Extremalprobleme

Aufgaben

Übung 1.
Wie groß ist die Summe, die man beim Addieren einer positiven Zahl und ihrer Kehrzahl erhält, mindestens?

Übung 2.
Aus einem rechteckigen, 10 cm langen und 5 cm breiten Stück Pappe soll eine (oben offene) Schachtel mit möglichst großem Rauminhalt hergestellt werden. Wie sind Länge, Breite und Höhe der Schachtel zu wählen?

Übung 3.
Längs einer Hauswand soll ein rechteckiges Gartengrundstück so abgesteckt werden, dass zum Einzäunen der drei offenen Seiten eine Rolle mit 20 m Maschendraht ausreicht. Bei welchen Abmessungen wird das Grundstück am größten?

Übung 4.
Welches Rechteck mit dem Umfang 30 cm hat die kürzeste Diagonale? (Hinweis: Bei dem gesuchten Rechteck hat das Quadrat über der Diagonalen minimalen Flächeninhalt.)

Übung 5.
Aus einem 120 cm langen Draht soll das Kantenmodell eines Quaders hergestellt werden, bei dem eine Kante dreimal so lang ist wie eine andere und der Rauminhalt möglichst groß ist.

Übung 6.
Welche quadratische Säule mit der Oberfläche 150 dm^2 hat den größten Rauminhalt? Wie groß ist dieser?

Übung 7.
Eine Holzkugel mit dem Radius $r = 4$ cm soll so abgeschliffen werden, dass ein Zylinder mit möglichst großem Rauminhalt entsteht. Wie groß sind der Grundkreisradius und die Höhe des Zylinders? Welchen Rauminhalt hat er?

Übung 8.
Einem gleichschenkligen Dreieck mit der Grundseite $c = 12$ cm und der Schenkellänge $a = b = 18$ cm ist ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt einzubeschreiben.

Übung 9.
Eine Zündholzschachtel soll 5 cm lang sein und 45 cm^3 Inhalt haben. Bei welcher Breite und Höhe braucht man zur Herstellung am wenigsten Material?

Übung 10.
Laut Gebührenordnung der Post dürfen bei Briefen in Rollenform die Länge und der zweifache Grundkreisdurchmesser zusammen höchstens 104 cm betragen. Bei welcher Länge und welchem Durchmesser nimmt eine solche Briefrolle am meisten Raum in Anspruch? Wieviel dm^3 beträgt dann der Rauminhalt?

Übung 11.
Eine Elektronikfirma verkauft monatlich 5000 Stück eines Bauteils zum Stückpreis von 25 €. Eine Marktforschung hat ergeben, dass sich der monatliche Absatz immer dann um durchschnittlich 500 Stück erhöhen würde, wenn der Stückpreis um 2 € gesenkt wird. Welcher Stückpreis ist für die Firma am günstigsten?

Lösungen

Lösung 1.
Die Summe einer Zahl und ihres Kehrwerts beträgt

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \qquad \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

Der Extrempunkt wird wie üblich durch Ableiten und Nullsetzen gefunden:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Nullsetzen liefert die Lösung:

$$0 = 1 - \frac{1}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$
$$f''(1) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum bei } x = 1.$$
$$f(1) = 2$$

Die Summe einer Zahl und ihres Kehrwertes beträgt also mindestens 2.

Lösung 2.
Skizze:

Als Hauptbedingung stellt man die Formel für das Volumen des Quaders auf:

$$V = abc$$

Als Nebenbedingungen sind die vorgegebenen Maße des Kartons gegeben:

$$a = 10 - 2x \quad b = 5 - 2x \quad c = x$$

Einsetzen dieser Bedingungen ergibt die Zielfunktion:

$$V(x) = (10 - 2x)(5 - 2x)x = 4x^3 - 30x^2 + 50x$$
$$V'(x) = 12x^2 - 60x + 50 \quad V''(x) = 24x - 60$$

Nullsetzen der ersten Ableitung liefert dann die Lösung:

$$0 = 12x^2 - 60x + 50$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 \approx 3{,}943$ und $x_2 \approx 1{,}057$. x_1 liefert eine negative Breite $b \approx -2{,}887$, also kann nur x_2 die gesuchte Lösung sein. Damit ergeben sich die Werte $a \approx 7{,}887$ cm, $b \approx 2{,}887$ cm und $c \approx 1{,}057$ cm.

Lösung 3.
Die Hauptbedingung ist die zu maximierende Fläche des Grundstücks:

$$A = ab$$

Die Nebenbedingung ist durch die Länge des Zauns vorgegeben:

$$20 = a + 2b \quad \Leftrightarrow \quad a = 20 - 2b$$

Als Zielfunktion ergibt sich damit

$$A(b) = (20 - 2b)b = -2b^2 + 20b$$
$$A'(b) = -4b + 20 \quad A''(b) = -4$$

Nullsetzen liefert nun die Lösung:

$$0 = -4b + 20 \quad \Leftrightarrow \quad b = 5 \quad \Rightarrow \quad a = 10$$

Mit einer Breite von 5 m und einer Länge von 10 m ist der Flächeninhalt mit 50 m^2 am größten.

Lösung 4.
Als Hauptbedingung benötigt man einen Zusammenhang zwischen Diagonale und Umfang, der sich mit dem Satz des Pythagoras aufstellen lässt.

$$d^2 = a^2 + b^2$$

Als Nebenbedingung ist die Länge des Umfangs vorgegeben:

$$30 = 2a + 2b \quad \Leftrightarrow \quad b = 15 - a$$

Setzt man das in die Hauptbedingung ein, kann man eine Zielfunktion aufstellen:

$$f(a) = d^2 = a^2 + (15 - a)^2$$

Anstatt die Funktion aud d aufzulösen, macht man es sich einfacher, wenn man d^2 als $f(a)$ setzt. Wenn d am kleinsten ist, dann ist auch d^2 am kleinsten.

$$f(a) = 2a^2 - 30a + 225$$
$$f'(a) = 4a - 30 \qquad f''(a) = 4$$

Wie immer erhält man das Ergebnis, wenn man die erste Ableitung gleich 0 setzt.

$$0 = 4a - 30 \quad \Leftrightarrow \quad a = 7.5$$
$$\Rightarrow \quad b = 7.5$$

Das Quadrat mit der Seitenlänge 7,5 cm hat die kürzeste Diagonale.

Lösung 5.
Die Hauptbedingung ist das Volumen des Quaders:

$$V = abc$$

Es sind zwei Nebenbedingungen vorgegeben. Zum einen soll eine Kante dreimal so lang sein wie eine andere, $c = 3a$, und zum zweiten stehen 120 cm für alle Kanten zur Verfügung:

$$120 = 4(a + b + c) = 16a + 4b \quad \Leftrightarrow \quad b = 30 - 4a$$

Einsetzen in die Hauptbedingung liefert die Zielfunktion:

$$V(a) = a(30 - 4a)3a = -12a^3 + 90a^2$$
$$V'(a) = -36a^2 + 180a \qquad V''(a) = -72a + 180$$

Die erste Ableitung muss 0 gesetzt werden, um das Maximum zu finden:

$$0 = -36a^2 + 180a = -36a(a - 5)$$
$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 5$$

Für $a = 0$ erhält man ein Minimum, $(V(0) = 0, V''(0) = 180)$, also ist $a = 5$ die gesuchte Lösung: $a = 5$, $b = 10$ und $c = 15$, jeweils in cm. Das maximale Volumen ist $V = 750\,\text{cm}^3$.

Lösung 6.
Die Hauptbedingung ist das Volumen der quadratischen Säule:

$$V = a^2 h$$

Als Nebenbedingung ist vorgegeben, dass die Oberfläche 150 dm^2 betragen soll:

$$150 = 2a^2 + 4ah \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{75}{2a} - \frac{a}{2}$$

damit ergibt sich für die Zielfunktion

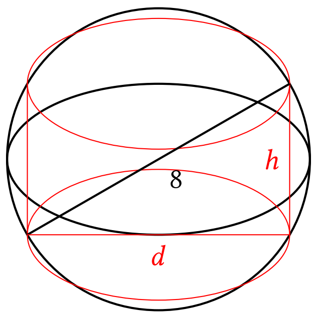
$$V(a) = a^2\left(\frac{75}{2a} - \frac{a}{2}\right) = \frac{75}{2}a - \frac{a^3}{2}$$
$$V'(a) = \frac{75}{2} - \frac{3a^2}{2} \qquad V''(a) = -3a$$

Nullsetzen der ersten Ableitung liefert das Maximum:

$$0 = \frac{75}{2} - \frac{3a^2}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad a^2 = 25$$
$$a = 5$$

Das negative Ergebnis $a = -5$ ist nur eine Scheinlösung, ein negative Kantenlänge ist nicht möglich. Die Lösung ist also $h = 5$ mit $V = 125$. Damit hat der Würfel mit der Kantenlänge 5 cm 125 cm^3 den größten Rauminhalt.

Lösung 7.
Skizze:



Die Hauptbedingung ist das Volumen des Zylinders

$$V = \pi r^2 h \quad .$$

Der Durchmesser und die Höhe des Zylinders bilden mit dem Durchmesser der Kugel als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieick. Als Nebenbedingung ist der Radius der Kugel vorgegeben. Damit erhält man

$$64 = d^2 + h^2 = 4r^2 + h^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = 16 - \frac{h^2}{4} \quad .$$

Einsetzen in die Hauptbedingung liefert die Zielfunktion.

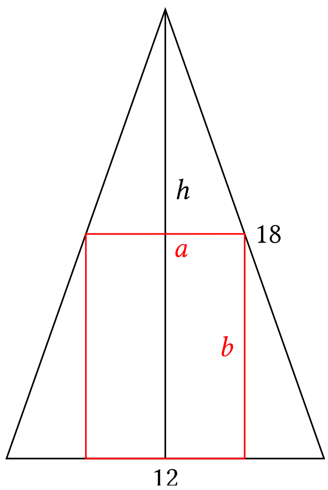
$$V(h) = \pi\left(16 - \frac{h^2}{4}\right)h = 16\pi h - \frac{\pi h^3}{4}$$
$$V'(h) = 16\pi - \frac{3\pi h^2}{4} \qquad V''(h) = -\frac{3\pi h}{2} < 0 \text{ da } h > 0$$

Nullsetzen der ersten Ableitung:

$$0 = 16\pi - \frac{3\pi h^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = \frac{64}{3}$$
$$h = \frac{8\sqrt{3}}{3} \approx 4{,}62$$

Damit erhält man für den Radius des Zylinders $r = \frac{4\sqrt{6}}{3} \approx 3{,}27$ und für das Volumen $V \approx 154{,}8$. Der mit 154,8 cm^3 größte Zylinder hat den Radius 3,27 cm und die Höhe 4,62 cm.

Lösung 8.
Skizze:



Die Hauptbedingung ist der Flächeninhalt des gesuchten Rechtecks:

$$A = ab \quad .$$

Das gleichschenklige Dreieck hat nach dem Satz des Pythagoras eine Höhe von $h = 12\sqrt{2} \approx 16{,}97$. Nach dem zweiten Strahlensatz gilt:

$$\frac{h}{6} = \frac{b}{6 - \frac{a}{2}}$$

Mit $h = 12\sqrt{2}$ ergibt sich dann als Nebenbedingung

$$b = 12\sqrt{2} - \sqrt{2}a \quad .$$

Einsetzen in die Hauptbedingung gibt die Zielfunktion:

$$A(a) = a(12\sqrt{2} - \sqrt{2}a) = 12\sqrt{2}a - \sqrt{2}a^2$$
$$A'(a) = 12\sqrt{2} - 2\sqrt{2}a \qquad A''(a) = -2\sqrt{2}$$

Nullsetzen der ersten Ableitung liefert die Lösung:

$$0 = 12\sqrt{2} - 2\sqrt{2}a \quad \Leftrightarrow \quad a = 6$$

Damit ist $b = 6\sqrt{2} \approx 8{,}59$ und $A = 36\sqrt{2} \approx 50{,}91$. Das Rechteck mit den Maßen 6 cm × 8,59 cm hat also mit 50,91 cm^2 den größten Flächeninhalt.

Lösung 9.
Der Materialverbrauch hängt von der Pberfläche ab, was also dieHauptbedingung ist:

$$O = 2(5b + 5c + bc)$$

Als Nebenbedingungen sind Länge und Volumen vorgegeben.

$$45 = 5bc \quad \Leftrightarrow \quad 9 = bc \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{9}{b}, b > 0$$

Damit ergibt sich für die Zielfunktion:

$$O(b) = 2(5b + \frac{45}{b} + 9) = 10b + \frac{90}{b} + 18 \quad .$$

Ableiten und Nullsetzen liefert die gesuchte Lösung.

$$O'(b) = 10 - \frac{90}{b^2} \qquad O''(b) = \frac{180}{b^3} > 0 \text{ da } b > 0$$
$$0 = 10 - \frac{90}{b^2} \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad b = 3$$

Am wenigsten Material wird bei einer Breite und Höhe von je 3 cm benötigt.

Lösung 10.
Die Hauptbedingung ist das gesuchte maximale Volumen

$$V = \pi r^2 h$$

Als Nebenbedingung ist vorgegeben, dass die Summe aus zwei Durchmessern und der Länge nur 104 cm betragen darf:

$$104 = 4r + h \quad \Leftrightarrow \quad h = 104 - 4r$$

Damit ergibt sich nun als Zielfunktion:

$$V(r) = \pi r^2(104 - 4r) = 104\pi r^2 - 4\pi r^3$$
$$V'(r) = 208\pi r - 12\pi r^2 \qquad V''(r) = 208\pi - 24\pi r$$

Nullsetzen der ersten Ableitung ergibt die gesuchte Lösung:

$$0 = 208\pi r - 12\pi r^2 = r(52 - 3r)$$
$$r_1 = 0 \qquad r_2 = \frac{52}{3} \approx 17{,}33$$

Das Ergebnis $r_1 = 0$ ergibt ein Minimum, $V(0) = 0$, die gesuchte Lösung ist logischerweise $r_2 \approx 17{,}33$.

$$\Rightarrow \quad d = \frac{104}{3} \approx 34{,}67$$
$$h = \frac{104}{3} \approx 34{,}67 \quad V \approx 32721$$

Bei einem Durchmesser und einer Länge von je 34,67 cm hat die Briefrolle den maximalen Rauminhalt 32,72 dm^3.

Lösung 11.

Am günstigsten ist, da wir von statischen Produktionskosten ausgehen müssen, wenn die Einnahmen maximal sind. Dann ist die Hauptbedingung

$$E = sp$$

wobei E die Einnahmen in Euro sind, s die verkaufte Stückzahl und p der Preis pro Stück in Euro. Pro Preissenkung um einen Euro erhöht sich die Stückzahl um 250. Als Nebenbedingung ergibt sich daraus

$$s = 5000 + 250x$$
$$p = 25 - x \quad \Leftrightarrow \quad x = 25 - p$$
$$s = 5000 + 250(25 - p) = 11250 - 250p \quad .$$

Damit haben wir schließlich als Zielfunktion

$$E(p) = (11250 - 250p)p = 11250p - 250p^2 \quad .$$

Ableiten und Nullsetzen liefert wie üblich die gesuchte Lösung.

$$E'(p) = 11250 - 500p \qquad E''(p) = -500 < 0$$
$$0 = 11250 - 500p \quad \Rightarrow p = 22.5$$

Am günstigsten ist also ein Stückpreis von 22,50 €.