Ecuaciones Diferenciales - Sistemas Discretos y Linealización

Cristian Guarnizo-Lemus
cristianguarnizo@itm.edu.co

Maestria en Automatización y Control Industrial

Contenido

Ecuaciones de diferencias finitas

Ejemplo de una ecuación de diferencias

$$x[n+1] = 2x[n]$$

La variable que mide el tiempo (n) varía discretamente. Para los sistemas dinámicos

$$n = T, 2T, 3T, \ldots,$$

donde T es el periodo de adquisición.

Ecuaciones de diferencias finitas

La solución de la ecuación de diferencias es una función $f[n]$ $n \in \mathbb{Z}$ que satisfaga la ecuación

$$x[n+1] = 2x[n]$$

son

$$f_1[n] = 2^n = 1, 2, 4, \cdots \text{ ya que } f_1[n+1] = 2^{n+1} = 2f_1[n]$$
$$f_2[n] = 2\left(2^n\right) = 2, 4, 8, \cdots \text{ ya que } f_2[n+1] = 2\left(2^{n+1}\right) = 2f_2[n]$$
$$f_3[n] = 3\left(2^n\right) = 3, 6, 12, \cdots \text{ ya que } f_3[n+1] = 3\left(2^{n+1}\right) = 2f_3[n]$$

Para poder establecer una única solución de la ecuación, es preciso conocer unas condiciones auxiliares. Por ejemplo si, $f[0] = 1$, entonces la única solución valida es $f_1[n] = 2^n$.

Relación con las ecuaciones diferenciales

Recordemos el caso general de una ecuación diferencial ordinaria

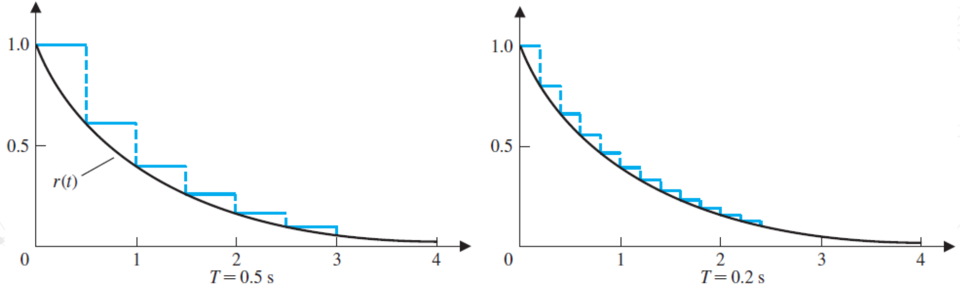
$$a_n \frac{d^n y}{d x^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{d y}{d x} + a_0 y = g(x).$$

Su análoga discreta es

$$a_n y[n+k] + a_{n-1} y[n+k-1] + \ldots + a_1 y[n+1] + a_0 y[n] = g[n].$$

Contenido

Transformada Z



Transformada Z

La salida de un muestreador ideal $r^*(t)$ es una serie de impulsos con valor $r(nT)$, entonces

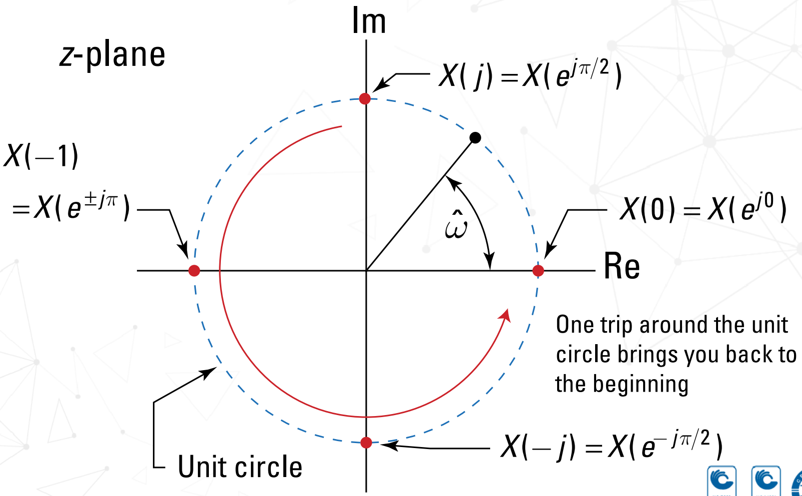
$$r^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)\delta(t - nT),$$

para $t > 0$. Usando la transformada de Laplace, tenemos

$$\mathcal{L}\{r^*(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)e^{-nsT}.$$

De la expresión anterior se observa que, $z = e^{sT}$.

Transformada Z



Transformada Z

Así como la transformada de Laplace convierte las ecuaciones diferenciales en términos algebraicos con respecto a s, la transformada z convierte las ecuaciones de diferencia en términos algebraicos con respecto a z.

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n}.$$

Recordar la transformada de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}\,t.$$

Propiedades

- Linealidad: $\mathcal{Z}\{f_1[n] + f_2[n]\} = F_1(z) + F_2(z)$, y $\mathcal{Z}\{af[n] = aF(z)\}$.
- Diferencia positiva: $\mathcal{Z}\{f[n+1]\} = zF[z] - zf[0]$. $\mathcal{Z}\{f[n+k]\} = z^k F[z] - \sum_{i=0}^{k-1} z^{k-i} f[i]$.
- Escalamiento en frecuencia: $\mathcal{Z}\{a^n f[n]\} = F(z/a)$.
- Multiplicación por n: $\mathcal{Z}\{n^k f[n]\} = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,z}\mathcal{Z}\left\{n^{(k-1)} f[n]\right\}$.
- Teorema del valor final:
$$\lim_{n\to\infty} f[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$
- Convolución: $\mathcal{Z}\left\{f_1[n] \star f_2[n]\right\} = F_1(z)F_2(z)$ donde $f_1[n] \star f_2[n] = \sum_{h=0}^{\infty} f_1[h] f_2[n-h]$.

Transformada Z - Ejemplo

Ejemplo: Asumir que $y[n] = A$. Se puede considerar como una función escalón de amplitud A.

$$y[z] = \sum_{n=0}^{\infty} y[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} A z^{-n} = \frac{A}{1 - z^{-1}} = \frac{Az}{z - 1}$$

Ejemplo: La transformada z de la función escalón unitario.

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

A partir de la serie geométrica $(1 - bx)^{-1} = 1 + bx + (bx)^2 + \cdots$ entonces,

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

Transformada Z - Tabla

Type	$X(z)$	$x[n]$
polynomial in z	$\sum_k c_k z^{-k}$	$\sum_k c_k\, \delta[n-k]$
single real pole	$\dfrac{1}{1-pz^{-1}}$	$p^n\, u[n]$
double real pole	$\dfrac{pz^{-1}}{(1-pz^{-1})^2}$	$np^n\, u[n]$
double real pole	$\dfrac{1}{(1-pz^{-1})^2}$	$(n+1)p^n\, u[n]$
triple real pole	$\dfrac{1}{(1-pz^{-1})^3}$	$\dfrac{(n+2)(n+1)}{2} p^n\, u[n]$
complex conjugate pair	$\dfrac{az \sin\omega_0}{(z-a\,e^{\jmath\omega_0})(z-a\,e^{-\jmath\omega_0})}$	$a^n \sin(\omega_0 n)\, u[n]$
complex conjugate pair $p = \|p\|\, e^{\jmath\omega_0}$	$\dfrac{r}{1-pz^{-1}} + \dfrac{r^*}{1-p^* z^{-1}}$	$2\,\|r\|\,\|p\|^n \cos(\omega_0 n + \angle r)\, u[n]$

Funciones de transferencia en z

Considerar el siguiente sistema discreto, y hallar la función de transferencia.

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_0 y[n-2] + b_1 u[n-1] + b_0 u[n-2].$$

Primero, tomamos la transformada z a ambos lados de la ecuación de diferencia.

$$\mathcal{Z}\{y[n]\} = \mathcal{Z}\{-a_1 y[n-1]\} - \mathcal{Z}\{a_0 y[n-2]\} + \mathcal{Z}\{b_1 u[n-1]\} + \mathcal{Z}\{b_0 u[n-2]\}.$$

$$Y[z] = -a_1 z^{-1} Y[z] - a_0 z^{-2} Y[z] + b_1 z^{-1} U[z] + b_0 z^{-2} U[z].$$

Funciones de transferencia en z

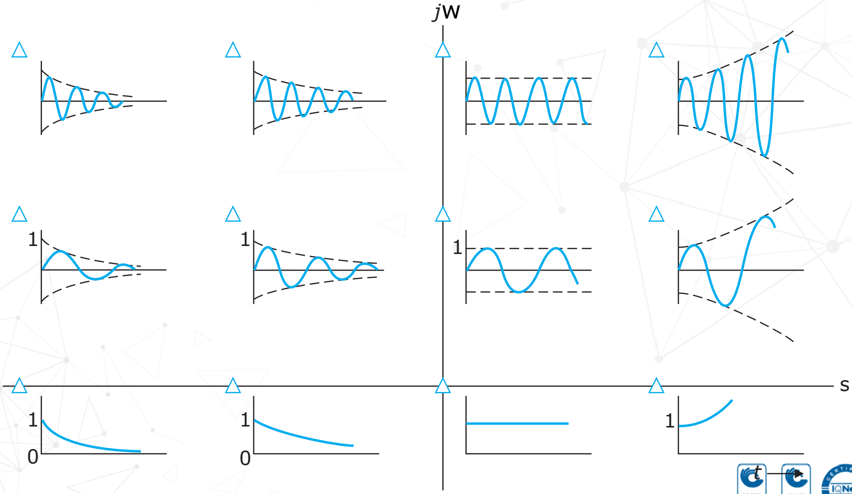
De esta expresión

$$Y[z] = -a_1 z^{-1} Y[z] - a_0 z^{-2} Y[z] + b_1 z^{-1} U[z] + b_0 z^{-2} U[z].$$

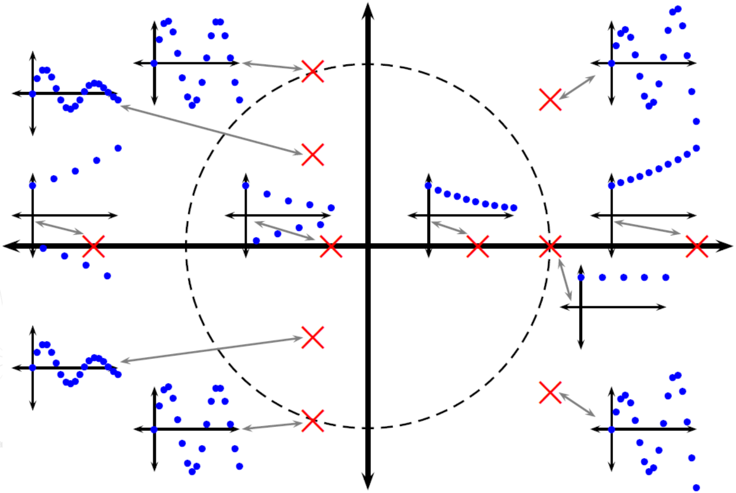
Se obtiene la función de transferencia

$$\frac{Y[z]}{U[z]} = H[z] = \frac{b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}$$

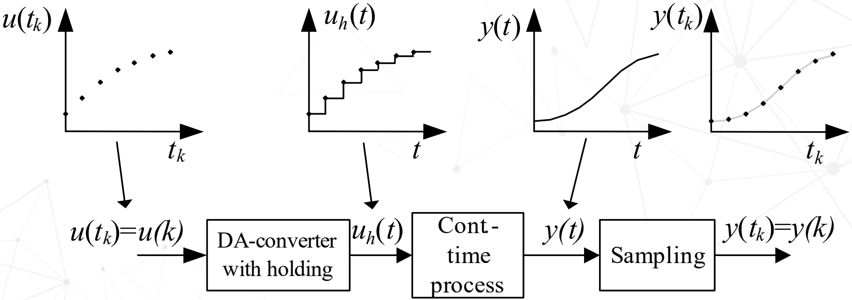
Respuesta y estabilidad - Plano *s*



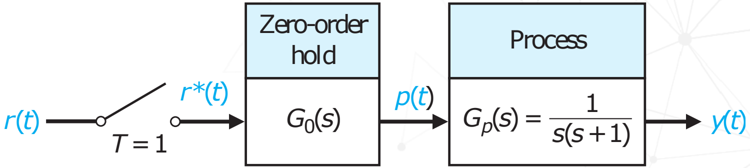
Respuesta y estabilidad - Plano z



Conversión de continuo a discreto



Ejemplo: Laplace a Z



$$G_0(s) = \frac{1 - e^{-st}}{s}$$

Ejemplo: Laplace a Z

Entonces la funciones de transferencia $Y(s)/R^*(s)$ es

$$\frac{Y(s)}{R^*(s)} = G_0(s)G_p(s) = G(s) = \frac{1-e^{-st}}{s^2(s+1)}$$

Expandiendo en fracciones parciales

$$G(s) = (1-e^{-st})\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right)$$

y la transformada z es

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\} = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right\}$$

Ejemplo: Laplace a Z

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right\}$$

Usando las tablas se obtiene

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1})\left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}}\right] \\ &= \frac{(ze^{-t} - z + Tz) + (1 - e^{-T} - Te^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})} \end{aligned}$$

Cuando $T = 1$,

$$G(z) = \frac{ze^{-1} + 1 - 2e^{-1}}{(z-1)(z-e^{-1})} = \frac{0.3678z + 0.2644}{z^2 - 1.3678z + 0.3678}.$$

Contenido

Contenido

Linealización

La linealización es el proceso de tomar el gradiente de una función no lineal con respecto a todas las variables y obtener una representación lineal en un punto de operación $(\bar{y}, \bar{u})$.

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = f(y, u)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = f(y, u) \approx f(\bar{y}, \bar{u}) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\bar{y},\bar{u}} (y - \bar{y}) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\bar{y},\bar{u}} (u - \bar{u})$$

Si los valores $\bar{y}$ y $\bar{u}$ son seleccionados en el punto de estado estable (equilibrio) entonces $f(\bar{y}, \bar{u}) = 0$. Para simplificar la expresión de linearización, la desviación de las variables se definen como $\tilde{y} = y - \bar{y}$ y $\tilde{u} = u - \bar{u}$.

Linealización - Ejemplo ODE

Linealizar la siguiente ecuación diferencial con una entrada de valor $u(t) = 16$

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + \sqrt{u}$$

Aplicando la serie de Taylor de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = f(x_{ss}, u_{ss}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_{ss},u_{ss}} (x - x_{ss}) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_{ss},u_{ss}} (u - u_{ss})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{2}u^{-1/2}.$$

Contenido

Linealización - Ejemplo Espacio de Estados

Un sistema de espacio de estados

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = f(x,u),\ \ y = g(x)$$

se puede linealizar como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1' \\ \dot{x}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\bar{x},\bar{u}} & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\bar{x},\bar{u}} \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\bar{x},\bar{u}} & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\bar{x},\bar{u}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right|_{\bar{x},\bar{u}} & \left.\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right|_{\bar{x},\bar{u}} & \left.\frac{\partial f_1}{\partial u_3}\right|_{\bar{x},\bar{u}} \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right|_{\bar{x},\bar{u}} & \left.\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right|_{\bar{x},\bar{u}} & \left.\frac{\partial f_2}{\partial u_3}\right|_{\bar{x},\bar{u}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}} & \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}} \\ \left.\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}} & \left.\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$$

Linealización - Espacio de Estados

Ejercicio: Linealizar el siguiente sistema de espacio de estados.

$$2\frac{\mathrm{d}\,x_1}{\mathrm{d}\,t} + x_1^2 + 3x_2^2 = 16u$$

$$3\frac{\mathrm{d}\,x_2}{\mathrm{d}\,t} + 6x_1^2 + 6x_2^2 = 0$$

$$y_1 = x_2, \quad y_2 = x_1$$

y

$$\bar{u} = 1, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Linealización - Espacio de Estados

Recordar que

$$\bar{u} = 1, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\frac{\mathrm{d}\,x_1}{\mathrm{d}\,t} = -0.5x_1^2 - 1.5x_2^2 + 8u, \quad \frac{\mathrm{d}\,x_2}{\mathrm{d}\,t} = -2x_1^2 - 2x_2^2$$

$$f_1(x_1, x_2, u) = -0.5x_1^2 - 1.5x_2^2 + 8u, \quad f_2(x_1, x_2, u) = -2x_1^2 - 2x_2^2$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = \left.-x_1\right|_{\bar{x},\bar{u}} = -2, \quad \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = \left.-3x_2\right|_{\bar{x},\bar{u}} = -6, \quad \left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = \left.8\right|_{\bar{x},\bar{u}} = 8$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = \left.-4x_1\right|_{\bar{x},\bar{u}} = -8, \quad \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = \left.-4x_2\right|_{\bar{x},\bar{u}} = -8, \quad \left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = \left.0\right|_{\bar{x},\bar{u}} = 0$$

Linealización - Ejemplo Espacio de Estados

se puede linealizar como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1' \\ \dot{x}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} (u - \bar{u})$$

$$\begin{bmatrix} y_1 - \bar{y}_1 \\ y_2 - \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$