7.1 平面二次曲线方程的化简

对于平面曲线，二次曲线一般方程为 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+b_1x+b_2y+c=0$ ，

$\because \quad a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=(x\ \ y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

记 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\alpha=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

则二次曲线可表为 $X^TAX+\alpha^TX+c=0$

将 X^TAX 称之为二次型，A 为二次型矩阵

记平面内一点与新坐标为 (x,y)、(x',y')，则移轴公式为 $\begin{cases} x=x'+x_0 \\ y=y'+y_0 \end{cases}$

记直角坐标系绕O点逆时针旋转 θ，得新坐标系，则转轴公式为

$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

旋转角公式：$\cot 2\theta = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$

可以通过先旋转，后平移来实现二次曲线的化简.

例：化简 $x^2-4xy-2y^2+10x+4y=0$

$\cot 2\theta = \frac{1-(-2)}{-4} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \tan\theta = 2$，$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x'-2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x'+y') \end{cases} \Rightarrow -3(x')^2+2(y')^2+\frac{18}{\sqrt{5}}x'-\frac{16}{\sqrt{5}}y'=0$

$\therefore -3(x'-\frac{3}{\sqrt{5}})^2+2(y'-\frac{4}{\sqrt{5}})^2-1=0$

$\begin{cases} x'-\frac{3}{\sqrt{5}}=x'' \\ y'-\frac{4}{\sqrt{5}}=y'' \end{cases}$

$\therefore -\frac{(x'')^2}{\frac{1}{3}}+\frac{(y'')^2}{\frac{1}{2}}=1$

定理：

当二阶实对称矩阵 $A\neq 0$ 时，平面二次曲线方程经过直角坐标系的旋转轴和移轴，总能化成下列9种标准方程中的一个：

(1) $\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{h^2}=1$ (椭圆)

(2) $\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{h^2}=-1$ (虚椭圆)

(3) $\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{h^2}=0$ (点椭圆或一个实点)

(4) $\frac{x^2}{k^2}-\frac{y^2}{h^2}=1$ (双曲线)

(5) $\frac{x^2}{k^2}-\frac{y^2}{h^2}=0$ (两相交直线)

(6) $x^2=2py$ (抛物线)

(7) $x^2=k^2$ (两平行直线)

(8) $x^2=-k^2$ (两平行虚直线)

(9) $x^2=0$ (两重合直线)

7.2 正交矩阵与n维向量空间$\mathbb{R}^n$中的Schmidt正交化

X^TAX经转轴$X=QX'$，变成新二次型$a(x')^2+b(y')^2$，称为X^TAX的标准形

两垂直的向量一般称为正交向量，设$\alpha=(x_1\cdots x_n)^T$ $\beta=(y_1\cdots y_n)^T$，

记$\alpha^T\beta$为α与β的内积，显然$\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$，

记$|\alpha|=\sqrt{\alpha^T\alpha}$ 为α的长度

定义：

$\mathbb{R}^n$中的向量α和β若满足$\alpha^T\beta=0$，则称α与β正交，若$\alpha_1\cdots\alpha_m$都是$\mathbb{R}^n$中的非零向量，且对$\forall i\neq j$，有$\alpha_i^T\alpha_j=0$，则称这m个向量的集合$\alpha_1\cdots\alpha_m$为$\mathbb{R}^n$中的一个正交组.

定理:

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为$\mathbb{R}^n$中的一个正交组,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关

定义:

若一个正交组中每个向量都是单位向量,则称此正交组为标准正交组

定义:

若n阶实方阵Q的n个列向量是$\mathbb{R}^n$的一个标准正交基,则称Q为一个正交阵

定理:

n阶方阵Q是正交阵$\Leftrightarrow Q^TQ=I$

定理:

设Q为n阶正交阵,则以下性质成立:

(1) $Q^T=Q^{-1}$

(2) $|Q|=1$或-1

(3) 对$\mathbb{R}^n$中的任何向量α,β,有$(Q\alpha)^T(Q\beta)=\alpha^T\beta$

(4) 对$\mathbb{R}^n$中的任何向量α,有$|Q\alpha|=|\alpha|$

定理:

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为$\mathbb{R}^n$中$m$个线性无关向量,令

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\alpha_2^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1$$

$$\cdots$$

$$\beta_m = \alpha_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_m^T \beta_i}{\beta_i^T \beta_i} \beta_i ,$$

则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的正交组，且 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 等价

得到 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 的过程称为 Schmidt 正交化.

7.3 二次型与主轴定理

定义:

含有 n 个变量的二次齐次多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(X)$

$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n$

$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j$，称为 $\mathbb{F}$ 上的二次型，其中所有系数 a_{ij} 都取自数域 $\mathbb{F}$，

且 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，当系数 a_{ij} 全取自实数域 $\mathbb{R}$（或复数域 $\mathbb{C}$）时，称 $f(X)$

为实二次型（或复二次型）

用对称矩阵 A 将二次型表示 $f(X)=X^TAX$，称为 A 的二次型矩阵

$X=QY$，$Y=(y_1,\cdots,y_n)^T$，$f(X)=X^TAX=Y^TY=\underline{\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2}$ 为 $f(X)$ 的标准形.

定理：

n 阶实对称矩阵 A 的特征值为实数.

主轴定理：

设 $f(X)=X^TAX$ 为一个 n 元实二次型，则总可以 $\exists$ 正交线性替换 $X=QY$

$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ 化为标准形 $f(X)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$，这里 Q 为一个正交矩阵，

而 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ 为二次型的矩阵 A 的全部特征值.

即若 A 为 n 阶实对称矩阵，则 $\exists$ 一个正交矩阵 Q，s.t. $Q^TAQ=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ 是 A 的全部特征值，且组成正交矩阵 Q 的 n 个列向量正是

分别属于这些特征值的特征向量.

例: 求 $f(x,y,z)=2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz+2yz$ 化为标准形

$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ $|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$

$\lambda=1$ 时 $\alpha_1=(-1,1,0)^T$ $\alpha_2=(-1,0,1)^T$

令 $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\beta_2=\alpha_2-\frac{\alpha_2^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

$\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$ $\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

$\lambda=4$ 时 $\alpha_3=(1,1,1)^T$

$\therefore \eta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

$\therefore Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ $X=QX'$

$\therefore f(x,y,z)=(x')^2+(y')^2+(z')^2$

定理:

设 A 为 n 阶实对称矩阵，则 $\mathbb{R}^n$ 中属于 A 的不同特征值的特征向量必正交.

7.4 二次型的其他标准形与矩阵的合同

$f(X)=X^TAX$，$\exists$ 一个可逆 P，$X=PY$，$Y=(y_1,\cdots,y_n)^T$，称为非退化线性替换，$f(X)=X^TAX=Y^T(P^TAP)Y=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$

例：$f(x,y,z)=x^2+2y^2-z^2+4xy-4xz-4yz$ 化为标准形

$$f(x,y,z)=(x+2y-2z)^2-2(y^2-2yz+z^2-z^2)-5z^2$$

$$=(x+2y-2z)^2-2(y-z)^2-3z^2$$

令 $X'=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}X$

$f(x,y,z) = (x')^2 - 2(y')^2 - 3(z')^2$

且 $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X'$

定理:

任何一个二次型都可以通过非退化线性替换化成标准形

定义:

给定两个n阶方阵A和B,若$\exists$可逆P, s.t. $P^TAP=B$,则称A与B合同

定理:

任何一个n阶对称阵A都与一个对角阵合同,即$\exists$可逆P, s.t.

$P^TAP = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$

用非退化线性替换化复二次型为标准形时,可以得到各项系数都为1的标准形,称复二次型的典范形,形如: $f(X) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2$

定理:

任何复二次型总可以经一个适当的非退化线性替换化成典范形,且典范形唯一.

定理:

任何一个复对称矩阵A都合同于一个形如$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$的对角阵,

其中$r=\mathrm{rank}(A)$

7.5 实二次型的惯性定理

实二次型用非退化线性替换可以化成典范型,形如:

$$f(X)=c_1y_1^2+\cdots+c_py_p^2-c_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-c_ry_r^2$$

其中正平方项个数p为正惯性指数,负平方项个数$r-p$为负惯性指数

定理:

任何一个实二次型总可以经过一个适当的非退化线性替换化成典范形,且典范形是唯一的.

定理:

任何n阶实对称阵A都合同于对角矩阵 $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$,其中对角线上1的个数p和-1的个数r-p(r为A的秩)是唯一的,或说∃一个实可逆P, s.t.

$P^TAP=\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

7.6 正定二次型与正定矩阵

定义:

设 $f(X)=X^TAX$ 是n元实二次型,若对 $\forall X\neq 0$,恒有 $f(X)>0$,则称 $f(X)$ 为正定二次型,此时二次型 $f(X)$ 的矩阵A称为正定阵;若 $\forall X\neq 0$,恒有 $f(X)<0$,

则称$f(X)$负定二次型，此时二次型$f(X)$的矩阵A称为负定阵；若$f(X)$既可取正值，也可取负值，则称$f(X)$不定二次型，此时二次型$f(X)$的矩阵A称为不定阵

定理：

设$f(X)=X^TAX$为n元实二次型，则

(1) $f(X)$为正定二次型$\Leftrightarrow$ A的所有特征值全为正值

(2) $f(X)$为负定二次型$\Leftrightarrow$ A的所有特征值全为负值

(3) $f(X)$为不定二次型$\Leftrightarrow$ A的特征值中有正值也有负值

定理：

n元实二次型正定$\Leftrightarrow$正惯性指数$p=n$

定理:

实对称阵A正定$\Leftrightarrow A$与I合同

定理:

实对称阵A正定$\Leftrightarrow \exists$实可逆矩阵C, s.t. $A=C^TC$

定义:

设$A=(a_{ij})$为n阶方阵,子式 $M_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$ $k=1,2,\cdots,n$,

称为A的k阶顺序主子式

定理:

实二次型$f(X)=X^TAX$正定$\Leftrightarrow A$的各阶顺序主子式$M_k>0$ $k=1,2,\cdots,n$

定理:

(1) n元二次型$f(X)=X^TAX$负定$\Leftrightarrow$它的负惯性指数等于n

$\Leftrightarrow$ A的奇数阶顺序主子式小于0，偶数阶顺序主子式大于0，

定义：

设 $f(X)=X^TAX$ 是n元实二次型，若对 $\forall X\in\mathbb{R}^n$，恒有 $f(X)\geq 0$，则称 $f(X)$ 为半正定二次型，此时二次型 $f(X)$ 的矩阵A称为半正定阵；若对 $\forall X\in\mathbb{R}^n$，恒有 $f(X)\leq 0$，则称 $f(X)$ 为半负定二次型，此时二次型 $f(X)$ 的矩阵A称为半负定阵

定理：

设 $f(X)=X^TAX$ 为n元实二次型，则以下命题等价：

(1) A为半正定阵

(2) $f(X)$ 正惯性指数与秩相等

(3) $\exists$ n阶实矩阵C，s.t. $A=C^TC$

(4) A的所有特征值非负