1.1 复数运算几何表示

形如 $z=x+iy$ 的数,称为复数,且 $i^2=-1$,此时 $x=\mathrm{Re}\,z$ $y=\mathrm{Im}\,z$

设 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$,

则 $z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$, $z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$

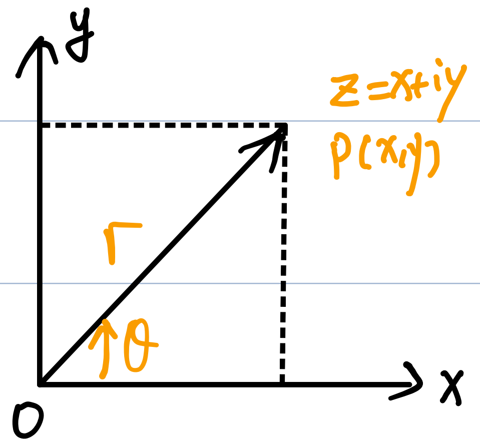
$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

若 $z_2\neq 0$,则 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_1^2+x_2^2}+i\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_1^2+x_2^2}$

$\mathrm{Re}(z_1\pm z_2)=\mathrm{Re}(z_1)\pm\mathrm{Re}(z_2)$

$\mathrm{Im}(z_1\pm z_2)=\mathrm{Im}(z_1)\pm\mathrm{Im}(z_2)$

复数的几何表示：



$\vec{OP}$的长度称为z的模，记作$|z|$，$|z|=|\vec{OP}|=r$

θ称为z的辐角，记作Arg，$\mathrm{Arg}z=\theta$

Commonly，将满足$-\pi<\theta_0\leq\pi$的辐角θ_0称为$\mathrm{Arg}z$的主值，

记作$\arg z$，$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi \quad k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots$

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x} & x>0\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi & x<0,y>0\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi & x<0\quad y<0\end{cases}$$

模、辐角与实、虚部关系：

$$\begin{cases} r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \tan(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x} \end{cases}$$

及 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$\therefore z = x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Euler公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\therefore$ 有复数的三种表达形式：$z = re^{i\theta} = x+iy + r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$-|z| \leq \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \leq |z|$

实部相等,虚部互为相反数的两个复数,称为共轭复数,记为$\bar{z}$,

即 $\overline{x+iy}=x-iy$

$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z_1}\pm\bar{z_2}$　　$\overline{z_1z_2}=\bar{z_1}\cdot\bar{z_2}$　　$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}\ (z_2\neq0)$

$2\operatorname{Re}z=z+\bar{z}$　　$2i\operatorname{Im}=z-\bar{z}$

$z\bar{z}=|z|^2$　　$|z|=|\bar{z}|$

$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$　　$|z_1-z_2|\geq\big||z_1|-|z_2|\big|$

例: $A.C\in\mathbb{R}$, $A\neq0$, $\beta\in\mathbb{C}$, 且$|\beta|^2>AC$, 证: z上的圆周可由

$Az\bar{z}+\beta\bar{z}+\bar{\beta}z+C=0$ 表示

证: 平面中,任一圆可写为 $A(x^2+y^2)+Bx+Dy+C=0$

且 $A\neq0$, $B^2+D^2-4AC>0$

$x^2+y^2=z\bar{z}$ $\quad x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$ $\quad y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

$\therefore A z\bar{z}+\frac{B}{2}(z+\bar{z})+\frac{D}{2i}(z-\bar{z})+C=0$

令 $\beta=\frac{1}{2}(B+iD)$ $\quad \therefore \#$

两复数相乘即模相乘，辐角相加

两复数相除即模相除，辐角相减

例：证 z_1, z_2, z_3 共线 $\Leftrightarrow \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\in\mathbb{R}$

z_1, z_2, z_3 共线 $\Leftrightarrow \overline{z_2z_3}$ 与 $\overline{z_1z_3}$ 夹 $\angle z_2z_1z_3$ 为 $n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=n\pi \Leftrightarrow \operatorname{Im}\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=0 \Leftrightarrow \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\in\mathbb{R}$

$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]$

$z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

Specially，有 De Moivre 公式：$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta=e^{in\theta}$

若对于$z\in\mathbb{C}$，$\exists w\in\mathbb{C}$满足 $w^n=z$（$n\in\mathbb{Z}$且$n>1$），则称w为z的n次方根，

记作$w=\sqrt[n]{z}$，称为开方

一个复数z的n次方根有且仅有n个相异值 且有

$$\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right],k=0,1,2,\cdots,n-1$$

几何意义：

$\sqrt[n]{z}$的n个值分布在以原点为圆心，$r^{\frac{1}{n}}$为半径为半径的圆内接正n边形的顶点上.

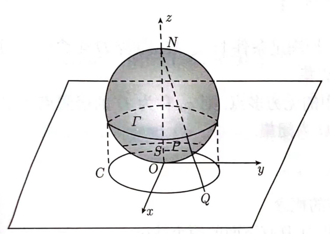


图 1.1.8

将 xOy 平面看作复平面, 取一个球面将其南极 S 与复平面上原点相切(图 1.1.8). 设 P 为球面上的任一点, 从球面北极 N 作射线 NP, 必交于复平面的一点 Q, 它在复平面上表示一个模为有限的复数. 反过来, 从球极 N 出发, 且过复平面上任一模为有限的点 Q 的射线, 也必交于球面上的一个点, 记作 P. 于是复平面上的点与球面的点(除 N 点外) 建立了一一对应关系.

平面上模为无穷大的点，为无穷远点，记 ∞；

复平面上点加上 ∞，称扩充复平面，记 $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

模为有限的复数，称有限复数；

与扩充复平面对应就是整个球面，称为复球面.

1.2 复平面上的点集

z_0 的 δ 邻域：$\{z \mid |z-z_0|<\delta\}$，记 $N(z_0,\delta)$

z_0 的去心 δ 邻域 $\{z \mid 0<|z-z_0|<\delta\}$，记 $\mathring{N}(z_0,\delta)$

∞ 点的 δ 邻域 $\{z \mid |z|>\frac{1}{\delta}\}$，记 $N(\infty,\delta)$

对于点集D与点z_0:

若D的点z_0有一邻域全含于D内，称z_0为D内点;

若D的点均为内点，则D为开集;

若在z_0的任意邻域内，同时有属于D和不属于D的点，称z_0为D的边界点;

若D的全部边界点所组成的点集称为D的边界，记∂D;

若$\exists M>0$，对$\forall z\in D$，有$|z|\le M$，称D为有界集;

若$\forall M>0$，$\exists z_0\in D$ s.t. $|z|>M$，称D为无界集;

若在$N(z_0,\delta)$中有D中无穷多点，则z_0为聚点;

若D的所有聚点都属于极限点，则D为闭集

定义:

若复平面上非空点集D具有下面两个性质:

(1) D为开集

(2) D内任意两点、都可用一条具有有限折的折线把它们连接起来,且这折线上所有点均属于D(此性质称为D的连通性)

则称D为区域

区域加上它的边界为闭区域,记$\bar{D}=D\cup\partial D$

若曲线$\Gamma: z=z(t)=x(t)+iy(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$的$x(t)$与$y(t)$均为t的连续函数,则曲线Γ为连续曲线;

若连续曲线$\Gamma: z=z(t)$当$t_1\ne t_2$ $(\alpha<t_1,t_2<\beta)$时$z(t_1)\ne z(t_2)$即曲线无重点,则Γ为简单曲线;

当 $z(\alpha)=z(\beta)$ 时，Γ 为简单闭区线；

若连续曲线 $\Gamma: z=z(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ 在区间 $\alpha\le t\le\beta$ 上存在连续导数 $x'(t)$ 及 $y'(t)$，且二者不同时为零，则在曲线 Γ 上每点、均有切线且切线方向是连续变化，则称 Γ 为光滑曲线；

由有限段光滑曲线首尾相连接而成的曲线为逐段光滑曲线，但在连接处可能不存在切线。Specially，折线是按段光滑曲线。

Jordan定理：

任何简单闭曲线一定把扩充复平面分成两个没有公共点的区域，一个是有界的，称为曲线的内部；另一个是无界的，称为曲线的外部。这两个区域都以已给的简单闭曲线（也称Jordan曲线）作为边界。

定义:

在复平面上,若区域D内任意一条简单曲线的内部都含于区域D内,则称D为单连通区域;否则称D为多连通区域

1.3 复变函数

定义:

设G是复数$z=x+iy$的集合,若∃一个法则,按这个法则,对于G的每个z,都有一个(或多个)确定的复数$w=u+iv$与之对应,则称复变量w为复变量z的复变函数,记$w=f(z)$

G称为$w=f(z)$的定义集合,$G^*=f(G)=\{w=f(z)\ \ z\in G\}$称为函数值集合.

$u+iv=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$

∴给定一个复变函数 $w=f(z)$ 相当于给定了两个二元实变函数

$$u=u(x,y) \quad v=v(x,y) \quad (x,y)\in G$$

若对于 $\forall z\in G$，有且仅有一个 w 值与之对应，称 $f(z)$ 为 G 上的单值函数，否则，称 $f(z)$ 为多值函数.

在 $w=f(z)$ 的对应关系中，也可从 G^* 到 G 来看"对应"，对于 G^* 中的每一个 w，一定存在一个或多个 z 值与之对应，于是定义了 G^* 上的函数 $z=\varphi(w)$，称为 $w=f(z)$ 的反函数

$w=f(z)$可看作z上的点集G到w上的点集$G^*=\{w: w=f(z), z\in G\}$

的一种对应，称之为映射.

$w=f(z)$称为像点，z为$w=f(z)$的原像.

若$w=f(z)$及$z=\varphi(w)$皆为单值，则称G与G^*为双射

定义:

设$w=f(z)$在z_0的邻域$0<|z-z_0|<\rho$内有定义，若∃一个确定复数A,

对$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当$0<|z-z_0|<\delta\le\rho$时，恒有$|f(z)-A|<\varepsilon$成立，称$z\to z_0$

时，$f(z)$的极限，记$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$

若$\forall\varepsilon>0$ $\exists R>0$ s.t. 当$|z|>R$，有$|f(z)-A|<\varepsilon$，则$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=A$

定理:

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $0<|z-z_0|<\rho$ 上有定义，其中 $z=x+iy$

$z_0=x_0+iy_0$，则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A=a+bi \Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=a \quad \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=b$

定理:

若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \quad \lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$，则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0} (f(z)\pm g(z)) = A\pm B$

(2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\,g(z) = AB$

(3) $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{A}{B} \quad (B\neq 0)$

(4) 设 $w=f[g(z)]$ 由 $w=f(\xi)$ 和 $\xi=g(z)$ 复合而成，若 $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=A$，

且在 $\mathring{N}(z_0,\delta)$ 内 $g(z)\neq A$，又 $\lim\limits_{\xi\to A} f(\xi)=B$，则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(g(z))=B$

定义:

设 $w=f(z)$ 在 z_0 的邻域内 $|z-z_0|<\rho$ 有定义,对于任给的 $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,

s.t. $|z-z_0|<\delta\le\rho$ 内任一点、z 恒有 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续

定理:

(1) 若 $f(z)$ $g(z)$ 于 z_0 连续,则其和、差、积、商(商时, $g(z_0)\neq0$)

在点 z_0 处连续

(2) 若 $\zeta=g(z)$ 在 z_0 连续, $w=f(\zeta)$ 在点 $\zeta_0=g(z_0)$ 处连续,则 $w=f[g(z)]$ 在

z_0 处连续。

定理:

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在$z_0=x_0+iy_0$处连续$\Leftrightarrow u(x,y)$、$v(x,y)$在(x_0,y_0)处连续