Ecuaciones Diferenciales

Cristian Guarnizo-Lemus
cristianguarnizo@itm.edu.co

Maestria en Automatización y Control Industrial

Contenido

Introducción

Las ecuaciones diferenciales juegan un papel vital en la solución de varios problemas encontrados cuando se modela fenómenos físicos. Todas las disciplinas en la ciencias físicas, cada una con sus propias situaciones físicas, requieren que se deriven las ecuaciones matemáticas necesarias y luego resolver la ecuaciones para obtener las soluciones deseadas.

Contenido

Ecuación Diferencial

Se dice que una ecuación diferencial (ED) es cualquier ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

Ecuaciones Diferenciales

La derivada $\mathrm{d}\,y/\,\mathrm{d}\,x$ de una función $y = \psi(x)$ representa en sí misma otra función $\psi'(x)$ que se encuentra mediante una regla específica. Por ejemplo, la función $y = e^{0.1x^2}$ es diferenciable sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$, y su derivada es

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = 0.2xe^{0.1x^2}.$$

Si reemplazamos $e^{0.1x^2}$ por su variable y, obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = 0.2xy.$$

Tipos de Ecuaciones Diferenciales

- Ordinarias (ODE): contiene únicamente derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente,

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

- Parciales (PDE): se presentan las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Notaciones

- Ordinarias:
  - Leibniz: $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$.
  - Notación prima: y', y'', y'''.
  - Notación Newton: $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$.
- Parciales:
  - Subindice: $u_{xx} + u_{yy} = 0$ y $u_{xx} = u_x - 2u_t$.

Clasificación por orden

El orden de una ecuación diferencial se representa por la derivada más alta presente en la ecuación. Por ejemplo

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + 5\left(\frac{d y}{d x}\right)^3 - 4y = e^x$$

es una ecuación diferencial de segundo orden.
De manera simbólica podemos expresar una ODE de n-ésimo orden como

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

También, podemos expresar las ecuaciones diferenciales como

$$\frac{d^n y}{d x^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

donde f es una función continua con valores reales.

Ejemplos Interesantes

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = y, \quad y = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots, \quad y = e^t$$
$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = y^2, \quad y = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots, \quad y = \frac{1}{1-t}$$

Clasificación por linealidad

Se dice que una ODE de n-ésimo orden es **lineal** si F es lineal en $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Esto significa que una ODE es lineal si

$$a_n(x)\frac{d^n y}{d x^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{d y}{d x} + a_0(x)y = g(x).$$

Dos casos especiales son

$$a_1(x)\frac{d y}{d x} + a_0 y = g(x), \text{ y } \quad a_2(x)\frac{d^2 y}{d x^2} + a_1(x)\frac{d y}{d x} + a_0 y = g(x)$$

Clasificación por linealidad

Una ecuación diferencial ordinaria **no lineal** simplemente es una ecuación que contiene funciones no lineales de la variable dependiente, por lo tanto:

$$(1-y)y' + 2y = e^x, \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2} + \sin(y) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}\,x^4} + y^2 = 0,$$

son ejemplos de ODE no lineales.

Contenido

Ecuación diferencial de primer orden

La siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = f(x, y),$$

se dice que es separable si

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Y entonces la solución se encuentra por integración

$$\int h(y)\,\mathrm{d}\,y = \int g(x)\,\mathrm{d}\,x + C$$

ODE primer orden: factor integrante

Considere la siguiente ODE de primer orden

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

La idea es encontrar un función $M(x)$ tal que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(yM(x)) = M(x)(y' + P(x)y).$$

ODE primer orden: factor integrante

Considere la siguiente ODE de primer orden

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

La idea es encontrar un función $M(x)$ tal que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(yM(x)) = M(x)(y' + P(x)y).$$

Entonces

$$ye^{\int P(x)\,\mathrm{d}\,x} = \int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}\,x + C$$

ODE primer orden: factor integrante

Considere la siguiente ODE de primer orden

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

La idea es encontrar un función $M(x)$ tal que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(yM(x)) = M(x)(y' + P(x)y).$$

Entonces

$$ye^{\int P(x)\,\mathrm{d}\,x} = \int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}\,x + C$$

Si $Q(x) = 0$, entonces la solución homogénea es

$$y = Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}\,x}.$$

ODE primer orden: factor integrante

Ejemplo: Considere

$$y' - \frac{2y}{x} = 0.$$

Entonces $P(x) = -\frac{2}{x}$ y $M(x) = \frac{1}{x^2}$. Finalmente, multiplicando por $M(x)$ a ambos lados de la ecuación se tiene

$$\frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} = 0,$$

$$\frac{y'x^2 - 2xy}{x^4} = 0.$$

Por medio de la derivada de un cociente tenemos

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = 0, \rightarrow y = cx^2.$$

ODE primer orden: factor integrante

Ejercicio: Considere

$$y' + \tan(x)y = \cos^2(x), \; y(0) = 2.$$

Encontrar la solución de la ODE.

ODE primer orden: factor integrante

Ejercicio: Considere

$$y' + \tan(x)y = \cos^2(x), \;\; y(0) = 2.$$

Encontrar la solución de la ODE.

$$y = (\sin(x) + C)\cos(x), \;\text{ y } C = 2.$$

Ejercicios

Verificar que la solución propuesta es una solición valida de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \; y = \sqrt{10 - x}.$$

$$y' = 2x + 3y - 1, y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}.$$

$$h'(x) = \frac{2h(x)}{x\ln(x)}, \; h(x) = 4\ln(x).$$

$$y' = 0.5(100 - y), \; y = 5e^{-0.5x} + 100.$$

$$\frac{dy}{dx} = x + 4y - 2, \; y = -\frac{x}{4} + \frac{3}{4}.$$

$$\frac{dy}{dx} = y(2x - 5), \; y = -e^{x^2 - 5x}.$$

$$g'(x) = \frac{2x + 5y}{x}, \; g(x) = x^5 - 2x.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y}{x}, \; y = -2x^5.$$

Contenido

Soluciones de DE lineales

La solución de una DE lineal tiene dos componentes

$$y_{\text{completa}}(t) = y_{\text{homogénea}}(t) + y_{\text{particular}}(t), \quad y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

Ejemplo

Obtener la solución de la ecuación diferencial lineal

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{f}(t),$$

donde $f(t) = t^2 + 5t + 3$ y las condiciones iniciales son $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 3$.

Ejemplo: Solución homogénea

El polinomio característico es

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2,$$
$$P(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 1),$$

donde las raíces de $P(\lambda)$ son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$. La solución homogénea es

$$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

Ejemplo: Solución particular

Dado que $f(t)$ es un polinomio de grado 2, probamos una solución particular de esa misma forma

$$y_p(t) = \beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0$$

Se calcula $\ddot{y}_p(t)$, $\dot{y}_p(t)$ y $\dot{(f)}(t)$:

Ejemplo: Solución particular

Dado que $f(t)$ es un polinomio de grado 2, probamos una solución particular de esa misma forma

$$y_p(t) = \beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0$$

Se calcula $\ddot{y}_p(t)$, $\dot{y}_p(t)$ y $\dot{(f)}(t)$:

$$\dot{y}_p(t) = 2\beta_2 t + \beta_1$$

$$\ddot{y}_p(t) = 2\beta_2$$

$$\dot{f}(t) = 2t + 5$$

Ejemplo: Reemplazamos

Reemplazando los resultados anteriores en la ecuación original

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{f}(t),$$

$$2\beta_2 + 3(2\beta_2 t + \beta_1) + 2(\beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0) = 2t + 5.$$

Que lo podemos agrupar como

$$2\beta_2 t^2 + (6\beta_2 + 2\beta_1)t + (2\beta_2 + 3\beta_1 + 2\beta_0) = 2t + 5.$$

Ejemplo: Reemplazamos

Reemplazando los resultados anteriores en la ecuación original

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{f}(t),$$
$$2\beta_2 + 3(2\beta_2 t + \beta_1) + 2(\beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0) = 2t + 5.$$

Que lo podemos agrupar como

$$2\beta_2 t^2 + (6\beta_2 + 2\beta_1)t + (2\beta_2 + 3\beta_1 + 2\beta_0) = 2t + 5.$$

Donde $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = 1$ y $\beta_0 = 1$.

Ejemplo: solución completa

La respuesta completa es

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + t + 1$$

Ejercicio: Encontrar los valores de c_1 y c_2.

Ejemplo: solución completa

La respuesta completa es

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + t + 1$$

Ejercicio: Encontrar los valores de c_1 y c_2.

$$c_1 = 4, \text{ y } \quad c_2 = -3$$

Ejemplo: Consideraciones

Para la solución homogénea

- Todas las raíces son diferentes y son reales

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}$$

- Las raíces son reales pero algunas son repetidas

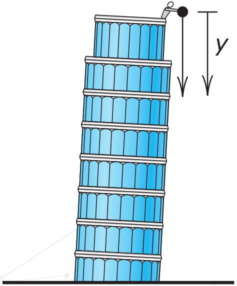
$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_2 t} + \ldots + \ldots + c_n t^n e^{\lambda_n t}$$

- Las raíces son complejas $\lambda_i = a \pm bj$.

$$c_1 e^{at} \cos(bt) + c_2 e^{at} \sin(bt)$$

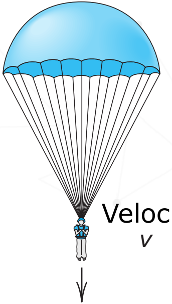
Contenido

Aplicaciones



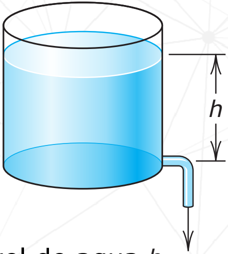
Caida libre

$$y'' = g = const.$$



Paracaidas

$$mv' = mg - bv^2$$

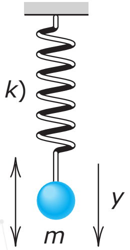


Nivel de agua h

Salia de agua

$$h' = -k\sqrt{h}$$

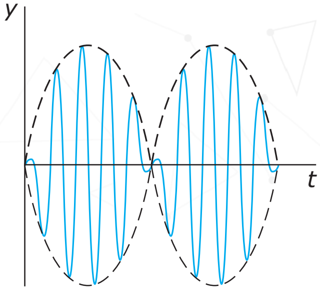
Aplicaciones



Desplazamiento y

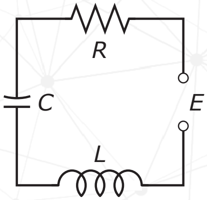
Masa vibrando sobre resorte

$$my'' + ky = 0$$



Pulsos de Vibracion

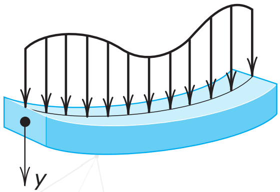
$$y'' + \omega_0^2 y = \cos \omega t, \quad \omega_0 \approx \omega$$



Corriente I en un circuito RLC

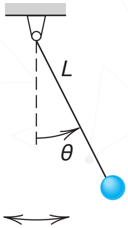
$$LI'' + RI' + \frac{1}{C} I = E'$$

Aplicaciones



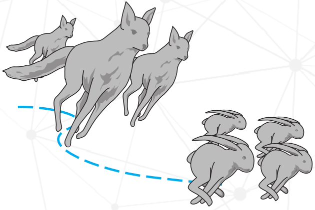
Deformacion barra

$$EIy^{iv} = f(x)$$



Pendulo

$$L\theta'' + g\sin\theta = 0$$



Lotka-Volterra

Modelo predator-prey

$$y_1' = ay_1 - by_1y_2$$

$$y_2' = ky_1y_2 - ly_2$$

Ejercicio

Un cachorro gana peso, ω, a aproximadamente una tasa inversamente proporcional a su edad, t, en meses. Cual ecuación describe esta relación?

a) $\frac{d\omega}{dt} = \frac{k}{t}$ b) $\frac{d\omega}{dt} = kt$

c) $\frac{d\omega}{dt} = \frac{k}{\omega}$ d) $\frac{d\omega}{dt} = k\omega$

Ejercicio

Un medicamento se administra por vía intravenosa al torrente sanguíneo de un paciente, a una tasa de 3 centímetros cúbicos por hora. Al mismo tiempo, los órganos del paciente eliminan el medicamento de la sangre a una tasa proporcional al volumen actual V del medicamento en la sangre.

a) $\frac{dV}{dt} = -3kV$ b) $\frac{d\omega}{dt} = k - 3V$

c) $\frac{dV}{dt} = 3 - kV$ d) $\frac{dV}{dt} = 3k - V$

Ejercicio

Un material radioactivo decae a una tasa de cambio proporcional a la cantidad actual Q del material radioactivo.

a) $Q(t) = -kQ$ b) $\frac{dQ}{dt} = -Q^{kt}$

c) $Q(t) = -Q^{kt}$ d) $\frac{dQ}{dt} = -kQ$

Ejercicio

La fracción p de la población que ha escuchado una noticia de último minuto se incrementa a una razón proporcional a la fracción de la población que aún no ha escuchado la noticia.

a) $\frac{dp}{dt} = k(1-p)$. b) $\frac{dp}{dt} = -kp$.

c) $\frac{dp}{dt} = 1 - kp$. d) $\frac{dp}{dp} = kp$.