



Institución
Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

Optimización

Técnicas para NLPs

Docente: Cristian Guarnizo Lemus

Somos Innovación Tecnológica con *Sentido Humano*



Alcaldía de Medellín



Contenido

1. Métodos de Penalización y de Barrera.
2. Serie de problemas mas simples con Restricciones (LCL, SQP)

Métodos de Penalización y Barrera

- Idea: reemplazar el problema de restricciones por una secuencia de problemas de optimización sin restricciones. Como remover las restricciones?
- **Método de penalización cuadrático (QPM)**: reemplazar las restricciones adicionando una penalización cuadrático en la función objetivo.
 - Aproximación desde los puntos infactibles.
- **Método del Langrangiano Aumentado (ALM)**: Mejora de QPM que evita los mal-condicionamientos por medio de la estimación de los parámetros de Lagrange.
- **Método de Log-Barrier (LBM)**: usar la barrera del logaritmo para forzar una estricta satisfacción de las desigualdades.
 - Aproximación desde los puntos factibles.

Método de Barrera logarítmica (LBM): desigualdades

$$\min_{x \in R^n} f(x)$$

$$\text{s.t. } c_i(x) \leq 0, i \in I$$

- Reemplazar la restricciones por una barrera de logaritmo en la función objetivo:

$$P(x; \mu) = f(x) - \mu \sum_{i \in I} \log[-c_i(x)]$$

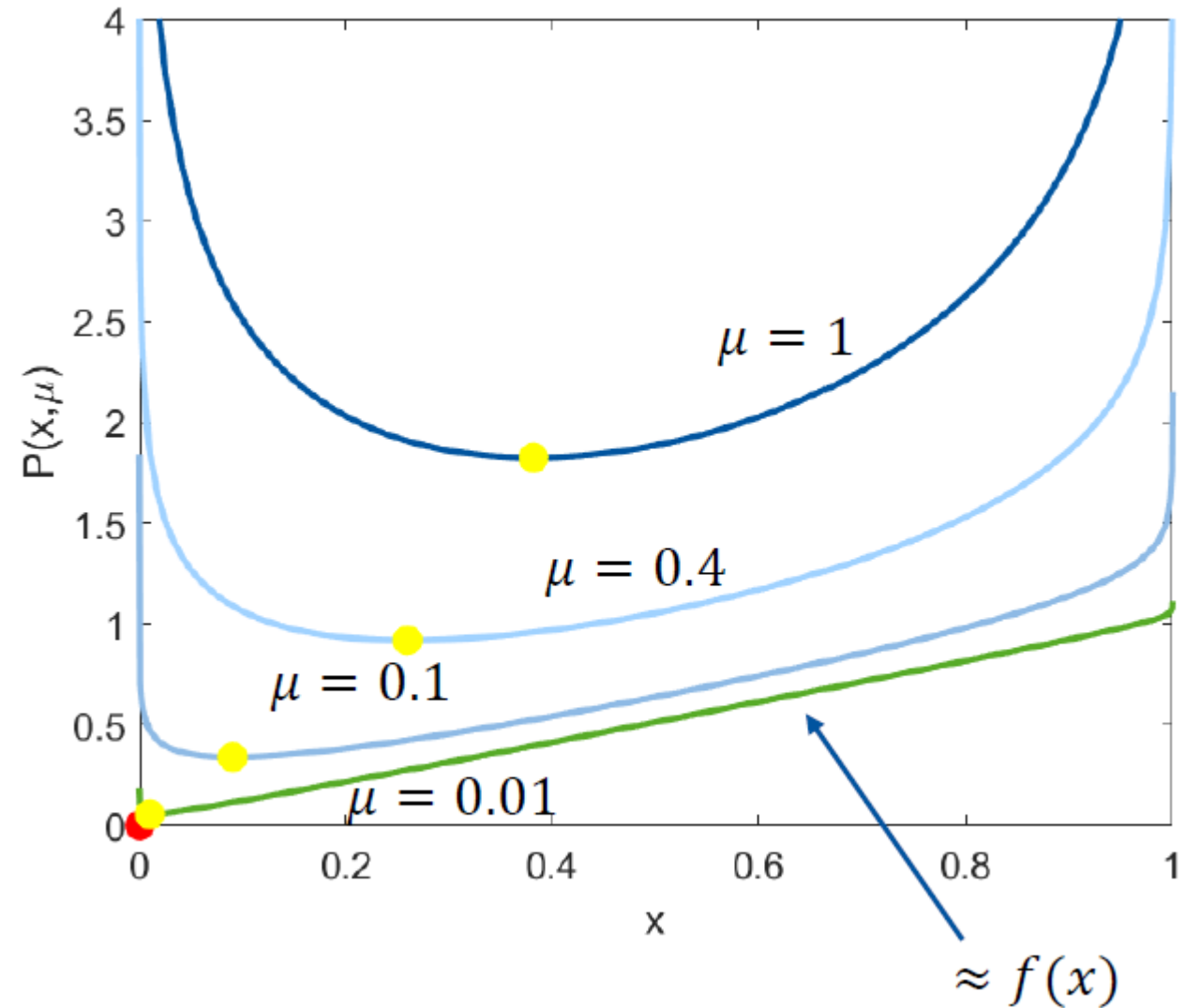
con parámetro de barrera $\mu > 0$.

- La barrera impone **iteraciones estrictamente factibles**
 - $P(x; \mu) \rightarrow \infty$ para $0 > c_i(x) \rightarrow 0$. Entonces, para $\mu > 0$ se impone $c(x) < 0$.
- Similar a QPM, solucionar una secuencia de problemas sin restricción
 - Solucionar en una iteración el inicio de la siguiente iteración.
 - Mientras $\mu \rightarrow 0$, las aproximaciones de x se vuelven mejores.

La barrera logarítmica LogBar

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}} \quad & x \\ \text{s.t. } \quad & x \geq 0 \\ & x \leq 1 \end{aligned}$$

$$P(x; \mu) = x - \mu (\log[x] + \log[1 - x])$$



Barrera logarítmica (LBM): Igualdades y Desigualdades

Problema NLP general: $\min_{x \in R^n} f(x)$

$$\text{s.t. } c_i(x) = 0, i \in E$$

$$c_i(x) \leq 0, i \in I$$

- Reemplazar las restricciones de **desigualdad** por una **barrera logarítmica**
- Reemplazar las restricciones de **igualdad** por una **penalización cuadrática**

$$B(x; \mu) = f(x) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i \in E} [c_i(x)]^2 - \mu \sum_{i \in I} \log[-c_i(x)]$$

- Similar al caso de las desigualdades, solucionamos con una secuencia de problemas sin restricciones.
- Método de punto interior con respecto a: $c_i(x^{(k)}) < 0, i \in I$
- Violación de las restricciones de igualdad: $c_i(x^{(k)}) \neq 0, i \in E$
 - Las igualdades no tienen interior.



Chequeo

Cual es la idea principal en los métodos de barrera?

Cual es la diferencia entre los métodos de penalización cuadrático y el método de barrera?



Contenido

1. Métodos de Penalización y de Barrera.
2. Serie de problemas mas simples con Restricciones (LCL, SQP)

Problema de optimización no-lineal (NLP)

Formulación general:

$$\min_{x \in D} f(x)$$

$$\text{s.t. } c_i(x) = 0, i \in E$$

$$c_i(x) \leq 0, i \in I$$

$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in D$ un vector (punto n -dimensional)

D conjunto anfiterión

$f: D \rightarrow R$ función objetivo

$c_i: D \rightarrow R$ funciones de restricción $\forall i \in E \cup I$

E el conjunto índice de las restricciones de igualdad

I el conjunto índice de las restricciones de desigualdad

- Tres estrategias de solución:
 - Eliminación de variables (convertir a un problema sin restricciones).
 - Aproximación como una serie de problemas sin restricción.
 - **Aproximación como una serie de problemas mas simples con restricciones.**

Método Lagrangiano con restricciones lineales

El método del Lagrangiano con restricciones lineales (LCL) es una modificación del método del Lagrangiano Aumentado.

- En cada paso, **se linealizan** las restricciones.

- Para el problema $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$
s.t. $c_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i \in E$

en la iteración k resolver $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} F^{(k)}(\mathbf{x})$

$$\text{s.t. } \nabla c_i(\mathbf{x}^{(k)})^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) + c_i(\mathbf{x}^{(k)}) = 0, \quad i \in E$$

- Para $F^{(k)}$, a menudo se selecciona el Lagrangiano Aumentado.

$$F^{(k)}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i \in E} \lambda_i^{(k)} \bar{c}_i^{(k)}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i \in E} [\bar{c}_i^{(k)}(\mathbf{x})]^2$$

$$\bar{c}_i^{(k)}(\mathbf{x}) = c_i(\mathbf{x}) - c_i(\mathbf{x}^{(k)}) - \nabla c_i(\mathbf{x}^{(k)})^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)})$$

Programación Secuencial Cuadrática (SQP)

- SQP provee la base para algunos buenos códigos de optimización.
- Se considera el siguiente problema de optimización

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$
$$\text{s.t. } c_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i \in E$$

- **Idea principal:** solucionar una secuencia $\{k\}$ de QPs, donde se aproxima el NLP en la iteración $\mathbf{x}^{(k)}$ por una QP.
- La forma mas fácil: Aproximación por series de Taylor

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{p} + (\nabla f(\mathbf{x}^{(k)}))^T \mathbf{p}$$

$$\text{s.t. } \left(\nabla \mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^T \mathbf{p} + \mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{0}$$

- Se puede interpretar como el método de Newton para solucionar las condiciones KKT.

Algoritmo Básico SQP

Puntos importantes **no** discutidos:

- Aproximación de la matriz Hessiana (p.e., actualización BFGS, en métodos quasi Newtons).
- Solución de las ecuaciones Newton-Lagrange en cada paso del QP.
- Criterio de parada.
- Inclusión de desigualdades.

Algoritmo Básico:

- Seleccionar $\mathbf{x}^{(0)}$.
- Para $k = 1, 2, \dots$
 - Calcular $f^{(k)} = f(\mathbf{x}^{(k+1)})$, $\nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)})$, $\mathbf{c}^{(k)} = \mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k-1)})$, $\mathbf{A}^{(k)} = \nabla \mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k-1)})$, actualizar $\mathbf{B}^{(k)}$.
 - Solucionar el QP para \mathbf{p} .
 - $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{p}$.
 - Si las condiciones de optimalidad se satisfacen, **PARAR**.



Chequeo

Cuales soluciones existen para solucionar problemas generales NLP?

Cual es la idea principal del método SQP? Cuales problemas se deben resolver en cada iteración del método SQP?



Institución
Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

¡Gracias!

Somos Innovación Tecnológica con *Sentido Humano*



Alcaldía de Medellín