Institución Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

Algebra Lineal
Vectores y Matrices

Docente: Cristian Guarnizo-Lemus
Correo: cristianguarnizo4133@correo.itm.edu.co

Contenido

1. Vector: definición, propiedades.
2. Producto Interno y Externo
3. Bases y span
4. Prouducto Matriz-Vector
5. Valores y Vectores Propios

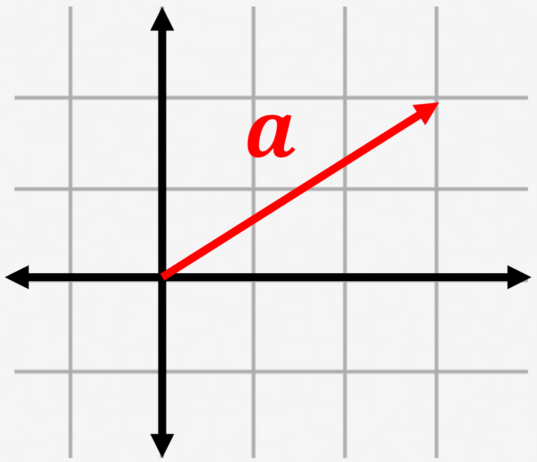
Contenido

1. Vector: definición, propiedades.
2. Producto Escalar
3. Bases y span
4. Prouducto Matriz-Vector
5. Valores y Vectores Propios

1. Vector - Definición

Un vector en $\mathbb{R}^N$ se describe como un tupla de N -elementos

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Donde v_k es un "escalar" y se denomina la k-ésima componente del vector $\boldsymbol{v}$.

1. Vector - Tipos

Dentro del algebra lineal los vectores pueden ser de tipo fila o columna:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}^{\top} = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_N]$$

Nx 1 1xN

Por defecto asumimos de ahora en adelante que los vectores están en forma de columna.

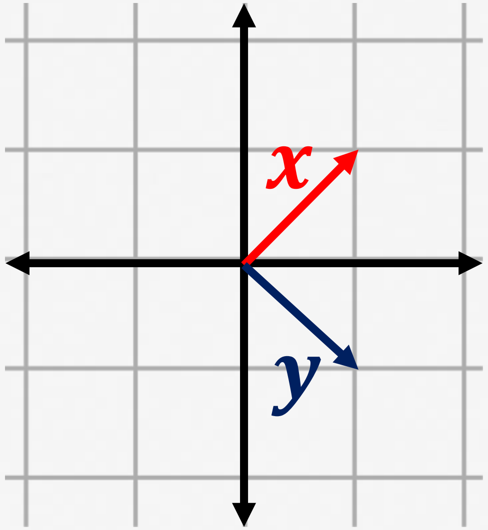
1. Vector - Propiedades

Los vectores hacen parte de un espacio vectorial V y cumplen con las siguientes propiedades:

- $a\boldsymbol{x} \in V$
- $a(b\boldsymbol{x}) = ab\boldsymbol{x}$
- $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$
- $a(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}$
- $(a + b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}$

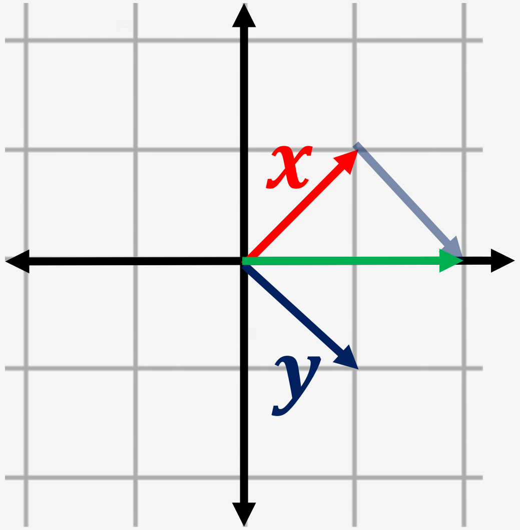
1. Vector - Suma

Suma de vectores



$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

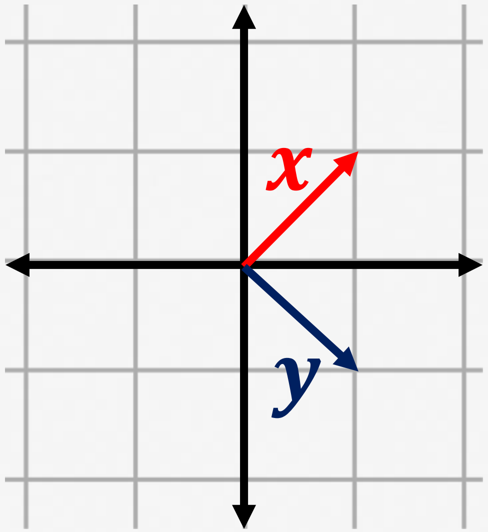
$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$$



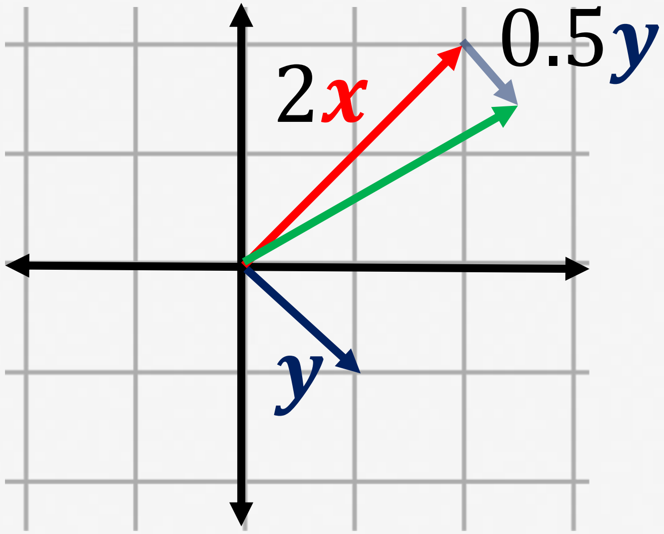
$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$$

1. Vector – Combinación Lineal

$\mathbf{z} = a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$, donde a y b son escalares.



$$\mathbf{z} = 2\mathbf{x} + 0.5\mathbf{y}$$



$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$a = 2, b = 0.5$

$$\mathbf{z} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.5\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

1. Vector – Operaciones

Fuera de la combinación lineal de vectores tambien podemos realizar con ellos:

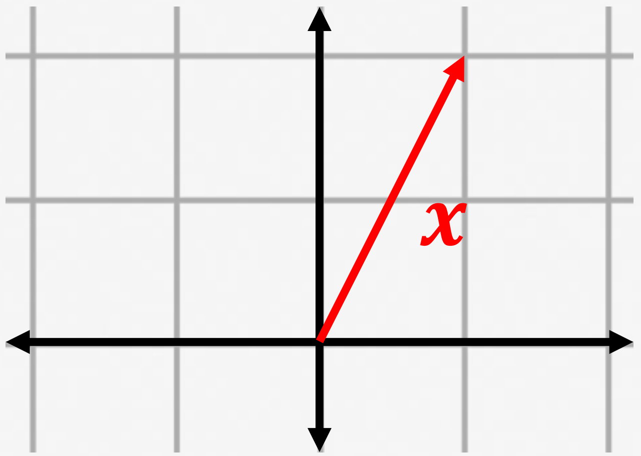
- Calcular la norma o longitud de un vector.
- Volverlos unitarios.
- Proyecciones de un vector a otro (producto punto).
- Generar un *span*.

1. Vector – Norma

La norma de un vector representa su longitud y se calcula como:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} x_k^2}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

1. Vector unitario

Un vector es unitario si su norma es la unidad:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\hat{\boldsymbol{x}}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k^2} = 1$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Contenido

1. Vector: definición, propiedades.
2. Producto Interno y Externo
3. Bases y span
4. Prouducto Matriz-Vector
5. Valores y Vectores Propios

2. Producto interno

- El producto interno entre 2 vectores esta definido como,

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_N y_N = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_N \end{bmatrix}}_{1 \times N} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_{N \times 1}$$

y su resultado es un escalar.

- El producto interno también es denotado como $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$.
- También es llamada producto escalar, punto o interior.
- Se puede observar,

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{N} x_k^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2$$

2. Producto interno - Propiedades

- Conmutativa

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$$

- Distributiva

$$\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}$$

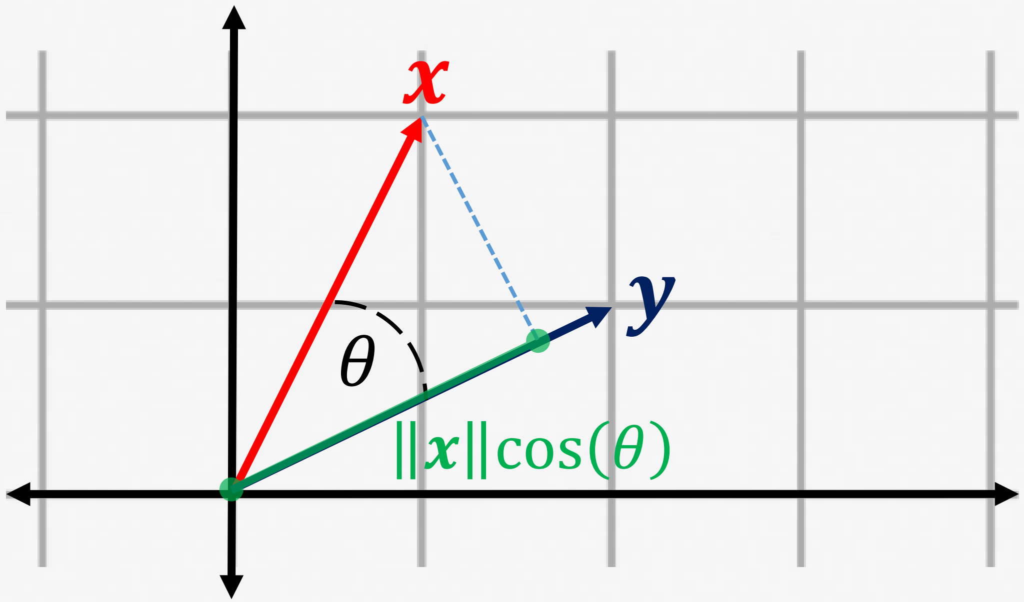
- Asociativa

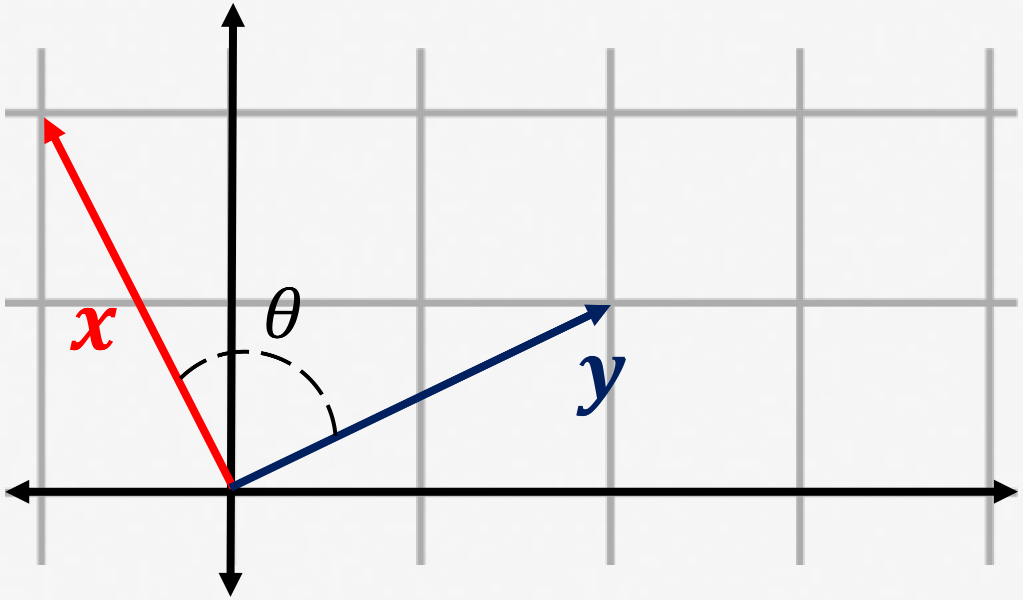
$$a(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = (a\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot (a\boldsymbol{y})$$

2. Producto interno

- Significado geométrico,

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{k=1}^{N}x_k y_k=\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\cos(\theta)$$

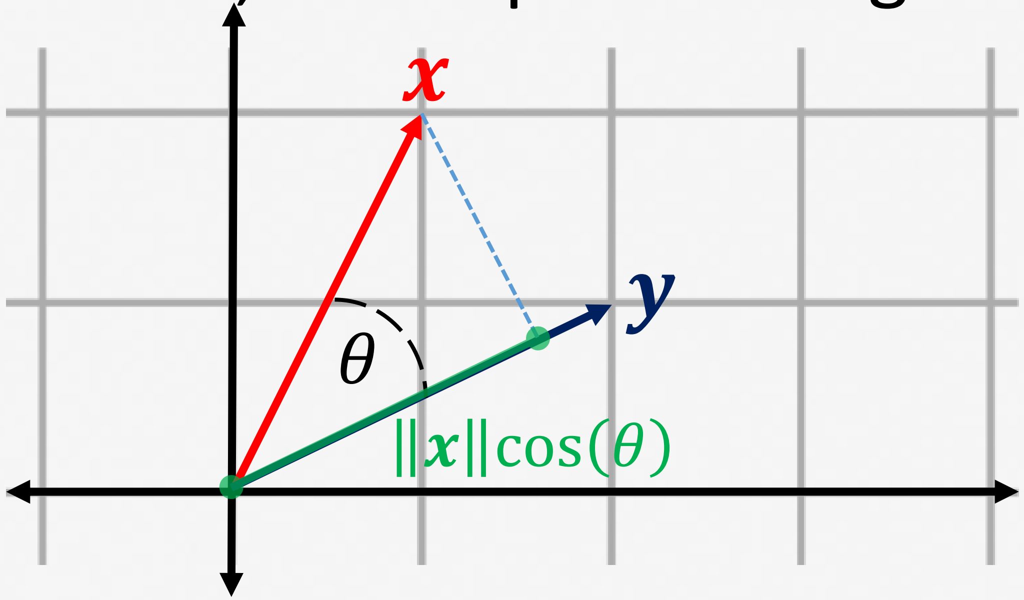




$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

2. Producto interno

- Ejemplo: Se requiere saber cuanto de un vector esta contenido en otro, sin emplear el ángulo entre ellos?



$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\cos(\theta)$$

$$\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} = \cos(\theta)$$

$$\|\boldsymbol{x}\|\cos(\theta) = \|\boldsymbol{x}\|\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|} = \boldsymbol{x}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|}\right)$$
$$= \boldsymbol{x}\cdot\widehat{\boldsymbol{y}}$$

2. Producto Externo

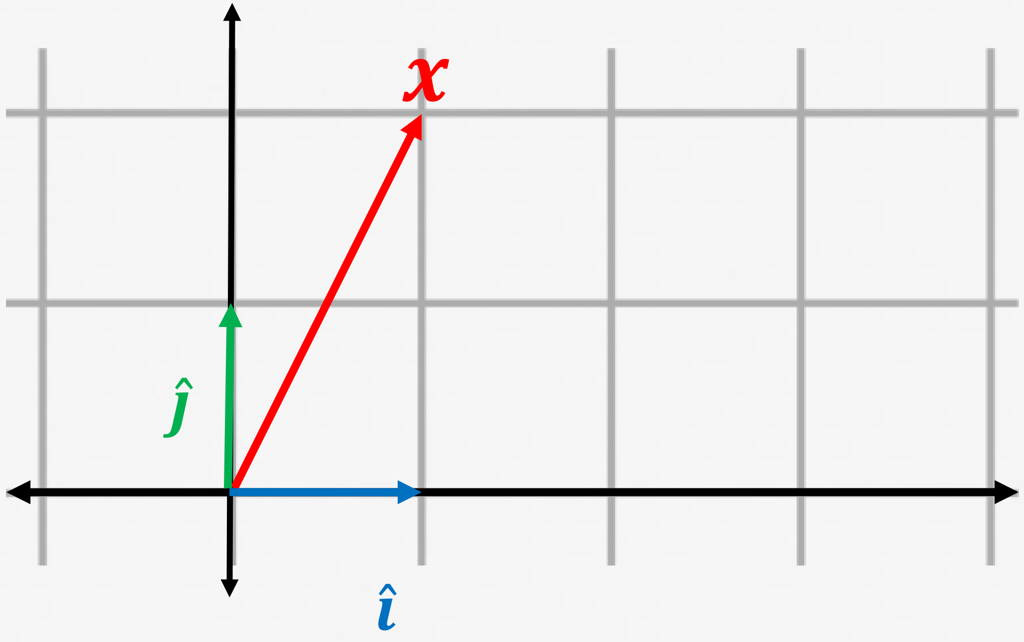
$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\top} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}_{N \times 1} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_N \end{bmatrix}_{1 \times N} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N y_1 & \cdots & x_N y_N \end{bmatrix}_{N \times N}$$

Contenido

1. Vector: definición, propiedades.
2. Producto Interno y Externo
3. Bases y span
4. Prouducto Matriz-Vector
5. Valores y Vectores Propios

3. Bases

- A partir de la combinación lineal de las bases podemos describir cualquier vector. Si la base es ortogonal en cada dirección como la canónica

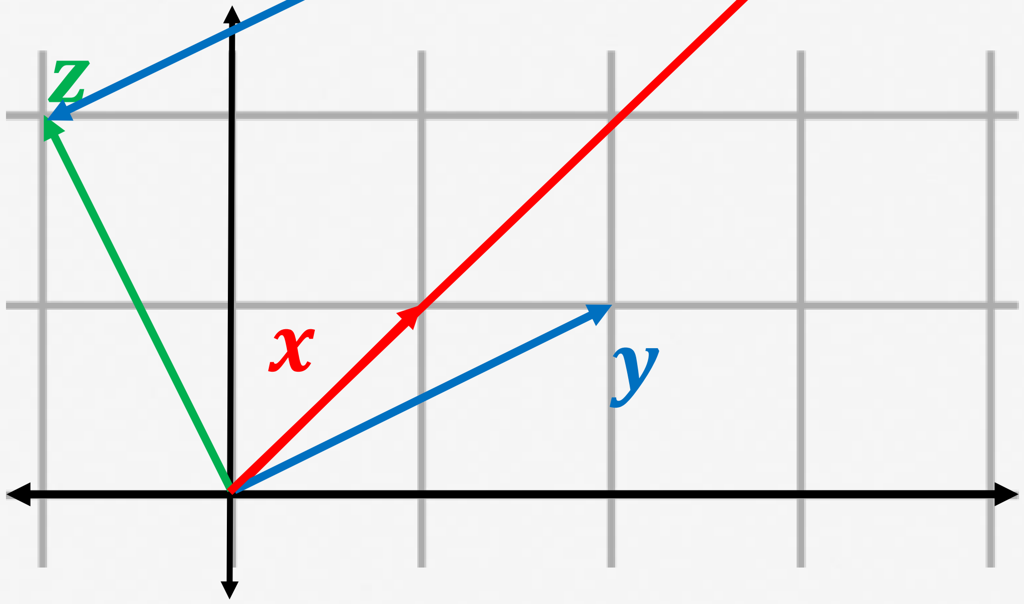


$$\hat{\boldsymbol{\imath}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\boldsymbol{j}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = 1\hat{\boldsymbol{\imath}} + 2\hat{\boldsymbol{j}}$$

3. Combinación lineal

- Suponga que se requiere describir un vector $\boldsymbol{z}$ a partir de los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$



$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

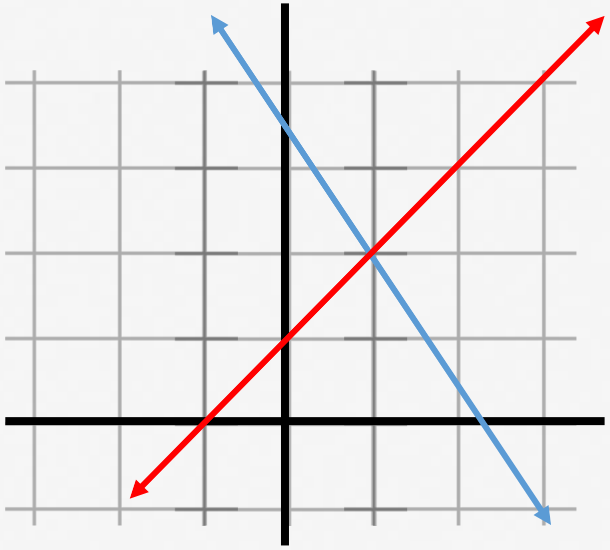
$$\boldsymbol{z} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a = 5, b = -3$$

3. Sistemas de ecuaciones

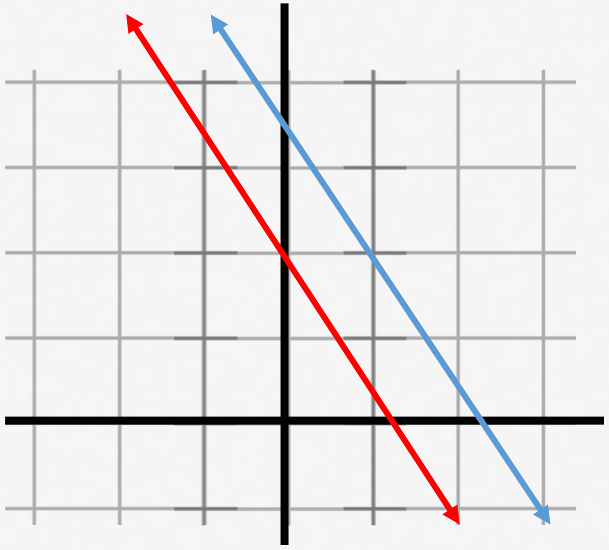
Solución Única



$$3x + 2y = 7$$
$$x - y = -1$$

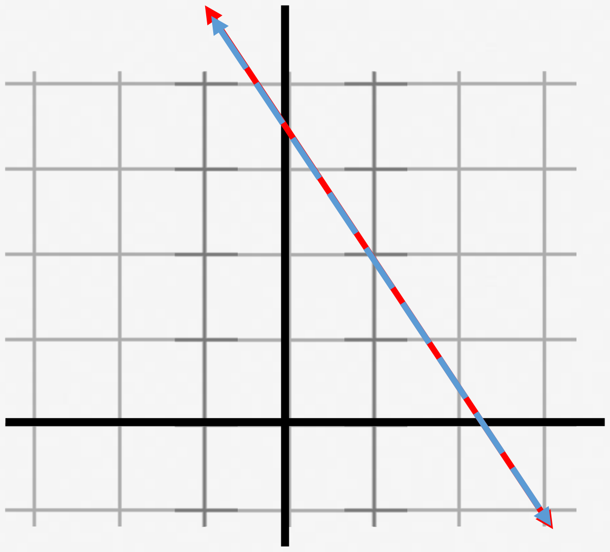
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Sin solución



$$3x + 2y = 7$$
$$3x + 2y = 4$$

Infinitas soluciones



$$3x + 2y = 7$$
$$6x + 4y = 14$$

Contenido

1. Vector: definición, propiedades.
2. Producto Interno y Externo
3. Bases y span
4. Producto Matriz-Vector
5. Valores y Vectores Propios

4. Producto Matriz-Vector

Matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_n]$$

Matriz Vector

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \qquad [\boldsymbol{a}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

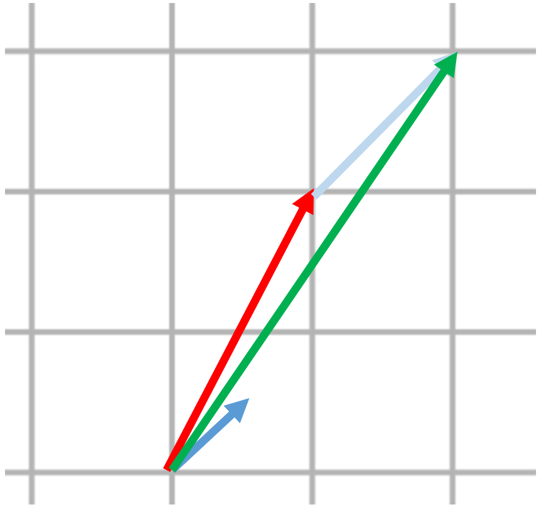
4. Producto Matriz-Vector

Matriz Vector

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{a}_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{b}$$

Institución Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

Contenido

1. Vector: definición, propiedades.
2. Producto Interno y Externo
3. Bases y span
4. Producto Matriz-Vector
5. Valores y Vectores Propios

5. Valores y Vectores Propios

Matriz Vector

$$\boldsymbol{Av} = \alpha \boldsymbol{v}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Valores propios

$$|\boldsymbol{A} - \alpha \boldsymbol{I}| = 0 \qquad \left| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \qquad \left| \begin{bmatrix} 1-\alpha & 2 \\ 2 & 1-\alpha \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$(1-\alpha)(1-\alpha) - 2 \times 2 = 0$$

$$1 - 2\alpha + \alpha^2 - 4 = 0$$

$$\alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$$

$$(\alpha - 3)\,(\alpha + 1) = 0$$

5. Valores y Vectores Propios

Matriz Vector

$$\boldsymbol{Av} = \alpha \boldsymbol{v}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \; v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Vectores propios

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_1 + 2v_2 \\ 2v_1 + v_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$v_1 + 2v_2 = \alpha v_1 \qquad 2v_1 + v_2 = \alpha v_2$$

$$2v_2 = \alpha v_1 - v_1$$

$$v_2 = \frac{v_1}{2}(\alpha - 1)$$

$$2v_1 + \frac{v_1}{2}(\alpha - 1) = \alpha \frac{v_1}{2}(\alpha - 1) \qquad \alpha = 3$$

$$2v_1 + \frac{v_1}{2}2 = 3\frac{v_1}{2}(2) \qquad v_1 = 1, v_2 = 1$$

https://www.geogebra.org/m/pree4qp9

Institución Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

¡Gracias!

Hacia una era de **Universidad y** *Humanidad*

Alcaldía de Medellín