Institución Universitaria
Acreditada en Alta Calidad

Innovación Tecnológica con Sentido Humano

Teoría de Probabilidad - Variable aleatoria Continua

Cristian Guarnizo-Lemus
cristianguarnizo@itm.edu.co

Maestria en Automatización y Control Industrial

Contenido

Funciones de densidad de probabilidad

- Como se mencó anteriormente, una *variable aleatoria continua* puede tomar valores en un intervalo de la recta real.
- La ley de probabilidad para una variable aleatoria continua X se define en términos de la función de densidad de probabilidad (pdf) $f_X(x)$,

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}\, F_X(x)}{\mathrm{d}\, x}.$$

Propiedades de una fdp

1. $f_X(x) \geq 0.$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x = 1.$

3. $P(X \leq a) = F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x.$

4. $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x = F_X(b) - F_X(a).$

Propiedades de una fdp - Ejemplo

La distribución logística tiene una función distribución

$$F_X(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

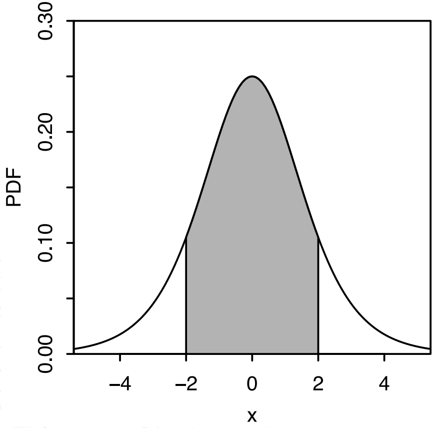
Se puede demostrar que su fdp esta dada por

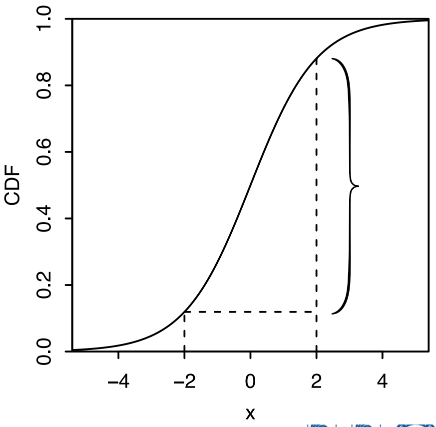
$$f_X(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Por ejemplo para calcular

$$P(-2 < X < 2) = \int_{-2}^{2} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \, \mathrm{d}\, x = F(2) - F(-2) \approx 0.76.$$

Propiedades de una fdp - Ejemplo





Dos variables aleatorias: pdf conjunta

- Si existen dos variables aleatorias X y Y, pueden caracterizarse con la pdf $f_{X,Y}(x,y)$.
- Si la función de distribución conjunta $F_{X,Y}(x,y)$ es continua y tiene derivadas parciales, la pdf conjunta se define como

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

- Igualmente se tiene los siguientes resultados
  1. $F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(\alpha,\beta)\, \mathrm{d}\,\alpha\, \mathrm{d}\,\beta$.
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(\alpha,\beta) = 1$.

Fdp marginal y fdp condicional

- Las funciones de densidad de probabilidad marginal están dadas como

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy,$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx.$$

- Las funciones de densidad de probabilidad condicional se definen como

$$f_{X|Y}(x|y) \triangleq \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)},$$
$$f_{Y|X}(y|x) \triangleq \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}.$$

Fdp marginal y fdp condicional - Ejercicio

Suponga la distribución fdp conjunta de las variables aleatorias X y Y

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{en las demás regiones} \end{cases}$$

Calcular la probabilidad del evento $\{x \leq 0.5,\ 0.4 \leq y \leq 0.7\}$ y encontrar las fdp marginales de X y Y.

Teorema de Bayes e Independencia Estadística

- El teorema de Bayes para variables aleatorias continuas está dado como

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) f_Y(\lambda)\, \mathrm{d}\,\lambda}.$$

- Se dice que dos variables aleatorias X y Y son estadísticamente independientes si

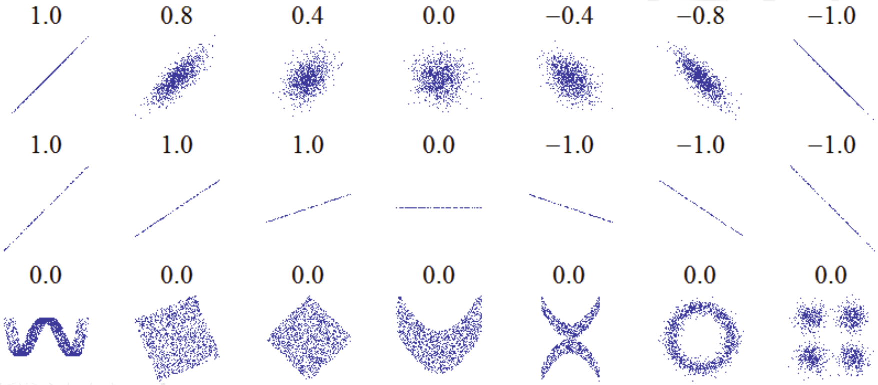
$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Valores esperados

Los valores esperados de variables aleatorias continuas se definen como

$$
\begin{aligned}
E\{g(X,Y)\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,\\
\mu_x = E\{X\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}\,X,\\
\sigma_X^2 = E\{(X-\mu_X)^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^2 f_X(x)\,\mathrm{d}\,x,\\
\sigma_{XY} &= E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_y)\},\\
\rho_{XY} &= \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y},\\
E\{g(X,Y)|Y=y\} &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}\,x,\\
E\{g(X)h(Y)\} &= E\{g(X)\}E\{h(Y)\}.
\end{aligned}
$$

Valores esperados - Correlación



Contenido

Fdp uniforme

Se dice que una variable aleatoria continua X sigue una función de densidad de probabilidad uniforme si

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Cual es la función de distribución? Calcular media y varianza.

Fdp Gaussiana I

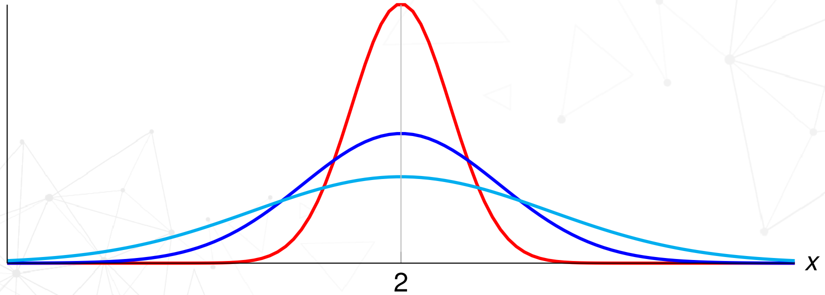
- La fdp Gaussiana está motivada en el *teorema del límite central*: una variable aleatoria determinada como la suma de un gran número de causas independientes tiende a tener una fdp Gaussiana.
- Bajo la presunción del teorema del límite central, la fdp Gaussiana se emplea para modelar el ruido eléctrico.
- La fdp Gaussiana tiene la forma

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}.$$

- La familia de fdp Gaussianas está caracterizada sólo por dos parámetros μ_x y σ_X^2, que son la media y la varianza de la variable aleatoria X.
- En este curso, la fdp Gaussiana se denota como $f_X(x) = \mathcal{N}\left(x|\mu_X, \sigma_X^2\right)$ ó $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$.

Fdp Gaussiana II

La media de las tres Gaussianas es $\mu_X = 2$, y las desviaciones estándar son $\sigma_X = 0.5$ (en rojo), $\sigma_X = 1$ (en azul) y $\sigma_X = 1.5$ (en cyan).



Fdp Gaussiana III

- En algunas aplicaciones resulta necesario calcular la probabilidad

$$P(X > a) = \int_a^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\} \mathrm{d}\,x.$$

- Haciendo un cambio de variable $z = (x - \mu_X)/\sigma_X$, la integral anterior se reduce a

$$P(X > a) = \int_{(a-\mu_X)/\sigma_X}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}.$$

Fdp Gaussiana III

- Esta integral no puede resolverse analíticamente. Se expresa en términos de la función $Q(y)$ definida como

$$Q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y}^{\infty} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} \mathrm{d}\, z, \;\; y > 0.$$

La función $Q(y)$ se puede calcular a través de la relación

$$Q(y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right),$$

donde $\mathrm{erfc}(x)$ es la función de error complementaria.

Fdp Gaussiana IV

- Esta integral no puede resolverse analíticamente. Se expresa en términos de la función $Q(y)$ definida como

$$Q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y}^{\infty} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} \mathrm{d}\, z, \quad y > 0.$$

La función $Q(y)$ se puede calcular a través de la relación

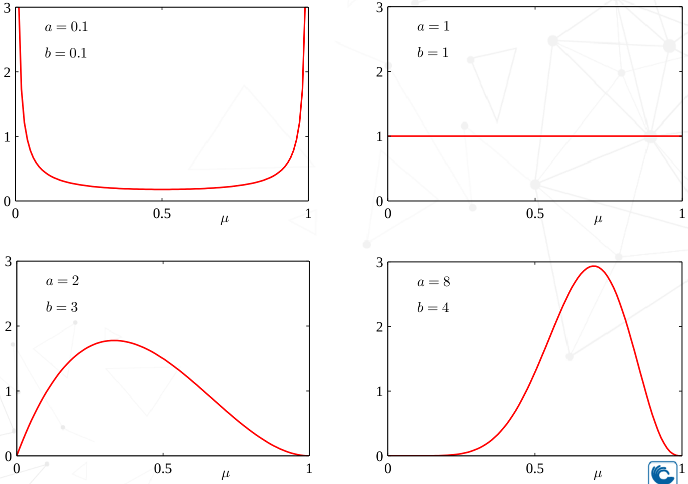
$$Q(y) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right),$$

donde $\operatorname{erfc}(x)$ es la función de error complementaria.

Otras funciones de densidad de probabilidad continua

- **Gamma** (prior conjugado para la varianza de una Gaussiana o la media de una Poisson).
- **Beta** (prior conjugada para los parámetros de una binomial).
- **Dirichlet** (prior conjugada para los parámetros de una multinomial).
- **Exponencial** (se usa para modelar el tiempo de espera de un próximo evento en un proceso de Poisson)
- **Weibull** (se usa para modelar tiempos de fallas en análisis de confiabilidad).

Función de densidad de probabilidad Beta(μ, a, b)



Ejemplo: Beta-Bernoulli

Asuma que tiene datos $\mathcal{D} = \{x_1, \ldots, x_N\}$, donde los x_n son independientes e idénticamente distribuidos a partir de una distribución de Bernoulli

$$\mathrm{Bern}(x|\mu) = \mu^x (1-\mu)^{1-x}.$$

Podemos construir una función de verosimilitud, que es función de μ

$$p(\mathcal{D}|\mu) = \prod_{n=1}^{N} p(x_n|\mu) = \prod_{n=1}^{N} \mu^{x_n}(1-\mu)^{1-x_n} = \mu^S (1-\mu)^{N-S}$$

con $S = \sum_{n=1}^{N} x_n$.

Ejemplo: Beta-Bernoulli

Ahora asumamos que μ sigue una distribución de densidad de probabilidad

$$\text{Beta}(\mu, \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\mu^{\alpha-1}(1-\mu)^{\beta-1}.$$

Aplicando el teorema de Bayes, se obtiene

$$p(\mu|\mathcal{D}) = \frac{p(\mathcal{D}|\mu)p(\mu)}{p(\mathcal{D})}$$

$$p(\mu|\mathcal{D}) \propto p(\mathcal{D}|\mu)p(\mu) = \mu^{S}(1-\mu)^{N-S}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\mu^{\alpha-1}(1-\mu)^{\beta-1}$$

Ejemplo: Beta-Bernoulli

Entonces el posterior queda determinado por

$$\begin{aligned} p(\mu|\mathcal{D}) &\propto \mu^{S}(1-\mu)^{N-S}\mu^{\alpha-1}(1-\mu)^{\beta-1} \\ &\propto \mu^{S+\alpha+1}(1-\mu)^{N+\beta-S-1} \end{aligned}$$

Podemos decir que

$$p(\mu|\mathcal{D}) = \text{Beta}(S+\alpha, 1+\beta-S).$$

Contenido

Función de distribución de vectores aleatorios

- Un **vector aleatorio** es un vector cuyos elementos individuales son variables aleatorias.
- La ley de probabilidad para un vector de variables aleatorias se especifica en términos de función de distribución conjunta

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_m}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = P[(X_1 \leq x_1), (X_2 \leq x_2), \ldots, (X_m \leq x_m)].$$

- También se puede especificar en términos de la función de probabilidad de masa (para variables discretas) o en términos de la función de densidad de probabilidad (para variables continuas).
- En lo que sigue se analiza el caso de vectores de variables aleatorias continuas.

Fdp conjunta y marginal

- La fdp conjunta de un vector aleatorio de m dimensiones es la derivada parcial de la función de distribución

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_m} = \frac{\partial^m F_{X_1,X_2,\ldots,X_m}(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m}$$

- La fdp de una de las variables aleatorias X_1 , para $1 \leq i \leq m$ se obtiene integrando con respecto a todas las otras variables aleatorias $X_j \neq X_i$. Por ejemplo, para X_1

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,\ldots,X_m}(x_1, \ldots, x_m)\, \mathrm{d}\, x_2 \ldots \mathrm{d}\, x_m$$

- Si se quiere la fdp conjunta de (X_i, X_j), se marginaliza integrando con respecto a X_k para $k \neq i$ y $k \neq j$. Por ejemplo, la fdp conjunta (X_1, X_2)

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,\ldots,X_m}(x_1, \ldots, x_m)\, \mathrm{d}\, x_3 \ldots \mathrm{d}\, x_m.$$

Fdp condicional

- La fdp condicional de un subconjunto de variables aleatorias del vector aleatorio dado otro subconjunto de variables del mismo vector.
- Ejemplos de fdp condicionales son

$$f_{X_1,X_2,X_3|X_4}(x_1, x_2, x_3|x_4) = \frac{f_{X_1,X_2,X_3,X_4}(x_1, x_2, x_3, x_4)}{f_{X_4}(x_4)}$$

$$f_{X_1,X_2|X_3,X_4}(x_1, x_2|x_3, x_4) = \frac{f_{X_1,X_2,X_3,X_4}(x_1, x_2, x_3, x_4)}{f_{X_3,X_4}(x_3, x_4)}$$

Valores esperados

- Los valores esperados se calculan usando múltiples integrales.
- Por ejemplo,

$$E\{g(x_1, \ldots, x_m)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \ldots, x_m) f_{X_1,\ldots,X_m}(x_1, \ldots, x_m) \, \mathrm{d}\, x_1 \ldots \mathrm{d}\, x_m.$$

- Igualmente, los valores esperados condicionales se calculan usando funciones de densidad de probabilidad condicionales.

Medias y covarianzas

- Dos momentos estadísticos de importancia en vectores aleatorios son las medias y las covarianzas.
- La media está dada como

$$\mu_{X_i} = E\{X_i\}.$$

- Las covarianzas están dadas como

$$\sigma_{X_i X_j} = E\{X_i X_j\} - \mu_{X_i}\mu_{X_j}.$$

Notación

- La ley de probabilidad para vectores aleatorios puede especificarse de manera concisa usando notación vectorial.
- Supóngase un conjunto de m variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_m$.
- Estas variables aleatorias pueden representarse como un vector columna de dimensiones $m \times 1$,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}$$

- Un valor específico de $\mathbf{X}$ se denota como $\mathbf{x}^\top = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Fdp con notación vectorial

- Con notación vectorial, la probabilidad conjunta está dada como

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1,\ldots,X_m}(x_1,\ldots,x_m).$$

- El vector de medias se define como

$$\mu_{\mathbf{X}} = E\{\mathbf{X}\} = \begin{bmatrix} E\{X_1\} \\ E\{X_2\} \\ \vdots \\ E\{X_m\} \end{bmatrix}$$

- La matriz de covarianza está definida como

$$\Sigma_{\mathbf{X}} = E\{\mathbf{X}\mathbf{X}^\top\} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1X_1} & \sigma_{X_1X_2} & \cdots & \sigma_{X_1X_m} \\ \sigma_{X_2X_1} & \sigma_{X_2X_2} & \cdots & \sigma_{X_2X_m} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{X_mX_1} & \sigma_{X_mX_2} & \cdots & \sigma_{X_mX_m} \end{bmatrix}$$

Correlación e Independencia

- Se dice que dos componentes del vector aleatorio no están correlacionadas si $\sigma_{X_i X_j} = \sigma_{ij} = 0$.
- Se dice que los componentes del vector aleatorio son independientes si

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{m} f_{X_i}(x_i)$$

- Otra notación para la fdp de un vector aleatorio es $p(\mathbf{x})$.

Contenido

Fdp Gaussiana multivariada

Se dice que un vector aleatorio X es Gaussiano multivariado si su fdp sigue la forma

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}|\Sigma_{\mathbf{X}}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{x}})^{\top}\Sigma_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{x}})\right]$$

donde $\mu_{\mathbf{X}}$ es el vector de medias, $\Sigma_{\mathbf{X}}$ es la matriz de covarianza, $|\Sigma_{\mathbf{X}}|$ es el determinante de $\Sigma_{\mathbf{X}}$ y $\Sigma_{\mathbf{X}}^{-1}$ es la matriz inversa de $\Sigma_{\mathbf{X}}$.
Una notación alternativa para la fdp Gaussiana multivariada es la siguiente,

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}\left(\mathbf{x}|\mu_{\mathbf{x}}, \Sigma_{\mathbf{X}}\right).$$

Fdp Gaussiana multivariada II

Suponga que **X** es un vector aleatorio que sigue una fdp Gaussiana. Si se particiona el vector de variables aleatorias **X** de la siguiente forma

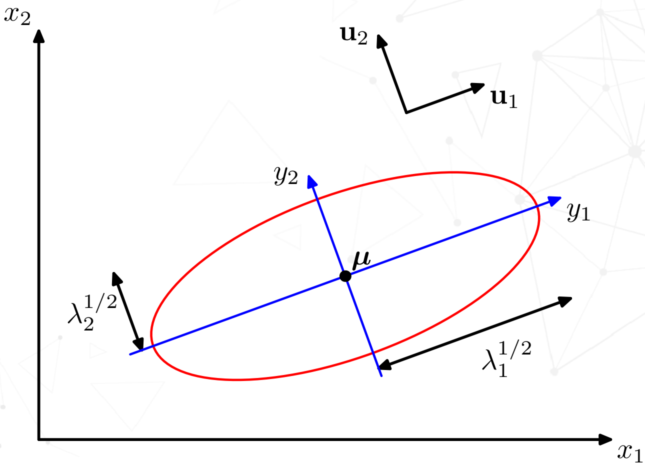
$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} X_{k+1} \\ X_{k+2} \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}$$

y

$$\mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mu_{\mathbf{X}_1} \\ \mu_{\mathbf{X}_2} \end{bmatrix}, \Sigma_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix},$$

donde $\mu_{\mathbf{X}_i} = E\{\mathbf{X}_i\}$ y $\Sigma_{ij} = E\{\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j^\top\} - \mu_{\mathbf{X}_i}\mu_{\mathbf{X}_j}$, luego $\mathbf{X}_1$ sigue una fdp Gaussiana multivariada de k dimensiones con media $\mu_{\mathbf{X}_1}$ y la matriz de covarianza Σ_{11}.

Fdp Gaussiana multivariada III



Fdp Gaussiana multivariada IV

- Si $\Sigma_{\mathbf{X}}$ es una matriz diagonal, esto es,

$$\Sigma_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_m^2 \end{bmatrix},$$

  luego las componentes de $\mathbf{X}$ son independientes (en el caso Gaussiano, la no correlación implica independencia, lo cual no es necesariamente cierto para otras fdps).
- Si $A \in \mathbb{R}^{k \times m}$ es una matriz de rango k, luego $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ sigue una fdp Gaussiana de dimensión k con momentos

$$\mu_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mu_{\mathbf{X}},$$
$$\Sigma_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\Sigma_{\mathbf{X}}\mathbf{A}^{\top}.$$

Fdp Gaussiana multivariada V

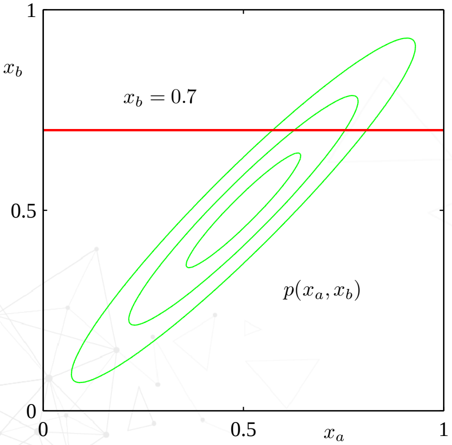
- Empleando la partición del vector $\mathbf{X}$ como se vió anteriormente, la fdp condicional de $\mathbf{X}_1$ dado $\mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2$ es una Gaussiana multivariada con los siguientes momentos

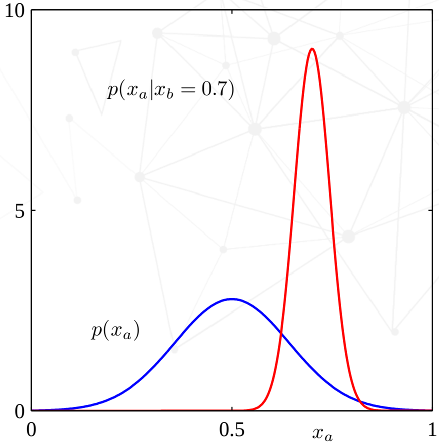
$$\mu_{\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2} = E\{\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2\} = \mu_{\mathbf{x}_1} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mu_{\mathbf{x}_2}),$$
$$\Sigma_{\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}.$$

- Las propiedades anteriores indican que la fdp condicional, la fdp marginal y las transformaciones lineales derivadas de una fdp Gaussiana multivariada conducen a fdp Gaussianas multivariadas.

Institución Universitaria
Acreditada en Alta Calidad
Innovación Tecnológica con Sentido Humano

Ejemplo de dos Variables Discretas





Referencias

- Basado en las presentaciones del Prof. Mauricio A. Álvarez, del curso “Procesos Estocásticos”.
- C. Bishop. “Pattern Recognition and Machine Learning”, 2006.
- D.P. Bertsekas et al. “Introduction to Probability”, 2002.