Ecuaciones Diferenciales - Transformadas

Cristian Guarnizo-Lemus
cristianguarnizo@itm.edu.co

Maestria en Automatización y Control Industrial

Contenido

Contenido

Señales continuas

Una señal continua en el tiempo es una función de la variable continua t y se denota como $x(t)$. Las señales se pueden clasificar de varios modos. Un modo es en términos de la energía y la potencia. La energía en una señal $x(t)$ es

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}\, t.$$

Mientras que la potencia de una señal es

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}\, t.$$

Sistemas continuos

Para una señal de energía $x(t)$, la función autocorrelación es

$$r_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} x(t)x^*(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau,$$

donde $x^*(\tau)$ es el conjugado complejo de $x(t)$. Observar que $E = r_x(0)$.
Para una señal de potencia, función de autocorrelación es

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x^*(t-\tau)\,\mathrm{d}\,t.$$

Note que $P = \phi_x(0)$.

Sistemas continuos - Función impulso

La función impulse se define por la expresión integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)\,\mathrm{d}\,t = x(0)$$

para cualquier señal x(t) que es continua en $t = 0$. La función impulso tiene las siguientes propiedades

- $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$.
- $\delta(-t) = \delta(t)$
- Propiedad de desplazamiento:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}\,t = \begin{cases} x(t_0), & t_1 \leq t_0 \leq t_2 \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

- $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$.

Contenido

Sistemas Discretos

Una señal discreta en el tiempo es una función de la variable discreta n y se denota como $x[n]$. Las señales se pueden clasificar de varios modos. Un modo es en términos de la energía y la potencia. La energía en una señal $x(t)$ es

$$E = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2.$$

Mientras que la potencia de una señal discreta es

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2N+1} \int_{n=-N}^{N} |x[n]|^2.$$

Simulación de sistemas lineales

A pesar que existen una diversidad de herramientas para resolver ecuaciones diferenciales y simular sistemas dinámicos lineales, en este caso seleccionamos Python.

```
y = odeint(model, y0, t)
```

Ejemplo: $\frac{dy(t)}{dt} = -k\ y(t)$

```
def model(y,t):
    k = 0.3
    dydt = -k * y
    return dydt
```

Contenido

Transformada de Laplace

Dada una función $f(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, existe una función $\mathcal{L}$ denominada *transformada de Laplace* que toma como argumento $f(t)$ y produce una función $F(s):\mathbb{C}\to\mathbb{C}$.

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}\,t.$$

La transformada inversa se expresa como

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{+st}ds$$

Transformada de Laplace

Ejemplo: Transformada de Laplace de una constante c

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^{\infty} c\, e^{-s\,t} dt = -\frac{c}{s} e^{-s\,t}\Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{c}{s}\right) = \frac{c}{s}$$

Ejercicio: Cual es la transformada de $\delta(t)$

Transformada de Laplace

Ejemplo: Transformada de Laplace de una constante c

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^\infty c\, e^{-s\,t} dt = -\frac{c}{s} e^{-s\,t}\Big|_0^\infty = 0 - \left(-\frac{c}{s}\right) = \frac{c}{s}$$

Ejercicio: Cual es la transformada de $\delta(t)$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \int_0^\infty \delta(t)\, e^{-s\,t} dt = \int_0^\infty \delta(t)\, e^{-s\,0} dt$$

Transformada de Laplace

Ejemplo: Transformada de Laplace de una constante c

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^\infty c\, e^{-s\,t} dt = -\frac{c}{s} e^{-s\,t} \Big|_0^\infty = 0 - \left(-\frac{c}{s}\right) = \frac{c}{s}$$

Ejercicio: Cual es la transformada de $\delta(t)$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \int_0^\infty \delta(t)\, e^{-s\,t} dt = \int_0^\infty \delta(t)\, e^{-s\,0} dt$$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = e^{-s\,0} \int_0^\infty \delta(t) dt = e^{-s\,0} = 1$$

Contenido

Aplicaciones en ODEs

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

Por inducción se obtiene

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\} = s^n\mathcal{L}\{f\} - \sum_{1}^{n} s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$$

Aplicaciones en ODEs

Ejemplo: Solución de la siguiente ODE

$$y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 2.$$

Sea $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Usando las propiedades anteriores

$$\mathcal{L}\{y''\} - 5\mathcal{L}\{y'\} + 6\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = 0$$

$$Y(s)\left(s^2 - 5s + 6\right) = sy(0) + y'(0) - 5y(0)$$

$$Y(s) = \frac{2s - 8}{s^2 - 5s + 6}$$

Aplicaciones en ODEs

Calculamos la transformada inversa de

$$Y(s) = \frac{2s-8}{s^2-5s+6} = \frac{2(s-4)}{(s-2)(s-3)} = \frac{p(s)}{q(s)}$$

Usando fracciones parciales re-escribimos la ecuación como

$$Y(s) = \frac{k_1}{s-2} + \frac{k_2}{s-3},$$

donde

$$k_1 = \left.\frac{(s-s_1)p(s)}{q(s)}\right|_{s=s_1} = \left.\frac{(s-2)2(s-4)}{(s-2)(s-3)}\right|_{s=2} = \frac{2(2-4)}{(2-3)} = 4$$

$$k_2 = \left.\frac{(s-s_2)p(s)}{q(s)}\right|_{s=s_2} = \left.\frac{(s-3)2(s-4)}{(s-2)(s-3)}\right|_{s=3} = \frac{2(3-4)}{(3-2)} = -2$$

Aplicaciones en ODEs

$$Y(s) = \frac{4}{s-2} - \frac{2}{s-3}.$$

A partir de la tablas se sabe que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}.$$

Entonces

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 4e^{2t} - 2e^{3t}$$

Contenido

Aplicaciones en Sistemas Dinámicos

Un sistema dinámico lineal puede ser expresado a partir de ODE lineales, así

$$M\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}\, t^2} + b\frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}\, t} + ky(t) = u(t).$$

El cual podemos expresarlo como (condiciones iniciales iguales a 0)

$$Y(s) = H(s)U(s), \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = H(s)$$

$$H(s)U(s) \to \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

$$H(s) = \frac{a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_0} = \frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_{n-1})}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

Aplicaciones en Sistemas Dinámicos

Para la siguiente función de transferencia

$$H(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

Se obtiene esta representación de polos y ceros

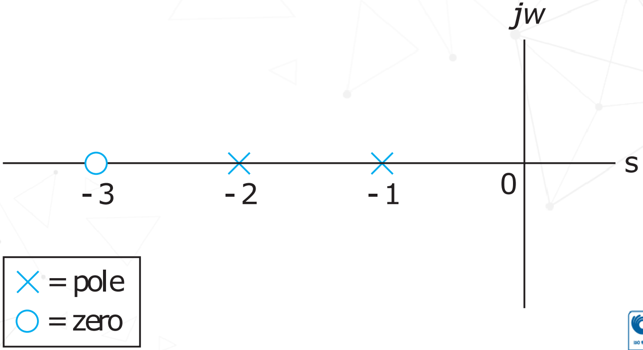
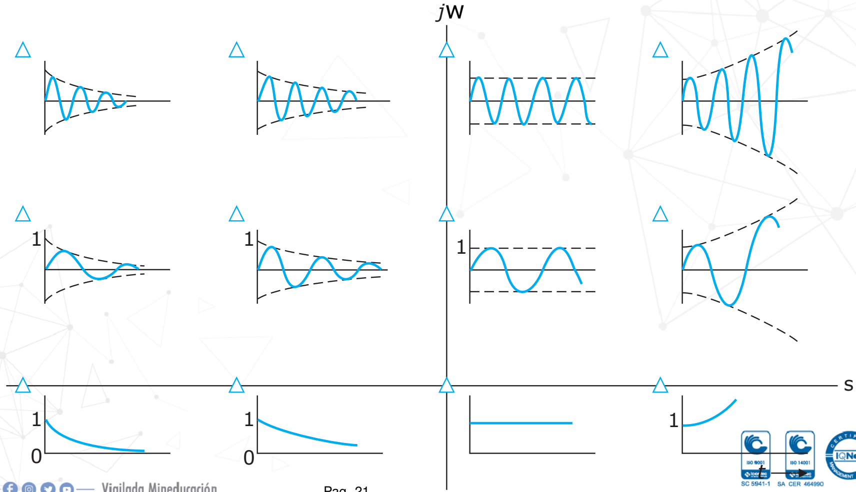


Figure:

Respuesta y estabilidad - Plano *s*

La transformada de Laplace de la primera y segunda derivada se define



Contenido

Modelo de espacio de estados

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + \cdots + b_{1m}u_m(t) \\
\dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_{21}u_1(t) + \cdots + b_{2m}u_m(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + \cdots + b_{nm}u_m(t)
\end{aligned}
$$

Modelo de espacio de estados

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{n} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}\cdots b_{1m} \\ \vdots \\ b_{n1}\cdots b_{nm} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Modelo de espacio de estados - Primer orden

Para el caso de primer orden tenemos

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

Su transformada de Laplace es

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s)$$

Y aplicando la transformada inversa se tiene

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{+a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

Modelo de espacio de estados - orden superior

Para el caso de orden mayor a uno se requiere calcular

$$e^{\mathbf{A}t} = \exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} + \cdots ,$$

Entonces la solución de la ecuación general de espacio de estados esta dada por

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \exp[\mathbf{A}(t-\tau)]\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Modelo de espacio de estados - orden superior

Tomando la transformada de Laplace de lo solución anterior

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s),$$

donde $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \mathbf{\Phi}(s)$ es la transformada de Laplace de $\mathbf{\Phi}(t) = \exp(\mathbf{A}t)$. Entonces la solución anterior se puede reescribir como

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

donde $\mathbf{\Phi}(t)$ se conoce como la matriz de transición de estado.

Modelo de espacio de estados - Ejemplo

Ejemplo: Asumir la siguiente ODE

$$M\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}\,t^2} + b\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}\,t} + ky(t) = u(t).$$

Asumimos como variables de estado

$$x_1(t) = y(t) \quad y \quad x_2(t) = \frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}\,t},$$

entonces, se escribe la ecuación inicial como

$$M\frac{\mathrm{d}\,x_2(t)}{\mathrm{d}\,t} + bx_2(t) + kx_1(t) = u(t).$$

Despejamos el termino con la derivada

$$\frac{\mathrm{d}\,x_2(t)}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{b}{M}x_2(t) - \frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t).$$

Modelo de espacio de estados - Ejemplo

$$\frac{\mathrm{d}\,x_2(t)}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{b}{M}x_2(t) - \frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t), \quad \frac{\mathrm{d}\,x_1(t)}{\mathrm{d}\,t} = x_2(t)$$

Escrita en forma matricial es

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

Asumiendo condiciones iniciales igual a cero, se tiene

$$\begin{bmatrix}X_1(s)\\ X_2(s)\end{bmatrix} = \left(s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M}\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}U(s), \quad Y(s) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1(s)\\ X_2(s)\end{bmatrix}$$

Tarea

- Leer ejemplo 2.4 del Libro de Dorf, Edición 13.
- Leer capitulo 3 de Dorf.