1 Ejemplo KKT

Considerar el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \ & 2x_1^2 + (x_2-1)^2, \\ \text{subject to } & x_1^2 + 2x_2^2 \leq 4, \\ & 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

El primer paso es llevar el problema a la forma estándar. Las desigualdades se deben llevar a "menor o igual que 0" (≤ 0). Entonces, reescribimos el problema de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \ & 2x_1^2 + (x_2-1)^2, \\ \text{subject to } & (\mathrm{c}_1(\mathbf{x}))\ x_1^2 + 2x_2^2 - 4 \leq 0, \\ & (\mathrm{c}_2(\mathbf{x}))\ -3x_1 - x_2 + 3 \leq 0, \\ & (\mathrm{c}_3(\mathbf{x}))\ -x_1 \leq 0 \\ & (\mathrm{c}_4(\mathbf{x}))\ -x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Contruimos la función Lagrangiana

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 2x_1^2 + (x_2-1)^2 + \lambda_1(x_1^2 + 2x_2^2 - 4) + \lambda_2(-3x_1 - x_2 + 3) + \lambda_3(-x_1) + \lambda_4(-x_2).$$

La primera condición necesaria de KKT, es el gradiente de la función Lagrangiana $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ con respecto al vector $\mathbf{x}$ sea igual a un vector de ceros, así

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 + 2x_1\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2(x_2 - 1) + 4x_2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Debido que solo tenemos restricciones de desigualdad, incluimos las condiciones de holgura complementaria ($\lambda_i \mathrm{c}_i(\mathbf{x}) = 0$):

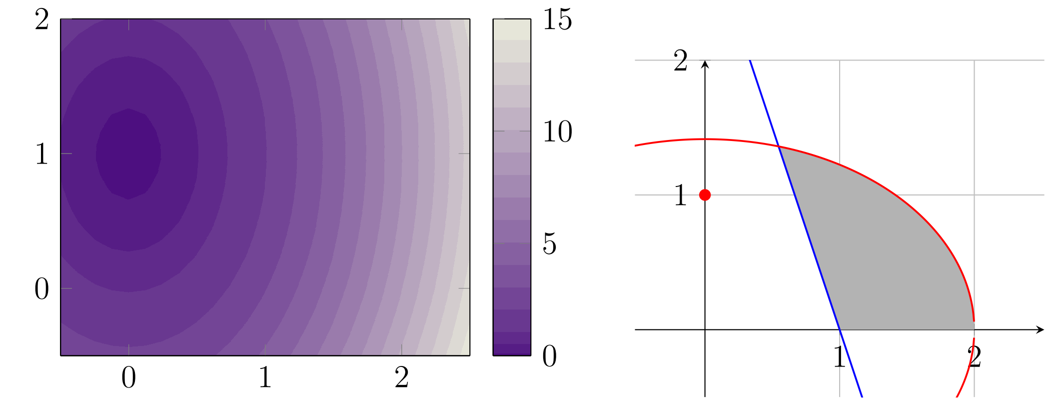
$$\begin{bmatrix} \lambda_1(x_1^2 + 2x_2^2 - 4) \\ \lambda_2(-3x_1 - x_2 + 3) \\ \lambda_3(-x_1) \\ \lambda_4(-x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora analizamos las 6 igualdades a 0, de tal forma que determinemos cuales son los valores para $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{\lambda}$. Adicionalmente, debido que todas las restricciones son desigualdades entonces los λ_i son todo mayores o iguales a cero, $\lambda_i \geq 0, \ \forall i = \{1, \ldots, 4\}$.

1.1 Solución:

Debido que el problema es en dos dimensiones podemos graficar el área de factibilidad, como se muestra en la figura 1. Debido que las curvas de nivel son concéntricas con respecto al mínimo de la función objetivo $(0, 1)$. Este punto está por fuera de la región de factibilidad. Vemos que el mínimo factible esta sobre la linea azul.

Existen 3 puntos de interés: a) en el punto (1,0), b) sobre el segmento de linea, o c) en la esquina superior.



a) Contorno de función objetivo. b) Región de factibilidad en gris.

Fig. 1: Análisis de región de factibilidad y función objetivo.

1.1.1 Punto (1,0):

La función objetivo en este punto factible es $f(1,0) = 1$.

1.1.2 Sobre la línea:

Para determinar en que punto de la linea se encuentra el mínimo, haremos uso del sistemas de ecuaciones dado por el gradiente del Lagrangiano. También asumimos que el mínimo esta sobre la linea, entonces $\lambda_2 \neq 0$ y $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4 = 0$. El gradiente del Lagrangiano se reduce a:

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} 4x_1 - 3\lambda_2 \\ 2(x_2 - 1) + \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y agregamos la ecuación de holgura para λ_2. La cual es:

$$\lambda_2(-3x_1 - x_2 + 3) = 0.$$

Sabemos que x_1 y x_2 son diferentes de 0. A partir de la primera ecuación, despejamos $\lambda_2 = \frac{4}{3}x_1$. Reemplezando este resultado sobre las otras dos ecuaciones tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2(x_2 - 1) + \frac{4}{3}x_1 = 0, \tag{1}$$

$$\frac{4}{3}x_1 (-3x_1 - x_2 + 3) = 0. \tag{2}$$

De la ecuación (5) podemos despejar una variable en función de la otra. Despejamos x_2 en función de x_1, así:

$$x_2 = -\frac{4}{6}x_1 + 1.$$

Finalmente, reemplazamos x_2 en la ecuación (6). De lo cual obtenemos

$$\frac{4}{3}x_1 \left(-3x_1 + \frac{4}{6}x_1 - 1 + 3 \right) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{4}{3}x_1 \left(-\frac{14}{6}x_1 + 2 \right) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{28}{9}x_1 \left(-\frac{14}{6}x_1 + 2 \right) = 0 \tag{5}$$

Sabiendo que $x_1 \neq 0$ entonces para satisfacer la igualdad a 0, $x_1 = \frac{12}{14}$. Entonces, $x_2 = \frac{6}{14}$ y $\lambda_2 = \frac{16}{14}$. La función objetivo en este punto es $f\left(\frac{12}{14}, \frac{6}{14}\right) = 1.7959183673469385$.

1.1.3 Esquina superior:

Para determinar el punto superior, debemos encontrar la intersección entre la linea azul y la elipse roja (ver 1). Igualamos ambas restricciones a cero (perímetro), así

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 4 = 0, \; -3x_1 - x_2 + 3 = 0.$$

Despejamos x_2 en función de x_1, $x_2 = -3x_1 + 3$. Y reemplazamos este resultado en la ecuación de la elipse, obtenemos

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2(-3x_1 + 3)^2 - 4 &= 0, && (6) \\ x_1^2 + 2(9x_1^2 - 18x_1 + 9) - 4 &= 0, && (7) \\ x_1^2 + 18x_1^2 - 36x_1 + 18 - 4 &= 0, && (8) \\ 19x_1^2 - 36x_1 + 14 &= 0. && (9) \end{aligned}$$

Las raíces de la ultima expresión son:

$$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \times 19 \times 14}}{2 \times 19} = 1.34819858, 0.54653826.$$

El punto que nos interesa es $x_1 = 0.54653826$ y $x_2 = 1.36038522$. La función objetivo evaluada en ese punto es $f(x_1, x_2) = 0.72728564$.

Recordar que para esta solución, según la holgura complementaria, el punto solución esta sobre las dos restricciones (linea y elipse), entonces λ_1 y λ_2 son diferentes de 0, mientras que $\lambda_3, \lambda_4 = 0$. Para calcular los valores de λ_1 y λ_2 debemos resolver el sistemas de ecuaciones del gradiente del Lagrangiano.

El minimo esta ubicado en el punto $x_1 = 0.54653826$ y $x_2 = 1.36038522$.