



Institución
Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

Optimización

Programación Lineal

Docente: Cristian Guarnizo Lemus

Somos Innovación Tecnológica con *Sentido Humano*



Alcaldía de Medellín



Institución
Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

Contenido

1. Forma estándar de LPs.
2. Transformaciones a forma estándar.
3. Método simplex.

Programación lineal

Ejemplo:

- Una refinería tiene dos crudo de petróleos disponibles como material.
- Produce gasolina, queroseno y combustóleo.
- Ganancias del procesamiento del crudo #1 es 1 Euro/kg y del crudo #2 es 0.7 Euro/kg.
- Cuales son sus tasas optimas de alimentación diaria?

Formulación matemática:

$$\max_{x_1, x_2} x_1 + 0.7x_2$$

$$\text{s.t. } 0.7x_1 + 0.31x_2 \geq 6000$$

$$0.06x_1 + 0.09x_2 \leq 2400$$

$$0.24x_1 + 0.6x_2 \leq 12000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$x_i, i \in \{1,2\}$ denotan la rata de alimentación del crudo i a la refinería.

Producto	Crudo #1 %	Crudo #2 %	Max Permitido (kg/dia)	Min Permitido (kg/dia)
Gasolina	70	31	-	6000
Queroseno	6	9	2400	-
Combustóleo	24	60	12000	-

Forma estándar de los LPs

NLP, programa no-lineal

$$\min_x f(\mathbf{x})$$

$$\text{s.t. } c_i(\mathbf{x}) = 0, i \in E$$

$$c_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in I$$

← Función objetivo

← Restricciones de Igualdad

← Restricciones de desigualdad

LP, programa lineal

$$\min_x \mathbf{d}^T \mathbf{x}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i = 0, i \in E$$

$$-x_i \leq 0, i \in \{1, \dots, n\}$$

← Función objetivo **lineal**

← Restricciones de igualdad **lineal**

← Límites de las variables

Forma estándar

$$\begin{aligned} \min_x & \mathbf{d}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t. } & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$



Institución
Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

Contenido

1. Forma estándar de LPs.
2. Transformaciones a forma estándar.
3. Método simplex.

Transformaciones a forma estandar

LP, programa lineal

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \bar{d}^T \bar{x} \\ \text{s.t.} \quad & A_0 \bar{x} = b_0, \\ & A_1 \bar{x} \geq b_1, \\ & A_2 \bar{x} \leq b_2, \\ & \bar{x} \geq 0 \end{aligned}$$

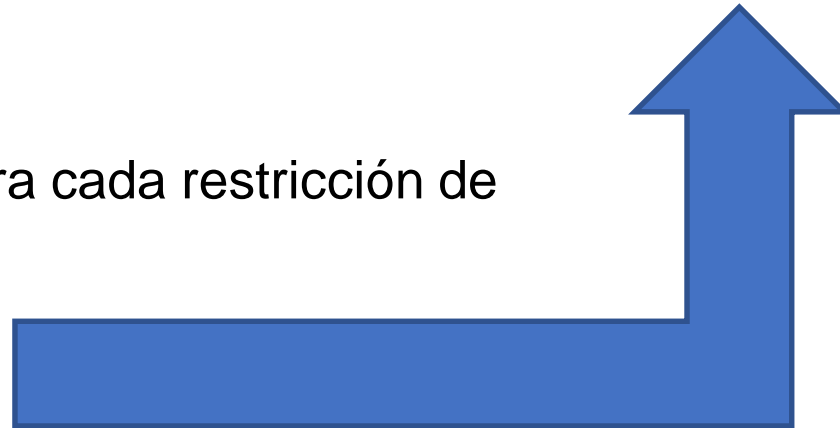


$$\begin{aligned} \min_x \quad & d^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Transformación a forma estándar:

- Introducir nuevas variables de holgura para cada restricción de desigualdad.

$$\begin{aligned} A_1 \bar{x} \geq b_1 &\Rightarrow A_1 \bar{x} - v_1 = b_1, v_1 \geq 0 \\ A_2 \bar{x} \leq b_2 &\Rightarrow A_2 \bar{x} + v_2 = b_2, v_2 \geq 0 \end{aligned}$$



- Variables complementarias: $x = [\bar{x}^T \ v_1^T \ v_2^T]^T$ y combinar igualdades.

Transformaciones a forma estandar

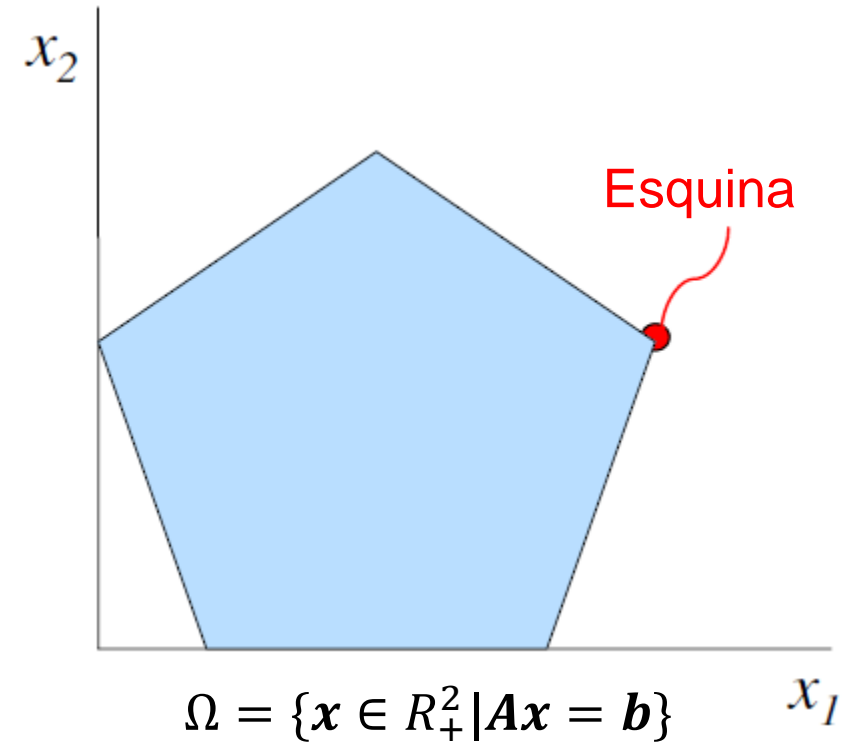
- Son dados en la **forma estándar**
$$\begin{aligned} \min_x & \mathbf{d}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t. } & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$
- El modelo tiene mas variables que restricciones de igualdad, tenemos mas grados de libertad.
- La matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tiene rango completo en la filas, $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$.
- Para ilustraciones graficas típicamente se toma

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} & d_1 x_1 + d_2 x_2 \\ \text{s.t. } & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

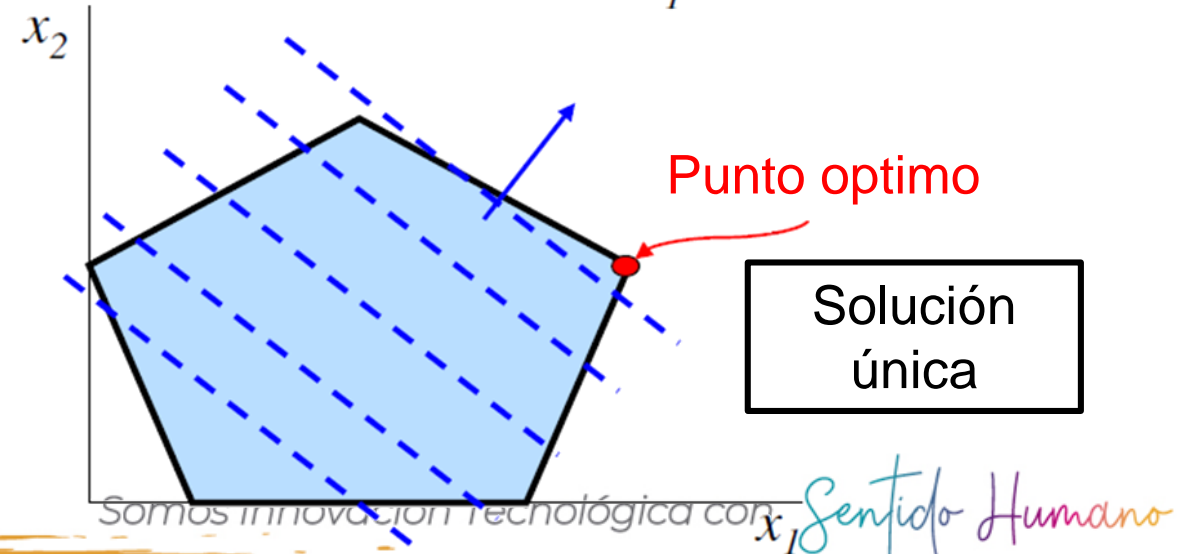
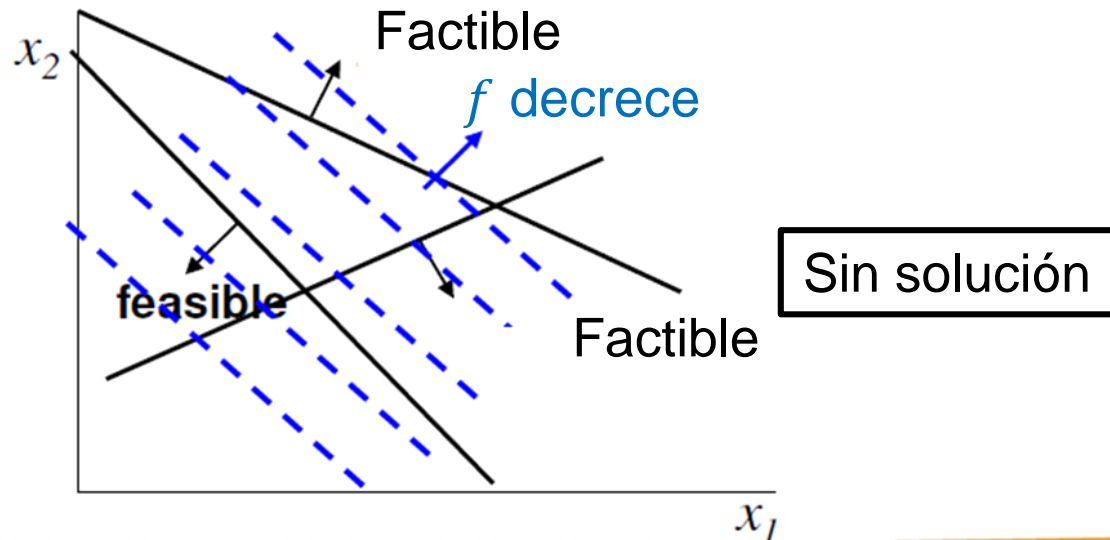
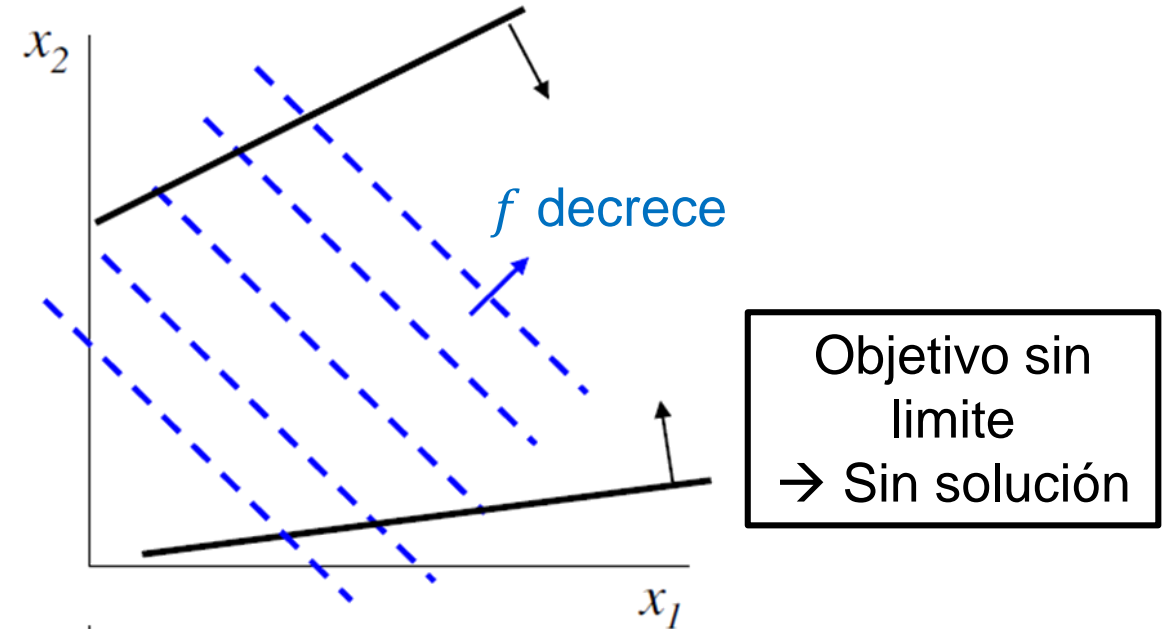
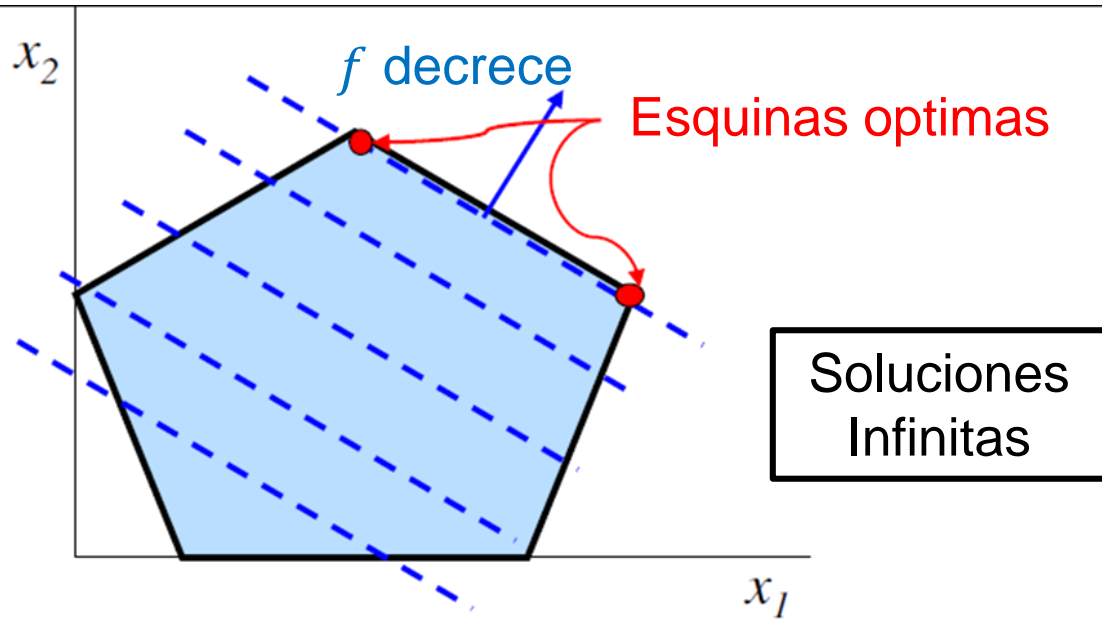
Geometría de los problemas lineales

Conjunto factible: $\Omega = \{x \in R^n | x \geq 0, Ax = b\}$

- Ω es un **politopo**, polígono multidimensional.
- Varios **bordes** expanden las **caras** del politopo.
- Una **esquina P** es la intersección de (al menos dos) restricciones activas.
- LPs son siempre **convexos**. Entonces cualquier solución local es una **solución global**.



Geometría de los problemas lineales





Institución
Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

Contenido

1. Forma estándar de LPs.
2. Transformaciones a forma estándar.
3. Método simplex.

Método simplex

Consideramos el LP en **forma estándar**

$$\begin{aligned} \min_x \quad & d^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde $A \in R^{m \times n}$ tiene rango completo, $n > m$.

Definición: x es un punto factible básico, si un conjunto índice $|T(x)| = m$, $T(x) \subset \{1, \dots, n\}$ se puede seleccionar:

- $B := [a_i]_{i \in T(x)}$ es matriz básica regular (a_i es la i -ésima columna de A).
- $x_B := [x_i]_{i \in T(x)} \geq 0$ y $x_N := [x_i]_{i \notin T(x)} = 0$.

Visualización de puntos básicos factibles

Original, sistema de ecuaciones no lineales:

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Selecciones el vector de índices y reorganice columnas:

$$\Leftrightarrow [B \quad N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b$$

$$\begin{array}{cc} \text{Columnas básicas} & \text{Columnas no-básicas} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} n_{1,m+1} & \cdots & n_{1n} \\ \vdots & & \\ n_{m,m+1} & \cdots & n_{mn} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} & \mathbf{N} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} x_{B,1} \\ \vdots \\ x_{B,m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Propiedades de los puntos básicos factibles

Con $N := [a_i]_{i \notin T(x)}$

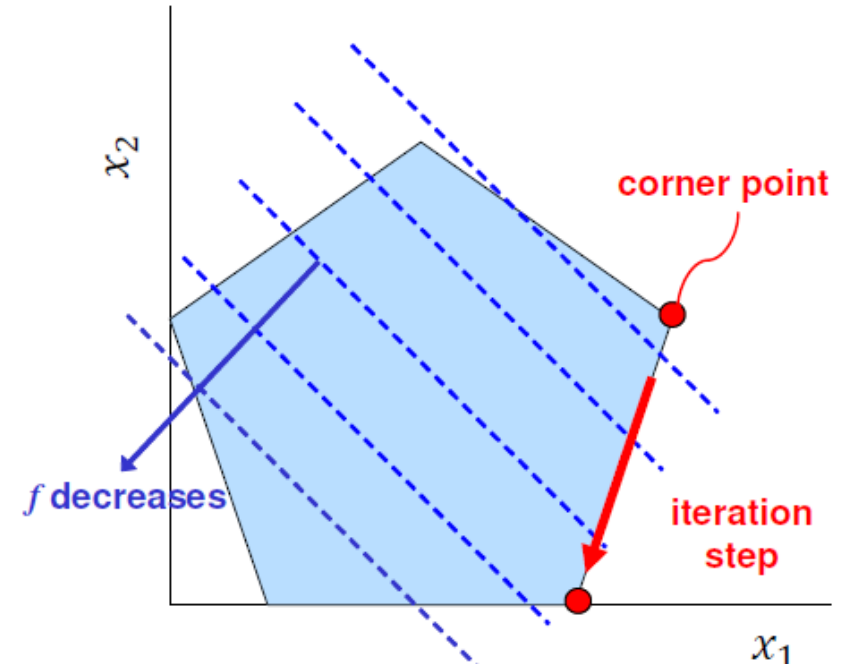
$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow Bx_B = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b$$

Proposiciones:

- Los puntos factibles básicos son los puntos esquina.
- Si hay un punto factible, entonces existe un punto factible básico.
- Si una solución óptima existe, entonces al menos el punto factible es una solución óptima.

Método simplex para LPs - Resumen

- Buscar óptimo entre los puntos factibles básicos (las esquinas del politopo).
- Empezar en una esquina factible.
- Iterar moviéndose a un punto esquina vecino.
- En cada movimiento la función objetivo decrece
 - En casos degenerados puede permanecer constante.
- Los puntos esquina vecinos del politopo corresponden a puntos básicos factibles con un índice diferente en $T(x)$.



- Que condiciones se deben sostener en el óptimo?
- Como realizar el paso iterativo?
- Como encontrar el punto básico factible inicial?

Simplex - Optimalidad

- Las condiciones KKT son suficientes para la solución global (convexo)

$$A^T \lambda_E + \lambda_I = d$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$\lambda_I \geq 0$$

$$x_i \lambda_{I,i} = 0, \forall i = \{1, \dots, n\}$$

Seleccionar
 $T(x)$



$$[B \ N]^T \lambda_E + [\lambda_{I,B}^T \ \lambda_{I,N}^T]^T = [d_B^T \ d_N^T]^T$$

$$Bx_B + Nx_N = b$$

Seleccionar $x_N = 0$, y $\lambda_{I,B} = 0$

Tarea:

Demostrar que estas expresiones se cumplen.

$$\lambda_E = [B^T]^{-1} d_B$$

$$\lambda_{I,N} = d_N - N^T \lambda_E$$

$$x_B = B^{-1} b$$

Las condiciones KKT se satisfacen si: $x_B \geq 0$ y $\lambda_{I,N} \geq 0$.

Simplex – Secuencia de iteración

Inicializar con un punto básico factible x

Realizar el siguiente ciclo:

1. Sí $\lambda_{I,N} \geq 0$ **terminar**.
2. Seleccionar un índice $q: q \notin T^k(x), \lambda_{I,q} = \min_{i \notin T^k(x)} \lambda_{I,i}$ (Note que $\lambda_{I,q} < 0$)
3. Inicializar x_q^+ , fijar todos los otros componentes de x_N^+ en cero.
4. Incrementar x_q^+ , siguiendo $Ax^+ = b$ hasta que algún x_p^+ con $p \in T(x)$ se vuelva cero.

$$Ax^+ = Bx_B^+ + a_q x_q^+ = b = Ax = Bx_B$$

$$x_B^+ = x_B - B^{-1}a_q x_q^+ \geq 0 \Rightarrow x_p^+ = 0$$

5. Reemplazar el índice p con q en $T(x)$ y actualizar $x = x^+$.
6. Volver a 1.



Institución
Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

Chequeo

Por qué esta la solución del LP en las esquinas del conjunto factible?
Cual es la idea detrás del método Simplex para LP?

Referencias

- Basado en el curso “Applied Numerical Optimization” por el profesor Alexander Mitsos.
- Nocedal J. Wright S. J. Numerical Optimization, 2nd Edition, Springer, 2006.
Chapter 13.



Institución
Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

¡Gracias!

Somos Innovación Tecnológica con *Sentido Humano*



Alcaldía de Medellín