



Institución  
**Universitaria**  
Reacreditada en Alta Calidad

# Optimización

## Convexidad – Conjunto y funciones

**Docente: Cristian Guarnizo Lemus**

Somos Innovación Tecnológica con *Sentido Humano*



Alcaldía de Medellín



Institución  
**Universitaria**  
Reacreditada en Alta Calidad

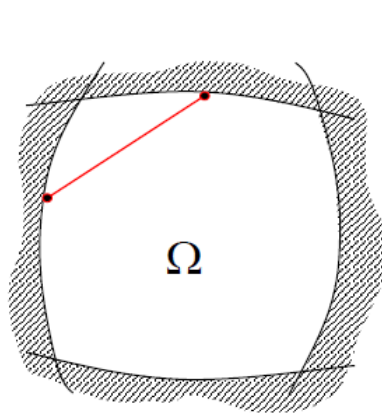
# Contenido

## 1. Convexidad en optimización.

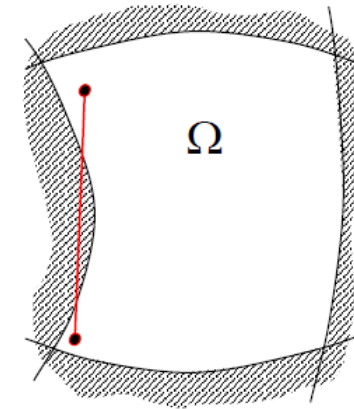
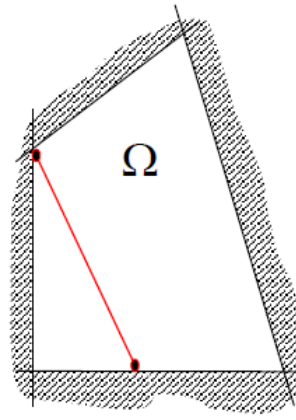
# Convexidad de un conjunto

## Definición conjunto convexo:

- Un conjunto  $\Omega \subseteq R^n$  es **convexo**, si  $\forall x_1, x_2 \in \Omega$  y  $\forall \alpha \in [0,1]$ ,  $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in \Omega$



convex



nonconvex

- Las restricciones definen el conjunto factible  $\Omega = \{x \in D | c_i(x) \leq 0 \forall i \in I, c_i(x) = 0 \forall i \in E\}$ .
- La convexidad de  $\Omega$  hace una gran diferencia en las propiedades teóricas y en una solución numérica.
- Un conjunto es convexo o no convexo.

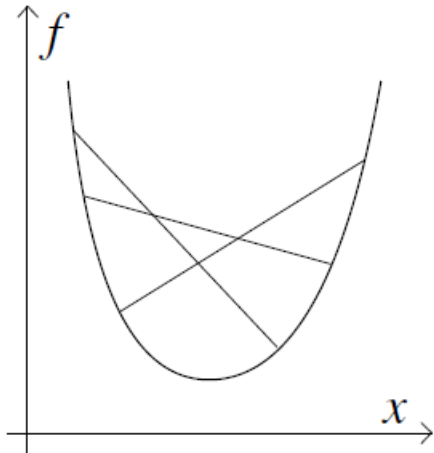
# Convexidad de una función

**Definición función convexa:** asumir que  $D$  es convexo

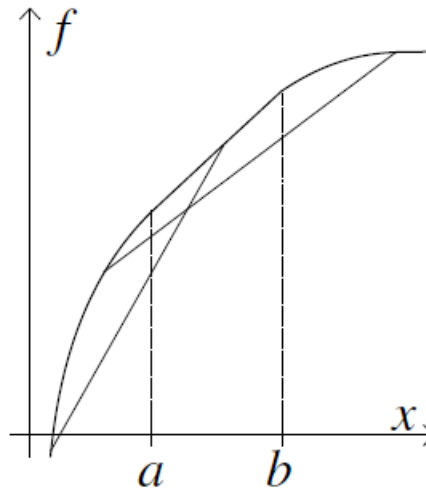
- Una función  $f$  es **convexa en  $D$** , si  $\forall x_1, x_2 \in D, \forall \alpha \in [0,1]$ :  

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$
- $f$  es **estrictamente convexa en  $D$** , si  $\forall x_1, x_2 \in D, \forall \alpha \in [0,1]$ :  

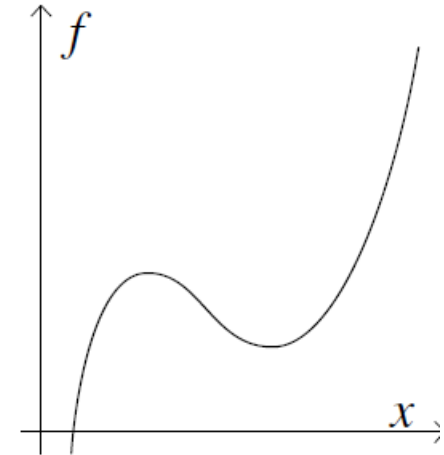
$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$
- $f$  es estrictamente concava en  $D$ , si  $-f$  es estrictamente convexa.



Estrictamente convexa



Concava, pero no estrictamente



Ni convexa, ni concava

# Criterio de convexidad

## Definición (semidefinido positivo):

- Una matriz  $A$  ( $n \times n$ ) simétrica es llamada **definida positiva**, si  $\mathbf{p}^T A \mathbf{p} > 0 \forall \mathbf{p} \in R^n, \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ .
- Una matriz  $A$  ( $n \times n$ ) simétrica es llamada **semi-definida positiva**, si  $\mathbf{p}^T A \mathbf{p} \geq 0 \forall \mathbf{p} \in R^n, \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ .
- Si  $(-A)$  es **positiva (semi-)definida**, entonces  $A$  es llamada **negativa (semi-)definida**.

## Teorema:

Una matriz  $A$  ( $n \times n$ ) simétrica es llamada **definida positiva**, si  $\lambda_k > 0, \forall k \in \{1, \dots, n\}$  donde  $\lambda_k$  representa el  $k$ -ésimo **valor propio (eigenvalue)** de  $A$ , o sea, las soluciones de  $\det(A - \lambda I) = 0$ . De manera similar, semi-definida positiva si  $\lambda_k \geq 0, \forall k \in \{1, \dots, n\}$ .

## Teorema:

- $f$  es convexa, si y solo si la Hessiana  $\mathbf{H}(x)$  es semi-definida positiva  $\forall x \in D$ .
- Si  $\mathbf{H}(x)$  es **definida positiva**  $\forall x \in D$ , entonces  $f$  es **estrictamente convexa**.



# Criterio de convexidad

	if $\forall x \in D$		
$f$ is	$H(x)$ is	all $\lambda_k$ are	$\forall p \in R^n$ , $p^T H(x)p$ is
strictly convex	positive definite	$> 0$	$> 0$
convex	positive semi-definite	$\geq 0$	$\geq 0$
strictly concave	negative definite	$< 0$	$< 0$
concave	negative semi-definite	$\leq 0$	$\leq 0$
neither convex, nor concave	-	$\geq 0$ or $\leq 0$	$\geq 0$ or $\leq 0$

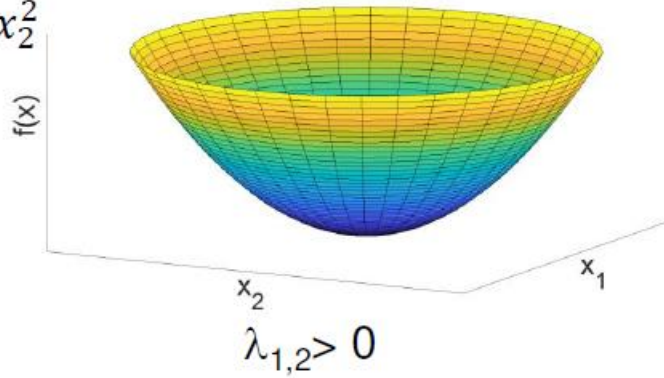
Definiteness of  
the Hessian

Sign of  
the eigenvalues

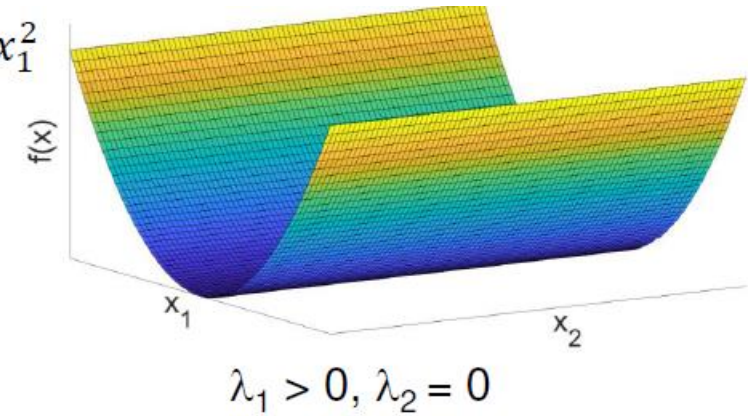
Sign of the  
quadratic form

# Ejemplos de convexidad

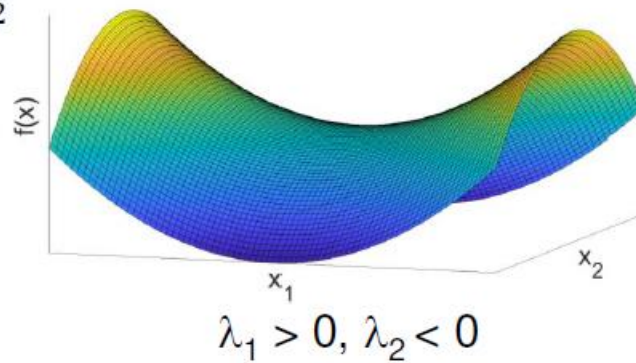
$$f(x) = x_1^2 + x_2^2$$



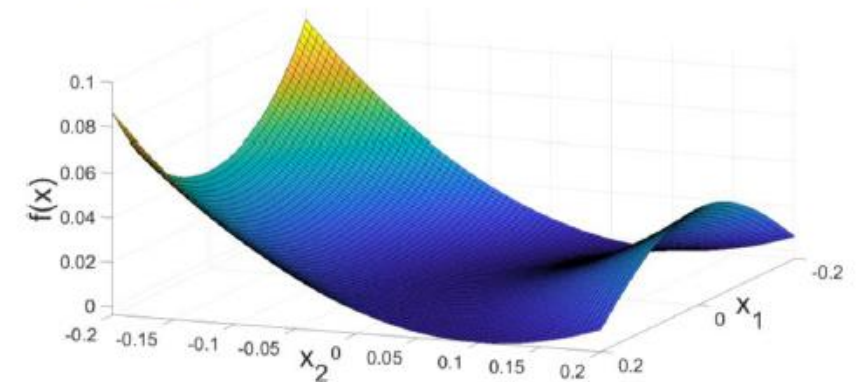
$$f(x) = x_1^2$$



$$f(x) = x_1^2 - x_2^2$$



$$f(x) = (x_2 - x_1^2)(x_2 - 4x_1^2)$$



# Problemas de Opt. Convexa

## Definición - problema de optimización convexa:

- El problema de optimización  $\min f(x)$  con  $x \in \Omega$  es convexo, si la función objetivo  $f$  es convexa y si el conjunto factible  $\Omega$  es convexo.
- Si  $D$  es un conjunto convexo,  $c_i \forall i \in I$  con convexas en  $D$  y  $c_i \forall i \in E$  son lineales entonces  
 $\Omega = \{x \in D | c_i(x) \leq 0 \forall i \in I, c_i(x) = 0 \forall i \in E\}$  es convexo.
- Aparte de algunas excepciones:
  - $\Omega$  es no convexo, si cualquier  $c_i \forall i \in E$  es una función no-lineal.
  - $\Omega$  es no convexo, si cualquier  $c_i \forall i \in I$  es no convexa en  $D$ .
- “de hecho el mayor punto de inflexión en la optimización no es entre lineal y no-lineal, sino entre convexo y no convexo.” R. Tyrrell Rockafellar in SIAM Review, 1993.



# Condiciones de optimalidad para problemas convexos suaves

- Sea  $f$  dos veces diferenciables y convexa.
- Debido que  $f$  es suave y convexa,  $\nabla^2 f(\mathbf{x})$  es positiva semi-definida para todo  $\mathbf{x}$ .
- Si  $\mathbf{x}^* \in R^n$  es un punto de solución local, entonces también es punto de solución global. – Prueba: La convexidad implica que la primera derivada no decrece cuando nos alejamos de  $\mathbf{x}^*$ . Entonces no podemos encontrar otro mínimo local distinto.
- Un punto  $\mathbf{x}^* \in R^n$  es un punto de solución global si y solo si  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ .
  - La convexidad implica  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*) + (\nabla f(\mathbf{x}^*))^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$
  - Con estacionariedad  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$



# Condiciones de optimalidad para problemas convexos suaves

- Se puede decir:
  - La condición de primer orden es necesaria y suficiente.
  - Un punto estacionario es equivalente a una solución local y una solución global.
  - En problemas con restricciones la convexidad implica que las condiciones de primer orden son necesarias y suficientes.



# Chequeo

- Cuando un problema de optimización es convexo?
- Como podemos verificar la convexidad de un problema de optimización sin restricciones suave?

# Referencias

- Basado en el curso “Applied Numerical Optimization” por el profesor Alexander Mitsos.



Institución  
**Universitaria**  
Reacreditada en Alta Calidad

# *¡Gracias!*

Somos Innovación Tecnológica con *Sentido Humano*



Alcaldía de Medellín