Factorización Matrices y Algoritmos

Cristian Guarnizo-Lemus, PhD

Outline

1. Inversa de una matriz
2. Factorización LU
3. Factorización QR
4. Valores y vectores propios
5. Descomposición en valores singulares (SVD)

Contenido

1 Inversa de una matriz

2 Factorización LU

3 Factorización QR

4 Valores y vectores propios

5 Descomposición en valores singulares (SVD)

Inversa de una matriz

Una matriz $\mathbf{A}$ es invertible si y solo si $\mathbf{A}$ es equivalente en filas a $\mathbf{I}$, y en tal caso, cualquier secuencia de operaciones de fila elementales que reduce $\mathbf{A}$ a $\mathbf{I}$ también transforma $\mathbf{I}$ en $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{E}_1\mathbf{A} \sim \mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{A}) \sim \ldots \sim \mathbf{E}_p(\mathbf{E}_{p-1}\ldots\mathbf{E}_1\mathbf{A}) = \mathbf{I}.$$

Entonces,

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_p \ldots \mathbf{E}_1.$$

Algoritmo para encontrar A^{-1}

Una forma de determinar $\mathbf{A}^{-1}$ es realizar una reducción en filas de la matriz aumentada $[\mathbf{A}\ \mathbf{I}]$. Si $\mathbf{A}$ es equivalente en filas a $\mathbf{I}$, entonces $[\mathbf{A}\ \mathbf{I}]$ es equivalente en filas a $[\mathbf{I}\ \mathbf{A}^{-1}]$.

Ejemplo: Encontrar la inversa de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Calculo numérico

En problemas prácticos, es poco común calcular $\mathbf{A}^{-1}$, a menos que se requieran los elementos de $\mathbf{A}^{-1}$. Calcular $\mathbf{A}^{-1}$ y $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ toma 3 veces la cantidad de operaciones necesarias para resolver $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por medio de reducción por filas, y reducción por filas puede ser más preciso.

Teorema de matriz invertible

Si la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es invertible, entonces

- $\mathbf{A}$ tiene n pivotes.
- $\mathrm{Nul}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$.
- Las columnas de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes.
- Las columnas de $\mathbf{A}$ generan un *span* de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una única solución para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$.
- $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
- 0 no es un valor propio de $\mathbf{A}$.

Contenido

1 Inversa de una matriz

2 Factorización LU

3 Factorización QR

4 Valores y vectores propios

5 Descomposición en valores singulares (SVD)

Factorización LU

Se emplea en problemas de secuencia de ecuaciones, todas con la misma matriz de coeficientes:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}_p.$$

Cuando es $\mathbf{A}$ es invertible, se puede calcular $\mathbf{A}^{-1}$ y luego calcular $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_1$, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_2$, y así sucesivamente. Sin embargo es más eficiente solucionar la primera ecuación con reducción de filas y obtener la factorización LU. Posteriormente emplear esta factorización sobre las siguientes ecuaciones.

Algoritmo para LU

Suponga que $\mathbf{A}$ puede ser reducida a una forma echelon $\mathbf{U}$ usando solamente operaciones de fila elementales. Entonces existen matrices elementales triangulares inferiores $\mathbf{E}_1 \ldots \mathbf{E}_p$ tales que

$$\mathbf{E}_p \ldots \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}.$$

Entonces

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{E}_p \ldots \mathbf{E}_1\right)^{-1} \mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

donde

$$\mathbf{L} = \left(\mathbf{E}_p \ldots \mathbf{E}_1\right)^{-1}.$$

Algoritmo para LU

1. Reducir $\mathbf{A}$ a una forma echelon $\mathbf{U}$ por una secuencia de operaciones de remplazo por fila.

2. Ubicar los elementos de $\mathbf{L}$ tal que la misma secuencia de operaciones fila reduzca $\mathbf{L}$ a $\mathbf{I}$.

Algoritmo para LU

Ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Demostrar que su factorización en LU es

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Algoritmo para LU

Ejercicio: Solucionar $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ usando la factorización $\mathbf{LU}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

LU matrices simétricas

Si la matriz $\mathbf{A}$ es simétrica y positiva definida ($\mathbf{xAx} > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), entonces su descomposición LU se vuelve

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$$

Donde $\mathbf{L}$ es una matriz triangula inferior, y se conoce como también como la descomposición Cholesky.

Contenido

1 Inversa de una matriz

2 Factorización LU

3 Factorización QR
- Aplicación: mínimos cuadrados

4 Valores y vectores propios

5 Descomposición en valores singulares (SVD)

Factorización QR

Si $\mathbf{A}$ es un matriz $m \times n$ con columnas linealmente independientes, entonces $\mathbf{A}$ puede ser factorizado como $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, donde $\mathbf{Q}$ es una matriz $m \times n$ cuyos elementos forman una base ortonormal para las columnas de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{R}$ es una matriz $n \times n$ triangular superior invertible con elementos positivos en su diagonal.

Factorización QR

Ejemplo: Demostrar que la factorización QR de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

esta dada por

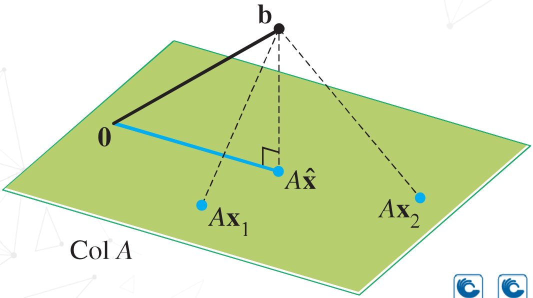
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/\sqrt{12} & 0 \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} & -2/\sqrt{6} \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6} \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 3/\sqrt{12} & 2/\sqrt{12} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Aplicación: mínimos cuadrados

Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, una solución de mínimos cuadrados (*least-squares*) de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ tal que

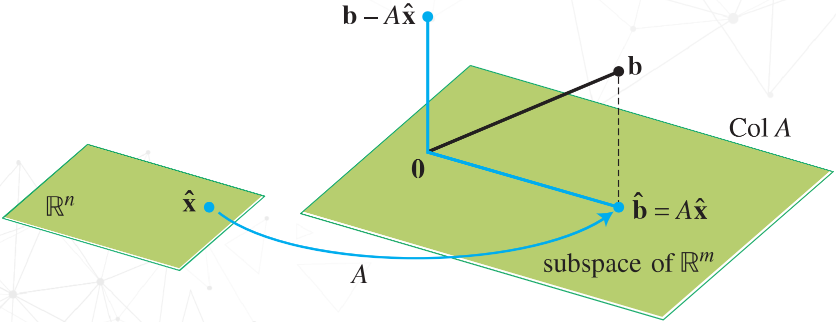
$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|,$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.



Aplicación: mínimos cuadrados

$$\hat{\mathbf{b}} = \text{proj}_{\text{Col}\,A}\,\mathbf{b} \tag{1}$$



Aplicación: mínimos cuadrados

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{b} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^\top \mathbf{b}$$

en Julia:

- `xhat = inv(A'*A)*(A'*b)`
- `xhat = pinv(A)*b`
- `Q,R = qr(A); xhat = inv(R)*(Q'*b)`

Aplicación: mínimos cuadrados

Ejercicio: Encuentre la solución de mínimos-cuadrados de sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix},$$

usando la factorización QR, o sea $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{Q}^{\top}\mathbf{b}$.

Aplicación: mínimos cuadrados

Ejercicio:
Demostrar que la solución de mínimos cuadrados del sistema inconsistente $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} \tag{2}$$

es

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Contenido

1 Inversa de una matriz

2 Factorización LU

3 Factorización QR

4 Valores y vectores propios

5 Descomposición en valores singulares (SVD)

Eigenvectors y eigenvalores

Un vector propio de una matriz $\mathbf{A}$ es un vector diferente de cero tal que $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ para algún escalar λ. Un escalar λ es llamado un valor propio de $\mathbf{A}$ si existe una solución no trivial para $\mathbf{x}$ de $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, tal $\mathbf{x}$ es llamado vector propio correspondiente a λ.

Eigenvector y eigenvalores

Ejemplo: Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}, \text{ y } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Son $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores propios de $\mathbf{A}$?

Eigenvector y eigenvalores

Ejercicio: Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Demostrar que 7 es un valor propio de $\mathbf{A}$.

Eigenvector y eigenvalores

Propiedades:

- Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de su diagonal.
- Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ son vectores propios que corresponden a distintos valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de una matriz $\mathbf{A}$, entonces el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es linealmente independiente.

La ecuación característica

Los valores propios se pueden encontrar al hacer

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

que corresponde a encontrar los valores de λ tal que $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ no es invertible. Se encuentran a partir de

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0.$$

La ecuación característica

Ejemplo:
Encontrar los valores propios de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Contenido

1 Inversa de una matriz

2 Factorización LU

3 Factorización QR

4 Valores y vectores propios

5 Descomposición en valores singulares (SVD)

Descomposición en valores singulares

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$ con rango r. Entonces existe una matriz $\mathbf{\Sigma}$ de $m \times n$ para la cual los elementos de la diagonal $\mathbf{D}$ son los primeros r valores singulares de $\mathbf{A}$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$, y existe una matriz ortogonal $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y una matriz $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\top}.$$

Con

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución de sistemas lineales con SVD

Asumiendo que $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top$ entonces

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Lo cual nos lleva a

$$\mathbf{D}\mathbf{V}^\top\mathbf{x} = \mathbf{U}^\top\mathbf{b}.$$

Si hacemos $\mathbf{V}^\top\mathbf{x} = \mathbf{z}$ y $\mathbf{U}^\top\mathbf{b} = \mathbf{d}$, se tiene

$$\mathbf{D}\mathbf{z} = \mathbf{d} \ \rightarrow \mathbf{z} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{d}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones se procede entonces

1. Calcular $\mathbf{z} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{d}$ (se asume que no hay ceros en la diagonal de $\mathbf{D}$).
2. Calcular la solución $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z}$.

Calcular la pseudo inversa usando SVD

Se puede demostrar que la pseudo inversa de $\mathbf{A}$, se puede calcular como

$$x = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{b} = (\mathbf{A}^{\top}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\top}\mathbf{b} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^{\top}\mathbf{b}$$