(Quadratische) Funktionen

Diese Übersicht soll grundsätzlich nur quadratische Funktionen behandeln und alle typischen Aufgabestellungen enthalten, wie sie in einer Realschulprüfung vorkommen können. Da dort das Thema "'quadratische Funktionen"' aber nicht klar von den linearen Funktionen zu trennen sind, werden diese hier auch kurz behandelt.

Am Ende der Übersicht befindet sich eine Liste häufig verwendeter Begriffe mit jeweils einer kurzen Erklärung. Begriff, die dort auftauchen, sind mit einem Pfeil gekennzeichnet, so wie hier → Funktion.

Inhaltsverzeichnis

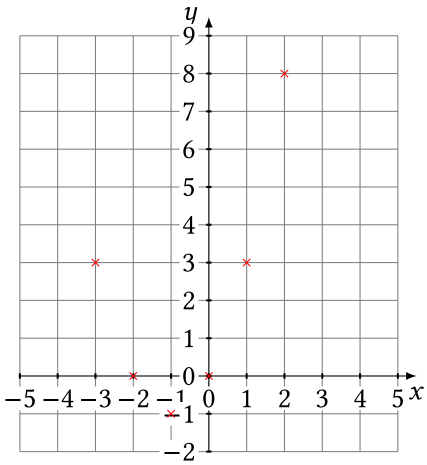
1 Allgemeines – Begriffsklärung

Unter einer → Funktion versteht man eine *eindeutige* → Zuordnung. Zuordung bedeutet, dass einer Zahl aus einer Gruppe (oder besser: Menge) eine Zahl aus einer zweiten Gruppe zugeordnet bekommt, so dass Zahlenpaare entstehen. Die erste Gruppe nennt man → Definitionsmenge $\mathbb{D}$ und eine unbekannte Zahl dieser Gruppe bekommt das Symbol x. Die zweite Gruppe nennt man → Wertemenge $\mathbb{W}$, eine Zahl dieser Gruppe bekommt das Symbol y oder $f(x)$. Eine Tabelle, in der einige der Zahlenpaare (man nennt sie auch → Tupel) aufgelistet sind, nennt man → Wertetabelle. Ein Beispiel dafür ist Tabelle 1.

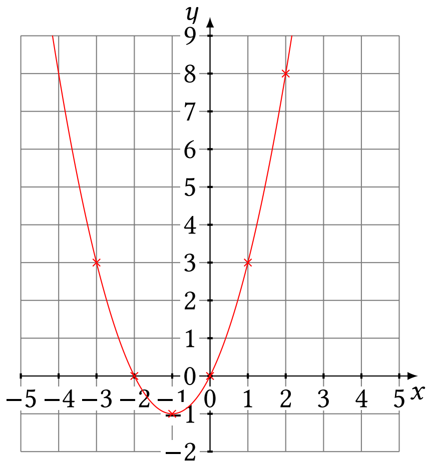
Tabelle 1: Beispiel für eine Wertetabelle.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	3	0	−1	0	3	8	15

Der y-Wert, der einem x-Wert zugeordnet wurde, wird auch → Funktionswert genannt. Die Zahlenpaare kann man in einem Koordinatensystem einzeichen. Für die Werte aus Tabelle 1 auf der vorherigen Seite wurde das in Abbildung 1 gemacht.



Die Wertepaare aus Tabelle 1 auf der vorherigen Seite in einem Koordinatensystem.



Die Wertepaare aus Tabelle 1 auf der vorherigen Seite liegen alle auf einer Linie.

Abbildung 1: Wertepaare einer Funktion bilden in der Regel einen Graphen aus einer Linie.

Bei einer → Funktion liegen alle Punkte dann in der Regel auf einer Linie, dem → Graphen der → Funktion. In Abbildung 1b wurde das für die Punkte aus Tabelle 1 auf der vorherigen Seite gemacht.

Für uns sind zwei Arten von Funktionen von Belang: zum einen die *linearen Funktionen* (siehe Abschnitt 2), die hier nur ganz kurz wiederholt werden, und zum anderen die *quadratischen Funktionen* (siehe Abschnitt 3 auf Seite 5), um die es hauptsächlich gehen wird.

Zuerst werden die Grundlagen der linearen Funktionen noch einmal wiederholt, da sie die einfachste Sorte von Funktionen sind, und weil viele der Prüfungsaufgaben zum Thema „quadratische Funktionen“ auch lineare Funktionen beinhalten. Man sollte sie also auch kennen.

2 Lineare Funktionen – Geraden

2.1 Funktionsgleichung, Steigung und y-Achsenabschnitt

Lineare Funktionen sind eine spezielle Sorte von Funktionen, bei denen alle Wertepaare im Koordinatensystem auf einer geraden Linie liegen. Man nennt sie auch → Geraden. Lineare Funktionen werden nach einer bestimmten Vorschrift gebildet. Ihre allgemeine Form lautet

$$y = m \cdot x + c \quad . \tag{1}$$

Man nennt m die → Steigung und c den → y-Achsenabschnitt. Diese beiden Begriffe und Gleichung 1 sollte man sich unbedingt merken: sie werden unter Garantie prüfungsrelevant sein!

Beispiel 1.

Für die Gerade $y = 2x + 1$ hat die Steigung $m = 2$ und den y-Achsenabschnitt $c = 1$. Es lässt sich für die Funktion folgende → WERTETABELLE aufstellen:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	-3	-1	1	3	5	7

Die y-Werte kann man jeweils ausrechnen, indem man die x-Werte[a] in die Gleichung einsetzt. Zum Beispiel:

$$y = 2 \cdot (-2) + 1 = -4 + 1 = -3$$

a. Sie werden zufällig ausgewählt; von -3 bis 3 ist meistens ein guter Bereich.

Der → y-ACHSENABSCHNITT c gibt den Wert an, an dem der → GRAPH die y-Achse schneidet. Das ist das Zahlenpaar, dessen x-Wert 0 ist: $S_y(\,0 \mid c\,)$.

$$y = m \cdot 0 + c = c \tag{2}$$

Die → STEIGUNG m ist ein Maß dafür, wie steil oder flach der → GRAPH der → GERADEN im Koordinatensystem liegt. Man kann sie bestimmen, indem man an den → GRAPHEN der → GERADEN ein rechtwinkliges Dreieck einzeichnet, dessen eine Kathete parallel zur x-Achse ist und dessen zweite Kathete parallel zur y-Achse ist. Die Größe und Position des Dreiecks spielt dabei keine Rolle. Der Quotient aus der vertikalen Seite Δy und der horizontalen Seite Δx ergibt dann m:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{3}$$

Ein solches Dreieck ist in Abbildung 2 gezeigt.

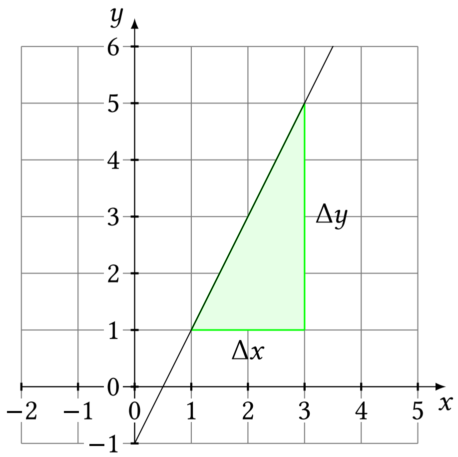


ABBILDUNG 2: Steigung einer Geraden.

2.2 Bestimmung einer Geraden aus zwei Punkten

Hat man zwei Punkte $P(\, x_p \mid y_p \,)$ und $Q(\, x_q \mid y_q \,)$ gegeben, dann ergibt die Differenz ihrer y-Werte Δy und die Differenz ihrer x-Werte Δx. Damit lässt sich die → STEIGUNG dann auch berechnen:

$$m = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} \quad . \tag{4}$$

Wenn man damit m berechnet hat, kann man m und die Werte eines der gegebenen Punkte in die allgemeine Form (Gleichung 1 auf Seite 2) einsetzen und auch den → y-ACHSENABSCHNITT c berechnen. Dadurch kann man eine → FUNKTIONSGLEICHUNG einer Geraden ohne Zeichnung bestimmen.

Beispiel 2.

Eine Gerade geht durch die Punkte $A(\, -2 \mid -3 \,)$ und $B(\, 1 \mid 3 \,)$. Mit Gleichung 4 lässt sich nun die Steigung berechnen:

$$m = \frac{3 - (-3)}{1 - (-2)} = \frac{6}{3} = 2$$

Nun setzt man den Wert der Steigung und die Werte eines der Punkte[a] in Gleichung 1 auf Seite 2 ein und berechnet c:

$$\begin{aligned} -3 &= 2 \cdot (-2) + c \\ -3 &= -4 + c && \mid +4 \\ 1 &= c \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die gesuchte Gleichung zu

$$y = 2x + 1 \quad .$$

a. Die Werte eines Punktes entsprechen immer einem x-Wert und einem y-Wert (alphabetisch!). Sie werden also für x und y eingesetzt.

2.3 Steigungswinkel

Jede Gerade hat auch einen → STEIGUNGSWINKEL. Er ist in Abbildung 3 auf der nächsten Seite eingezeichnet. Man kann dort auch erkennen, dass der gleiche Winkel im Steigungsdreieck auftaucht (Stichwort Stufenwinkel). Da das Steigungsdreieck ein rechtwinkliges Dreieck ist, lässt sich der → STEIGUNGSWINKEL mit dem Tangens[1] aus der Steigung berechnen.

$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arctan(m) \tag{5}$$

arctan ist die „echte“ Schreibweise von $\tan^{-1}$, die heutzutage immer weiter verbreitet ist, da

1. Zur Erinnerung: Gegenkathete durch Ankathete.

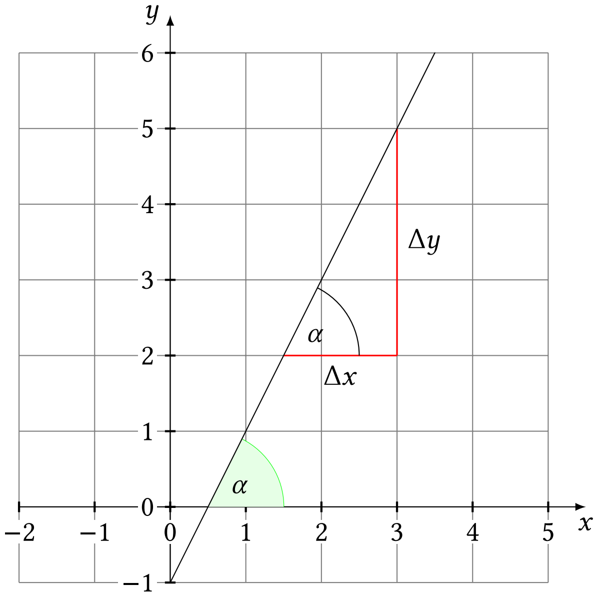


ABBILDUNG 3: Steigungswinkel von Geraden.

Taschenrechner damit beschriftet sind. Korrekt nennt man das „Arcustangens".[2] Wir werden hier ab jetzt auch $\tan^{-1}$ verwenden.

Beispiel 3.

Der Steigungswinkel der Geraden $y = 3x - 1$ berechnet sich zu

$$\alpha = \tan^{-1}(3) = 71{,}6^\circ \quad .$$

Achtung: bei Geraden mit negativer Steigung spuckt der Taschenrechner einen negativen Winkel aus! In diesem Fall muss man 180° addieren. Bei einer Geraden mit $m = -2$ ergibt sich mit

$$\alpha' = \tan^{-1}(-2) = -63{,}4^\circ$$

ein negativer Winkel. Der Steigungswinkel beträgt damit $\alpha = 180^\circ - 63{,}4^\circ = 116{,}6^\circ$.

3 Quadratische Funktionen – Parabeln

3.1 Was ist das?

Quadratische Funktionen sind Funktionen, deren → FUNKTIONSWERT mindestens dadurch gebildet wird, dass der x-Wert mit sich selbst multipliziert wurde. Da auch bei einem Quadrat die Fläche dadurch berechnet wird, dass eine Seite mit sich selbst multipliziert wird, nennt

2. Das entsprechende git übrigens auch für Sinus und Kosinus: $\sin^{-1} \equiv \arcsin$ und $\cos^{-1} \equiv \arccos$.

man „Mit-sich-selbst-multiplizieren“ auch *quadrieren*. Das Ergebnis nennt man das *Quadrat* der entprechenden Zahl. Zum Beispiel ist 9 das Quadrat von 3 (und auch das Quadrat von −3).

Die einfachste Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion ist damit

$$y = x \cdot x \tag{6}$$

oder eher

$$y = x^2 \quad . \tag{7}$$

Die Funktion in Gleichung 7 hat folgende → Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Als Schaubild ergibt sich damit der Graph in Abbildung 4. Den Graph einer quadratischen Funktion nennt man → Parabel und eine Parabel der Form wie in Abbildung 4 nennt man *Normalparabel*.

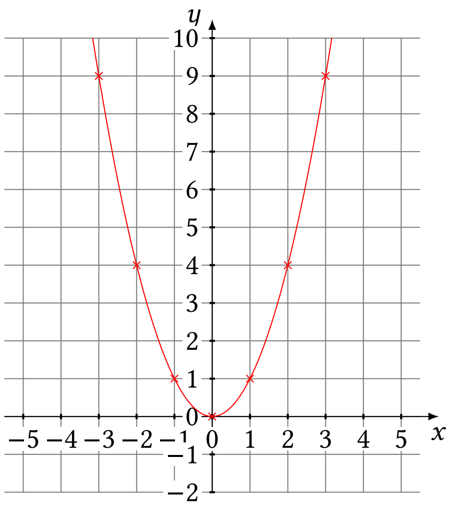


Abbildung 4: Der Graph der Normalparabel (Gleichung 7).

3.2 Normalparabel

Manchmal wird nur die Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ (7) als „Normalparabel“ bezeichnet, meistens meint man aber alle, deren Graphen die gleiche Form wie in Abbildung 4 haben. Das heißt, das x^2 darf bei einer Normalparabel nicht weiter mit einer Zahl multipliziert werden, da das die Form ändern würde. Das Addieren weiterer Terme verschiebt allerdings den Graphen nur. Die allgemeine Form einer Normalparabel lautet damit

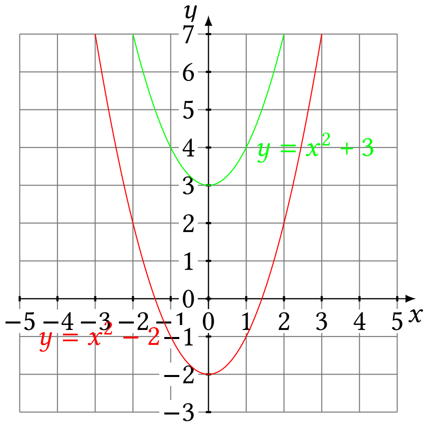
$$y = x^2 + p \cdot x + q \tag{8}$$

Diese Gleichung sollte man sich schon mal merken, da sie der Ansatz für viele verschiedene Aufgabenstellungen ist.

Der Wert q verschiebt die Parabel vertikal[3] und entspricht dem y-Achsenabschnitt

Beispiel 4.

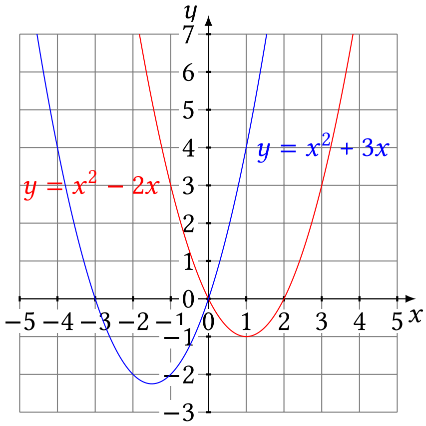
Das Schaubild der Funktion $y = x^2 - 2$ ist eine um 2 Einheiten nach unten geschobene Normalparabel, das der Funktion $y = x^2 + 3$ eine um 3 Einheiten nach oben geschobene:



Der Teil $p \cdot x$ verschiebt die Parabel zwar in x-Richtung, gleichzeitig aber auch in y-Richtung. Es lässt sich zwar vorhersagen, wie das Schaubild verschoben wird, dass muss man aber nicht unbedingt können, darum wird es hier auch nicht näher beschrieben.

Beispiel 5.

Die Schaubilder der Funktionen $y = x^2 - 2x$ und $y = x^2 + 3x$ sind verschobene Normalparabeln:



3. senkrecht, also in y-Richtung

3.3 Allgemeine Form

In der allgemeinen Form wird auch das x^2 mit einer Zahl muliplziert, so dass die Form der Parabel *keine* Normalparabel mehr ist.

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \tag{9}$$

c gibt auch hier den y-Achsenabschnitt an. Sehen wir uns den Fall an, wenn $b = 0$ und $c = 0$. Die Gleichung lautet dann

$$y = a \cdot x^2 \quad . \tag{10}$$

Für die Werte $a = 2$, $a = \frac{1}{3}$ und $a = -3$ sind die Schaubilder in Abbildung 5 dargestellt. Schaubilder, die enger als eine Normalparabel sind, nennt man *gestreckt* und Schaulbilder, die flacher als Normalparabeln sind, nennt man *gestaucht*.

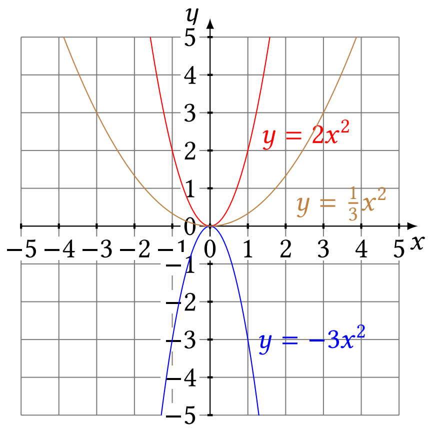


Abbildung 5: Gestreckte und gestauchte Parabeln

3.4 Scheitelform

4 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Nullstellen

5 Gemeinsame Punkte von Funktionen, Schnittpunkte

6 Bestimmung von Funktionsgleichungen

7 Begriffe

Abszisse Ein Fachbegriff für die x-Achse.

Definitionsmenge Die Menge der Zahlen, denen Zahlen aus einer zweiten Menge, der → Wertemenge zugeordnet werden. S. 1

Funktion Eine eindeutige → Zuordnung. Eine Zahl aus der → Definitionsmenge bekommt *genau eine* Zahl aus der → Wertemenge zugeordnet, und zwar so, dass man eindeutig sagen kann, welche es ist. Diese zugeordnete Zahl nennt man auch → Funktionswert. S. 1, 2

Funktionsgleichung Die Vorschrift, nach der man den Wert aus der → Wertemenge bilden kann, der einer Zahl aus der → Definitionsmenge zugeordnet wird. S. 4

Funktionswert Der Wert der → Wertemenge, der einem bestimmten Wert der → Definitionsmenge zugeordnet wird. Oder anders gesagt: der y-Wert, der zu einem bestimmten x-Wert gehört. S. 2, 5

Gerade Eine lineare → Funktion. Ihre Wertepaare liegen im Schaubild alle auf einer geraden Linie. S. 2, 3

Graph Die graphische Darstellung einer → Funktion im Koordinatensystem. S. 2, 3

Ordinate Ein Fachbegriff für die y-Achse.

Ordinatenabschnitt Ein Fachbegriff für den → y-Achsenabschnitt.

Parabel Der → Graph einer quadratischen Funktion. Oft auch als Synonym für *quadratische Funktion* verwendet. S. 6

Steigung Ein Maß dafür, wie steil der → Graph einer → Geraden im Koordinatensystem liegt. S. 2–4

Steigungswinkel Der Winkel, den der → Graph einer → Geraden mit der x-Achse bildet. Er wird aus der → Steigung über $\tan(\alpha) = m$ berechnet. S. 4

Tupel Wertepaare oder Zahlenpaare wie $(1 \mid 2)$. In der Regel werden sie als Koordinaten eines Punktes im Koordinatensystem interpretiert. S. 1

Wertemenge Die Menge der Zahlen, die denen einer ersten Menge, der → Definitionsmenge zugeordnet werden. S. 1

Wertetabelle Eine Tabelle, in der einige → Tupel einer → Zuordnung aufgelistet sind. S. 1, 3, 6

y-Achsenabschnitt Die Stelle, an der der → Graph einer → Geraden die y-Achse schneidet. Man nennt sie auch → Ordinatenabschnitt. S. 2–4

Zuordnung Eine Gruppe von → Tupeln, die nach einer bestimmten Regel gebildet werden. S. 1