6.1 保形映射概念

设 $w=f(z)$ 在 D 内解析，$z_0\in D$ $f'(z_0)\neq 0$，D 内一条光滑曲线

$C: z=z(t)$ $\alpha\le t\le\beta$，$z(t_0)=z_0$，有 C 在 z_0 切线 $z'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{z(t_0+\Delta t)-z(t_0)}{\Delta t}$ $z(t)$

$\therefore$ z_0 的切线的正向与正实轴方向夹角为 $\operatorname{Arg} z'(t_0)$

$w=f(z)$ 把 $C: z=z(t)$ 映射为 w 平面上过点 $w_0=f(z_0)$ 的光滑曲线

$\Gamma: w=w(t)=f[z(t)]$，$\alpha\le t\le\beta$，$w'(t)=f'[z(t)]z'(t)$，同理

W_0 的切线的正向与正实轴方向夹角为 $\operatorname{Arg} w'(t_0)$，且有

$$\operatorname{Arg} w'(t_0)=\operatorname{Arg} f'[z(t_0)]+\operatorname{Arg} z'(t_0)$$

或 $\operatorname{Arg} w'(t_0)-\operatorname{Arg} z'(t_0)=\operatorname{Arg} f'(z_0)$

即 Γ 在 w_0 点处的切向量与 C 在 z_0 处切向量的辐角差总是 $\operatorname{Arg} f'(z_0)$

与曲线 C 的形状无关，称 $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ 为 $f(z)$ 在 z_0 点、的旋转角.

对于过z_0点的任意两条光滑曲线 $C_1: z=z_1(t)$ 与$C_2: z=z_2(t)$

$\alpha \le t \le \beta$，且$z_0=z_1(t_0)=z_2(t_0)$ $\alpha<t_0<\beta$，则在$w=f(z)$下的像

过点 $w_0=f(z_0)$的光滑曲线$\Gamma_1: w=w_1(t)=f[z_1(t)]$ 与$\Gamma_2: w=w_2(t)=f[z_2(t)]$

于是有 $\operatorname{Arg} w_2'(t_0)-\operatorname{Arg} w_1'(t_0)=\operatorname{Arg} z_2'(t_0)-\operatorname{Arg} z_1'(t_0)$

上式右边表 C_1与C_2在z_0处夹角θ，左边表示Γ_1与Γ_2在$w_0=f(z_0)$处夹角φ，

若在导数不为零点处，两曲线夹角的大小与旋转方向，即$\theta=\varphi$时，称$f(z)$

在z_0处是保角的

定理:

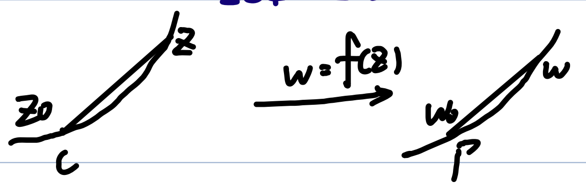
若 $w=f(z)$在D内解析，则在$f'(z)\neq 0$的点处映射$w=f(z)$是保角的.

$\because$ $f'(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

$\therefore$ 任取过z_0的曲线 $C: z=z(t)$，$\alpha\le t\le\beta$，则其在$f(z)$上的像为$\Gamma: w=f[z(t)]$

记C上由z_0到z的弧长为$\widehat{z_0 z}$，Γ上由w_0到w的弧长$\widehat{w_0 w}$，则

$$|f'(z_0)| = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in C}} \frac{\widehat{w_0 w}}{\widehat{z_0 z}}$$



表明像点之间的弧长与原像之间的弧长比的极限与曲线形状无关，

且总是等于$|f'(z_0)|$，当$z \to z_0$时，$\widehat{w_0 w} = |f'(z_0)|\, \widehat{z_0 z}$

若$|f'(z_0)|>1$，弧长经映射$w=f(z)$被伸长；反之缩短，称$|f'(z_0)|$为

$f(z)$在z_0处的伸缩率

定义:

凡在区域D内处处具有保角性和伸缩率不变性的一一映射称为

D内的保形映射.

定理:

若 $w=f(z)$ 在 z_0 处解析，且 $f'(z_0)\neq 0$，则 $w=f(z)$ 在 z_0 点附近为保形映射

6.2 分式线性映射

分式线性映射由 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ 来定义的，$a.b.c.d$ 为复常数

分式线性映射的逆映射 $z=\frac{-dw+b}{cw+a}$ 也是一个分式线性映射

若 $c=0$ 时，$z=\infty$ 为其一阶极点、，$z=\infty$ 与 $w=\infty$ 相对应

若 $c\neq 0$ 时，$z=-\frac{d}{c}$ 为其一阶极点.，$z=-\frac{d}{c}$ 与 $w=\infty$ 相对应，$z=\infty$ 与 $w=\frac{a}{c}$ 相对应

四种简单分式线性映射的意义与性质:

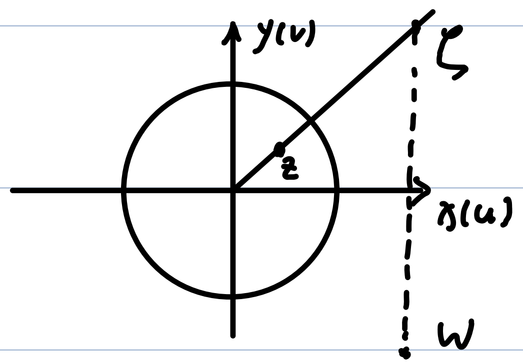
(1) $w=z+a$，为一个平移

(2) $w=e^{i\theta}z$，$\theta\in\mathbb{R}$，为一个旋转

(3) $w=rz \quad r>0$ 为相似映射

(4) $w=\frac{1}{z}$ 先关于 $|z|=1$ 对称，再关于实轴对称

设有圆周 $C: |z-z_0|=R$，若 z_1, z_2 满足 $z_2-z_0=\frac{R^2}{\overline{z_1-z_0}}$，称 z_1, z_2 是关于圆周C的一对对称点.



定理:

分式线性映射在扩充复平面上是一一对应的保角映射

将z平面中的直线看成半径为无穷大的圆，则映射(1)~(3)在扩充复平面上，将圆映射成圆，这个性质称为保圆性.

定理：

分式线性映射具有保圆性

定理：

设点 z_1, z_2 是关于圆周 C 的一对对称点，则在分式线性映射下，它们的像点 w_1 与 w_2 也是关于 C 的像曲线圆周 Γ 的一对对称点

6.3 分式线性映射的性质

定理：

对于扩充的 z 平面上任意 3 个相异的点 z_1, z_2, z_3，以及扩充的 w 平面上任意 3 个相异的点 w_1, w_2, w_3，∃唯一的分式线性映射，把 z_1, z_2, z_3 分别

映射域 w_1、w_2、w_3.

定理:

扩充z平面上的任何一个圆,可以用一个分式线性函数映射成扩充的w平面上任何一个圆.

在分式线性映射下:

1. 当二圆周上没有点映射成无穷远点时,这二圆周的弧所围成的域映射成二圆弧所围成的域.

2. 当二圆周上有一个点映射成无穷远点时,这二圆周的弧所围成的域映射成一圆弧与一直线所围成的域.

3. 当二圆周交点中的一个映射成无穷远点时，这二圆周的弧所围成的域映射成角形域

6.4 两个重要的分式线性映射

一、将上半平面 $Im z>0$ 映射成单位圆盘 $|w|<1$ 的分式线性映射

上半平面总有一点 $z=\lambda$ 要映射成单位圆周 $|w|=1$ 的圆心 $w=0$

有 $w=e^{i\theta}\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}$ 把上半平面内以 $\lambda,\bar{\lambda}$ 为对称点的圆周族

$\left|\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right|=k \quad (0<k<1)$ 映射成 w 平面上以原点为圆心的圆周族 $|w|=k$.

例：求 $Im>0$ 到 $|w|<R$ 的分式线性映射 $w=f(z)$ s.t. $f(i)=0$ $f'(i)=1$，求 R 的值.

$$w_1=\frac{w}{R}=g(z)=\frac{1}{R}f(z)$$

$$g(i)=0 \quad g'(i)=\frac{1}{R}$$

$$w_1=g(z)=e^{i\theta}\frac{z-i}{z-\bar{i}}$$

$$\frac{1}{R}=g'(i)=\frac{2ie^{i\theta}}{(z+i)^2}\Big|_{z=i}=\frac{e^{i\theta}}{2i} \Rightarrow R=2 \qquad \theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore w=f(z)=2i\frac{z-i}{z+i}$$

二、将单位圆盘$|z|<1$映射为单位圆盘$|w|<1$的分式线性映射

若$z=\alpha$ $(|\alpha|<1)$对应于点$w=0$，那么点$z=\alpha$关于圆周$|w|=1$的对称点

$z=\frac{1}{\bar{\alpha}}$对应于点$w=\infty$，因此$a\alpha+b=0$，$c\frac{1}{\bar{\alpha}}+d=0$

于是 $w=k\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ $(k=-a\bar{\alpha}/c)$

$\therefore$ 有$w=e^{i\varphi}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$

例：把单位圆盘映射到自身的分式线性映射：$w=f(z)$，且满足条件

$f(\frac{i}{2})=0$，$\arg f'(\frac{i}{2})=\frac{\pi}{2}$

$$w=e^{i\varphi}\frac{z-\frac{i}{2}}{1-\overline{\frac{i}{2}}z}$$

$$\arg f'(\frac{i}{2})=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}=\arg\left[e^{i\varphi}\frac{3}{(2+iz)^2}\right]\Big|_{z=\frac{i}{2}}=\arg\left(e^{i\varphi}\frac{4}{3}\right)=\varphi$$

$$\therefore w=\frac{2iz+1}{2+iz}$$

例：分式线性映射 $w=f(z)$ 将 $|z|<2$ 映射成右半平面 $\mathrm{Re}\,w>0$，并

满足 $f(0)=1$，$\arg f'(0)=\frac{\pi}{2}$，求 $w=f(z)$

$$f^{-1}(1)=0$$

$w=1$ 与 $w=-1$ 关于 $\mathrm{Re}\,w=0$ 对称，$z=0$ 与 $z=\infty$ 关于 $|z|=2$ 对称

$$f^{-1}(-1)=\infty$$

$$z=f^{-1}(w)=k\frac{w-1}{w+1}$$

令 $w=u+iv$，$z=f^{-1}(w)$ 将 $\mathrm{Re}\,z=0$ 映射为 $|z|=2$

当 $w=iv$ 时，有 $2=\left|k\dfrac{iv-1}{iv+1}\right|=|k|$

于是 $z=2e^{i\theta}\dfrac{w-1}{w+1}$　　$f'(z)=\dfrac{4e^{i\theta}}{(z-2e^{i\theta})^2}$

$\arg f'(0)=\arg e^{-i\theta}=\frac{\pi}{2}$　$\Rightarrow \theta=-\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ w=-\dfrac{z-2i}{z+2i}$

6.5 几个初等函数所构成的映射

一. 幂函数 $w=z^n\ (n=2,3,\cdots)$

把以原点为顶点的角形域映射成以原点为顶点的角形域，但张角变为原来的n倍

二. 指数函数 $w=e^z$

将带形域 $0<\operatorname{Im} z<h$ $(0<h\le 2\pi)$ 变为角形域 $0<\arg w<h$.

三. Joukowski函数

函数 $w=\frac{1}{2}(z+\frac{a^2}{z})(a>0)$ 称为Joukowski函数

将一具通过点 $z=a$ 与 $z=-a$ 的圆周 C 的外部一一对应地保形映射成除去一个连接点 $w=a$ 与 $w=-a$ 的圆弧的平面.

Specially, 当 C 为 $|z|=a$ 时, 圆弧将退化为线段 $-a\le \operatorname{Re} z\le a$