Institución Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

Optimización

Programación Lineal

Docente: Cristian Guarnizo Lemus

Contenido

Programación lineal

Ejemplo:

- Una refinería tiene dos petróleos crudos disponibles como material.
- Produce gasolina, queroseno y combustóleo.
- Ganancias del procesamiento del crudo #1 es 1 Euro/kg y del crudo #2 es 0.7 Euro/kg.
- Cuales son sus tasas optimas de alimentación diaria?

Producto	Crudo #1 %	Crudo #2 %	Max Permitido (kg/dia)
Gasolina	70	31	6000
Queroseno	6	9	2400
Combustóleo	24	60	12000

Formulación matemática:

$$\min_{x_1,x_2} x_1 + 0.7x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & 0.7x_1 + 0.31x_2 \leq 6000 \\ & 0.06x_1 + 0.09x_2 \leq 2400 \\ & 0.24x_1 + 0.6x_2 \leq 12000 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$x_i, i \in \{1,2\}$ denotan la rata de alimentación del crudo i a la refinería.

Forma estándar de los LPs

NLP, programa no-lineal

$$\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$$ ← Función objetivo

$$\text{s.t. } c_i(\boldsymbol{x}) = 0, i \in E$$ ← Restricciones de Igualdad

$$c_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i \in I$$ ← Restricciones de desigualdad

NLP, programa no-lineal

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{d}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}$$ ← Función objetivo lineal

$$\text{s.t. } \boldsymbol{a}_i^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = 0, i \in E$$ ← Restricciones de igualdad lineal

$$-x_i \leq 0, i \in \{1, \ldots, n\}$$ ← Limites de las variables

Forma estándar

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{x} \\ &\text{s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ &\quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Institución Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

Contenido

1. Forma estándar de LPs.
2. Transformaciones a forma estándar.
3. Método simplex.

Transformaciones a forma estandar

NLP, programa no-lineal

$$
\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{d}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}\\
\text{s.t. } &\boldsymbol{A}_0\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}_0,\\
&\boldsymbol{A}_1\overline{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{b}_1,\\
&\boldsymbol{A}_2\overline{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}_2,\\
&\overline{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

?

$$
\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{d}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}\\
\text{s.t. } &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\\
&\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

Transformación a forma estándar:

- Introducir nuevas variables de holgura para cada restricción de igualdad.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_1\overline{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{b}_1 &\Rightarrow \boldsymbol{A}_1\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{v}_1 \geq \boldsymbol{0}\\
\boldsymbol{A}_2\overline{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}_2 &\Rightarrow \boldsymbol{A}_2\overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{v}_2 \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

- Variables complementarias: $x = \left[\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{T}}\ \boldsymbol{v}_1^{\mathsf{T}}\boldsymbol{v}_2^{\mathsf{T}}\right]^{\mathsf{T}}$ y combinar igualdades.

Transformaciones a forma estandar

- Son dados en la forma estándar

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \; & \boldsymbol{d}^{\top}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

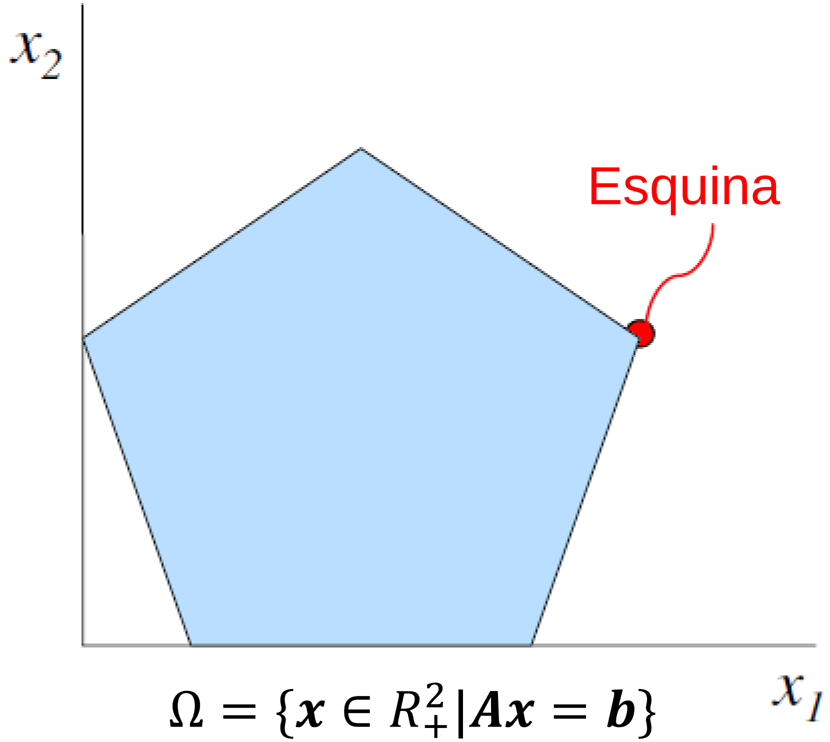
- El modelo tiene mas variables que restricciones de igualdad, tenemos mas grados de libertad.
- La matriz $\boldsymbol{A} \in R^{m\times n}$ tiene rango completo en la filas, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = m$.
- Para ilustraciones graficas típicamente se toma

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \; & d_1 x_1 + d_2 x_2 \\ \text{s.t. } & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Geometría de los problemas lineales

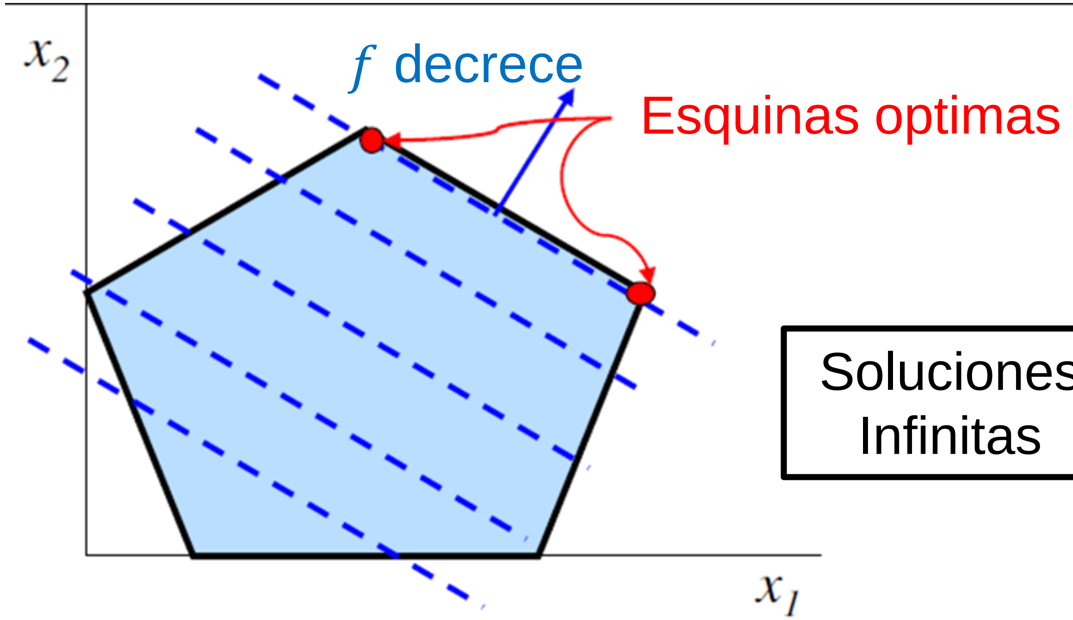
Conjunto factible: $\Omega = \{\boldsymbol{x} \in R^n | \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$

- Ω es un politopo, polígono multidimensional.
- Varios bordes expanden las caras del politopo.
- Una esquina P es la intersección de (al menos dos) restricciones activas.
- LPs son siempre convexos. Entonces cualquier solución local es una solución global.

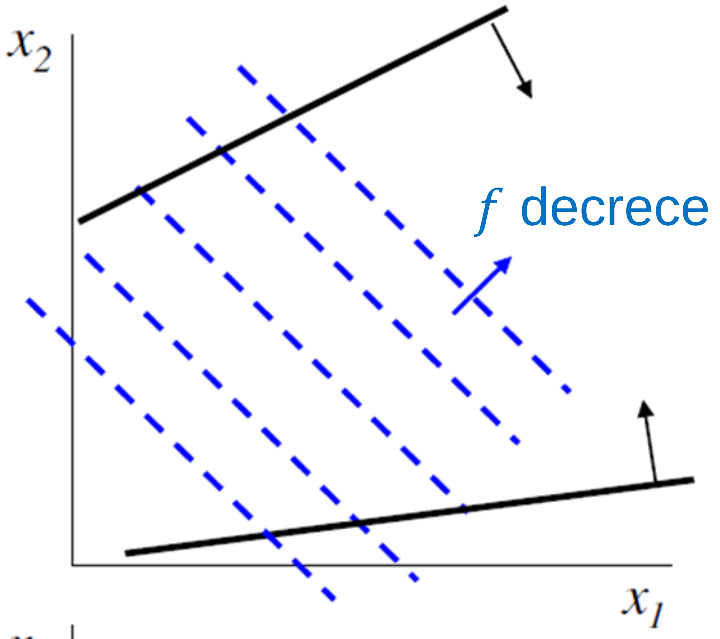


$\Omega = \{\boldsymbol{x} \in R_+^2 | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$

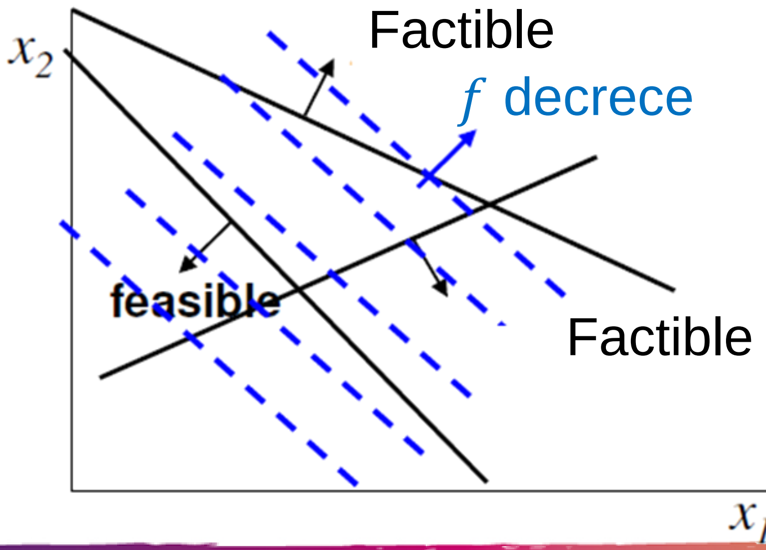
Geometría de los problemas lineales



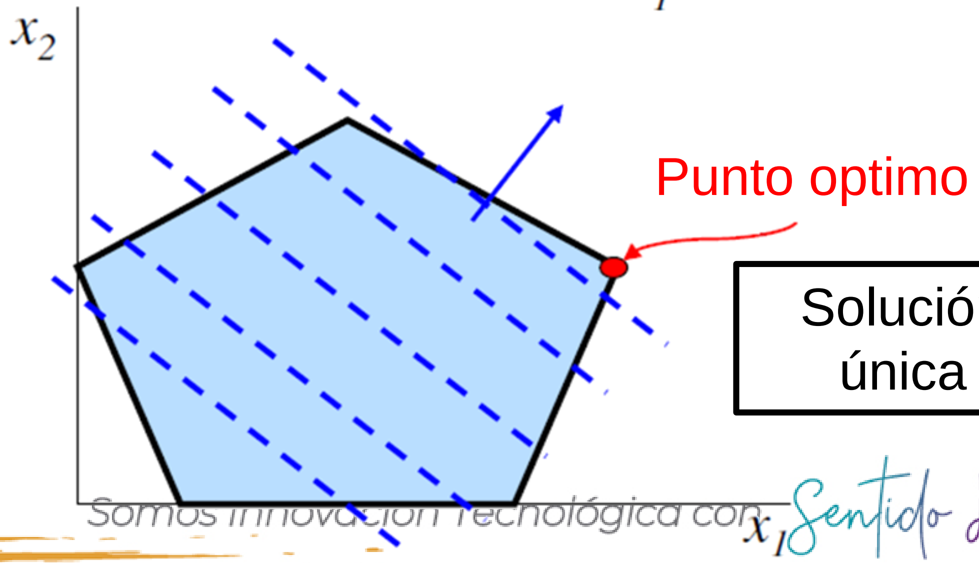
Soluciones Infinitas



Objetivo sin limite
→ Sin solución



Sin solución



Solución única

Contenido

1. Forma estándar de LPs.
2. Transformaciones a forma estándar.
3. Método simplex.

Institución Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

Método simplex

Consideramos el LP en forma estándar
$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \ & \boldsymbol{d}^{\top}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{A} \in R^{m\times n}$ tiene rango completo, $n > m$.

Definición: $\boldsymbol{x}$ es un punto factible básico, sí un conjunto índice $|T(\boldsymbol{x})| = m$, $T(\boldsymbol{x}) \subset \{1, \dots, n\}$ se puede seleccionar:

- $\boldsymbol{B} \coloneqq [\boldsymbol{a}_i]_{i\in T(\boldsymbol{x})}$ es matriz básica regular ($\boldsymbol{a}_i$ es la i-esima columna de $\boldsymbol{A}$).
- $\boldsymbol{x}_B \coloneqq [x_i]_{i\in T(\boldsymbol{x})} \geq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{x}_N \coloneqq [x_i]_{i\notin T(\boldsymbol{x})} = \boldsymbol{0}$.

Visualización de puntos básicos factibles

Original, sistema de ecuaciones no lineales:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Selecciones el vector de índices y reorganice columnas:

Columnas básicas

Columnas no-básicas

$$\Leftrightarrow [\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} n_{1,m+1} & \cdots & n_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ n_{m,m+1} & \cdots & n_{mn} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{N}} \cdot \begin{bmatrix} x_{B,1} \\ \cdots \\ x_{B,m} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Propiedades de los puntos básicos factibles

Con $\boldsymbol{N} \coloneqq [\boldsymbol{a}_i]_{iT\notin(\boldsymbol{x})}$

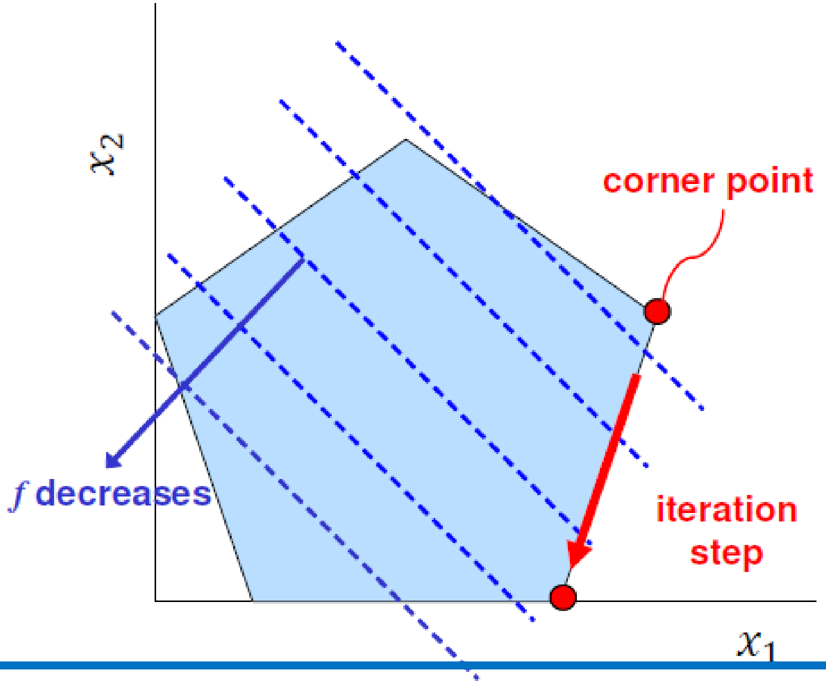
$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{Bx}_B + \boldsymbol{Nx}_N = \boldsymbol{b} \implies \boldsymbol{Bx}_B = \boldsymbol{b} \implies \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{b}$$

Proposiciones:

- Los puntos factibles básicos son los puntos esquina.
- Si hay un punto factible, entonces existe un punto factible básico.
- Si una solución optima existe, entonces al menos el punto factible es una solución optima.

Método simples para LPs - Resumen

- Buscar optimo entre los puntos factibles básicos (las esquinas del politopo).
- Empezar en una esquina factible.
- Iterar moviéndose a un punto esquina vecino.
- En cada movimiento la función objetivo decrece
  - En casos degenerados puede permanecer constante.
- Los puntos equina vecinos del politopo corresponden a puntos básicos factibles con un índice diferentes en $T(\boldsymbol{x})$.



- Que condiciones se deben sostener en el optimo?
- Como realizar el paso iterativo?
- Como encontrar el punto básico factible inicial?

Simplex - Optimalidad

- Las condiciones KKT son suficientes para la solución global (convexo)

$$\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}_E + \boldsymbol{\lambda}_I = \boldsymbol{d}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_I \geq \boldsymbol{0}$$
$$x_i\lambda_{I,i} = 0, \forall i = \{1, \dots, n\}$$

Seleccionar $T(\boldsymbol{x})$

$$[\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N}]^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}_E + [\boldsymbol{\lambda}_{I,B}^{\mathsf{T}} \quad \boldsymbol{\lambda}_{I,N}^{\mathsf{T}}]^{\mathsf{T}} = [\boldsymbol{d}_B^{\mathsf{T}} \quad \boldsymbol{d}_N^{\mathsf{T}}]^{\mathsf{T}}$$
$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}$$

Seleccionar $\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$, y $\boldsymbol{\lambda}_{I,B} = \boldsymbol{0}$

Tarea:
Demostrar que estas expresiones se cumplen.

$$\boldsymbol{\lambda}_E = [B^{\mathsf{T}}]^{-1}\boldsymbol{d}_B$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{I,N} = \boldsymbol{d}_N - N^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}_E$$
$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$\boxed{\text{Las condiciones KKT se satisfacen si: } \boldsymbol{x}_B \geq 0 \text{ y } \boldsymbol{\lambda}_{I,N} \geq \boldsymbol{0}.}$

Simplex – Secuencia de iteración

Initialize with basic feasible point $\boldsymbol{x}$

Loop:

1. If $\boldsymbol{\lambda}_{I,N} \geq \mathbf{0}$ terminate

2. Choose an index q: $q \notin T^k(\boldsymbol{x})$, $\lambda_{I,q} = \min_{i \notin T^k(\boldsymbol{x})} \lambda_{I,i}$ (note $\lambda_{I,q} < 0$)

3. Initialize x_q^+=0, fix all other components of $\boldsymbol{x}_N^+$ to zero.

4. Increase x_q^+, following $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^+ = \boldsymbol{b}$ until some x_p^+ with $p \in T(\boldsymbol{x})$ becomes zero.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^+ = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B^+ + \boldsymbol{a}_q x_q^+ = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B$$

$$\boldsymbol{x}_B^+ = \boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_q x_q^+ \geq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad x_p^+ = 0$$

5. Replace the index p with q in $T(\boldsymbol{x})$ and update $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^+$

6. Go to 1.

Referencias

- Basado en el curso “Applied Numerical Optimization” por el profesor Alexander Mitsos.
- Nocedal J. Wright S. J. Numerical Optimization, 2nd Edition, Springer, 2006.

Institución
Universitaria
Reacreditada en Alta Calidad

¡Gracias!

Somos Innovación Tecnológica con Sentido Humano

Alcaldía de Medellín