Brazilian Journal of Development

A Integral de Riemann-Stieltjes

The Riemann-Stieltjes Integral

DOI:10.34117/bjdv6n6-346

Recebimento dos originais: 15/05/2020
Aceitação para publicação: 15/06/2020

Víctor Marques Fernandes Mozer
Estudante de Engenharia Aeronáutica na Universidade Federal de Uberlândia
Instituição: Universidade Federal de Uberlândia
Endereço: Avenida João Naves de Ávila, 2121, Uberlândia - MG, Brasil
E-mail: vemozer@gmail.com

Marisa de Souza Costa
Doutora em Matemática
Instituição: Universidade Federal de Uberlândia
Endereço: Avenida João Naves de Ávila, 2121, Uberlândia - MG, Brasil
E-mail: marisasc@ufu.br

RESUMO
O intuito do presente trabalho é fazer um breve estudo de um processo de integração que generaliza o conceito da integral de Riemann: a *integral de Riemann-Stieltjes.* Tal método de integração atribui "pesos", definidos por uma função especial $\varphi(x)$, aos intervalos de integração. Apesar de ser mais geral, a integral de Riemann-Stieltjes preserva muitas propriedades da integral de Riemann, algumas delas, apresentadas neste trabalho. Também são apresentados casos especiais em que, sob certas condições sobre a função φ, uma integral de Riemann-Stieltjes pode ser convertida em uma soma ou ainda em uma integral de Riemann.

Palavras-chave: Integral, Riemann-Stieltjes, Critérios de integrabilidade.

ABSTRACT
The purpose of this work is to make a brief study of an integration process that generalizes the concept of the Riemann integral: the Riemann-Stieltjes integral. Such an integration method assigns "weights", defined by a special function φ (x), to the integration intervals. Despite being more general, the Riemann-Stieltjes integral preserves many properties of the Riemann integral, some of which are presented in this work. Special cases are also presented in which, under certain conditions on the φ function, a Riemann-Stieltjes integral can be converted into a sum or even a Riemann integral.

Keywords: Integral, Riemann-Stieltjes, Integrability criteria.

1 INTRODUÇÃO

A integral de Riemann-Stieltjes foi apresentada primeiramente pelo matemático holandês Thomas Joannes Stieltjes em 1894 em seu trabalho [6] e foi criada para suprir algumas limitações trazidas pela integral de Riemann em certas aplicações. A principal diferença entre as duas integrais está no fato de que na integral de Stieltjes, são atribuídos "pesos" aos intervalos de integração. Enquanto na integral de Riemann o peso de cada intervalo é seu próprio tamanho, para Stieltjes, o peso para cada intervalo é definido por uma função real monótona crescente $\varphi(x)$. Podemos dizer que a integral de Riemann-Stieltjes é uma generalização da integral de Riemann, uma vez que a integral de Riemann corresponde à integral de Stieltjes quando $\varphi(x) = x$. Tal generalização é significativamente útil para o tratamento de certos problemas de Análise Funcional e Teoria de Probabilidade (ver [3, 4]).

Consideremos uma função monótona $\varphi: [a, b] \to \mathbb{R}$ não decrescente no intervalo $[a, b]$ e $f: [a, b] \to \mathbb{R}$uma função limitada. Seja $P = \{x_0, \dots, x_n\}$uma partição qualquer de $[a, b]$, na qual $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

As somas superior e inferior de f para P com relação a φ são definidas, respectivamente, por

$$S(f, P, \varphi) = \sum_{t=1}^{n} M_t\, [\varphi(x_t) - \varphi(x_{t-1})], \text{ onde } M_t = sup\{\, f(x)\, ;\, x_{t-1} \leq x \leq x_t\},$$

e

$$s(f, P, \varphi) = \sum_{t=1}^{n} m_t\, [\varphi(x_t) - \varphi(x_{t-1})]\ , \text{ onde } m_t = inf\{\, f(x)\, ;\, x_{t-1} \leq x \leq x_t\}.$$

Dadas duas partições P e P' de $[a, b]$, dizemos que P' é um refinamento de P se $P \subseteq P'$. É fácil verificar que se P' é um refinamento de P, então $S(f, P', \varphi) \leq S(f, P, \varphi)$ e $s(f, P', \varphi) \geq s(f, P, \varphi)$.

A integral superior e a integral inferior de f são definidas, respectivamente, por

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, d\varphi(x) = inf\{\, S(f, P, \varphi)\,\} \text{ e } \underline{\int_a^b} f(x)\, d\varphi(x) = sup\{\, s(f, P, \varphi\,)\},$$

onde o supremo e o ínfimo são tomados entre todas as partições P de $[a,b]$.

Se as integrais superior e inferior de f coincidirem, o valor comum é chamado de *integral de Riemann-Stieltjes*, ou *integral de Stieltjes* e é denotado por

$$\int_a^b f(x)\, d\varphi(x) \text{ ou, simplesmente, } \int_a^b f\, d\varphi.$$

Neste caso, f é dita integrável com relação a φ, ou simplesmente φ-integrável.

Na expressão acima, f é chamada de integrando e φ, integrador.

EXEMPLO: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) = c$, para todo $x \in [a,b]$, $c \in \mathbb{R}$, e $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ a função crescente $\varphi(x) = 2x + 1$, para todo $x \in [a,b]$. Nosso objetivo é determinar o valor da integral $\int_a^b f\, d\varphi$. Para isto, considere uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ qualquer de $[a,b]$. Note que $M_t = m_t = c$, para todo $t = 1, \dots, n$. Assim, temos

$$S(f,P,\varphi) = \sum_{t=1}^{n} M_t[\varphi(x_t) - \varphi(x_{t-1})] = \sum_{t=1}^{n} m_t[\varphi(x_t) - \varphi(x_{t-1})] = s(f,P,\varphi)$$

$$= \sum_{t=1}^{n} c\,[\varphi(x_t) - \varphi(x_{t-1})]$$

$$= c\,[\varphi(t_1) - \varphi(a)] + c[\varphi(t_2) - \varphi(t_1)] + \cdots + c\,[\varphi(t_{n-1}) - \varphi(t_{n-2})] + c\,[\varphi(b) - \varphi(t_{n-1})]$$

$$= c\,[\varphi(b) - \varphi(a)] = c\,[(2b + 1) - (2a + 1)] = c\,(2b - 2a).$$

Como $S(f,P,\varphi) = s(f,P,\varphi) = c(2b - 2a)$, para toda partição P de $[a,b]$, segue que

$$\underline{\int_a}^b c\, d\varphi(x) = c\,(2b - 2a) = \overline{\int_a}^b c\, d\varphi(x),$$

de modo que

$$\int_a^b c\, d\varphi(x) = c\,(2b - 2a).$$

2 CRITÉRIOS DE INTEGRABILIDADE E PROPRIEDADES DA INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES

Consideremos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ não-decrescente.

É necessário conhecer condições para que f seja φ-integrável. O Teorema 1 fornece um critério baseado na existência de partições de $[a, b]$ tais que as somas superiores e inferiores de f com relação a tal partição sejam suficientemente próximas.

2.1 TEOREMA 1:

A função f é φ-integrável se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição P de $[a, b]$ tal que

$$S(f, P, \varphi) - s(f, P, \varphi) < \varepsilon.$$

O resultado a seguir permite aproximar arbitrariamente bem uma integral por somas que envolvem o valor do integrando em pontos escolhidos nos subintervalos da partição tomada. Cabe ressaltar que tal aproximação fica melhor a cada refinamento da partição e, consequentemente, a integral de Riemann-Stieltjes pode ser estimada a partir do refinamento de uma partição qualquer.

2.2 TEOREMA 2

Suponhamos que dados um certo $\varepsilon > 0$ e uma partição $P = \{x_0, \dots, x_n\}$de $[a, b]$, tem-se $S(f, P, \varphi) - s(f, P, \varphi) < \varepsilon$. Se f é uma função φ-integrável e v_t é um ponto qualquer do intervalo $[x_{t-1}, x_t]$, $t = 1, \dots, n$, então

$$\left| \sum_{t=1}^{n} f(v_t) [\varphi(x_t) - \varphi(x_{t-1})] - \int_a^b f \, d\varphi \right| < \varepsilon.$$

Apresentamos a seguir algumas das propriedades principais da integral de Riemann-Stieltjes.

Sejam $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções não decrescentes e $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas e integráveis com relação a φ e a ψ. Então:

1. Para qualquer $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha\, f + g$ é φ-integrável e

$$\int_a^b [\alpha\, f + g]\, d\varphi = \alpha \int_a^b f\, d\varphi + \int_a^b g\, d\varphi.$$

2. Para qualquer constante real positiva α, f é $(\alpha\varphi + \psi)$-integrável e

$$\int_a^b f\, d\,[\alpha\varphi + \psi] = \alpha \int_a^b f\, d\varphi + \int_a^b f\, d\psi.$$

3. A função fg é φ-integrável.

4. Para qualquer $c \in (a, b)$, a função f é φ-integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$, e vale a igualdade

$$\int_a^b f\, d\varphi = \int_a^c f\, d\varphi + \int_c^b f\, d\varphi.$$

5. Se $f \leq g$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f\, d\varphi \leq \int_a^b g\, d\varphi.$$

6. A função $/f/$ é φ-integrável e

$$\left| \int_a^b f\, d\varphi \right| \leq \int_a^b /f/\, d\varphi.$$

7. Se $/f/ \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b /f/\, d\varphi \leq M\, [\varphi(b) - \varphi(a)].$$

É importante observar que, a partir do critério de integrabilidade apresentado no Teorema 1, é possível garantir a Riemann-Stieltjes integrabilidade de algumas classes especiais de funções. Dentre elas, podemos destacar a classe das funções contínuas.

Brazilian Journal of Development

2.3 TEOREMA 3

Se $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f é φ-integrável.

As demonstrações dos resultados apresentados nesta seção podem ser encontradas nas referências [2] e [5].

3 CASOS PARTICULARES

Nesta seção, apresentamos dois casos especiais da integral de Riemann-Stieltjes.

O primeiro deles ocorre quando φ é uma "função escada", ou seja, é constante por partes. Assim, a integral se converte no somatório dos valores de f nos "pontos de salto" de φ, ponderado pelo tamanho de cada "salto".

3.1 PROPOSIÇÃO 1

Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ números reais positivos. Dados $x_1, \dots, x_n \in (a,b)$, em ordem crescente, considere $\varphi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = 0$, se $a \leq x < x_1, \varphi(x) = \sum_{t=1}^{m} \lambda_t$, se $x_m \leq x < x_{m+1}$, desde que $m < n$, e $\varphi(x) = \sum_{t=1}^{n} \lambda_t$, se $x_n \leq x \leq b$. Então, para qualquer função $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ que seja contínua em $x_1, \dots, x_n$, tem-se

$$\int_a^b f\, d\varphi = \sum_{t=1}^{n} \lambda_t\, f(x_t).$$

3.1.1 Demonstração

É suficiente verificar o caso $n = 1$, já que é possível chegar ao caso geral usando indução finita e o item 4 das Propriedades da Integral, dado que

$$\int_a^b f\, d\varphi = \sum_{t=1}^{n+1} \int_{x_{t-\}}}^{x_t} f\, d\varphi.$$

Portanto, podemos supor que $x^* \in (a,b)$, $\lambda > 0$ e $\varphi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\varphi(x) = 0$, se $a \leq x < x^*$ e $\varphi(x) = \lambda$, se $x^* \leq x \leq b$.

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, a continuidade de f em x^*garante que existe um $\delta > 0$ tal que $/ f(x) - f(x^*) / < \varepsilon$ se $/ x - x^* / < \delta$. Tomando a partição $P = \{a, x^* - \delta, x^*, b\}$, tem-se que

$$S(f, P, \varphi) - s(f, P, \varphi) = \lambda \, (\, sup_{x \in [x^* - \delta, x^*]} \; f(x) \; - inf_{x \in [x^* - \delta, x^*]} \; f(x) \,) \; \leq \; 2 \, \lambda \, \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, segue que f é φ-integrável e que

$$\left| \, \lambda \, f(x^*) \; - \; \int_a^b \quad f(x) \, d\varphi(x) \right| \; = \left| \, f(x^*) \, [\varphi(x^*) - \varphi(x^* - \delta)] - \int_a^b \quad f(x) \, d\varphi(x) \right| \; \leq \; 2 \, \lambda \, \varepsilon,$$

em virtude do Teorema 2. Logo, temos que

$$\int_a^b \quad f \, d\varphi \; = \; \lambda \; f(x^*).$$

$\square$

O resultado acima pode ser generalizado para o caso em que o número de subintervalos onde f é constante for infinito. Neste caso a integral de Riemann-Stieltjes se converte em uma série (ver Proposição 2.5 em [1]).

A Proposição 2, trata de um segundo caso especial para a integral de Riemann-Stieltjes, quando φ é diferenciável e sua derivada é Riemann-integrável. Neste caso, a integral de Stieltjes se transforma em uma integral de Riemann e φ atua como uma função peso na integral.

3.2 PROPOSIÇÃO 2

Seja $\varphi : \; [a, b] \; \rightarrow \; \mathbb{R}$ uma função não decrescente, diferenciável tal que φ' é Riemann-integrável. Então, para qualquer função contínua $f \; : \; [a, b] \; \rightarrow \; \mathbb{R}$, $f \; \varphi'$ é Riemann-integrável e

$$\int_a^b \quad f(x) \, d\varphi(x) \; = \int_a^b \quad f(x) \, \varphi'(x) \, dx.$$

3.2.1 Demonstração

Note que $f \; \varphi'$ é Riemann-integrável uma vez que f e φ' o são.

Para $\varepsilon > 0$ arbitrário, tomemos uma partição $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a,b]$ satisfazendo $S(f,P,\varphi) - s(f,P,\varphi) < \varepsilon$ e $S(f\,\varphi', P) - s(f\,\varphi', P) < \varepsilon$, onde $S(f\,\varphi', P)$ e $s(f\,\varphi', P)$ são as somas superior e inferior (no sentido de Riemann) de $f\,\varphi'$ em relação a P, respectivamente.

Fixada a partição P, o Teorema do Valor Médio garante que, para cada $t = 1, \dots, n$, existe $v_t \in [x_{t-1}, x_t]$ tal que

$$\varphi(x_t) - \varphi(x_{t-1}) = \varphi'(v_t)(x_t - x_{t-1}) \quad . \tag{1}$$

Pelo Teorema 2, temos que

$$\left| \sum_{t=1}^{n} f(v_t)\,\varphi'(v_t)(x_t - x_{t-1}) - \int_a^b f\,\varphi'\,dx \right| < \varepsilon$$

e também que

$$\left| \sum_{t=1}^{n} f(v_t)\,[\,\varphi(x_t) - \varphi(x_{t-1})\,] - \int_a^b f\,d\varphi \right| < \varepsilon.$$

Logo, pelas desigualdades acima e por (1), temos que

$$\left| \int_a^b f(x)\,d\varphi(x) - \int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx \right| < 2\,\varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, o resultado segue.

$\square$

Para mais detalhes e resultados sobre a Integral de Riemann-Stieltjes, ver [2] e [5].

REFERÊNCIAS

[1] Santos, C. F. *Polinômios Ortogonais no Círculo Unitário*, Monografia (Graduação) - Curso de Matemática Computacional, Instituto de Ciência e Tecnologia-UNIFESP, São José dos Campos, 2014.

[2] Leite, T. *A Integral de Riemann-Stieltjes*, Monografia (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017.

[3] Manço, R. F. *Integrais e aplicações*. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

[4] Riesz, F; Nagy, B. Sz. *Functional Analysis*. Hungria: Universidades de Budapeste e Szeged, 1956. Traduzido a partir da segunda edição francesa por Leo F. Boron.

[5] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*, 3. ed. New York: McGraw-Hill International, 1976. (International series in pure and applied mathematics).

[6] Stieltjes, T. J.. Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, VIII, p.1-122, 1894.