Institución Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

Optimización

Programación Lineal – Punto Interior

Docente: Cristian Guarnizo Lemus

Somos Innovación Tecnológica con Sentido Humano

Alcaldía de Medellín

Método Primal-Dual (PDM) – Idea

- Las siguientes restricciones implican las condiciones KKT para el problema primal y dual

$$
\begin{cases}
(1)\ \ \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\lambda}_E + \boldsymbol{\lambda}_I = \boldsymbol{d} \\
(2)\ \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
(3)\ \ x_i \lambda_{I,i} = 0, i = 1,2, \dots, n \\
(4)\ \ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\lambda}_I \geq \boldsymbol{0}
\end{cases}
$$

- PDM es un método de punto interior basado en este conjunto de restricciones.
- PDM encuentra una solución del sistema (1)-(3) aplicando una variante del método de Newton.
- Ecuaciones (1) y (2) siempre se satisfacen porque son lineales.
- Las desigualdades en (4) son siempre la fuente principal de todas las complicaciones en los métodos de punto interior (IPM).

PDM – Iteración completa

- Definimos la función

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}_E,\boldsymbol{\lambda}_I) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\lambda}_E + \boldsymbol{\lambda}_I - \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{\Lambda}_I\boldsymbol{e} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

- Donde $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}_I = \begin{bmatrix} \lambda_{I,1} & & & \\ & \lambda_{I,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{I,n} \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

- PDM emplea el método de Newton en $\boldsymbol{F}$ en el punto actual para encontrar la dirección de búsqueda $(\delta\boldsymbol{x}, \delta\boldsymbol{\lambda}_E, \delta\boldsymbol{\lambda}_I)$.

$$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{\lambda}_E^{(k)},\boldsymbol{\lambda}_I^{(k)}\right)\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{x} \\ \delta\boldsymbol{\lambda}_E \\ \delta\boldsymbol{\lambda}_I \end{bmatrix} = -\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{\lambda}_E^{(k)},\boldsymbol{\lambda}_I^{(k)}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^T & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\Lambda}_I & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{x} \\ \delta\boldsymbol{\lambda}_E \\ \delta\boldsymbol{\lambda}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{X}\boldsymbol{\Lambda}_I\boldsymbol{e} \end{bmatrix}$$

- Donde $J(\delta\boldsymbol{x}^{(k)}, \delta\boldsymbol{\lambda}_E^{(k)}, \delta\boldsymbol{\lambda}_I^{(k)})$ es la matriz Jacobiana de $\boldsymbol{F}$.

PDM – Paso actual

- Un paso completo violaría los limites ($\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda}_I \geq \mathbf{0}$).
  Entonces, se selecciona un paso de longitud $\alpha_k \in (0,1]$

$$\left(\boldsymbol{x}^{(k+1)}, \boldsymbol{\lambda}_E^{(k+1)}, \boldsymbol{\lambda}_I^{(k+1)}\right) = \left(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_E^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_I^{(k)}\right) + \alpha_k(\delta\boldsymbol{x}, \delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{E}}, \delta\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{I}})$$

- Tal que: $\boldsymbol{x}^{(k)} > \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\lambda}_I^{(k)} > \mathbf{0}$

- Las desigualdades se satisfacen estrictamente, entonces "punto interior".

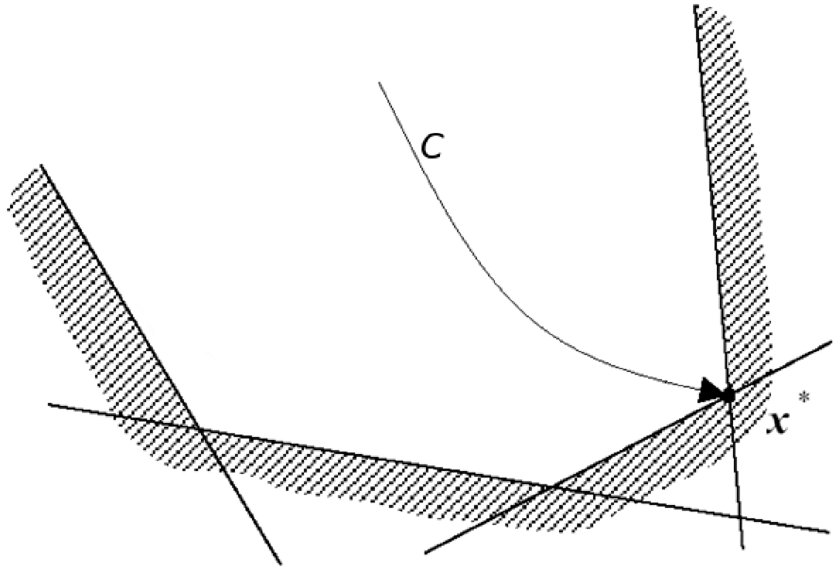
- La longitud del paso α_k calculado de esta manera, a menudo es muy pequeña.

- Para alcanzar la convergencia, se modifica el método de Newton entre el primal y el dual.

PDM – Paso actual

- Cada punto $(x_\tau, \boldsymbol{\lambda}_{E,\tau}, \boldsymbol{\lambda}_{I,\tau})$ sobre el camino central C soluciona

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\lambda}_E + \boldsymbol{\lambda}_I = \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ x_i \lambda_{I,i} = \tau, i = 1,2, \dots, n \\ \boldsymbol{x}_\tau > 0, \boldsymbol{\lambda}_{I,\tau} > 0 \end{cases}$$



- Usamos la notación compacta

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_{E,\tau}, \boldsymbol{\lambda}_{I,\tau}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \tau \boldsymbol{e} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_\tau > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\lambda}_{I,\tau} > \boldsymbol{0} \qquad C = \{(\boldsymbol{x}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_{E,\tau}, \boldsymbol{\lambda}_{I,\tau}) \mid \tau > 0\}$$

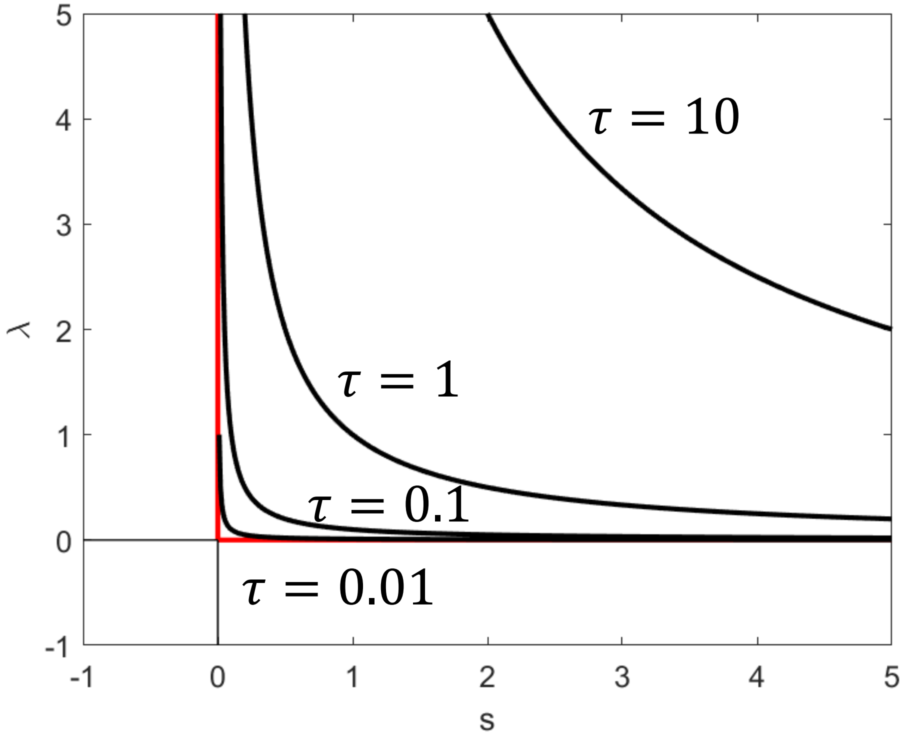
- Entre mas pequeño τ, mejor la aproximación a las condiciones de optimalidad.

Interpretación grafica del Punto interior

- La condición complementaria $x_i \lambda_{I,i} = 0$ no es suave (esquina).

- La aproximación suave $x_i \lambda_{I,i} = \tau$ se acerca a la forma de la esquina para valores pequeños de τ.

- Las soluciones están en el interior de las restricciones de desigualdad, donde $\boldsymbol{x}_\tau > 0, \boldsymbol{\lambda}_\tau > 0$.



Interpretación grafica del Punto interior

- En vez de pasos de Newton, los puntos del PDM con $\tau > 0$ → son pasos mas grandes.
- Para una implementación técnica, se introducen los parámetros σ y μ, con $\tau = \sigma\mu$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A}^T & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Lambda}_I & \mathbf{0} & \boldsymbol{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{x} \\ \delta \boldsymbol{\lambda}_E \\ \delta \boldsymbol{\lambda}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{X}\boldsymbol{\Lambda}_I \boldsymbol{e} + \sigma\mu \boldsymbol{e} \end{bmatrix}$$

- Para $\sigma = 0$, tenemos el paso de Newton estándar. Con $\sigma = 1$ se toma un punto del camino central. Y μ mide el promedio de la violación de las restricciones no lineales.

$$\sigma \in [0,1], \qquad \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_{I,i} = \frac{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{\lambda}_I}{n}$$

Método Primal-Dual - Algoritmo

- Dado un punto inicial factible $(\boldsymbol{x}^0 > 0, \boldsymbol{\lambda}_E^0, \boldsymbol{\lambda}_I^0 > 0)$.

  for $k = 0,1,\ldots$

  – Solve
$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A}^T & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Lambda}_I & \mathbf{0} & \boldsymbol{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{x} \\ \delta \boldsymbol{\lambda}_E \\ \delta \boldsymbol{\lambda}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{X}\boldsymbol{\Lambda}_I \boldsymbol{e} + \sigma\mu \boldsymbol{e} \end{bmatrix}, \ \sigma^{(k)} \in [0,1],\ \mu^{(k)} = \frac{\boldsymbol{x}^{(k)T} \boldsymbol{\lambda}_I^{(k)}}{n}$$

  – Set
$$\left(\boldsymbol{x}^{(k+1)}, \boldsymbol{\lambda}_E^{(k+1)}, \boldsymbol{\lambda}_I^{(k+1)}\right) = \left(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_E^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_I^{(k)}\right) + \alpha_k(\delta \boldsymbol{x}, \delta \boldsymbol{\lambda}_E, \delta \boldsymbol{\lambda}_I)$$

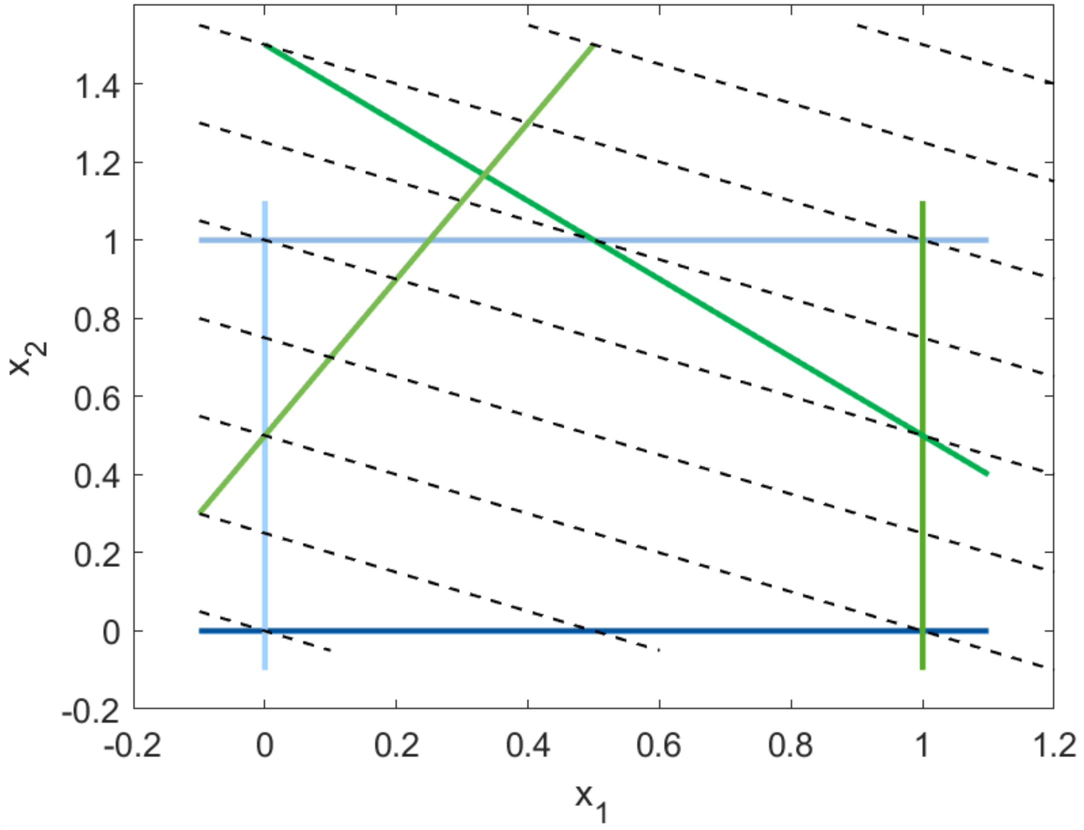
  Calcular α_k tal que $\boldsymbol{x}^{(k+1)} > \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\lambda}_I^{(k+1)} > \mathbf{0}$.

- La selección de los parámetros es importante.
- Es difícil encontrar una solución inicial estrictamente factible.
- Debido que el método funciona con las condiciones de optimalidad, puede ser visto como un método indirecto.

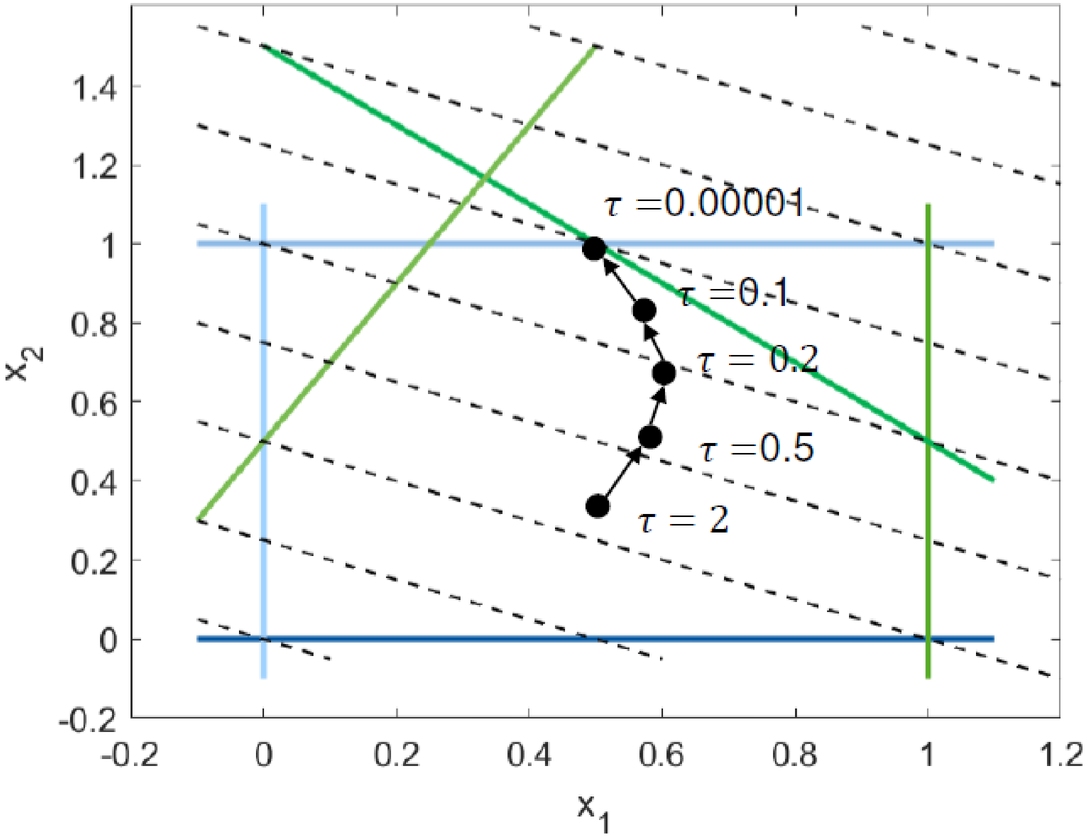
Comparación

$$\min_{x_1,x_2} \quad -x_1 - 2x_2$$
$$\text{s. t.} \quad x_1 + x_2 \leq 1.5$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 0.5$$
$$0 \leq x_1, x_2 \leq 1$$

Método Simplex



Método del punto interior



Referencias

- Basado en el curso “Applied Numerical Optimization” por el profesor Alexander Mitsos.
- Nocedal J. Wright S. J. Numerical Optimization, 2nd Edition, Springer, 2006. Chapter 13.

Institución
Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

¡Gracias!

Somos Innovación Tecnológica con Sentido Humano

Alcaldía de Medellín