\cdot 3^n\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{z^{2(n+1)}}=\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot 3^{n-1}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}\qquad c_{-n}=\begin{cases}2\cdot 3^{2m} & n=2m+1\\ 2\cdot 3^{2m-1}+(-1)^m & n=2m\end{cases}$$

(2) $$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{z}{z^2+1}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z^2+1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-2}$$

当 $1<|z|<2$ 时, $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, $\left|\frac{1}{z^2}\right|<1$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}=-\frac{z}{5}\cdot\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$=-\frac{z}{5}\cdot\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+1}}-\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2(n+1)}}-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$=\cdots+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z^4}+\frac{1}{5}\frac{1}{z^3}-\frac{2}{5}\frac{1}{z^2}-\frac{1}{5}\frac{1}{z}-\frac{1}{10}-\frac{z}{20}-\frac{z^2}{40}-\cdots\quad 1<|z|<2$$

例: $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内的 Laurent 级数

当 $|\zeta|<+\infty$ 时, 有 $e^{\zeta}=1+\frac{1}{1!}\zeta^2+\cdots+\frac{1}{n!}\zeta^n+\cdots$

当 $0<|z|<+\infty$ 时，$0<\left|\frac{1}{z}\right|<+\infty$ ∴令 $\zeta=\frac{1}{z}$ 得

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{1!}z^{-1}+\cdots+\frac{1}{n!}z^{-n}+\cdots$$

$$\therefore z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z}+\cdots+\frac{1}{(n+2)!}\frac{1}{z^n}+\cdots \quad 0<|z|<+\infty$$

例：$f(z)=\cos\frac{z}{z-1}$ 在圆环域 $0<|z-1|<+\infty$ 内展开 Laurent 级数

$z=1$ 奇点，在 $0<|z-1|<+\infty$ 内解析，且

$$\cos\frac{z}{z-1}=\cos\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\cos 1\cos\frac{1}{z-1}-\sin 1\sin\frac{1}{z-1}$$

$\because 0<|z-1|<+\infty$ 知 $0<\left|\frac{1}{z-1}\right|<+\infty$

$$\therefore f(z)=\cos 1\cos\frac{1}{z-1}-\sin 1\sin\frac{1}{z-1}$$

$$=\cos 1\cdot\left[1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+\cdots\right]$$

$$-\sin 1\cdot\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}+\cdots\right]$$

$$=\cos 1-\frac{\sin 1}{z-1}-\frac{\cos 1}{2!(z-1)^2}+\frac{\sin 1}{3!(z-1)^3}+\cdots+\frac{(-1)^n\cos 1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+\frac{(-1)^{n+1}\sin 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}+\cdots$$

例：设 $f(z)=\cos\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 在 $z=0$ 处的 Laurent 展开式为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n z^n$，

证：$\alpha_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta\,d\theta \quad n\in\mathbb{Z}$

$$\alpha_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\cos\left(z+\frac{1}{z}\right)}{z^{n+1}}dz \qquad C: |z|=1$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\cos\theta)}{e^{i(n+1)\theta}}ie^{i\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\cos\theta)}{e^{in\theta}}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)(\cos n\theta-i\sin n\theta)d\theta$$

$$\because \int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\sin n\theta\,d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\cos\theta)\sin n\theta\,d\theta=0$$

$$\therefore \alpha_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta\,d\theta \quad n\in\mathbb{Z}$$