

1 Desarrollar la demostraciones

1. Demostrar que los valores singulares de \mathbf{A}^{-1} , son $1/\sigma_1, 1/\sigma_2, \dots, 1/\sigma_n$, si los σ 's son los valores singulares de \mathbf{A} .
2. Demostrar que

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$$

Usando la descomposicion en valores singulares.

3. Se tiene una matriz de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

Asuma que \mathbf{A}_{11} es $p \times p$, \mathbf{A}_{22} es $q \times q$, y \mathbf{A} es invertible. Demostrar que

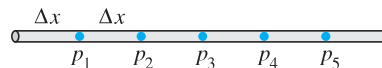
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

2 Computacional

1. Encuentre la solución de mínimos cuadrados al problema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ usando la factorización QR, y resolviendo por medio de $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^\top \mathbf{b}$. Donde \mathbf{Rx} se resuelve por sustitución hacia atrás.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Realizar el problema anterior usando $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$. Comparar si la matriz $(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top$ corresponde a la pseudo inversa, típicamente denotada como `pinv` en las librerías de álgebra lineal.
3. Realizar el problema 1.3 en el PC. Generar las matrices \mathbf{A}_{11} , \mathbf{A}_{12} y \mathbf{A}_{22} de manera aleatoria, para $p = 3$ y $q = 5$. Verificar que se cumple la demostración.
4. La matriz de banda \mathbf{A} mostrada abajo puede ser utilizada para estimar la conducción inestable de calor en una barra cuando la temperatura en los puntos p_1, \dots, p_5 sobre la barra cambian con el tiempo.



La constante C en una matriz depende de la naturaleza física de la barra, la distancia Δx entre los puntos sobre la barra, y la longitud del tiempo Δt entre medidas sucesivas de temperaturas. Suponga que para $k = 0, 1, 2, \dots$ un vector $\mathbf{t}_k \in \mathbb{R}^5$ contiene las temperaturas

en el tiempo $k\Delta t$. Si los dos finales de la barra se mantienen en 0° , entonces los vectores temperatura satisfacen la ecuación $\mathbf{A}\mathbf{t}_{k+1} = \mathbf{t}_k$ (con $k = 0, 1, \dots$), donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (1+2C) & -C & & & \\ -C & (1+2C) & -C & & \\ & -C & (1+2C) & -C & \\ & & -C & (1+2C) & -C \\ & & & -C & (1+2C) \end{bmatrix}$$

- (a) Determine la factorización LU de \mathbf{A} cuando $C = 1$. Una matriz como \mathbf{A} con tres diagonales diferentes de cero es llamada matriz tri-diagonal. Los factores \mathbf{L} y \mathbf{U} son matrices bi-diagonales.
- (b) Suponga que $C = 1$ y $\mathbf{t}_0 = [10, 12, 12, 12, 10]^\top$. Usar la factorización LU de \mathbf{A} para encontrar la distribución de temperaturas \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 , \mathbf{t}_3 , y \mathbf{t}_4 .