Optimización

Programación Lineal

Docente: Cristian Guarnizo Lemus

Contenido

1. Forma estándar de LPs.
2. Transformaciones a forma estándar.
3. Método simplex.
4. Dualidad.

Programación lineal

Ejemplo:

- Una refinería tiene dos crudo de petróleos disponibles como material.
- Produce gasolina, queroseno y combustóleo.
- Ganancias del procesamiento del crudo #1 es 1 Euro/kg y del crudo #2 es 0.7 Euro/kg.
- Cuales son sus tasas optimas de alimentación diaria?

Producto	Crudo #1 %	Crudo #2 %	Max Permitido (kg/dia)	Min Permitido (kg/dia)
Gasolina	70	31	-	6000
Queroseno	6	9	2400	-
Combustóleo	24	60	12000	-

Formulación matemática:

$$\max_{x_1,x_2} x_1 + 0.7x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\ \ & 0.7x_1 + 0.31x_2 \geq 6000 \\ & 0.06x_1 + 0.09x_2 \leq 2400 \\ & 0.24x_1 + 0.6x_2 \leq 12000 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$x_i, i \in \{1,2\}$ denotan la rata de alimentación del crudo i a la refinería.

Forma estándar de los LPs

NLP, programa no-lineal

$$\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$$ ← Función objetivo

$$\text{s.t. } c_i(\boldsymbol{x}) = 0, i \in E$$ ← Restricciones de Igualdad

$$c_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i \in I$$ ← Restricciones de desigualdad

LP, programa lineal

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{d}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}$$ ← Función objetivo lineal

$$\text{s.t. } \boldsymbol{a}_i{}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x} - b_i = 0, i \in E$$ ← Restricciones de igualdad lineal

$$-x_i \leq 0, i \in \{1, \dots, n\}$$ ← Limites de las variables

Forma estándar

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

Contenido

1. Forma estándar de LPs.
2. Transformaciones a forma estándar.
3. Método simplex.
4. Dualidad.

Transformaciones a forma estandar

LP, programa lineal

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{x}}\ & \bar{\boldsymbol{d}}^\mathsf{T}\bar{\boldsymbol{x}}\\ \text{s.t. } & \boldsymbol{A}_0\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}_0,\\ & \boldsymbol{A}_1\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{b}_1,\\ & \boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}_2,\\ & \bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

?

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{x}}\ & \boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}\\ \text{s.t. } & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

Transformación a forma estándar:

- Introducir nuevas variables de holgura para cada restricción de desigualdad.

$$\boldsymbol{A}_1\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{b}_1 \Rightarrow \boldsymbol{A}_1\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{v}_1 \geq \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}_2 \Rightarrow \boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{v}_2 \geq \boldsymbol{0}$$

- Variables complementarias: $x = \left[\bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\ \boldsymbol{v}_1^\mathsf{T}\boldsymbol{v}_2^\mathsf{T}\right]^\mathsf{T}$ y combinar igualdades.

Transformaciones a forma estandar

- Son dados en la forma estándar

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{d}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

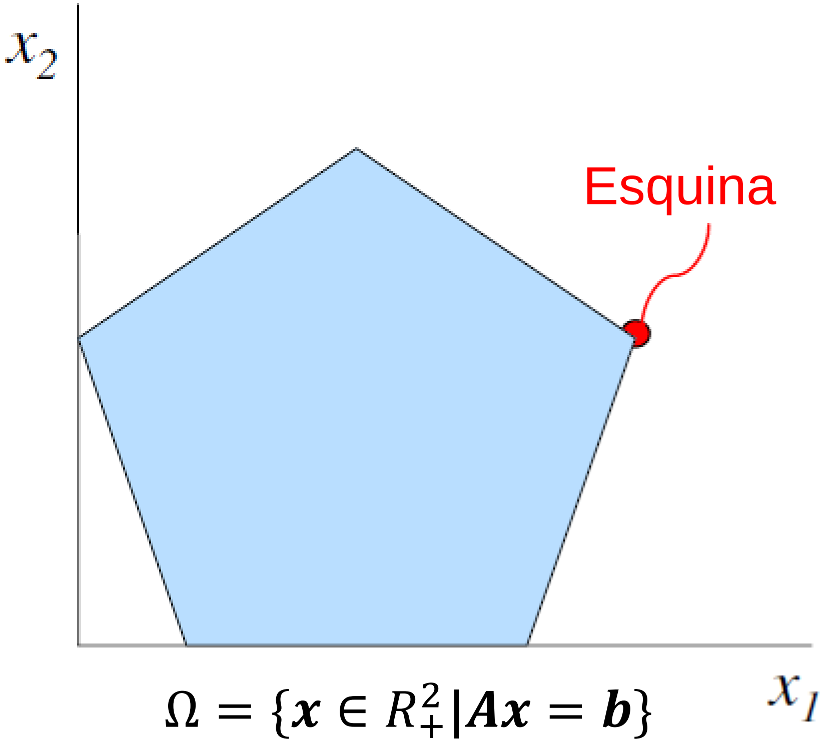
- El modelo tiene mas variables que restricciones de igualdad, tenemos mas grados de libertad.
- La matriz $\boldsymbol{A} \in R^{m \times n}$ tiene rango completo en la filas, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = m$.
- Para ilustraciones graficas típicamente se toma

$$\min_{x_1, x_2} d_1 x_1 + d_2 x_2$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Geometría de los problemas lineales

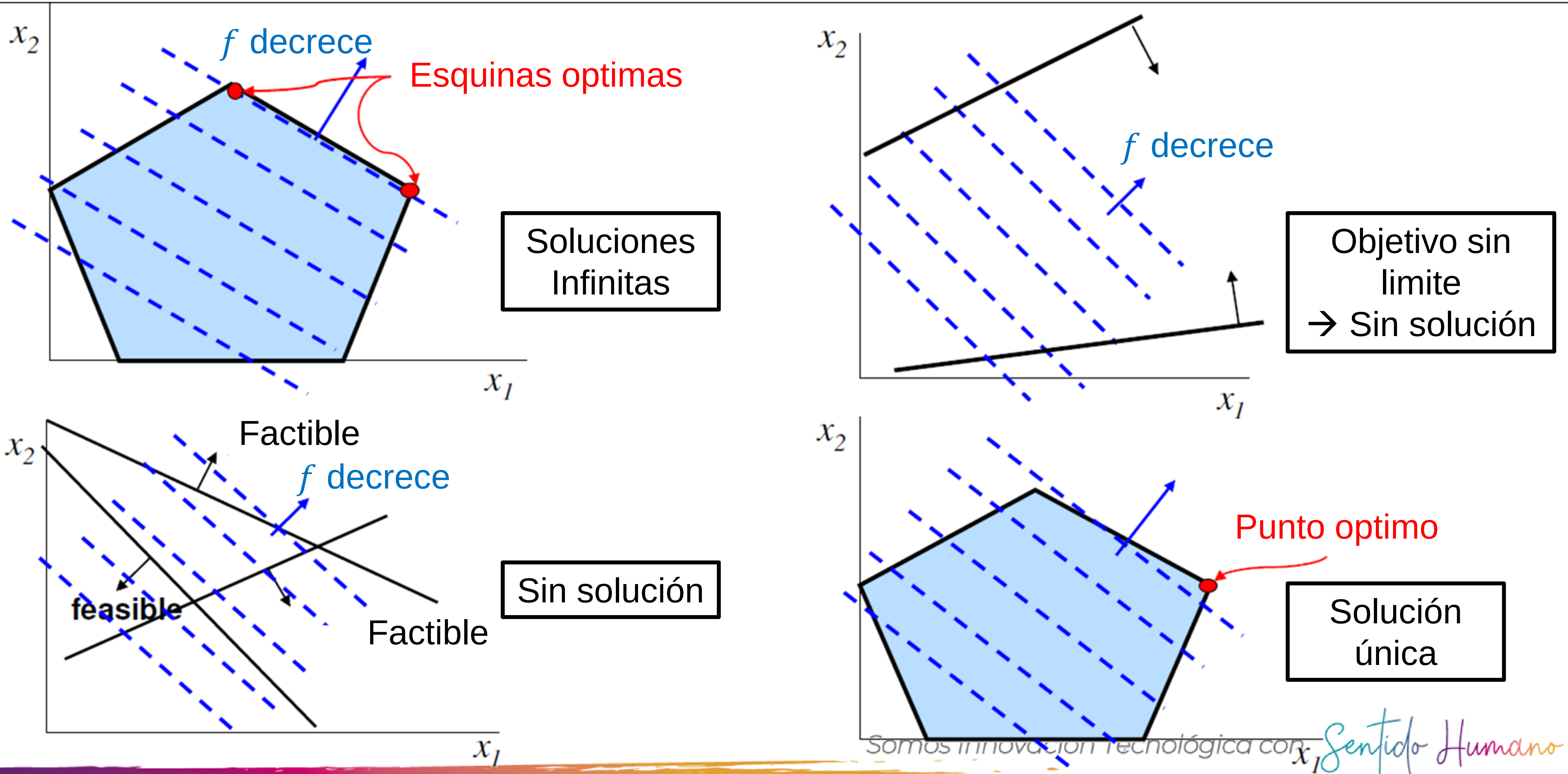
Conjunto factible: $\Omega = \{\boldsymbol{x} \in R^n | \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\}$

- Ω es un politopo, polígono multidimensional.
- Varios bordes expanden las caras del politopo.
- Una esquina P es la intersección de (al menos dos) restricciones activas.
- LPs son siempre convexos. Entonces cualquier solución local es una solución global.



$\Omega = \{\boldsymbol{x} \in R_+^2 | \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\}$

Geometría de los problemas lineales



Contenido

Método simplex

Consideramos el LP en forma estándar

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{d}^{\top}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

donde $\boldsymbol{A} \in R^{m\times n}$ tiene rango completo, $n > m$.

Definición: $\boldsymbol{x}$ es un punto factible básico, sí un conjunto índice $|T(\boldsymbol{x})| = m$, $T(\boldsymbol{x}) \subset \{1, \dots, n\}$ se puede seleccionar:

- $\boldsymbol{B} := [\boldsymbol{a}_i]_{i\in T(\boldsymbol{x})}$ es matriz básica regular ($\boldsymbol{a}_i$ es la i-esima columna de $\boldsymbol{A}$).
- $\boldsymbol{x}_B := [x_i]_{i\in T(\boldsymbol{x})} \geq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{x}_N := [x_i]_{i\notin T(\boldsymbol{x})} = \boldsymbol{0}$.

Visualización de puntos básicos factibles

Original, sistema de ecuaciones no lineales:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Selecciones el vector de índices y reorganice columnas:

Columnas básicas

Columnas no-básicas

$$\Leftrightarrow [\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{1,m+1} & \cdots & n_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ n_{m,m+1} & \cdots & n_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{B,1} \\ \cdots \\ x_{B,m} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} \qquad\qquad \boldsymbol{N}$$

Propiedades de los puntos básicos factibles

Con $\boldsymbol{N} \coloneqq [\boldsymbol{a}_i]_{i \notin T(\boldsymbol{x})}$

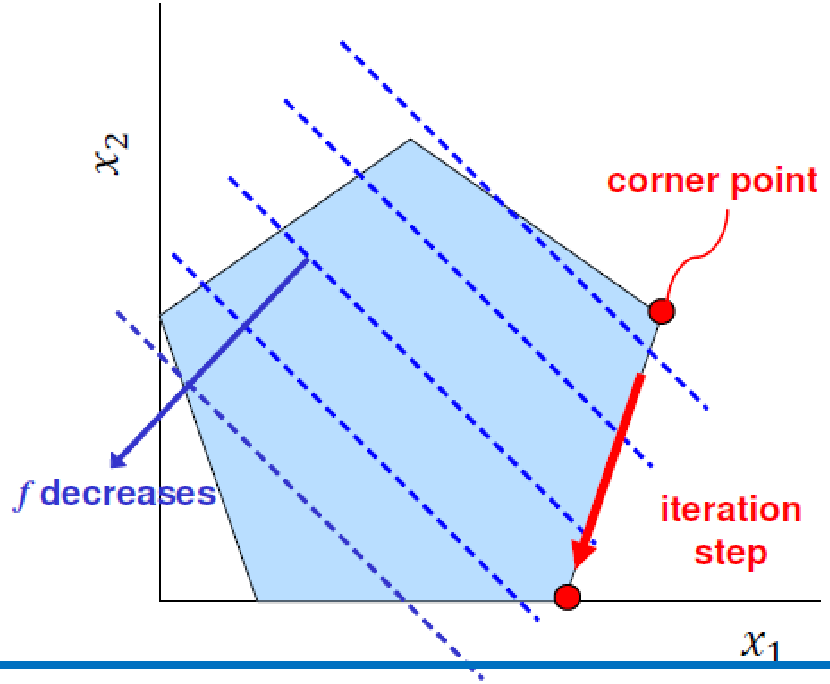
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \implies \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b} \implies \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Proposiciones:

- Los puntos factibles básicos son los puntos esquina.
- Si hay un punto factible, entonces existe un punto factible básico.
- Si una solución optima existe, entonces al menos el punto factible es una solución optima.

Método simplex para LPs - Resumen

- Buscar optimo entre los puntos factibles básicos (las esquinas del politopo).
- Empezar en una esquina factible.
- Iterar moviéndose a un punto esquina vecino.
- En cada movimiento la función objetivo decrece
  - En casos degenerados puede permanecer constante.
- Los puntos equina vecinos del politopo corresponden a puntos básicos factibles con un índice diferente en $T(\boldsymbol{x})$.



- Que condiciones se deben sostener en el optimo?
- Como realizar el paso iterativo?
- Como encontrar el punto básico factible inicial?

Simplex - Optimalidad

- Las condiciones KKT son suficientes para la solución global (convexo)

$$\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}_E + \boldsymbol{\lambda}_I = \boldsymbol{d}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_I \geq \boldsymbol{0}$$
$$x_i \lambda_{I,i} = 0, \forall i = \{1, \dots, n\}$$

Seleccionar $T(\boldsymbol{x})$

$$[\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N}]^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}_E + [\boldsymbol{\lambda}_{I,B}^{\mathsf{T}} \quad \boldsymbol{\lambda}_{I,N}^{\mathsf{T}}]^{\mathsf{T}} = [\boldsymbol{d}_B^{\mathsf{T}} \quad \boldsymbol{d}_N^{\mathsf{T}}]^{\mathsf{T}}$$
$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}$$

Seleccionar $\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$, y $\boldsymbol{\lambda}_{I,B} = \boldsymbol{0}$

Tarea:
Demostrar que estas expresiones se cumplen.

$$\boldsymbol{\lambda}_E = [\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}]^{-1}\boldsymbol{d}_B$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{I,N} = \boldsymbol{d}_N - \boldsymbol{N}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}_E$$
$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$\boxed{\text{Las condiciones KKT se satisfacen si: } \boldsymbol{x}_B \geq \boldsymbol{0} \text{ y } \boldsymbol{\lambda}_{I,N} \geq \boldsymbol{0}.}$

Simplex – Secuencia de iteración

Inicializar con un punto básico factible $\boldsymbol{x}$
Realizar el siguiente ciclo:

1. Sí $\boldsymbol{\lambda}_{I,N} \geq \mathbf{0}$ terminar.
2. Seleccionar un índice q: $q \notin T^k(\boldsymbol{x}), \lambda_{I,q} = \min_{i \notin T^k(\boldsymbol{x})} \lambda_{I,i}$ (Note que $\lambda_{I,q} < 0$)
3. Inicializar x_q^+, fijar todos los otros componentes de x_N^+ en cero.
4. Incrementar x_q^+, siguiendo $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^+ = \boldsymbol{b}$ hasta que algún x_p^+ con $p \in T(\boldsymbol{x})$ se vuelva cero.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^+ = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}^+ + \boldsymbol{a}_q \boldsymbol{x}_q^+ = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}$$

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}^+ = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_q \boldsymbol{x}_q^+ \geq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad x_p^+ = 0$$

5. Reemplazar el índice p con q en $T(\boldsymbol{x})$ y actualizar $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^+$.
6. Volver a 1.

Chequeo

Por qué esta la solución del LP en las esquinas del conjunto factible?

Cual es la idea detrás del método Simplex para LP?

Contenido

1. Forma estándar de LPs.
2. Transformaciones a forma estándar.
3. Método simplex.
4. Dualidad.

Condiciones necesarias de primer orden - Recordar

$$\min_{\boldsymbol{x}\in R^n} \quad f(\boldsymbol{x})$$
$$\text{s.t.} \quad c_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i \in E$$
$$c_i(\boldsymbol{x}) \le 0,\ i \in I$$

Teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT):

Sea $\boldsymbol{x}^* \in R^n$ un minimizador local. Asuma que $\nabla c_i(\boldsymbol{x}^*), i \in A(\boldsymbol{x}^*)$ son linealmente independientes. Entonces, existen multiplicadores de Lagrange, $\lambda_i^*, i \in E \cup I$:

(1) $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i\in E\cup I} \lambda_i^* \nabla c_i(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$ ← Estacionariedad

(2) $c_i(\boldsymbol{x}^*) = 0,\ \forall i \in E$ ← Factibilidad primaria

(3) $c_i(\boldsymbol{x}^*) \le 0,\ \forall i \in I$ ← Factibilidad primaria

(4) $\lambda_i^* \ge 0,\ \forall i \in I$ ← Factibilidad dual

(5) $\lambda_i^* c_i(\boldsymbol{x}^*) = 0,\ \forall i \in I$ ← Holgura complementaria (CS)

Condiciones KKT para LPs

Problema general:

$$\min_{x \in R^n} \; f(\boldsymbol{x})$$
$$\text{s.t.} \quad c_i(\boldsymbol{x}) = 0,\; i \in E$$
$$c_i(\boldsymbol{x}) \leq 0,\; i \in I$$

Forma estandar LP:

$$\min_{x \in R^n} \boldsymbol{d}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

Función Lagrangiana:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i \in E} \lambda_i c_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i c_i(\boldsymbol{x})$$

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}_E, \boldsymbol{\lambda}_I) = \boldsymbol{d}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}_E^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\lambda}_I^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}$$

Condiciones KKT:

(1) $\nabla L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$
(2) $c_i(\boldsymbol{x}^*) = 0,\ \forall i \in E$
(3) $c_i(\boldsymbol{x}^*) \leq 0,\ \forall i \in I$
(4) $\lambda_i^* \geq 0,\ \forall i \in I$
(5) $\lambda_i^* c_i(\boldsymbol{x}^*) = 0,\ \forall i \in I$

(1) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}_E^* + \boldsymbol{\lambda}_I^* = \boldsymbol{d}$
(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}$
(3) $\boldsymbol{x}^* \geq \boldsymbol{0}$
(4) $\boldsymbol{\lambda}_I^* \geq 0$
(5) $\boldsymbol{\lambda}_I^* \boldsymbol{x}_i^* = 0,\ \forall i = 1, \dots, n$

Dualidad en el optimo

Forma estandar LP: $\min_{x \in R^n} \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{x}$

s.t. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

Función Lagrangiana: $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}_E, \boldsymbol{\lambda}_I) = \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}_E^\top (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\lambda}_I^\top \boldsymbol{x}$

Condiciones KKT:

(1) $\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{\lambda}_E^* + \boldsymbol{\lambda}_I^* = \boldsymbol{d}$

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}$

(3) $\boldsymbol{x}^* \geq \boldsymbol{0}$

(4) $\boldsymbol{\lambda}_I^* \geq 0$

(5) $\boldsymbol{\lambda}_I^* \boldsymbol{x}_i^* = 0, \ \forall i = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{x}^* &= \left(A^\top \boldsymbol{\lambda}_E^* + \boldsymbol{\lambda}_I^*\right)^\top \boldsymbol{x}^* \\
&= \boldsymbol{\lambda}_E^{*\top} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{\lambda}_I^{*\top} \boldsymbol{x}^* \\
&= \boldsymbol{\lambda}_E^{*\top} \boldsymbol{b} \\
&= \boxed{\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{\lambda}_E^*}
\end{aligned}
$$

Dualidad fuerte

Institución Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

Programa lineal dual

El dual LP: $\max_{\boldsymbol{\lambda}_E} \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{\lambda}_E$

s.t. $\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{\lambda}_E \leq \boldsymbol{d}$

$\min_{\boldsymbol{\lambda}_E} -\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{\lambda}_E$

s.t. $\boldsymbol{d} - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{\lambda}_E \geq \boldsymbol{0}$

Función Lagrangiana: $\bar{L}(\boldsymbol{\lambda}_E, \boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{\lambda}_E + \boldsymbol{x}^\top \left(\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{\lambda}_E - \boldsymbol{d}\right)$

Multiplicadores de Lagrange

Condiciones KKT:

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{\lambda}_E^* \leq \boldsymbol{d}$

$\boldsymbol{x}^* \geq \boldsymbol{0}$

$x_i^* \left(\boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{\lambda}_E^* - d_i\right) = 0,\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Seleccionar: $\boldsymbol{\lambda}_I^*: \lambda_{I,i}^* = d_i - \boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{\lambda}_E^*$

$\Leftrightarrow$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{\lambda}_I^* \geq \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{x}^* \geq \boldsymbol{0}$

$x_i^* \lambda_{I,i}^* = 0,\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$

($\boldsymbol{a}_i$ es la i-esima columna de $\boldsymbol{A}$)

- El problema dual y primario comparten condiciones de optimalidad.
- El dual del dual es el primario (primal).

Dualidad Fuerte

Primario: $$\min_{\boldsymbol{x}\in R^n} \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

Dual: $$\max_{\boldsymbol{\lambda}_E} \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{\lambda}_E$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{\lambda}_E \leq \boldsymbol{d}$$

- Dualidad fuerte: los valores del óptimo de la función objetivo para el primario y el dual son iguales: $\boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{\lambda}_E^*$.
  - Cierto para todos los problemas convexos.
  - En general la dualidad debil: el valor óptimo de la función primaria es ≥ óptimo de la función objetivo dual.
- Dualidad fuerte con factibilidad primaria y dual son condiciones de optimalidad suficientes para LP
  - Factibilidad primaria: $\boldsymbol{x}^* \geq \boldsymbol{0}$, factibilidad dual $\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{\lambda}_E^* \leq \boldsymbol{d}$, dualidad fuerte $\boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{\lambda}_E^*$.
  - Alternativa a KKT. Sin multiplicadores de Lagrange para los desigualdades, sin holgura complementaria (CS)

Chequeo

Como se define el dual de un LP? Como se relacionan el primario y el dual?

Que es la dualidad fuerte? Como es útil?

Referencias

- Basado en el curso “Applied Numerical Optimization” por el profesor Alexander Mitsos.
- Nocedal J. Wright S. J. Numerical Optimization, 2nd Edition, Springer, 2006. Chapter 13.

Institución
Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

¡Gracias!

Somos Innovación Tecnológica con Sentido Humano

Alcaldía de Medellín