Cálculo II

Carlos Gómez-Lobo Hernaiz

Tema 1. Intrducción al espacio de varias variables $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$

1 Vectores, producto escalar y distancia

- En $\mathbb{R}^2$ los puntos, $p \in \mathbb{R}^2$, se representan mediante pares ordenados de números reales, $p = (a, b)$.
  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- En $\mathbb{R}^3$ los puntos, $p \in \mathbb{R}^3$, se representan mediante ternas ordenadas de números reales, $p = (a, b, c)$.
  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
- En $\mathbb{R}^n$ los puntos, $p \in \mathbb{R}^n$, se representan mediante pares ordenados de números reales,
  $p = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n\}$.

-Definición: Geométricamente, un **vector** se define como un segmento de recta "orientado" con punto inicial en el origen de coordenadas y punto final en un punto de $\mathbb{R}^n$.

*Observación: Si n=3, la notación habitual parala base canónica es: $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$.

1.1 Operaciones entre elementos de $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$: $\vec{\boldsymbol{x}} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, ..., \mathbf{x_n})$,$\vec{\boldsymbol{y}} = (\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, ...\mathbf{y_n})$

1. Suma: $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$
2. Multiplicación por un escalar, $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$
3. Producto escalar: $< \quad , \quad >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow < \vec{x}, \vec{y} > \overset{\text{not}}{=} \vec{x} \cdot \vec{y} =$
   $= x_1 y_1 + x_2 + y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$

Propiedades

Sean $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \quad y \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}$

1. Linealidad: $(\lambda\,\vec{x} + \beta\,\vec{y}) \cdot \vec{z} = \lambda\,\vec{x}\,\vec{z} + \beta\,\vec{y}\,\vec{z}$
2. Conmutativa: $< \vec{x}, \vec{y} > = < \vec{y}, \vec{x} >$
3. $< \vec{x}, \vec{x} > \geq 0$ y $< \vec{x}, \vec{x} > = 0 \iff \vec{x} = \vec{0} = (0, 0, ..., 0)$

-Definición: La **norma euclídea** de un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$(y se escribe $\|\vec{x}\|$) como: $\|\vec{x}\| = \sqrt{< \vec{x}, \vec{x} >} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$.

$\star$ Observación: Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\vec{x}\| = 1$, se dice que es **unitario**. Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ un vector no unitario, podemos **normalizarlo**:
$\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \rightarrow$ vector unitario.

Significado geométrico de la norma euclídea

La norma $\|\vec{x}\|$ representa la **longitud** del vector $\vec{x}$. Not.: $long(\vec{x}) = |x| = d(0,x)$.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{|<\vec{x},\vec{y}>| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}}$$

<u>Demostración:</u> Tomamos $a = \vec{y}\cdot\vec{y} = \|\vec{y}\|^2$ y $b = -\vec{x}\cdot\vec{y}$ y aplicamos propiedades del producto escalar al vector $a\vec{x}+b\vec{y}$.

-Si $a = 0 \Rightarrow \vec{y} = 0$ ✓

-Si $a \neq 0 \Rightarrow 0 \leq (a\vec{x}+b\vec{y})(a\vec{x}+b\vec{y}) = a^2\vec{x}\,\vec{x}+2ab\vec{x}\vec{y}+b^2\vec{y}\vec{y} = \|\vec{y}\|^4\cdot\|\vec{x}\|^2 - 2\,\|\vec{y}\|^2\,(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 + (-\vec{x}\cdot\vec{y})^2\cdot\|\vec{y}\|^2 =$
$= \|\vec{y}\|^4\cdot\|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2\cdot(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \Rightarrow 0 \leq \|\vec{y}\|^2\cdot\|\vec{x}\|^2 - (\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \Rightarrow (\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \leq \|\vec{x}\|^2\cdot\|\vec{y}\|^2 \Rightarrow |\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$ ✓

- $\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \leq <\vec{x},\vec{y}> \leq \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \Rightarrow -1 \leq \frac{<\vec{x},\vec{y}>}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|} \leq 1 \Rightarrow \cos\theta \overset{\text{def}}{=} \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|} \iff <\vec{x},\vec{y}>=$
$= \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\,\cos\theta$

- <u>Definición:</u> Dos vectores $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ son **perpendiculares/ortogonales** si y solo si $<\vec{x},\vec{y}>= 0$. Not.: $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Teorema de Pitágoras en $\mathbb{R}^n$

Sean $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{x} \perp \vec{y}$, entonces:

$$\boxed{\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2}$$

<u>Demostración:</u> $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y})(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}\vec{x} + \cancelto{0}{2\vec{x}\vec{y}} + \vec{y}\vec{y} = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$ ✓

Teorema del coseno

Sean $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ vectores cualesquiera, entonces:

$$\boxed{\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\,\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\,\cos\theta}$$

<u>Demostración:</u> $\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = (\vec{x}-\vec{y})(\vec{x}-\vec{y}) = \vec{x}\vec{x} - 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}\vec{y} =$
$= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\,\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\,\cos\theta$ ✓

Propiedades de la norma euclídea

Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

$(i)\|\vec{x}\| \geq 0$ y $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$

$(ii)\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$

(iii)Desigualdad tiangular: $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

(iv)Desigualdad triangular al revés: $\big|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\big| \leq \|\vec{x}-\vec{y}\|$

Demostraciones:

(i) $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2} \geq 0$ y $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2} = 0 \iff x_1, x_2, ..., x_n = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

$$(ii)\ \|\lambda\vec{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^2\, x_i^2\right)^{1/2} = \sqrt{\lambda^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = |\lambda|\, \|\vec{x}\|$$

$$(iii)\ \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y})(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}\vec{x} + 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}\vec{y} \overset{\text{C-S}}{\leq} \|\vec{x}\|^2 + 2\,\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

-Definición: Una **distancia/métrica** es una función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ tal que cumple:

(1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(2) $d(x,y) = d(y,x)$

(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

-Definición: La **distancia euclídea** entre dos puntos $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ se define como:

$$\boxed{d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + ... + (x_n+y_n)^2} = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2} = \|\vec{x}-\vec{y}\|}$$

(1) $\|\vec{x}-\vec{y}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$

(2) $\|\vec{x}-\vec{y}\| = \|\vec{y}-\vec{x}\|$

(3) $\|\vec{x}-\vec{z}\| \leq \|\vec{x}-\vec{y}\| + \|\vec{y}-\vec{z}\|$

2 Conceptos métricos en el espacio euclídeo en $\mathbb{R}^n$

2.1 Bolas abiertas y conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$

-Definiciones:

(1) Dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un número real $r > 0$, llamaremos **bola abierta** de centro x_0 y radio r (y escribiremos $B_r(x_0)$ o $B(x_0, r)$al conjunto:

$$\boxed{B_r(x_0) \overset{\text{not}}{=} B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}}$$

$n = 1 \to x_o \in \mathbb{R} \quad -r < x - x_o < r$
$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : x \in (x_0 - r, x_0 + r)\}$

$n = 2 \rightarrow (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$
$B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\|(x-y) - (x_0 - y_0)\|}_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r\}$
$n = 3 \rightarrow (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$
$B_r(x_0, y_0, z_0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 < r$

(2) Decimos que $A \in \mathbb{R}^n$ es un **conjunto abierto** si $\forall x_0 \in A\ \exists r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset A$.

(3) Un **entorno** del punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto que lo contiene.

- Proposición 1: Si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0 \Rightarrow$ la bola abierta $B_r(x_0)$ es un conjunto abierto.

  Demostración: $\forall x \in B_r(x_0)\ \exists s \in \mathbb{R}, s > 0$ tal que $B_s(x) \subset B_r(x_0)$.

  Basta con tomar $s = r - \|x - x_0\|$, entonces $\forall y \in B_s(x) \quad \|y - x_0\| =$
  $= \|y - x + x - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < s + \|x - x_0\| = r - \|x - x_0\| + \|x - x_0\| = r$

  Ejemplo: Demostrar que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ es un conjunto abierto.

  $\forall (x_0, y_0) \in A\ \ \exists r : B_r(x_0, y_0) \subset A$, es decir, $y_0 > 0$
  Basta con tomar $r = y_0 > 0$.
  $\forall (a, b) \in B_r(x_0, y_0) \Rightarrow$ ¿$(a, b) \in A$, es decir, $b > 0$?
  Como $(a, b) \in B_r(x_0, y_0) \Rightarrow \|(a, b) - (x_0, y_0)\| < r = y_0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (a - x_0)^2 + (b - y_0)^2 < y_0^2 \Rightarrow (b - y_0)^2 < y_0^2 \Rightarrow -y_0 < b - y_0 < y_0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 0 < b < 2y_0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow (a, b) \in A$

- Proposición 2: La unión (finita o infinita) de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

- Proposición 3: La intersección finita de abiertos es un conjunto abierto.

  *Observación: La intersección finita de abiertos no es, en general, un abierto.

  Demostración: $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ conjuntos abiertos y $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. ¿A es un conjunto abierto?

  Dado $x \in A \Rightarrow x \in A_1, x \in A_2, ..., x \in A_n \Rightarrow \exists r_1, r_2, ..., r_n$ tal que $B_{r_1}(x) \subset A_1, B_{r_2}(x) \subset A_2, ..., B_{r_n}(x) \subset A_n$, tomando $r \leq min\{r_i\}^{n_i=1} \Rightarrow B_r(x) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A$.

2.2 Límites de sucesiones en $\mathbb{R}^\mathbf{n}$. Completitud.

-Definición: Una **sucesión en $\mathbb{R}^\mathbf{n}$** es una colección de n sucesiones en $\mathbb{R} : \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Ejemplos: $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{\left(k, \frac{1}{k^2}, e^{-k}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}; \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{\left(\frac{3k^2}{k^2-1}, \frac{1}{k}, \log\frac{k+1}{k}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$.

-Definición: Dada una sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ y un punto $L \in \mathbb{R}^n$, diremos que el límite de $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es L y escribimos:

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} A_k = L \iff \forall \epsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N} : \|A_k - L\| < \epsilon\ \ \forall k > N, \text{ es decir, } \forall k > N\ \ A_k \in B_\epsilon(l)}$$

• Lema: Dada una sucesión en $\mathbb{R}^n : \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ y un punto $L = (l_1, l_2, ..., l_n) \in \mathbb{R}^n$, se tiene:

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} A_k = L \iff \lim_{k\to\infty} a_i^k = l_i\ \ \forall i = 1, 2, ..., n}$$

Demostración: $\Rightarrow$) Queremos ver que $\forall \epsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N} : |a_i^k - l_i| < \epsilon\ \ \forall k > N \forall i = 1, 2, ..., n$.

$|a_i^k - l_i| = \sqrt{(a_i^k - l_i)^2} \leq \sqrt{(a_1^k - l_1)^2 + (a_1^k - l_2)^2 + ... + (a_i^k - l_i)^2 + ... + (a_n - l_n)^2} = \; = \|A_k - L\| \leq \epsilon$ ✓

$\Leftarrow$) Como $\lim\limits_{k\to\infty} a_i^k = l \;\; \forall i = 1,2,...,n$, sabemos que $\forall \epsilon > 0$:

$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_1^k - l_1| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \;\; \forall k > N_1$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_2^k - l_2| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \;\; \forall k > N_2$

$\vdots$

$\exists N_n \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n^k - l_n| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \;\; \forall k > N_n$

Entonces, $\forall k \geq \max\{N_1, N_2, ..., N_n\}$ tenemos simultáneamente que $|a_i^k - l_k| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \;\; \forall i = 1,2,...,n$, por tanto:

$\|A_k - L\| = \sqrt{(a_1^k - l_1)^2 + (a_1^k - l_2)^2 + ... + (a_i^k - l_i)^2 + ... + (a_n - l_n)^2} \leq$

$\leq \sqrt{n\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \epsilon$ ✓

Ejemplo: Hallar el límite $\lim\limits_{k\to\infty}\left\{\left(\frac{\log x}{x^2}, \frac{x^2-1}{5x^2}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\log k}{k^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1/k}{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2k^2} = 0 \\ \lim_{k\to\infty} \frac{x^2-1}{5x^2} = \frac{1}{5} \end{array}\right\} \lim_{k\to\infty}\left\{\left(\frac{\log x}{x^2}, \frac{x^2-1}{5x^2}\right)\right\} = (0,5)$$

-Definición: La **propiedad de completitud** dice que toda sucesión de Cauchy converge en el espacio.

-Definición: Una sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de **Cauchy** en $\mathbb{R}^n$ si $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} : \|A_{k_1} - A - k_2\| < \epsilon \;\; \forall k_1, k_2 > N$.

- Teorema: El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es **completo**, es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente.

  Demostrción: Pendiente como ejercicio.

2.3 Más sobre la topología de $\mathbb{R}^n$

-Definición: Sea A un conjunto de $\mathbb{R}^n$. Diremos que un punto $x \in A$ es un **punto interior** de A si $\exists r > 0$ tal que $B_r(x) \in A$. Al conjunto de puntos interiores de A se le denota $\mathring{A} \overset{\text{not}}{=} int(A)$.

Ejercicio 1: Dado $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, |y| \leq 1\}$. Hallar $\mathring{A}$.

1) $\forall (x,y) \mathbb{N} A : |y| = 1 \Rightarrow (x, \pm 1)(\text{ con } |x| < 1) \;\; (x,1) \in A, \forall r > 0 \to$

$\to (x, 1 + r/2) \overset{?}{\in} A \;\; |1 + r/2| = 1 + r/2 > 1 \Rightarrow B_r(x,1) \not\subset A$

2) $\forall (x,y) \subset A \;\; |x|,|y| < 1$:

$$* \;\; \left.\begin{array}{l} r \leq 1 - |x| donde |y| \leq |x| \\ r \leq 1 - |y| donde |x| \leq |y| \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{en cualquier caso } r = 1 - \max\{|x|,|y|\} = \\ = \min\{1 - |x|, 1 - |y|\} \end{array}$$

Tenemos que ver que $B_r(x,y) \subset A$, es decir, $\forall (a,b) \in B_r(x,y)$ se tiene que $|a| < 1$ y $|b| \leq 1 \Rightarrow (a,b) \in A$

$|a| = |a - x + x| \overset{\text{D.T.}}{\leq} \underbrace{|a - x|}_{\sqrt{(a-x)^2}} + |x| \leq \underbrace{\|(a,b) - (x,y)\|}_{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}} + |x| < r + |x| \overset{*}{\leq}$

$\overset{*}{\leq} 1 - |x| + |x| = 1$

$|b| = |b-y+y| \overset{\text{D.T.}}{\leq} |b-y| + |y| < r + |y| \leq 1 - |y| + |y| = 1$

$\forall (a,b) \in B_r(x,y)$ se tiene que $(a,b) \in A$ ✓

- Propiedades:

 (1) $\mathring{A}$ es un conjunto abierto.

 (2) $\mathring{A} \subset A$.

 (3) Si A es un conjunto abierto, entonces $\mathring{A} = A$.

-Definición: Diremos que un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es un **conjunto cerrado** si su complementario $C^c \subset \mathbb{R}^n$, es un conjunto abierto.

Ejercicio 2: Demostrar que la bola $C = \{(x,y) : \underbrace{x^2+y^2 \leq R^2}_{\|(x,y)\|} \leq R\}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$.

C cerrado en $\mathbb{R}^2$ si $C^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2}_{\|(x,y)\|} > R\}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$, es decir, $\forall (x_0,y_0) \in C^c\ \exists r > 0 : B_r(x_0,y_0) \subset C^c$.

Tomamos $r = \|(x_0,y_0)\| - R \Rightarrow \forall (a,b) \in B_r(x_0,y_0)$, ¿$a,b \in C^c$, es decir, $\|(a,b)\| > \quad > R$?

$\|(x_0,y_0)\| = \|(x_0,y_0)-(a,b)+(a,b)\| \overset{\text{D.T.}}{\leq} \underbrace{\|(x_0,y_0)-(a,b)\|}_{<r=\|(x_0,y_0)\|-R} + \|(a,b)\| < \quad < \|(x_0,y_0)\| - R + \|(a,b)\| \Rightarrow$

$\|(x_0,y_0)\| < \|(x_0,y_0)\| - R + \|(a,b)\| \Rightarrow$
$\Rightarrow R < \|(a,b)\|$ ✓

- Proposición 1:

 (i) La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

 (ii) La intersección (infinita o finita) de conjuntos cerrados, es un conjunto cerrado.

 ∗Observación: La unión infinita de conjuntos cerrados no es, en general, un conjunto cerrado.

 -Bolas **abiertas** en $\mathbb{R}^2$: $B_R(x_0,y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < R^2}_{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<R}\}$

 -Bolas **cerradas** en $\mathbb{R}^2$: $\overline{B_R(x_0,y_0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq R^2}_{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|\leq R}\}$

∗Observación 1: No todos los conjuntos de $\mathbb{R}^n$ son necesariamente abiertos o cerrados.

∗Observación 2: El vacío y $\mathbb{R}^n$ (por convención) son abiertos y cerrados al mismo tiempo.

- Proposición 2 (Caracterización de los conjuntos cerrados por sucesiones):

$$\boxed{C \subset \mathbb{R}^n \text{ es un cerrado } \iff \forall A_{k\, k\in\mathbb{N}} \subset C \text{ con } \lim_{k\to\infty} A_k = L \text{ se tiene que } L \in C}$$

Demostrción: Argumentamos (en ambas implicaciones) por reducción al absurdo:

$\Rightarrow$) Supongamos que $L \notin C \Rightarrow L \in C^c$ abierto $\Rightarrow \exists r > 0$ tal que $B_r(L) \subset C^c$. Como $\lim_{k\to\infty} A_k = L$, $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|A_k - L| > \epsilon\ \forall k > N$, es decir, $A_k \in B_\epsilon(L)\ \forall k > N$. Si tomamos $\epsilon = r : A_k \in B_r(L)$ Contradicción $A_k \in C$ y
$B_r(L) \subset C^c$

$\Leftarrow$) Supongamos que C no es un cerrado $\Rightarrow C^c$ no es un abierto $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists x_0 \in C^c$ tal que $\forall r > 0 \;\; B_r(x) \not\subset C^c$, es decir, $B_r(x_0) \cap C \neq \emptyset \;\; \forall r > 0$. Tomamos
$r = \dfrac{1}{k} \Rightarrow B_{1/k}(x_0) \cap C \neq \emptyset \Rightarrow \exists \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B_{1/k} \cap C, \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \to x_0 \in C$
Contradicción porque $x_0 \subset C^c$.

-Definición: Sea C un conjunto cualquiera en $\mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, diremos que x es un **punto de adherencia/clausura** de C si $\forall r > 0 \;\; B_r(x) \cap C \neq \emptyset$ y el conjunto de puntos que cumplen esta condición se denota:

$$\boxed{\overline{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0 \;\; B_r(x \cap C \neq \emptyset\}}$$

Propiedades:

(1) $\overline{C}$ es un conjunto cerrado.

(2) $C \subset \overline{C}$.

(3) Si C es cerrado $C = \overline{C}$.

Ejercicio 3: Sea $C = \left\{ \left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k} \right) \right\}_{k\in\mathbb{N}}$probar que $C \in \overline{C}$.
$\lim\limits_{k\to 0} \left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k} \right) = (0,0) \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N$ tal que $\| \left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k} \right) - (0,0)\| < \epsilon$
$\forall k > N$. Basta tomar $r = \epsilon \Rightarrow \left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k} \right) \in B_\epsilon(0,0) \forall k \geq N \Rightarrow$
$\Rightarrow C \cap B_r(0,0) \neq \emptyset$

-Definición: Sea C un conjunto cualquiera de $\mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Diremos que x es un **punto de acumulación** de C si $\forall r > 0 \;\; B_r(x) \setminus \{x\} \cap C \neq \emptyset$. A los puntos de acumulación se los denota por C'.

Propiedades:

(1) $C' \subset \overline{C}$

(2) En general $\overline{C} \not\subset C'$

-Definición: Los puntos de adherencia que no son de acumulación ($\overline{C} \setminus C'$) se llaman **puntos aislados**, es decir, $x \in R^n$ es un punto aislado de un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ si $\exists r > 0$ tal que $B_r(x) \cap C = \{x\}$.

-Definición: Sea $C \subset \mathbb{R}^n$, diremos que un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un **punto frontera** de C si $\forall r > 0$ se tiene que $B_r(x) \cap C \neq \emptyset$ y $x \notin \mathring{C}$.A este conjunto de puntos se le denota por ∂C.

-Definición: Un conjunto cualquiera $C \subset \mathbb{R}^n$ está **acotado** si $\exists M \in \mathbb{R}$,
$M > 0$ tal que $\forall x \in C$ se tiene que $\|x\| < M$, es decir, $C \subset B_M(0, ..., 0)$.

-Definición: Un **recubrimiento numerable por abiertos** de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es una colección numerable de abiertos $\{A_i\}$ tal que $S \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

-Definición: Un conjunto es **compacto** si para todo recubrimiento por abiertos del conjunto se puede extraer un subrecubrimiento finito.

- Teorema de Heine-Borel: $C \subset \mathbb{R}^n$ es compacto $\iff$ C es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1: $B_r(x_0, y_0)$ no compactos (n son cerrados).

Ejemplo 2: $\overline{B_r(x_0, y_0)}$ si son compactos.

Ejemplo 3: $S = \left\{ \left(\frac{(-1)^k}{k}, \frac{1}{k^2} \right) \right\}_{k\in\mathbb{N}}$

Por la proposición 2, como $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k}, \frac{1}{k^2} \right) = (0,0)$ y $(0,0) \notin S$, no es cerrado y por el teorema de Heine-Borel no es compacto.

Ejemplo 4: $S = \{(k, k^2+1)\}_{k\in\mathbb{N}}$ no está acotado, por tanto por el teorema de Heine-Borel tampoco es compacto.

• Teorema de Bolzano-Weierstrass: Si C es un conjunto de infinitos elementos y acotado $\Rightarrow C' \neq \emptyset$. Es decir, toda sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definida en un compacto C posee una subsucesión convergente en C.

2.4 Funciones de varias variables y superficies de nivel

-Definición: Llamamos **función de varias variables** a la función:

$$\boxed{\begin{array}{c} f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ (x_1, x_2, x_n) \to (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_n(x_1, ...x_n)) \end{array}}$$

Si $m > 1$, entonces $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$ y se llama **función escalar**.

Si $m > 1$, entonces se llama **función vectorial**.

-Definición: Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, llamaremos **gráfica** de f al subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1} : (x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

-Definición: Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $C \in \mathbb{R}$, el **conjunto de nivel** del valor C son los puntos : $\{x \in D : f(x) = C\}$.
$n = 2 :$ curvas de nivel.
$n = 3 :$ superficies de nivel.

Ejemplo 1: Usando curvas de nivel. describir la gráfica $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Curvas de nivel: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = C, C \geq 0\}$
$C = 0 \to x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x, y) = 0$
$C = 1 \to x^2 + y^2 = 1^2 \Rightarrow$ Circunferencia de radio 1
$C = 4 \to x^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow$ Circunferencia de radio 2
$C = 9 \to x^2 + y^2 = 3^2 \Rightarrow$ Circunferencia de radio 3

Ejemplo 2: Describir las superficies de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Superficies de nivel: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = C, C \geq 0\} = \quad =$ esferas de radio $\sqrt{C}$.

Tema 2. Cálculo diferencial en varias variables

1 Límites y continuidad

1.1 Límites

-Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $x_0 \in A'$ y $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función escalar. Dado $L \in \mathbb{R}$ diremos que el **límite** de $f(x)$ es L cuando x tiende a x_0:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \ \forall x \in A}$$

O lo que es lo mismo:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(L)}$$

Ejemplo 1: Demuestra, usando la definición, que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2x^2 + y^2 = 0$.

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow |(2x^2 + y^2) - 0| < \epsilon$

$\underbrace{\sqrt{x^2 + y^2} < \delta}_{x^2-y^2<\delta^2} \Rightarrow |2x^2 + y^2| < 2(x^2 + y^2) \leq 2\delta^2 < \epsilon$, por tanto bastará con tomar $\delta < \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$

Ejemplo 2: Demuestra, usando la definición, que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \underbrace{\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta}_{\sqrt{x^2+y^2}<\delta} \Rightarrow \left| \frac{5x^2y}{x^2+y^2} \right| < \epsilon$

$\left| \frac{5x^2y}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{5x^2y}{x^2} \right| = \underbrace{|5y|}_{5\sqrt{y^2}} \leq 5\underbrace{\|(x, y) - (0, 0)\|}_{\sqrt{x^2+y^2}} < 5\delta < \epsilon$, por tanto bastará con tomar $\delta < \frac{\epsilon}{5}$.

- Teorema: El límite de una función $f(x)$, si existe, es único.

Demostración: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1 \neq L_2 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

$2\epsilon < |L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq \underbrace{|L_1 - f(x)|}_{<\epsilon} + \underbrace{|f(x) - L_2|}_{<\epsilon} <$

$< 2\epsilon$ Contradicción $2\epsilon < 2\epsilon$

Propiedades: Sean $f, g : A(\text{abierto}) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = L_1 + L_2$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$

(3) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$ y $g(x) \neq 0$ en un entorno de x_0.

(4) $\lim_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda L_1$

(5) $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = L_1^{L_2}$ si tiene sentido.

$\star$ Observación: Si $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \Rightarrow f(x)$ está acotada en un entorno de x_0.

Demostracion: $|f(x)| - L \leq |f(x) - L| < \epsilon \Rightarrow |f(x)| \leq L + \epsilon$

• Proposición 1: Sea $f : A$ (abierto) $\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función vectorial , $x_0 \in A'$ y $L \in L \in \mathbb{R}^m$, entonces:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x_1, x_2, ..., x_n) = L \iff \lim_{x \to x_0} f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = l_i}$$

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, ..., x_n) = (f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n)) \\ L = (l_1, l_2, ..., l_m) \end{cases}$$

• Proposición 2: "Caracterización de límites de funciones por sucesiones"

Sea $f : A(\text{abierto}) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x_0 \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in A \lim_{k \to \infty} x_k = x_0 \text{ y } x_k \neq x_0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(x_k) = L}$$

Demostración:
$\Rightarrow$) $\forall \{x_k\}$ tal que $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$, ¿se tiene que $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = L$?
Por convergencia de sucesiones tenemos que $\forall \epsilon_1 > 0 \ \exists N_1 \in \mathbb{N}$:
$\|x_k - x_0\| < \epsilon_1 \forall k \geq N_1$, tomando $\epsilon_1 = \delta \Rightarrow |f(x_k) - L| < \epsilon$.
$\Leftarrow$) Argumentamos por reducción a lo absurdo.
Suponemos que $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq L$, es decir, $\exists \epsilon_2 > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ se tiene que
$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon_2$(es decir, $f(b_\delta) \cap B_{\epsilon_2}(L) \neq \emptyset$).
Se cumple $\forall \delta$, en particular para $\delta = \left\{ \frac{1}{k} \right\} \Rightarrow$ tomamos una sucesión
$\{x_k\} \in b_{1/k}(x_0)$ tal que $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0 \Rightarrow |f(x_k) - L| < \epsilon$ Contradicción
$(II \Rightarrow I)$.

$\star$ Observación: La caracterización de límites por sucesiones será muy útil para demostrar la NO existencia de límites, encontrando dos sucesiones con límites diferentes.

1.2 Continuidad

-Definición: Una función $f : A$ (abierto) $\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es **continua** en $x_0 \in A$ si:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon}$$

Es decir:

(1) $\exists f(x_0)$

(2) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$

(3) $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

$\star$ Observación: Una función vectorial $f : A$ (abierto) $\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua $\iff$ f_i es continua $\forall i = 1, 2, ..., m$.

Propiedades: Sean f y g funciones continuas en x_0, entonces:

(1) $(f \pm g)(x)$ es continua en x_0.

(2) $(\lambda f)(x)$ es continua en $x_0 \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(3) $(f \cdot g)(x)$ es continua en x_0.

(4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es continua en x_0 si $g(x_0) \neq 0$.

(5) $[f(x)]^{g(x)}$ es continua en x_0 si tiene sentido.

• Proposición 1: "Caracterización de las funciones continuas por sucesiones"
Sea $x_0 \in A$ y $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\boxed{f \text{ continua en } x_0 \iff \forall \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} : \lim_{k \to \infty} x_k = x_0 \text{ y } x_k \neq x_0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(x_0)}$$

Ejemplo 1: ¿Es continua en $\mathbb{R}^2$ la siguiente función f?:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{5x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(1) $f(0,0) = 0$

(2) $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{5x^2 y}{x^2+y^2} = 0$

(3) $f(0,0) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$

$f(x,y)$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

• Teorema: Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$:

$$\boxed{f(x) \text{ continua en } x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ y } g(y) \text{ continua en } f(x_0) \in R^m \Rightarrow (g \circ f)(x) \text{ continua en } x_0}$$

1.3 Conjuntos abiertos, cerrados y funciones continuas

-Definición: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$, se define la **imagen inversa** o **preimagen** del conunto Y mediante la función f como:

$$\boxed{f^{-1}(Y) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \subset Y\}}$$

Propiedades:

(1) Si $X = f^{-1}(Y) \Rightarrow f(X) \subset Y \Rightarrow f(f^{-1}(Y)) \subset Y$

Ejemplo: $f = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

$f^{-1}\underbrace{([0,2])}_{Y} : \underbrace{[0,\infty)}_{X} \Rightarrow f([0,+\infty)) = 1 \subset [0,2]$

(2) Si $Y = f(X) \Rightarrow X \subset f^{-1}(Y) \Rightarrow X \subset f^{-1}(f(X))$

Ejemplo: $f(x) = x^2$

$f(\{2\}) = 4 \Rightarrow \{2\} \subset f^{-1}(\{4\}) = \{2, 2\}$

Ejemplo 1: $f = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

$f^{-1}(\{1\}) = [0,+\infty)$ $\qquad$ $f^{-1}(\{-1\}) = (-\infty, 0)$
$f^{-1}([-1,1]) = \mathbb{R}$ $\qquad$ $f^{-1}([0,2]) = [0,+\infty)$
$f^{-1}([-2,0]) = (-\infty, 0)$

Ejemplo 2: Sea $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4$ ¿$f^{-1}(\{3\}), f^{-1}([-\infty, 0])$?

$f^{-1}(\{3\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = 1\} \rightarrow$ Elipse de altura $z = 1$
$f^{-1}((-\infty, 0]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 4\} \rightarrow$ Elipses de alturas desde 0 hasta -4.
Esto tiene sentido dado que la función forma un paraboloide elíptico.

- Teorema 1: Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$\boxed{f \text{ es continua } \iff \forall V \subset \mathbb{R}^m \text{ abierto } : f^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n \text{ es abierto}}$$

Demostrción: $\Rightarrow$) Hipótesis $\begin{cases} \text{(I)}\, \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x)) \\ \text{(II)}\, \forall y \in V \subset \mathbb{R}^m \ \exists \delta > 0 \ B_\delta(y) \subset V \subset \mathbb{R}^m \end{cases}$

¿$f^{-1}(V)$ abierto en $\mathbb{R}^n$, es decir, $\forall x \in f^{-1} \ \exists r > 0 : B_r(x) \subset f^{-1}(V)$?
$\forall x \in f^{-1}(V) \ \exists y \in V : y = f(x) \subset V \overset{\text{I}}{\Rightarrow} \epsilon = \delta \Rightarrow B_\epsilon(f(x)) \subset V$.
Por II $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x)) \in V$ y tomamos preimágenes $B_\delta(x) \overset{\text{Prop. (2)}}{\subset}$
$\subset f^{-1}(f(B_\delta(x))) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \subset f^{-1}(V)$. Basta con $r = \delta$. ✓

$\Leftarrow$) Hipótesis: Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se tiene que $V \in \mathbb{R}^m$ abierto $\Rightarrow$
$\Rightarrow f^{-1}(V)$ abierto en $\mathbb{R}^n$.
¿f es continua, es decir, $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : f(B_\epsilon(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$?

$\forall x \in f^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n \exists y \in V \subset \mathbb{R}^m : yf(x)$ y $B_\epsilon(f(x))$ abierto en $\mathbb{R}^m \overset{hip.}{\Longrightarrow}$
$\Rightarrow f^{-1}(\underbrace{B_\epsilon(f(x))}_{V})$ abierto en $\mathbb{R}^n$.
$\exists r : B_r(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ tenemos $r = \delta : B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(B_\delta(x)) \subset f(f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))) \overset{\text{Prop.(1)}}{\subset} B_\epsilon(f(x))$. ✓

Ejemplo 1: $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 - 4y^2 + z^2 = 5\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :$
$f(x,y,z) = 5\} = f^{-1}(\underbrace{\{5\}}_{\text{cerrado}}) \overset{T.2}{\Longrightarrow} A$ es un cerrado.

Ejemplo 2: $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 < 1 + \cos y\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 - \cos y < 1\} = f^{-1}((-\infty, 1)) \Rightarrow B$ es un abierto en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 3: $f(x) = 7, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(\underbrace{(-\infty, +\infty)}_{\text{abierto}}) = \{7\} \to$ cerrado.

Ejemplo 4: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b] \Rightarrow G(f) =$

$= \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b]\}$ es un cerrado.
Usamos la caracterización de cerrados por sucesiones.
Sea $\{A_k\} = \{(x_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $y_k = f(x_k)$ y $x_k \in [a,b]$ (¡cerrado!) : $\{A_k\}_k = \{(x_k, y_k)\} \xrightarrow[k\to\infty]{} (x_0, y_0) \overset{?}{\in} G(f)$.
Como $\{A_k\} \xrightarrow[k\to\infty]{} (x_0,y_0) \Rightarrow \|(x_k,y_k) - (x_0,y_0)\| < \epsilon \Rightarrow (x_k - x_0) +$

$$+ (y_k - y_0) \to 0 \Rightarrow \begin{cases} x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in [a,b] \\ f(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} y_0 \xrightarrow{f \text{ cont}} f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$\{(x_k, \underbrace{f(x_k)}_{\in G(f)})\} \xrightarrow[k\to\infty]{} \{(x_0, f(x_0)) : x_0 \in [a,b]\} \exists G(f) \to$ cerrado. ✓

- Teorema 2: Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$\boxed{f \text{ es continua} \iff \forall C \subset \mathbb{R}^m \text{ cerrado } : f^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n \text{ es cerrado}}$$

Demostración: Es igual que la del Teorema 1 pero usando la premisa de que un conjunto es cerrado si su complementario es abierto.

2 Diferencial, derivadas parciales y gradiente

En $\mathbb{R}$ se tiene que:

$$\boxed{\text{Derivabilidad} \Rightarrow \text{Continuidad}}$$

2.1 Derivadas parciales

-Definición: Sea $f : U$ (abierto) $\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos la **derivada parcial i-ésima** de f, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, como la derivada de $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ respecto a la variable x_i, manteniendo fijas el resto de variables, es decir:

$$\boxed{\frac{\partial f(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,...,x_i+h,...,x_n) - f(x_1,x_2,...,x_n)}{h}}$$

Notación en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \overset{\text{not}}{=} f_x(x,y)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \overset{\text{not}}{=} f_y(x,y)$

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \overset{\text{not}}{=} f_x(x,y,z)$, $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \overset{\text{not}}{=} f_y(x,y,z)$, $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \overset{\text{not}}{=} f_z(x,y,z)$

Ejemplo: Hallar las derivadas parciales de la función $f(x,y) = x^2 +$

$+ y^4$ en el punto $(1, 0)$.

$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(1,0)} = 2x|_{(1,0)} = 2$

$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(1,0)} = 4y^3|_{(1,0)} = 0$

<u>Interpretación geométrica:</u> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Fijamos $y = y_0$ e intersecamos dicho plano con la gráfica $z = f(x, y)$ y obtenemos una curva $C(x)$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $C(x)$ en el punto (x_0, y_0).

$\star$ <u>Observación:</u> La existencia de derivadas parciales no garantiza que el plano tangente sea "bueno", es decir, que sea una buena aproximación a la curva:

En $\mathbb{R}^n, n > 1, \exists$derivadas parciales $\not\Rightarrow$ Continuidad.

2.2 Diferenciación

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,para que la función sea diferenciable tiene que existirr un plano que se aproxime muy bien a la curva en el punto (x_0, y_0), es decir:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \overbrace{(ax + by + c)}^{\text{plano}}}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0 \text{ ¿}a, b, c?$$

De esta forma estamos "pidiendo" al numerador que se acerque a cero más rápido que el denominador, es decir, que el plano se acerque a la curva más rápido de lo que lo hace hacen x e y al punto.

- En $(x_0, y_0) \to z = f(x_0, y_0)$ siendo z el plano y $f(x_0, y_0)$ la gráfica. $f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c \Rightarrow c = f(x_0, y_0) - ax_0 - by_0$. (1)

- Con $y = y_0$ la pendiente de la grafíca $f(x, y)$ en (x_0, y_0) es "a" $\Rightarrow a =$
$= \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$. (2)

- De igual forma $b = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$. (3)

De (1), (2), y (3) obtenemos la ecuación del plano tangente a la curva:

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

Por tanto, la condición de diferenciabilidad para la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0}$$

<u>Ejemplo:</u> Hallar el plano tangente a la gráfica $z = x^2 + y^4$ en el punto $(1, 0, 1)$ y comprobar que es diferenciable en dicho plano.

i) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x|_{(1,0)} = 2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3|_{(1,0)} = 0 \Rightarrow z = 1 + 2(x - 1) - 0 \cdot (y - 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow z = 2x - 1$

$ii)\ \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{f(x,y)-f(1,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1)-\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(y-0)}{\|(x,y)-(1,0)\|} \overset{?}{=} 0$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x^2+y^4)-1-2x+2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x^2+y^4)-(2x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2+y^4}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$$

Ahora comprobamos si da 0 a partir de la definición de límite.

$$\forall \epsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 : \|(x-y)-(1,0)\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{(x-1)^2+y^2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} - 0 \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{(x-1)^2+y^2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} - 0 \right| \leq \frac{(x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + \frac{y^4}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \leq \frac{(x-1)^2+y^2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} +$$
$$+ \frac{[(x-1)^2+y^2]^3}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \leq \sqrt{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{[(x-1)^2+y^2]^3} < \delta + \underbrace{\delta^2}_{<\delta} < 2\delta$$

Bastará con tomar $\delta < \epsilon/2$.

-<u>Definición:</u> Sea U un abierto en $\mathbb{R}^n$ decimos que $f : U \to \mathbb{R}^m$ es <u>diferenciable</u> en un punto $x_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n) \in U$ si existen todas las derivadas parciales de f en x_0, y se cumple:

$$\boxed{Df(x_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}}$$

$\star$ <u>Observación:</u> A $Df(x_0)$, además de derivada de f en x_0, también se le llama <u>matriz jacobiana</u> de f en x_0.

-<u>Definición:</u> Un caso particular de Df es cuando $m = 1$, es decir, el conunto de llegada de la función es $\mathbb{R}$. A esta matriz jacobiana se le llama <u>gradiente</u> y se denota:

$$\boxed{\nabla f(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)}$$

$\bullet$ <u>Teorema:</u> Sea $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x_0 \in U \Rightarrow f$ es continua en un entorno del punto $x_o \in U$.

<u>Demostración:</u> $\lim\limits_{x\to x_0} \|f(x) - f(x_0)\| =$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x)-f(x_0)-Df(x_0)(x-x_0)+Df(x_0)(x-x_0)\|\cdot\|x-x_0\|}{\|x-x_0\|} \overset{\text{D. T.}}{\leq}$$

$$\leq D.T. \lim_{x\to x_0} \cancelto{0 \text{ por ser diferenciable}}{\frac{\|f(x)-f(x_0)-Df(x_0)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}} \cancelto{0}{\|x-x_0\|} +$$
$$+ \lim_{x\to x_0} \frac{\|Df(x_0)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} \|x-x_0\| = \lim_{x-x_0} \|Df(x_0)(x-x_0)\| =$$
$$= \lim_{x-x_0} \underbrace{\|Df(x_0)\|}_{\text{es un número}} \cancelto{0}{\|x-x_0\|} = 0$$

• <u>Teorema 1:</u> Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \to \mathbb{R}^m$:

$$\boxed{f \text{ diferenciable} \Rightarrow f \text{ continua}}$$

• <u>Teorema 2:</u> Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in U$, si $\exists \dfrac{\partial f_j(x_0)}{\partial x_i}$ $\forall i = 1, ..., n$ y $\forall j = 1, ..., m$ y son continuas en un entorno de x_0, entonces $f(x)$ es diferenciable en x_0.

<u>Ejemplo:</u> $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq \quad (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(i) Probar que es continua en todo $\mathbb{R}^2$ (en el origen).
(ii) Probar que es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ (en el origen).
(iii) Probar que existen las derivadas parciales y que son continuas en $(0,0)$ (aunque no tienen por qué serlo).

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \stackrel{?}{=} 0$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|(x,y) - (0,0)\| < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \epsilon$

$$\left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| \stackrel{*}{\leq} \frac{1}{2} \frac{\overbrace{(x^2+y^2)}^{\text{plano}} |y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \stackrel{**}{\leq} \frac{1}{2}\delta^2 < \delta.$$

Bastará con tomar $\delta < \sqrt{2\epsilon}$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

$\star xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$

$\star\star\, |y| \leq \|(x,y)\| < \delta$

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)(x-0)-f_y(0,0)(y-0)}{\|(x,y)-(0,0)\|}$

$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\cdot 0^2}{\sqrt{h^2+0^2}} - 0}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} = 0$$

$$f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0\cdot h^2}{\sqrt{0^2+h^2}} - 0}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \stackrel{?}{=} 0$$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \left| \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| \leq \dfrac{1}{2} \dfrac{(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2}\|(x,y)\| \leq \dfrac{1}{2}\delta < \epsilon.$

Bastará con tomar $\delta < {}^{\epsilon}/_{2}$.

(iii) $f_x = \dfrac{y^2\sqrt{x^2+y^2} - xy^2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \dfrac{y^2(x^2+y^2) - x^2y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\cancel{(yx)^2}+y^4-\cancel{(xy)^2}}{\sqrt{(x^2-y^2)^3}} =$

$= \dfrac{y^4}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ahora veremos si f_x es continua en el punto $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \stackrel{?}{=}$$

$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \|(x,y) - (0,0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \epsilon$

$$\left| \frac{y^4}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - 0 \right| \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \sqrt{x^2 - y^2} < \delta$$

Bastará con tomar $\delta < \epsilon$, por lo que f_x es continua.

$f_y = \dfrac{2xy\sqrt{x^2+y^2} - xy^2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \dfrac{2xy(x^2+y^2) - xy^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \dfrac{2x^3y + 2xy^3 - xy^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} =$

$= \dfrac{2x^3y + xy^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y+xy^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ahora repetiremos el procedimiento con f_y.

$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \|(x,y) - (0,0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \epsilon$

$$\left| \frac{2x^2y+xy^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \right| \stackrel{\text{D.T}}{\leq} \frac{2|x^3y|}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + \frac{|xy^3|}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \stackrel{*}{\leq} \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \leq 2\frac{x^2+y^2)^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \leq 2\sqrt{(x^2+y^2)} < 2\delta$$

$\star 2xy < x^2 + y^2$

Bastará con tomar $\delta < {}^{\epsilon}/_{2}$, por lo que f_y también es continua.

-Definición: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \to \mathbb{R}^m$, decimos que f es de clase $C'(U)$, y escribimos $f \in C'(U)$ si:

$$\boxed{\exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \;\; \forall i = 1,2,...,m \text{ y } \forall j = 1,2,...,n}$$

- Teorema: Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ tales que $\exists Df(x_0)$, $Dg(x_0)$ matrices acobianas:

(1) $D(\lambda f(x_0)) = \lambda Df(x_0)$

(2) $D(f+g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$

(3) $D(f \cdot g)(x_0) = g(x_0)Df(x_0) + f(x_0)Dg(x_0)$

(4) $D(\frac{f}{g})(x_0) = \frac{g(x_0)Df(x_0) - f(x_0)Dg(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

(5) $D(f \circ g)(x_0) \rightarrow$ Regla de la cadena, que se explica en el apartado 2.3.

2.3 Derivadas direccionales

-Definición: Dado un vector $\vec{u}$ unitario en $\mathbb{R}^n$, un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y
$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, se define la derivada direccional de f, según el vector $\vec{u}$, en un punto $x_0 \in U$ como:

$$\boxed{D_{\vec{u}}f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t\vec{u}) - f(x_0)}{t} = \frac{d}{dt}f(x_0 + t\vec{u})|_{t=0}}$$