Institución Universitaria
Acreditada en Alta Calidad

Innovación Tecnológica con
Sentido Humano

Calculo Matricial

Cristian Guarnizo-Lemus, PhD

Outline

Contenido

Producto matricial

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$, y $\mathbf{B}$ una matriz $n \times p$, y el producto de ellas

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$$

Entonces $\mathbf{C}$ es $m \times p$, con elementos (i, j) dados por

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}, \quad \forall i = 1, \ldots, m \text{ y } j = 1, \ldots, p.$$

Contenido

Funciones vectoriales

Sea la transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ expresada como

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}),$$

donde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. La derivada se define

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

donde esta matriz se conoce como el Jacobiano de la función $f()$.

Que ocurre si $\mathbf{x}$ es escalar?

Que ocurre si $\mathbf{y}$ es escalar?

Funciones vectoriales

Ejemplo: Considere la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3y^2 \\ 2xy + \cos(x) \end{bmatrix}$$

Entonces la derivada con respecto al vector $[x\ y]$ es

$$\mathbf{J_f}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Funciones vectoriales

Ejercicio: Considere la función $f : \mathbb{R}[0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, con

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3y^2 \\ 2xy + \cos(x) \end{bmatrix}$$

Entonces la derivada con respecto al vector $[x\ y]$ es

$$\mathbf{J_f}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Contenido

Producto matriz-vector

Sea la transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ expresada como

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

donde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, y $\mathbf{A}$ no depende de $\mathbf{x}$. La derivada se define

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}.$$

Producto matriz-vector

Demostración: El calculo del i-ésimo elemento de $\mathbf{y}$ esta dado por

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} x_k,$$

por lo cual su derivada se expresa por elemento así

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = a_{ij}, \quad \forall\, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Entonces

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}.$$

Producto matriz-vector

Sea la transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ expresada como

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

donde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, y $\mathbf{A}$ no depende de $\mathbf{x}$, pero $\mathbf{x}$ es función del vector $\mathbf{z}$. La derivada con respecto a $\mathbf{z}$ se define

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}}.$$

Producto matriz-vector

Demostración: El calculo del i-ésimo elemento de $\mathbf{y}$ esta dado por

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} x_k,$$

por lo cual su derivada se expresa por elemento así

$$\frac{\partial y_i}{\partial z_j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial x_k}{\partial z_j}, \quad \forall\, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Entonces

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}}.$$

Contenido

Forma cuadrática

Sea α un escalar definido por

$$\alpha = \mathbf{y}^\top \mathbf{A}\mathbf{x},$$

donde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, y $\mathbf{A}$ es independiente de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$. Entonces

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{y}^\top \mathbf{A}.$$

y

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Forma cuadrática

Sea α un escalar definido por

$$\alpha = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x},$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, y $\mathbf{A}$ es independiente de $\mathbf{x}$. Entonces

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x}^\top(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top).$$

Producto matriz-vector

Demostración: El calculo de la forma cuadrática se puede expresar

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{ij}x_i x_j.$$

Diferenciando con respecto al k-ésimo elemento de $\mathbf{x}$ tenemos

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i, \quad \forall\, k = 1\ldots, n,$$

en consecuencia

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top + \mathbf{x}^\top \mathbf{A} = \mathbf{x}^\top(\mathbf{A}^\top + \mathbf{A}).$$

Institución Universitaria
Acreditada en Alta Calidad
Innovación Tecnológica con Sentido Humano

Forma cuadrática

Para el caso especial en que la matriz $\mathbf{A}$ es simétrica

$$\alpha = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x},$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, y $\mathbf{A}$ es independiente de $\mathbf{x}$. Entonces

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{x}^\top \mathbf{A}.$$