# Cálculo II

Carlos Gómez-Lobo Hernaiz

# Tema 1. Intrducción al espacio de varias variables $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$

## 1 Vectores, producto escalar y distancia

- En $\mathbb{R}^2$ los puntos, $p \in \mathbb{R}^2$, se representan mediante pares ordenados de números reales, $p = (a, b)$.
  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- En $\mathbb{R}^3$ los puntos, $p \in \mathbb{R}^3$, se representan mediante ternas ordenadas de números reales, $p = (a, b, c)$.
  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
- En $\mathbb{R}^n$ los puntos, $p \in \mathbb{R}^n$, se representan mediante pares ordenados de números reales, $p = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n\}$.

-Definición: Geométricamente, un vector se define como un segmento de recta "orientado" con punto inicial en el origen de coordenadas y punto final en un punto de $\mathbb{R}^n$.

*Observación: Si n=3, la notación habitual parala base canónica es:
$\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$.

### 1.1 Operaciones entre elementos de $\mathbb{R}^{\mathbf{n}} : \tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, ..., \mathbf{x_n})$, $\tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, ...\mathbf{y_n})$

1. Suma: $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$
2. Multiplicación por un escalar, $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$
3. Producto escalar: $<\ \ ,\ \ >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow < \vec{x}, \vec{y} > \overset{\text{not}}{=} \vec{x} \cdot \vec{y} =$

   $= x_1 y_1 + x_2 + y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$

**Propiedades**

Sean $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \quad y \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}$

1. Linealidad: $(\lambda\, \vec{x} + \beta\, \vec{y}) \cdot \vec{z} = \lambda\, \vec{x}\, \vec{z} + \beta\, \vec{y}\, \vec{z}$
2. Conmutativa: $< \vec{x}, \vec{y} > = < \vec{y}, \vec{x} >$
3. $< \vec{x}, \vec{x} > \geq 0$ y $< \vec{x}, \vec{x} > = 0 \iff \vec{x} = \vec{0} = (0, 0, ..., 0)$

-<u>Definición:</u> La **norma euclídea** de un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$(y se escribe $\|\vec{x}\|$) como:
$\|\vec{x}\| = \sqrt{< \vec{x}, \vec{x} >} = \left( \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$.

*<u>Observación:</u> Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\vec{x}\| = 1$, se dice que es **unitario**. Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ un vector no unitario, podemos **normalizarlo**:
$\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \longrightarrow$ vector unitario.

**Significado geométrico de la norma euclídea**

La norma $\|\vec{x}\|$ representa la **longitud** del vector $\vec{x}$. Not.: $long(\vec{x}) = |x| = d(0, x)$.

**Desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$**

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{| < \vec{x}, \vec{y} > | \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{1/2}}$$

<u>Demostración:</u> Tomamos $a = \vec{y} \cdot \vec{y} = \|\vec{y}\|^2$ y $b = -\vec{x} \cdot \vec{y}$ y aplicamos propiedades del producto escalar al vector $a\vec{x} + b\vec{y}$.

-Si $a = 0 \Rightarrow \vec{y} = 0$ ✓

-Si $a \neq 0 \Rightarrow 0 \leq (a\vec{x} + b\vec{y})(a\vec{x} + b\vec{y}) = a^2 \vec{x}\, \vec{x} + 2ab\vec{x}\vec{y} + b^2 \vec{y}\vec{y} =$
$= \|\vec{y}\|^4 \cdot \|\vec{x}\|^2 - 2\, \|\vec{y}\|^2\, (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 + (-\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{y}\|^4 \cdot \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \leq \|\vec{y}\|^2 \cdot \|\vec{x}\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \Rightarrow (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \Rightarrow |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ ✓

$-\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \leq <\vec{x},\vec{y}> \leq \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \Rightarrow -1 \leq \frac{<\vec{x},\vec{y}>}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|} \leq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos\theta \overset{\text{def}}{=} \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|} \iff <\vec{x},\vec{y}> = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\,\cos\theta$

-<u>Definición:</u> Dos vectores $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ son **perpendiculares/ortogonales** si y solo si $<\vec{x},\vec{y}> = 0$. Not.: $\vec{x}\perp\vec{y}$.

### Teorema de Pitágoras en $\mathbb{R}^n$

Sean $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ tal que $\vec{x}\perp\vec{y}$, entonces:

$$\boxed{\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2}$$

<u>Demostración:</u> $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y})(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}\vec{x} + \cancelto{0}{2\vec{x}\vec{y}} + \vec{y}\vec{y} = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

### Teorema del coseno

Sean $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ vectores cualesquiera, entonces:

$$\boxed{\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\,\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\,\cos\theta}$$

<u>Demostración:</u> $\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = (\vec{x}-\vec{y})(\vec{x}-\vec{y}) = \vec{x}\vec{x} - 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}\vec{y} =$
$= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\,\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\,\cos\theta$

### Propiedades de la norma euclídea

Sea $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ y $\lambda\in\mathbb{R}$:

$(i)\|\vec{x}\| \geq 0$ y $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$
$(ii)\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{x}\|$
$(iii)$Desigualdad tiangular: $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$
$(iv)$Desigualdad triangular al revés: $\big|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\big| \leq \|\vec{x}-\vec{y}\|$

<u>Demostraciones:</u>

$(i)\ \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \geq 0$ y $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = 0 \iff$
$\iff x_1, x_2, ..., x_n = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

$(ii)\ \|\lambda\vec{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^2\, x_i^2\right)^{1/2} = \sqrt{\lambda^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = |\lambda|\, \|\vec{x}\|$

$(iii) \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y})(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}\vec{x}+2\vec{x}\vec{y}+\vec{y}\vec{y} \overset{\text{C-S}}{\leq} \|\vec{x}\|^2+2\,\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|+\|\vec{y}\|^2 =$
$= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \Rightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

-<u>Definición:</u> Una **distancia/métrica** es una función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ tal que cumple:

(1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
(2) $d(x,y) = d(y,x)$
(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

-<u>Definición:</u> La **distancia euclídea** entre dos puntos $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ se define como:

$$\boxed{d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + ... + (x_n+y_n)^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2} = \|\vec{x} - \vec{y}\|}$$

(1) $\|\vec{x} - \vec{y}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$
(2) $\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{y} - \vec{x}\|$
(3) $\|\vec{x} - \vec{z}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\|$

# 2 Conceptos métricos en el espacio euclídeo en $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$

## 2.1 Bolas abiertas y conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$

-<u>Definiciones:</u>

(1) Dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un número real $r > 0$, llamaremos **bola abierta** de centro $x_0$ y radio $r$ (y escribiremos $B_r(x_0)$ o $B(x_0, r)$al conjunto:

$$\boxed{B_r(x_0) \overset{\text{not}}{=} B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}}$$

$n = 1 \to x_o \in \mathbb{R} \quad -r < x - x_o < r$
$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : x \in (x_0 - r, x_0 + r)\}$

$n = 2 \to (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$
$B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\|(x - y) - (x_0 - y_0)\|}_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r\}$
$n = 3 \to (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$
$B_r(x_0, y_0, z_0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r$

(2) Decimos que $A \in \mathbb{R}^n$ es un **conjunto abierto** si $\forall x_0 \in A \ \exists r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset A$.

(3) Un **entorno** del punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto que lo contiene.

- Proposición 1: Si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0 \Rightarrow$ la bola abierta $B_r(x_0)$ es un conjunto abierto.

  Demostración: $\forall x \in B_r(x_0) \, \exists s \in \mathbb{R}, s > 0$ tal que $B_s(x) \subset B_r(x_0)$.

  Basta con tomar $s = r - \|x - x_0\|$, entonces $\forall y \in B_s(x) \quad \|y - x_0\| =$
  $= \|y - x + x - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < s + \|x - x_0\| = r - \|x - x_0\| + \|x - x_0\| = r$

  Ejemplo: Demostrar que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ es un conjunto abierto.

  $\forall (x_0, y_0) \in A \ \exists r : B_r(x_0, y_0) \subset A$, es decir, $y_0 > 0$
  Basta con tomar $r = y_0 > 0$.
  $\forall (a, b) \in B_r(x_0, y_0) \Rightarrow$ ¿$(a, b) \in A$, es decir, $b > 0$?
  Como $(a, b) \in B_r(x_0, y_0) \Rightarrow \|(a, b) - (x_0, y_0)\| < r = y_0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (a - x_0)^2 + (b - y_0)^2 < y_0^2 \Rightarrow (b - y_0)^2 < y_0^2 \Rightarrow -y_0 < b - y_0 < y_0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 0 < b < 2y_0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow (a, b) \in A$

- Proposición 2: La unión (finita o infinita) de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

- Proposición 3: La intersección finita de abiertos es un conjunto abierto.

  *Observación: La intersección finita de abiertos no es, en general, un abierto.

Demostración: $\{A_1, A_2, ..., A\}$ conjuntps abiertos y $A = \bigcap_1^n A$. ¿A es un conjunto abierto?

Dado $x \in A \Rightarrow x \in A_1, x \in A - 2, ..., x \in A_n \Rightarrow \exists r_1, r_2, ..., r_n$ tal que $B_{r_1}(x) \subset A_1, B_{r_2}(x) \subset A_2, ..., B_{r_n}(x) \subset A_n$, tomando $r \leq min\{r_i\}^{n_i=1} \Rightarrow B_r(x) \subset \bigcap_1^n A_i = A$.

## 2.2 Límites de sucesiones en $\mathbb{R}^n$. Completitud.

-Definición: Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es una colección de n sucesiones en $\mathbb{R}$ : $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Ejemplos: $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{\left(k, \frac{1}{k^2}, e^{-k}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ ; $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{\left(\frac{3k^2}{k^2-1}, \frac{1}{k}, \log\frac{k+1}{k}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$.

-Definición: Dada una sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ y un punto $L \in \mathbb{R}^n$, diremos que el límite de $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es $L$ y escribimos:

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} A_k = L \iff \forall\epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \|A_k - L\| < \epsilon \ \forall k > N, \text{ es decir, } \forall k > N \ \ A_k \in B_\epsilon(l)}$$

• Lema: Dada una sucesión en $\mathbb{R}^n$ : $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ y un punto $L = (l_1, l_2, ..., l_n) \in \mathbb{R}^n$, se tiene:

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} A_k = L \iff \lim_{k\to\infty} a_i^k = l_i \ \ \forall i = 1, 2, ..., n}$$

Demostración: $\Rightarrow$) Queremos ver que $\forall\epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : |a_i^k - l_i| < \epsilon \ \forall k > N \forall i = 1, 2, ..., n$.

$|a_i^k - l_i| = \sqrt{(a_i^k - l_i)^2} \leq \sqrt{(a_1^k - l_1)^2 + (a_1^k - l_2)^2 + ... + (a_i^k - l_i)^2 + ... + (a_n - l_n)^2} =$
$= \|A_k - L\| \leq \epsilon$ ✓

$\Leftarrow$) Como $\lim_{k\to\infty} a_i^k = l \ \forall i = 1, 2, ..., n$, sabemos que $\forall\epsilon > 0$ :

$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_1^k - l_1| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \ \ \forall k > N_1$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_2^k - l_2| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \ \ \forall k > N_2$

$\vdots$

$\exists N_n \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n^k - l_n| < \dfrac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ $\forall k > N_n$

Entonces, $\forall k \geq \max\{N_1, N_2, ..., N_n\}$ tenemos simultáneamente que $|a_i^k - l_k| < \dfrac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ $\forall i = 1, 2, ..., n$, por tanto:

$\|A_k - L\| = \sqrt{(a_1^k - l_1)^2 + (a_1^k - l_2)^2 + ... + (a_i^k - l_i)^2 + ... + (a_n - l_n)^2} \leq$

$\leq \sqrt{n\left(\dfrac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \epsilon$ ✓

Ejemplo: Hallar el límite $\lim\limits_{k\to\infty} \left\{\left(\dfrac{\log x}{x^2}, \dfrac{x^2-1}{5x^2}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\log k}{k^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1/k}{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2k^2} = 0 \\ \lim_{k\to\infty} \dfrac{x^2-1}{5x^2} = \dfrac{1}{5} \end{array}\right\} \lim\limits_{k\to\infty} \left\{\left(\dfrac{\log x}{x^2}, \dfrac{x^2-1}{5x^2}\right)\right\} = (0, 5)$$

-Definición: La propiedad de completitud dice que toda sucesión de Cauchy converge en el espacio.

-Definición: Una sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ si $\forall \epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ : $\|A_{k_1} - A - k_2\| < \epsilon$ $\forall k_1, k_2 > N$.

• Teorema: El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es completo, es decir, tosa sucesión de Cauchy es convergente.

Demostrción: Pendiente como ejercicio.

## 2.3 Más sobre la topología de $\mathbb{R}^n$

-Definición: Sea $A$ un conjunto de $\mathbb{R}^n$. Diremos que un punto $x \in A$ es un punto interior de $A$ si $\exists r > 0$ tal que $B_r(x) \in A$. Al conjunto de puntos interiores de $A$ se le denota $\mathring{A} \overset{\text{not}}{=} int(A)$.