10.1 Euclid空间定义与基本性质

定义:

设V是$\mathbb{R}$上的线性空间,若在V中定义了一个二元实函数,称为内积,记$\langle\alpha,\beta\rangle$,它具有以下性质:

(1) $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$

(2) $\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle=\langle\alpha,\gamma\rangle+\langle\beta,\gamma\rangle$

(3) $\langle k\alpha,\beta\rangle=k\langle\alpha,\beta\rangle$

(4) 当$\alpha\neq0$时, $\langle\alpha,\alpha\rangle>0$

这里α,β,γ为V中任意向量,k是任意实数,那么V称为Euclid空间

非负实数$\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}$为向量$\alpha$的长度(或范数),记为$\|\alpha\|$,有$\|k\alpha\|=|k|\,\|\alpha\|$

若对非零向量α作$\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$，称此过程为$\alpha$单位化

α与β夹角为$\theta=\arccos\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|\|\beta\|}$

若$\theta=\frac{\pi}{2}$，则称α,β正交

10.2 标准正交基

定义：

在Euclid空间V中，若一组非零向量两两正交，称为一个正交向量组.若V是n维Euclid空间，则由n个向量组成的正交向量组称为正交基，由单位向量组成的正交基为标准正交基，而由单位向量组成的正交向量组称为标准正交组.

Schmidt正交化:

设V为n维Euclid空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ $(m\le n)$是V中线性无关的向量组,

令 $\beta_1 = \alpha_1$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \beta_2$$

$\cdots$

$$\beta_m = \alpha_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\langle \alpha_m, \beta_i \rangle}{\langle \beta_i, \beta_i \rangle} \beta_i$$

在n维Euclid空间V中,设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是一个标准正交基,则有

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\ne j \end{cases}$$

若α在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下坐标是$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，即有$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$，

且有$\alpha=\langle\alpha,\alpha_1\rangle\alpha_1+\langle\alpha,\alpha_2\rangle\alpha_2+\cdots+\langle\alpha,\alpha_n\rangle\alpha_n$

10.3 正交补与正交投影

定义:

设W为Euclid空间V的子空间，α为V的一个向量，若对$\forall\beta\in W$，都有$\langle\alpha,\beta\rangle=0$，

则称α与子空间W正交，记为$\alpha\perp W$，W的正交补是$W^{\perp}=\{\alpha\in V\mid\alpha\perp W\}$

定理:

设W是Euclid空间V的一个有限维子空间，则以下结论成立:

(1) $W^{\perp}$是V的子空间

(2) $V=W\oplus W^{\perp}$

$\beta=\langle\alpha,\alpha_1\rangle\alpha_1+\cdots+\langle\alpha,\alpha_m\rangle\alpha_m$ 称为Euclid空间V中的向量α在其m

维子空间W上的正交投影

例:在Euclid $\mathbb{R}^4$ 中,求$\alpha=(2,4,1,2)^T$在由向量组$\gamma_1=(1,-1,-1,1)^T$, $\gamma_2=(1,-1,0,1)^T$,

$\gamma_3=(1,-1,1,0)^T$ 生成子空间W上的正交投影.

$\beta_1=\gamma_1=(1,-1,-1,1)^T$

$\beta_2=\frac{1}{4}(1,-1,3,1)^T$

$\beta_3=\frac{1}{3}(1,-1,0,-2)^T$

单位化:

$\therefore \alpha_1=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^T \quad \alpha_2=\frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-1,3,1)^T \quad \alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,0,-2)^T$

$\therefore \beta=\langle\alpha,\alpha_1\rangle\alpha_1+\langle\alpha,\alpha_2\rangle\alpha_2+\langle\alpha,\alpha_3\rangle\alpha_3=(-1,1,1,2)^T$

定理:

设W是Euclid空间V的一个有限维子空间,则对V中任何向量α,W中向量β是α在W上的正交投影$\Leftrightarrow$ $\forall \delta\in W$,有$\|\alpha-\delta\|>\|\alpha-\beta\|$

10.4 正交变换

定义:

设σ为Euclid空间V上的线性变换,若$\forall \alpha,\beta\in V$,有$\langle\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$,

则称σ是正交变换

定理:

设σ是n维Euclid空间V的线性变换,则以下命题等价:

(1) σ是正交变换

(2) σ保持向量长度不变，即$\forall \alpha \in V$, $\|\sigma(\alpha)\| = \|\alpha\|$

(3) σ把V的任一标准正交基都变成标准正交基

(4) σ在V的任一标准正交基下的矩阵为正交矩阵

10.5 对称变换

定义:

设σ是n维Euclid空间V的线性变换，若σ在V的某个标准正交基下的矩阵是对称矩阵，则σ为V的一个对称变换

定理:

设σ为n维Euclid空间V的一个对称变换,则$\exists V$的一个标准正交基,使得σ在这组基下的矩阵是对角矩阵,且其中的对角元素是σ的全部特征值.

定理:

设σ是n维Euclid空间V的一个线性变换,则以下命题等价:

(1) σ为对称变换

(2) 对$\forall \alpha, \beta \in V$, $\langle \sigma(\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, \sigma(\beta) \rangle$

(3) σ在V的任意一个标准正交基下的矩阵都是对称矩阵