Institución Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

Optimización

Programación Entera-Mixta

Docente: Cristian Guarnizo Lemus

Contenido

1. Programas Enteros (IP).
2. Sin convexidad, restricciones y relajaciones.

Problemas Enteros-Mixtos

Formulación semi-general:

$$\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{d}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y}$$
$$\text{s.t. } c_i(\boldsymbol{x}) = 0, \forall i \in E$$
$$c_i(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a}_{y,i}{}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y} \leq 0, \forall i \in I$$

Formulación mas general:

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$
$$\text{s.t. } c_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0, \forall i \in E$$
$$c_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq 0, \forall i \in I$$

$\boldsymbol{x} \in R^{n_x}$, variables continuas

$\boldsymbol{y} \in Y$, variables discretas (p.e. $\boldsymbol{y} \in \{0,1\}^{n_y}$)

- Clasificación:
  - MIP : Mixed-Integer Programming (tipicamente significa lineal)
  - MINLP: Mixed-Integer NLP.
  - IP: Integer Programming (Programacion entera).
  - BIP: Binary Integer Programming (tambien programacion “0-1”)

Ejemplo: Arreglo fotovoltaico

Una astronave requiere reparar su paneles fotovoltaicos. Existen dos tipos de unidades reparadoras, A y B. La unidad A tiene una masa de 17 kg y ocupa 32 m3, mientras que la unidad B tiene una masa de 32 kg y ocupa 15 m3. La nave solo puede acomodar hasta 136 kg y hasta 120 m3.

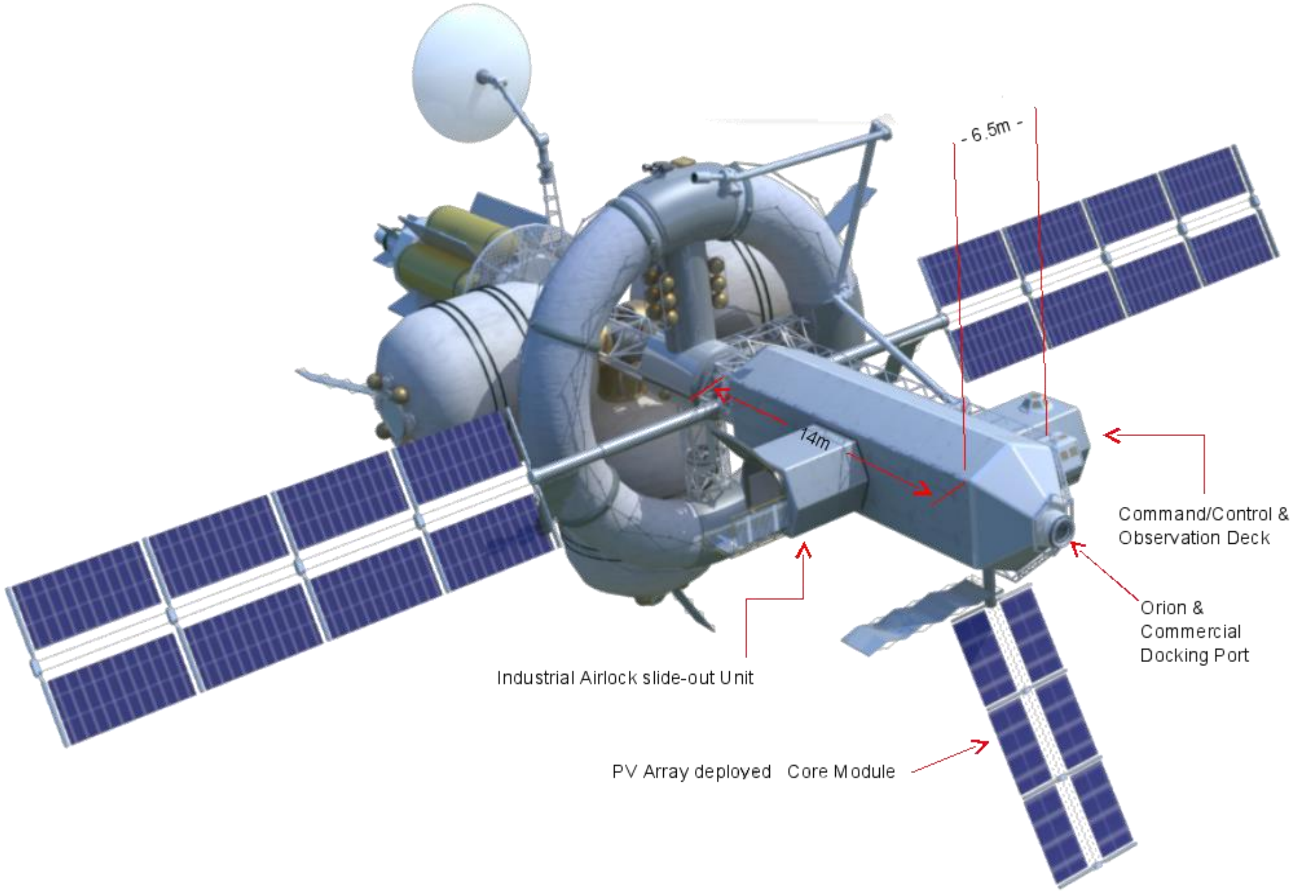
$$17x_1 + 32x_2 \leq 136$$

$$32x_1 + 15x_2 \leq 120$$

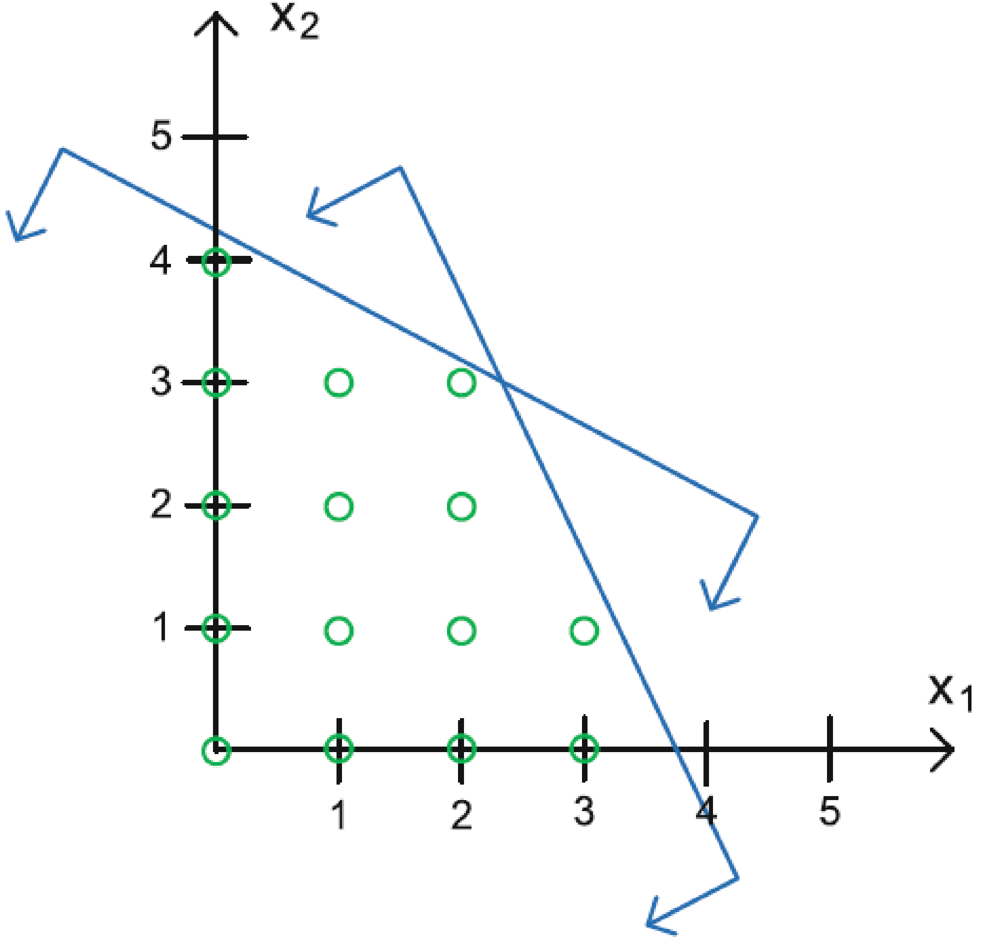
Cuantas unidades de cada tipo deben ser transportadas para maximizar el numero total de unidades reparadoras enviadas a la astronave?

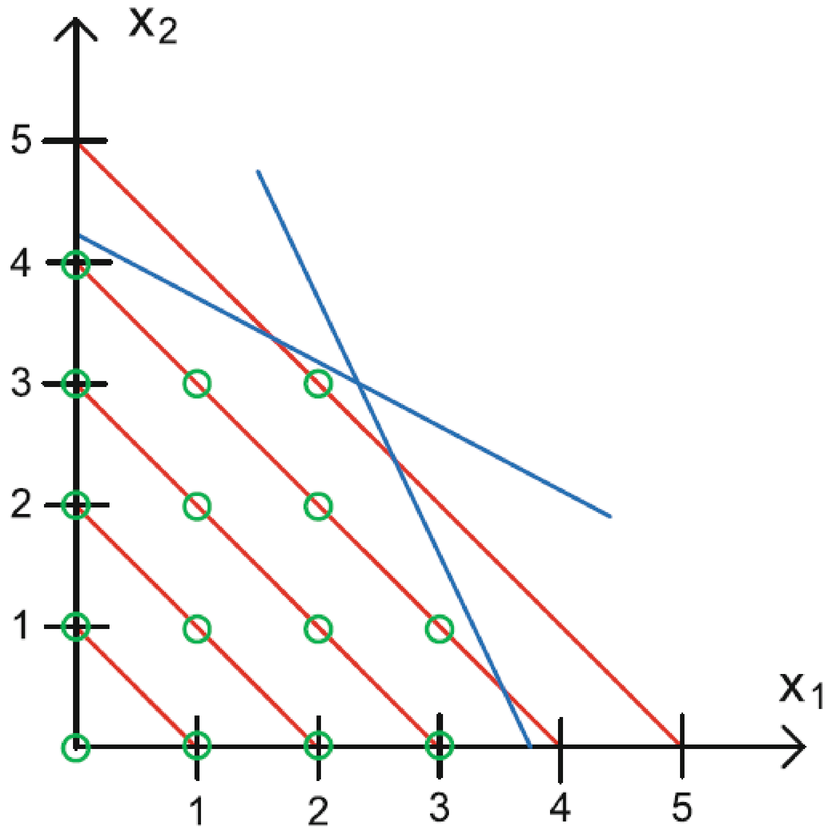
$$\max_{x_1,x_2} x_1 + x_2$$

Con $x_1, x_2 \geq 0$. Y $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$.



Ejemplo: Arreglo fotovoltaico





0-1 MILP

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \ & \boldsymbol{d}_x^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}_y^T \boldsymbol{y} \\
\text{s.t.} \ & \boldsymbol{a}_{x,i}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}_{y,i}^T \boldsymbol{y} = b_i, \forall\, i \in \mathrm{E} \\
& \boldsymbol{a}_{x,i}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}_{y,i}^T \boldsymbol{y} = b_i \leq 0, \forall\, i \in I \\
& \boldsymbol{x} \in R^{n_x} \\
& \boldsymbol{y} \in \{0,1\}^{n_y}
\end{aligned}
$$

En este caso, las variables enteras o discretas están representadas por 0 o 1. Puede ser considerada en casos donde esta variables representen la activación o desactivación de una variable en un proceso.

Contenido

1. Programas Enteros (IP).
2. Sin convexidad, restricciones y relajaciones.

Problemas de optimización entera-mixta

Formulación semi-general:

$$\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{d}^{\top}\boldsymbol{y}$$

$$\text{s.t. } c_i(\boldsymbol{x}) = 0, \forall i \in E$$

$$c_i(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a}_{y,i}{}^{\top}\boldsymbol{y} \leq 0, \forall i \in I$$

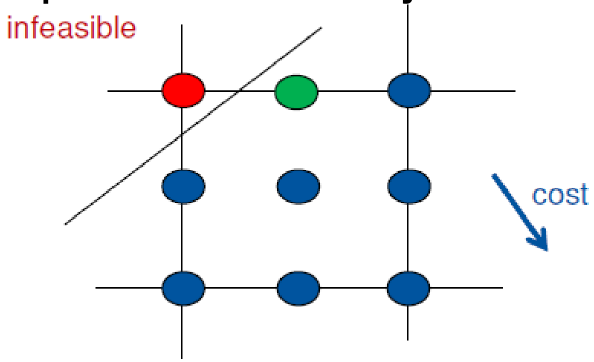
$\boldsymbol{x} \in R^{n_x}$, variables continuas

$\boldsymbol{y} \in Y$, variables discretas (p.e. $\boldsymbol{y} \in \{0,1\}^{n_y}$)

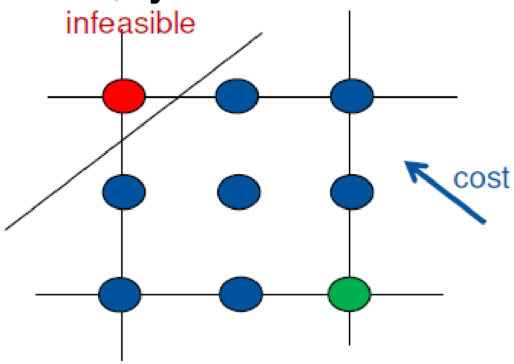
Programa enteros no son convexos

- Restriccion de integralidad es no convexa $\boldsymbol{y} \in \{0,1\}^{n_y}$
  - Recordar la definición de un conjunto convexo.
- Las soluciones optimas de programación entera y sus relajaciones continuas $\boldsymbol{y} \in [0,1]^{n_y}$ pueden o no coincidir.
  - Depende del conjunto de factibilidad y la función objetivo.
  - Ejemplo: $\boldsymbol{y} \in \{0,1,2\}^2$ con restriciones lineales y función objetivo lineal.

Solución entera optima no es la misma que la optima de la relajación continua.



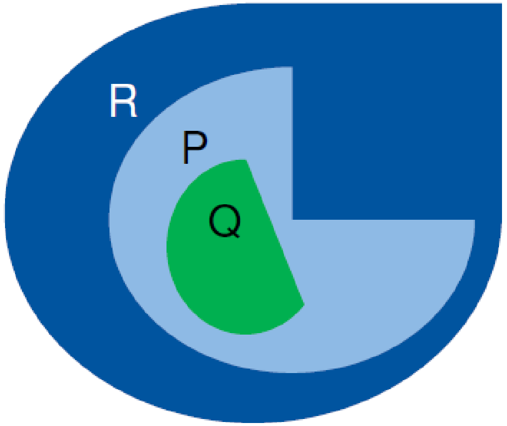
Solución entera optima igual que la optima de la relajación continua.

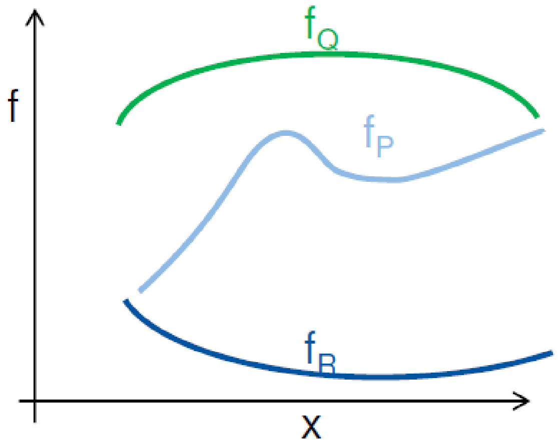


- Distintion en la literatura: Funciones lineales, funciones cuadráticas convexas, cuadráticas no convexas, no lineal convexo, no convexo.
  - A veces se puede encontrar “convex mixed-integer program”.

Limitaciones, Relajaciones y Aproximaciones

- Considere el problema P, recordar que Ω es el conjunto factible y f la función objetivo.
- (R) es una limitación de (P) si $\Omega_R \supset \Omega_P$ y $f_R(\boldsymbol{x}) \leq f_P(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega_P$.
  - Una solución global de (R) nos da un limite inferior (lower bound) de P.
  - p.e. $y \in \{0,1\}$ puede ser relajada como $\boldsymbol{y} \in [0,1]$
  - p.e. linelización de una función convexa.
- (Q) es una limitación de (P) si $\Omega_Q \subset \Omega_P$ y $f_Q(\boldsymbol{x}) \geq f_P(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega_Q$.
  - Cualquier conjunto factible (p.e. una solución local) de Q entrega un limite superior a P.
  - p.e. $y \in \{0,1\}$ se puede limitar o restringir a $y_k = 0$.
- Una aproximación puede ser una relajación, limitación, o ninguna (p.e. linealizacion de una función no convexa).





Ejemplos PyOMO

https://github.com/Pyomo/PyomoGallery/wiki

Referencias

- Basado en el curso “Applied Numerical Optimization” por el profesor Alexander Mitsos.
- Nocedal J. Wright S. J. Numerical Optimization, 2nd Edition, Springer, 2006. Chapter 13.

ITM | Institución Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

¡Gracias!

Somos Innovación Tecnológica con Sentido Humano

Alcaldía de Medellín