Institución Universitaria
Acreditada en Alta Calidad

Innovación Tecnológica con
Sentido Humano

Ecuaciones Diferenciales - Transformadas

Cristian Guarnizo-Lemus
cristianguarnizo@itm.edu.co

Maestria en Automatización y Control Industrial

Contenido

1 Continuo y Discreto
- Delta dirac
- Ecuaciones de diferencias finitas

2 Transformada de Laplace
- Aplicaciones en ODEs
- Funciones de transferencia
- Aplicaciones en Sistemas Dinámicos

3 Transformada de Z

Contenido

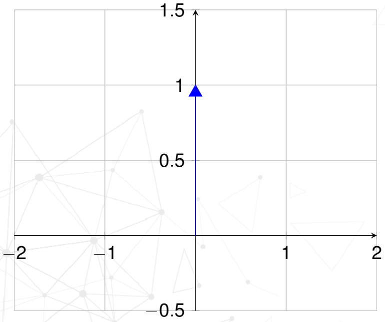
1 Continuo y Discreto
- Delta dirac
- Ecuaciones de diferencias finitas

2 Transformada de Laplace
- Aplicaciones en ODEs
- Funciones de transferencia
- Aplicaciones en Sistemas Dinámicos

3 Transformada de Z

Función impulso unitario

- La distribución Delta dirac (distribución δ), es una función sobre los números reales, cuyo valor es cero excepto en cero, y cuya integral sobre todo el eje real es 1.
  $\delta(x) = \lim_{b \to 0} \frac{1}{|b|\sqrt{\pi}} e^{-(x/b)^2}$



Función impulso unitario

La función impulso se define por la expresión integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)\,\mathrm{d}\,t = x(0)$$

para cualquier señal x(t) que es continua en $t = 0$. La función impulso tiene las siguientes propiedades

- $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$.
- $\delta(-t) = \delta(t)$
- Propiedad de desplazamiento:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}\,t = \begin{cases} x(t_0), & t_1 \leq t_0 \leq t_2 \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

- $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$.

Contenido

1 Continuo y Discreto
- Delta dirac
- Ecuaciones de diferencias finitas

2 Transformada de Laplace
- Aplicaciones en ODEs
- Funciones de transferencia
- Aplicaciones en Sistemas Dinámicos

3 Transformada de Z

Ecuaciones de diferencias finitas

Ejemplo de una ecuación de diferencias

$$x[n+1] = 2x[n]$$

La variable que mide el tiempo (n) varía discretamente. Para los sistemas dinámicos

$$n = T, 2T, 3T, \ldots,$$

donde T es el periodo de adquisición.

Ecuaciones de diferencias finitas

La solución de la ecuación de diferencias es una función $f[n]$ $n \in \mathbb{Z}$ que satisfaga la ecuación

$$x[n+1] = 2x[n]$$

son

$$f_1[n] = 2^n = 1, 2, 4, \cdots \text{ ya que } f_1[n+1] = 2^{n+1} = 2f_1[n]$$
$$f_2[n] = 2\left(2^n\right) = 2, 4, 8, \cdots \text{ ya que } f_2[n+1] = 2\left(2^{n+1}\right) = 2f_2[n]$$
$$f_3[n] = 3\left(2^n\right) = 3, 6, 12, \cdots \text{ ya que } f_3[n+1] = 3\left(2^{n+1}\right) = 2f_3[n]$$

Para poder establecer una única solución de la ecuación, es preciso conocer unas condiciones auxiliares. Por ejemplo si, $f[0] = 1$, entonces la única solución valida es $f_1[n] = 2^n$.

Relación con las ecuaciones diferenciales

Recordemos el caso general de una ecuación diferencial ordinaria

$$a_n \frac{d^n y}{d x^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{d y}{d x} + a_0 y = g(x).$$

Su análoga discreta es

$$a_n y[n+k] + a_{n-1} y[n+k-1] + \ldots + a_1 y[n+1] + a_0 y[n] = g[n].$$

Contenido

1 Continuo y Discreto
- Delta dirac
- Ecuaciones de diferencias finitas

2 Transformada de Laplace
- Aplicaciones en ODEs
- Funciones de transferencia
- Aplicaciones en Sistemas Dinámicos

3 Transformada de Z

Transformada de Laplace

Dada una función $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, existe una función $\mathcal{L}$ denominada *transformada de Laplace* que toma como argumento $f(t)$ y produce una función $F(s) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}\,t.$$

La transformada inversa se expresa como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{+st}ds$$

Transformada de Laplace

Ejemplo: Transformada de Laplace de una constante c

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^{\infty} c\, e^{-s\,t} dt = -\frac{c}{s} e^{-s\,t}\Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{c}{s}\right) = \frac{c}{s}$$

Ejercicio: Cual es la transformada de $\delta(t)$

Transformada de Laplace

Ejemplo: Transformada de Laplace de una constante c

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^\infty c\, e^{-s\,t} dt = -\frac{c}{s} e^{-s\,t}\Big|_0^\infty = 0 - \left(-\frac{c}{s}\right) = \frac{c}{s}$$

Ejercicio: Cual es la transformada de $\delta(t)$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \int_0^\infty \delta(t)\, e^{-s\,t} dt = \int_0^\infty \delta(t)\, e^{-s\,0} dt$$

Transformada de Laplace

Ejemplo: Transformada de Laplace de una constante c

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^\infty c\, e^{-s\,t} dt = -\frac{c}{s} e^{-s\,t}\Big|_0^\infty = 0 - \left(-\frac{c}{s}\right) = \frac{c}{s}$$

Ejercicio: Cual es la transformada de $\delta(t)$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \int_0^\infty \delta(t)\, e^{-s\,t} dt = \int_0^\infty \delta(t)\, e^{-s\,0} dt$$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = e^{-s\,0} \int_0^\infty \delta(t) dt = e^{-s\,0} = 1$$

Contenido

1 Continuo y Discreto
- Delta dirac
- Ecuaciones de diferencias finitas

2 Transformada de Laplace
- Aplicaciones en ODEs
- Funciones de transferencia
- Aplicaciones en Sistemas Dinámicos

3 Transformada de Z

Aplicaciones en ODEs

$$\mathcal{L}\left\{f'\right\} = s\mathcal{L}\left\{f\right\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{f''\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{f\right\} - sf(0) - f'(0)$$

Por inducción se obtiene

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\} = s^n\mathcal{L}\left\{f\right\} - \sum_{1}^{n} s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$$

Aplicaciones en ODEs

Ejemplo: Solución de la siguiente ODE

$$y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \; y'(0) = 2.$$

Sea $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Usando las propiedades anteriores

$$\mathcal{L}\{y''\} - 5\mathcal{L}\{y'\} + 6\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = 0$$

$$Y(s)\left(s^2 - 5s + 6\right) = sy(0) + y'(0) - 5y(0)$$

$$Y(s) = \frac{2s - 8}{s^2 - 5s + 6}$$

Aplicaciones en ODEs

Calculamos la transformada inversa de

$$Y(s) = \frac{2s-8}{s^2-5s+6} = \frac{2(s-4)}{(s-2)(s-3)} = \frac{p(s)}{q(s)}$$

Usando fracciones parciales re-escribimos la ecuación como

$$Y(s) = \frac{k_1}{s-2} + \frac{k_2}{s-3},$$

donde

$$k_1 = \left.\frac{(s-s_1)p(s)}{q(s)}\right|_{s=s_1} = \left.\frac{(s-2)2(s-4)}{(s-2)(s-3)}\right|_{s=2} = \frac{2(2-4)}{(2-3)} = 4$$

$$k_2 = \left.\frac{(s-s_2)p(s)}{q(s)}\right|_{s=s_2} = \left.\frac{(s-3)2(s-4)}{(s-2)(s-3)}\right|_{s=3} = \frac{2(3-4)}{(3-2)} = -2$$

Aplicaciones en ODEs

$$Y(s) = \frac{4}{s-2} - \frac{2}{s-3}.$$

A partir de la tablas se sabe que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}.$$

Entonces

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 4e^{2t} - 2e^{3t}$$

Contenido

1 Continuo y Discreto
- Delta dirac
- Ecuaciones de diferencias finitas

2 Transformada de Laplace
- Aplicaciones en ODEs
- Funciones de transferencia
- Aplicaciones en Sistemas Dinámicos

3 Transformada de Z

Funciones de transferencia

Suponga la siguiente ecuación diferencial ordinaria con condiciones iniciales iguales a cero

$$F\{y(t)\} = u(t),$$

donde $F\{\cdot\}$ representa la ecuación diferencial aplicada sobre $y(t)$. Aplicando la transformada de Laplace, obtenemos

$$A(s)Y(s) = U(s), \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{A(s)} = H(s)$$

Funciones de transferencia

Ejemplo Calcular la función de transferencia de $x'' + \omega_0 x = u(t)$. Asumimos condiciones iniciales iguales a cero y calculamos la transformada de Laplace

$$s^2 X(s) + \omega_0 X(s) = U(s), \qquad (s^2 + \omega_0) X(s) = U(s)$$

$$H(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + \omega_0}$$

Contenido

1 Continuo y Discreto
- Delta dirac
- Ecuaciones de diferencias finitas

2 Transformada de Laplace
- Aplicaciones en ODEs
- Funciones de transferencia
- Aplicaciones en Sistemas Dinámicos

3 Transformada de Z

Aplicaciones en Sistemas Dinámicos

Un sistema dinámico lineal puede ser expresado a partir de ODE lineales, así

$$M\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}\, t^2} + b\frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}\, t} + ky(t) = u(t).$$

El cual podemos expresarlo como (condiciones iniciales iguales a 0)

$$Y(s) = H(s)U(s), \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = H(s)$$

$$H(s)U(s) \to \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

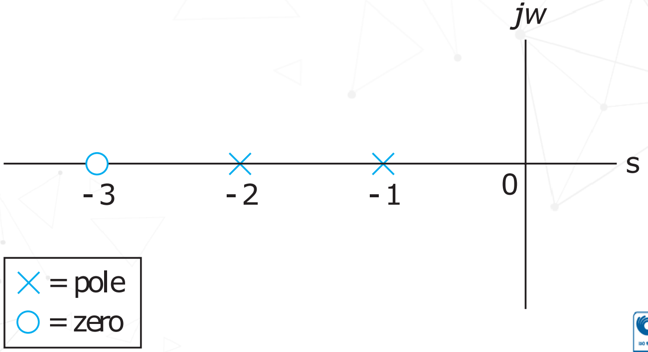
$$H(s) = \frac{a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_0} = \frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_{n-1})}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

Aplicaciones en Sistemas Dinámicos

Para la siguiente función de transferencia

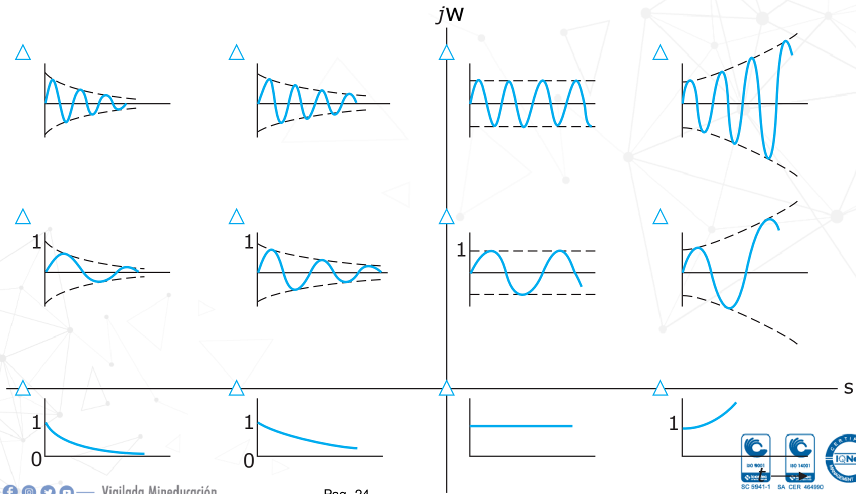
$$H(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

Se obtiene esta representación de polos y ceros



Respuesta y estabilidad - Plano *s*

La transformada de Laplace de la primera y segunda derivada se define



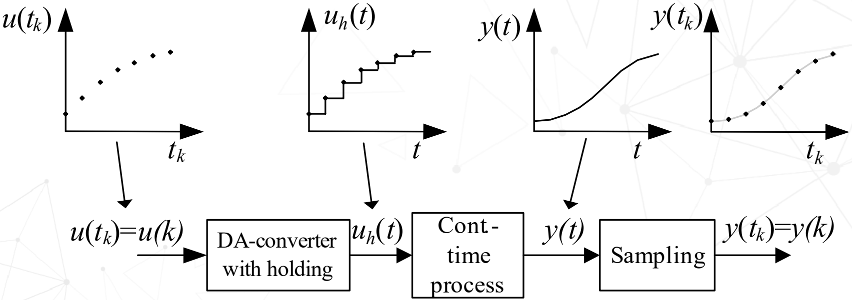
Contenido

1 Continuo y Discreto
- Delta dirac
- Ecuaciones de diferencias finitas

2 Transformada de Laplace
- Aplicaciones en ODEs
- Funciones de transferencia
- Aplicaciones en Sistemas Dinámicos

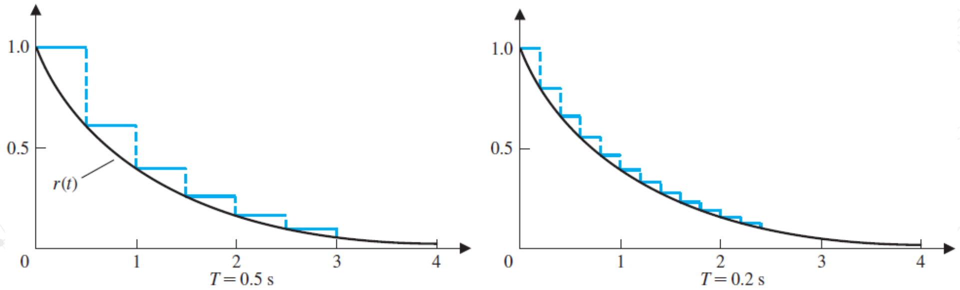
3 Transformada de Z

Conversión de continuo a discreto



Conversión de continuo a discreto

Transformada Z



Transformada Z

La salida de un muestreador ideal $r^*(t)$ es una serie de impulsos con valor $r(nT)$, entonces

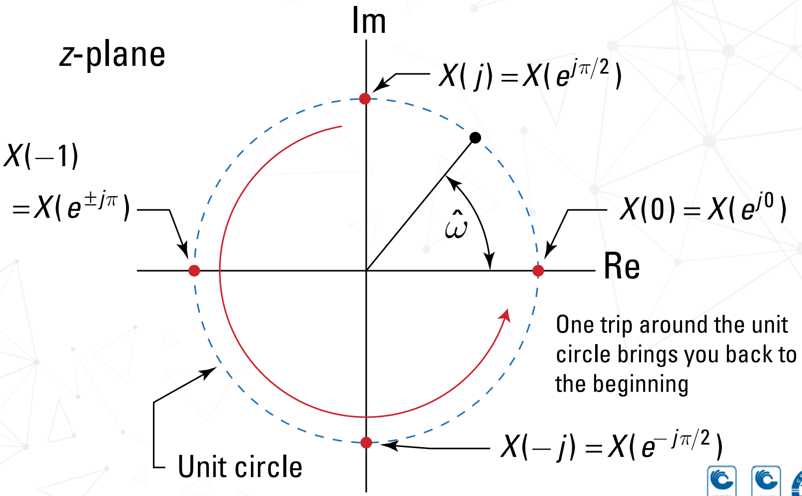
$$r^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)\delta(t - nT),$$

para $t > 0$. Usando la transformada de Laplace, tenemos

$$\mathcal{L}\{r^*(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)e^{-nsT} = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)z^{-n}.$$

De la expresión anterior se observa que, $z = e^{sT}$.

Transformada Z



Transformada Z

Así como la transformada de Laplace convierte las ecuaciones diferenciales en términos algebraicos con respecto a s, la transformada z convierte las ecuaciones de diferencia en términos algebraicos con respecto a z.

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}.$$

Recordar que $z^{-n} = e^{-s(nT)}$ y la transformada de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} \, \mathrm{d}\, t.$$

Propiedades

- Linealidad: $\mathcal{Z}\{f_1[n]+f_2[n]\}=F_1(z)+F_2(z)$, y $\mathcal{Z}\{af[n]=aF(z)\}$.
- Diferencia positiva: $\mathcal{Z}\{f[n+1]\}=zF[z]-zf[0]$. $\mathcal{Z}\{f[n+k]\}=z^kF[z]-\sum_{i=0}^{k-1}z^{k-i}f[i]$.
- Escalamiento en frecuencia: $\mathcal{Z}\{a^nf[n]\}=F(z/a)$.
- Multiplicación por n: $\mathcal{Z}\{n^kf[n]\}=-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,z}\mathcal{Z}\left\{n^{(k-1)}f[n]\right\}$.
- Teorema del valor final:
$$\lim_{n\to\infty}f[n]=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$
- Convolución: $\mathcal{Z}\left\{f_1[n]\star f_2[n]\right\}=F_1(z)F_2(z)$ donde $f_1[n]\star f_2[n]=\sum_{h=0}^{\infty}f_1[h]f_2[n-h]$.

Transformada Z - Ejemplo

Ejemplo: Asumir que $y[n] = A$. Se puede considerar como una función escalón de amplitud A.

$$y[z] = \sum_{n=0}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} Az^{-n} = \frac{A}{1 - z^{-1}} = \frac{Az}{z - 1}$$

Ejemplo: La transformada z de la función escalón unitario.

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

A partir de la serie geométrica $(1 - bx)^{-1} = 1 + bx + (bx)^2 + \cdots$ entonces,

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

Transformada Z - Tabla

Type	$X(z)$	$x[n]$
polynomial in z	$\sum_k c_k z^{-k}$	$\sum_k c_k\, \delta[n-k]$
single real pole	$\dfrac{1}{1-pz^{-1}}$	$p^n\, u[n]$
double real pole	$\dfrac{pz^{-1}}{(1-pz^{-1})^2}$	$np^n\, u[n]$
double real pole	$\dfrac{1}{(1-pz^{-1})^2}$	$(n+1)p^n\, u[n]$
triple real pole	$\dfrac{1}{(1-pz^{-1})^3}$	$\dfrac{(n+2)(n+1)}{2} p^n\, u[n]$
complex conjugate pair	$\dfrac{az \sin\omega_0}{(z-a\,e^{\jmath\omega_0})(z-a\,e^{-\jmath\omega_0})}$	$a^n \sin(\omega_0 n)\, u[n]$
complex conjugate pair $p = \|p\|\, e^{\jmath\omega_0}$	$\dfrac{r}{1-pz^{-1}} + \dfrac{r^*}{1-p^* z^{-1}}$	$2\,\|r\|\,\|p\|^n \cos(\omega_0 n + \angle r)\, u[n]$

Funciones de transferencia en *z*

Considerar el siguiente sistema discreto, y hallar la función de transferencia.

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_0 y[n-2] + b_1 u[n-1] + b_0 u[n-2].$$

Primero, tomamos la transformada z a ambos lados de la ecuación de diferencia.

$$\mathcal{Z}\{y[n]\} = \mathcal{Z}\{-a_1 y[n-1]\} - \mathcal{Z}\{a_0 y[n-2]\} + \mathcal{Z}\{b_1 u[n-1]\} + \mathcal{Z}\{b_0 u[n-2]\}.$$

$$Y[z] = -a_1 z^{-1} Y[z] - a_0 z^{-2} Y[z] + b_1 z^{-1} U[z] + b_0 z^{-2} U[z].$$

Funciones de transferencia en z

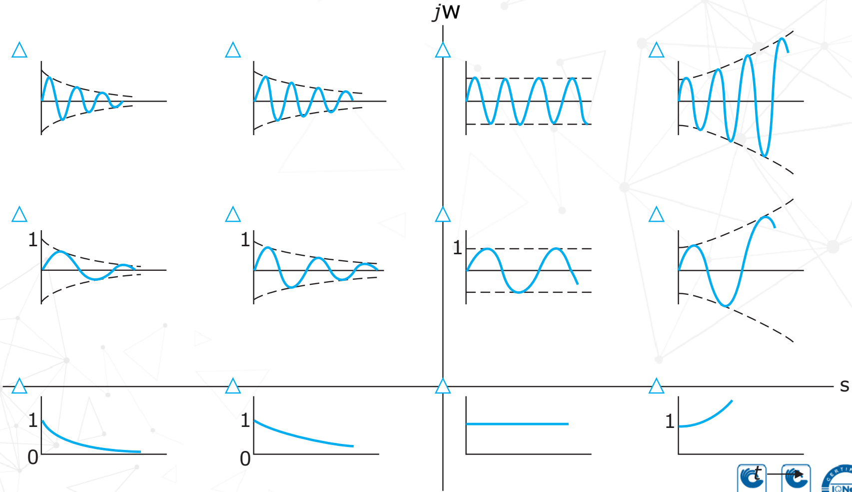
De esta expresión

$$Y[z] = -a_1 z^{-1} Y[z] - a_0 z^{-2} Y[z] + b_1 z^{-1} U[z] + b_0 z^{-2} U[z].$$

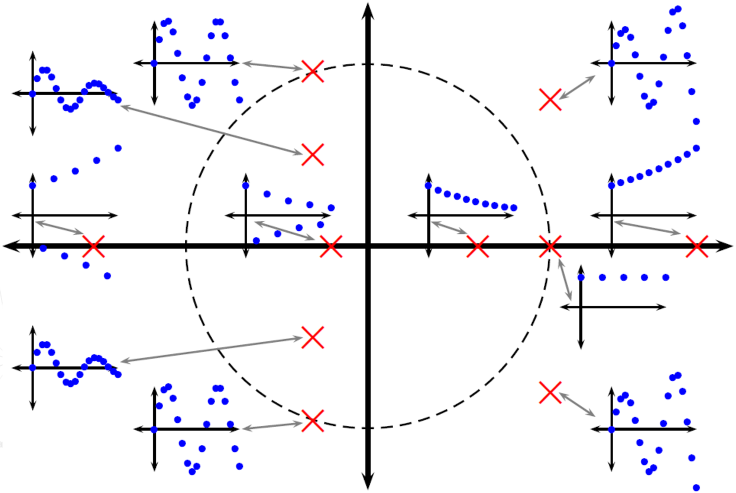
Se obtiene la función de transferencia

$$\frac{Y[z]}{U[z]} = H[z] = \frac{b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}$$

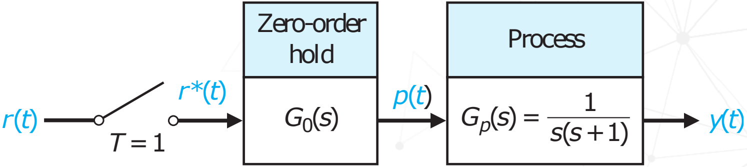
Respuesta y estabilidad - Plano *s*



Respuesta y estabilidad - Plano z



Ejemplo: Laplace a Z



$$G_0(s) = \frac{1 - e^{-st}}{s}$$

Ejemplo: Laplace a Z

Entonces la funciones de transferencia $Y(s)/R^*(s)$ es

$$\frac{Y(s)}{R^*(s)} = G_0(s)G_p(s) = G(s) = \frac{1-e^{-st}}{s^2(s+1)}$$

Expandiendo en fracciones parciales

$$G(s) = (1-e^{-st})\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right)$$

y la transformada z es

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\} = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right\}$$

Ejemplo: Laplace a Z

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right\}$$

Usando las tablas se obtiene

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1})\left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - e^{-T}}\right] \\ &= \frac{(ze^{-t} - z + Tz) + (1 - e^{-T} - Te^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})} \end{aligned}$$

Cuando $T = 1$,

$$G(z) = \frac{ze^{-1} + 1 - 2e^{-1}}{(z-1)(z-e^{-1})} = \frac{0.3678z + 0.2644}{z^2 - 1.3678z + 0.3678}.$$

Ejemplo: Laplace a Z

$$\frac{Y[z]}{R^*[z]} = \frac{0.3678z + 0.2644}{z^2 - 1.3678z + 0.3678}$$

$$(z^2 - 1.3678z + 0.3678)Y[z] = (0.3678z + 0.2644)R^*[z]$$

$$y[n+2] - 1.3678y[n+1] + 0.3678y[n] = 0.3678r[n+1] + 0.2644r[n]$$

$$y[n+2] = 1.3678y[n+1] - 0.3678y[n] + 0.3678r[n+1] + 0.2644r[n]$$

$$y[n] = 1.3678y[n-1] - 0.3678y[n-2] + 0.3678r[n-1] + 0.2644r[n-2]$$