Institución Universitaria
Acreditada en Alta Calidad

Innovación Tecnológica con
Sentido Humano

Algebra Lineal: Vectores

Cristian Guarnizo-Lemus, PhD

Outline

1 Vectores

2 Espacio Vectorial

3 Generadores de espacio o *Span*

Outline

1. Vectores
2. Espacio Vectorial
3. Generadores de espacio o *Span*

Vector

Se asocia a una tupla de componentes, la cual se puede representar como,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

donde v_i es un escalar y se denomina la i-ésima componente de $\mathbf{v}$. Un vector es un elemento de un espacio lineal o un espacio vectorial.

Outline

1 Vectores

2 Espacio Vectorial

3 Generadores de espacio o *Span*

Espacio Vectorial

Un conjunto de vectores $\mathbb{V}$ se denomina espacio vectorial o lineal sobre un cuerpo algebráico $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) si,

- para una operación de adición vectorial en $\mathbb{V}$, denotada $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, con $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{V}$ se cumple que $(\mathbb{V}, \{+\})$ es un grupo abeliano.
- para una operación de multiplicación escalar en $\mathbb{V}$, denotada como $a\mathbf{x}$, con $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$,
  - $a\mathbf{x} \in \mathbb{V}$.
  - $a\,(b\mathbf{x}) = (ab)\,\mathbf{x}$
  - $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$
  - $a\,(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$
  - $(a+b)\,\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$

Combinación lineal

Un vector $\mathbf{x}$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,. . .,$\mathbf{x}_k$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tales que

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k. \tag{1}$$

Con $\alpha_i \in \mathbb{F}$.

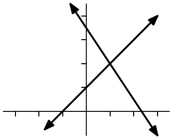
Independencia Lineal

El conjunto $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{V}$ es:

- linealmente dependiente si algún $\mathbf{x}_i$ es una combinación lineal de otros elementos de $\mathcal{X}$.
- linealmente independiente si $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n = 0$ sólo con $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.
- Todo subconjunto de un sistema libre es también libre.
- El número máximo de vectores de un sistemas linealmente independiente es igual a la **dimensión** de dichos vectores.

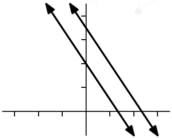
Combinación lineal

Solución única



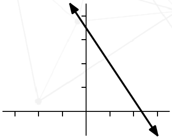
$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

Sin solución



$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ 3x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

Infinitas soluciones



$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ 6x + 4y &= 14 \end{aligned}$$

Outline

1 Vectores

2 Espacio Vectorial

3 Generadores de espacio o *Span*

Generadores de espacio

Un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es generado por el conjunto de vectores

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{V}$$

si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{X}$. Si se cumple lo anterior, se dice que $\mathcal{X}$ es el conjunto generador del espacio.

Base

- $\mathcal{U}$ es una **base** de $\mathbb{V}$ si los vectores generadores $\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ son linealmente independientes.
- Todo espacio lineal $\mathbb{V}$ posee al menos una base.
- Si existen varias bases, todas contienen el mismo número de vectores generadores.
- Este número de vectores de la base es la **dimensión** del espacio lineal.

Teorema fundamental de algebra lineal

Para un espacio vectorial $\mathbb{V}$ con n dimensiones

- Toda base de $\mathbb{V}$ tiene exactamente n elementos.
- Todo subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ tiene a lo sumo n elementos y corresponde a una base de $\mathbb{V}$.
- Cualquier subconjunto de $\mathbb{V}$ que actua como conjunto generador de $\mathbb{V}$ debe tener al menos n elementos y es una base si y sólo si tiene exactamente n elementos.
- Si los elementos de una determinada base en $\mathbb{V}$ se toman en un **orden determinado**, cualquier elemento de $\mathbb{V}$ puede entonces ser representado por una suseción única de **coordenadas**.

Vectores

Vector de n dimensiones

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Vector columna

Vectores

Vector de n dimensiones

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Vector columna

$$\mathbf{x}^\top = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

Vector fila

Norma de un vector

La norma de un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, denotada como $\|\mathbf{x}\|$, es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}.$$

Producto punto entre vectores

- El producto de punto entre dos vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ está definido como,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

y su resultado es un escalar.

- El producto punto también es denotado como $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.
- También es llamado producto escalar, interno o interior.
- Se puede observar,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = \|\mathbf{x}\|^2$$

Ortogonalidad

- Dos vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$ son ortogonales o perpendiculares (es decir $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$) si $\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = 0$
- Un conjunto de vectores $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ es ortogonal si cada par de vectores en el conjunto es ortogonal.
- Dos subespacios $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ en $\mathbb{R}^n$ son ortogonales si cada vector de $\mathbb{V}$ es perpendicular a cada vector de $\mathbb{W}$.

Producto externo entre vectores

El producto externo entre dos vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ está definido como,

$$\mathbf{x}\mathbf{y}^\top = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_m \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_m \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{x}$ es de tamaño $n \times 1$ y $\mathbf{y}$ es de tamaño $m \times 1$. El resultado del producto externo es una matriz de tamaño $n \times m$.

Recta

Podemos definir la ecuación de una recta como
$L = \{\mathbf{x} + t\mathbf{v} | t \in \mathbb{R}\}$.