

Cálculo II

Carlos Gómez-Lobo Hernaiz

Tema 1. Introducción al espacio de varias variables \mathbb{R}^n

1 Vectores, producto escalar y distancia

- En \mathbb{R}^2 los puntos, $p \in \mathbb{R}^2$, se representan mediante pares ordenados de números reales, $p = (a, b)$.
 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- En \mathbb{R}^3 los puntos, $p \in \mathbb{R}^3$, se representan mediante ternas ordenadas de números reales, $p = (a, b, c)$.
 $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
- En \mathbb{R}^n los puntos, $p \in \mathbb{R}^n$, se representan mediante pares ordenados de números reales,
 $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$.

-Definición: Geométricamente, un **vector** se define como un segmento de recta "orientado" con punto inicial en el origen de coordenadas y punto final en un punto de \mathbb{R}^n .

*Observación: Si $n=3$, la notación habitual para la base canónica es: $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

1.1 Operaciones entre elementos de \mathbb{R}^n : $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

1. Suma: $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
2. Multiplicación por un escalar, $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$
3. Producto escalar: $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x}, \vec{y} \mapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
 $= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

Propiedades

Sean $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$

1. Linealidad: $(\lambda \vec{x} + \beta \vec{y}) \cdot \vec{z} = \lambda \vec{x} \cdot \vec{z} + \beta \vec{y} \cdot \vec{z}$
2. Conmutativa: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$
3. $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ y $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \iff \vec{x} = \vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$

-Definición: La **norma euclídea** de un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (y se escribe $\|\vec{x}\|$) como: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$.

★ Observación: Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\vec{x}\| = 1$, se dice que es **unitario**. Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ un vector no unitario, podemos **normalizarlo**:
 $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \rightarrow$ vector unitario.

Significado geométrico de la norma euclídea

La norma $\|\vec{x}\|$ representa la **longitud** del vector \vec{x} . Not.: $long(\vec{x}) = |x| = d(0, x)$.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz en \mathbb{R}^n

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$| \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle | \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}$$

Demostración: Tomamos $a = \vec{y} \cdot \vec{y} = \|\vec{y}\|^2$ y $b = -\vec{x} \cdot \vec{y}$ y aplicamos propiedades del producto escalar al vector $a\vec{x} + b\vec{y}$.

-Si $a = 0 \Rightarrow \vec{y} = 0$ ✓

-Si $a \neq 0 \Rightarrow 0 \leq (a\vec{x} + b\vec{y})(a\vec{x} + b\vec{y}) = a^2 \vec{x} \cdot \vec{x} + 2ab\vec{x} \cdot \vec{y} + b^2 \vec{y} \cdot \vec{y} = \|\vec{y}\|^4 \cdot \|\vec{x}\|^2 - 2\|\vec{y}\|^2 (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 + (-\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{y}\|^4 \cdot \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \Rightarrow 0 \leq \|\vec{y}\|^2 \cdot \|\vec{x}\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \Rightarrow (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \Rightarrow |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ ✓

- $\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \leq \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \Rightarrow -1 \leq \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \leq 1 \Rightarrow \cos \theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \iff \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta$

- Definición: Dos vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ son **perpendiculares/ortogonales** si y solo si $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$.
Not.: $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Teorema de Pitágoras en \mathbb{R}^n

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{x} \perp \vec{y}$, entonces:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

Demostración: $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y})(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$ ✓

Teorema del coseno

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ vectores cualesquiera, entonces:

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta$$

Demostración: $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = (\vec{x} - \vec{y})(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta$ ✓

Propiedades de la norma euclídea

Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(i) \|\vec{x}\| \geq 0 \text{ y } \|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$$

$$(ii) \|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$$

$$(iii) \text{Desigualdad triangular: } \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

$$(iv) \text{Desigualdad triangular al revés: } \left| \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \right| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Demostraciones:

$$(i) \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \geq 0 \text{ y } \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = 0 \iff x_1, x_2, \dots, x_n = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

$$(ii) \|\lambda \vec{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n \lambda^2 x_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\lambda^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} = |\lambda| \|\vec{x}\|$$

$$(iii) \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y})(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x}\vec{x} + 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}\vec{y} \stackrel{\text{C-S}}{\leq} \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \Rightarrow \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

-Definición: Una **distancia/métrica** es una función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que cumple:

- (1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$
- (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

-Definición: La **distancia euclídea** entre dos puntos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de \mathbb{R}^n se define como:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

- (1) $\|\vec{x} - \vec{y}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$
- (2) $\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{y} - \vec{x}\|$
- (3) $\|\vec{x} - \vec{z}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\|$

2 Conceptos métricos en el espacio euclídeo en \mathbb{R}^n

2.1 Bolas abiertas y conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n

-Definiciones:

- (1) Dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un número real $r > 0$, llamaremos **bola abierta** de centro x_0 y radio r (y escribiremos $B_r(x_0)$ o $B(x_0, r)$) al conjunto:

$$B_r(x_0) \stackrel{\text{not}}{=} B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$$

$$n = 1 \rightarrow x_0 \in \mathbb{R} \quad -r < x - x_0 < r$$

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : x \in (x_0 - r, x_0 + r)\}$$

$$n = 2 \rightarrow (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

$$B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|}_{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r\}$$

$$n = 3 \rightarrow (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$$

$$B_r(x_0, y_0, z_0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r\}$$

(2) Decimos que $A \in \mathbb{R}^n$ es un **conjunto abierto** si $\forall x_0 \in A \exists r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset A$.

(3) Un **entorno** del punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto que lo contiene.

- Proposición 1: Si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0 \Rightarrow$ la bola abierta $B_r(x_0)$ es un conjunto abierto.

Demostración: $\forall x \in B_r(x_0) \exists s \in \mathbb{R}, s > 0$ tal que $B_s(x) \subset B_r(x_0)$.

$$\begin{aligned} \text{Basta con tomar } s &= r - \|x - x_0\|, \text{ entonces } \forall y \in B_s(x) \quad \|y - x_0\| = \\ &= \|y - x + x - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < s + \|x - x_0\| = r - \|x - x_0\| + \|x - x_0\| = r \end{aligned}$$

Ejemplo: Demostrar que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ es un conjunto abierto.

$\forall (x_0, y_0) \in A \exists r : B_r(x_0, y_0) \subset A$, es decir, $y_0 > 0$

Basta con tomar $r = y_0 > 0$.

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in B_r(x_0, y_0) &\Rightarrow (a, b) \in A, \text{ es decir, } b > 0? \text{ Como } (a, b) \in B_r(x_0, y_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|(a, b) - (x_0, y_0)\| < r = y_0 \Rightarrow (a - x_0)^2 + (b - y_0)^2 < y_0^2 \Rightarrow (b - y_0)^2 < y_0^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -y_0 < b - y_0 < y_0 \Rightarrow 0 < b < 2y_0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow (a, b) \in A \end{aligned}$$

- Proposición 2: La unión (finita o infinita) de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

- Proposición 3: La intersección finita de abiertos es un conjunto abierto.

★ Observación: La intersección finita de abiertos no es, en general, un abierto.

Demostración: $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ conjuntos abiertos y $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$. ¿A es un conjunto abierto?

$$\begin{aligned} \text{Dado } x \in A &\Rightarrow x \in A_1, x \in A_2, \dots, x \in A_n \Rightarrow \exists r_1, r_2, \dots, r_n \text{ tal que } B_{r_1}(x) \subset A_1, B_{r_2}(x) \subset \\ &\subset A_2, \dots, B_{r_n}(x) \subset A_n, \text{ tomando } r \leq \min\{r_i\}_{i=1}^n \Rightarrow B_r(x) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i = A. \end{aligned}$$

2.2 Límites de sucesiones en \mathbb{R}^n . Completitud.

-Definición: Una **sucesión en \mathbb{R}^n** es una colección de n sucesiones en $\mathbb{R} : \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$.

$$\text{Ejemplos: } \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \left\{ \left(k, \frac{1}{k^2}, e^{-k} \right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}; \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \left\{ \left(\frac{3k^2}{k^2-1}, \frac{1}{k}, \log \frac{k+1}{k} \right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

-Definición: Dada una sucesión $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ y un punto $L \in \mathbb{R}^n$, diremos que el límite de $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es L y escribimos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = L \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \|A_k - L\| < \epsilon \quad \forall k > N, \text{ es decir, } \forall k > N \quad A_k \in B_\epsilon(L)$$

• Lema: Dada una sucesión en $\mathbb{R}^n : \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ y un punto $L = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$, se tiene:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = L \iff \lim_{k \rightarrow \infty} a_i^k = l_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Demostración: \Rightarrow) Queremos ver que $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |a_i^k - l_i| < \epsilon \quad \forall k > N \forall i = 1, 2, \dots, n$.
 $|a_i^k - l_i| = \sqrt{(a_i^k - l_i)^2} \leq \sqrt{(a_1^k - l_1)^2 + (a_1^k - l_2)^2 + \dots + (a_i^k - l_i)^2 + \dots + (a_n^k - l_n)^2} = \|A_k - L\| \leq \epsilon \quad \checkmark$

\Leftarrow) Como $\lim_{k \rightarrow \infty} a_i^k = l_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$, sabemos que $\forall \epsilon > 0 :$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_1^k - l_1| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \quad \forall k > N_1$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_2^k - l_2| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \quad \forall k > N_2$$

\vdots

$$\exists N_n \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_n^k - l_n| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \quad \forall k > N_n$$

Entonces, $\forall k \geq \max\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$ tenemos simultáneamente que $|a_i^k - l_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$, por tanto:

$$\begin{aligned} \|A_k - L\| &= \sqrt{(a_1^k - l_1)^2 + (a_1^k - l_2)^2 + \dots + (a_i^k - l_i)^2 + \dots + (a_n^k - l_n)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{n \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \right)^2} = \epsilon \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ejemplo: Hallar el límite $\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{\log x}{x^2}, \frac{x^2-1}{5x^2} \right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{k^2} &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1/k}{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k^2} = 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{5x^2} &= \frac{1}{5} \end{aligned} \right\} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{\log x}{x^2}, \frac{x^2-1}{5x^2} \right) \right\} = (0, 5)$$

-Definición: La **propiedad de completitud** dice que toda sucesión de Cauchy converge en el espacio.

-Definición: Una sucesión $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de **Cauchy** en \mathbb{R}^n si $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \|A_{k_1} - A_{k_2}\| < \epsilon \quad \forall k_1, k_2 > N$.

• Teorema: El espacio euclídeo \mathbb{R}^n es **completo**, es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente.

Demostración: Pendiente como ejercicio.

2.3 Más sobre la topología de \mathbb{R}^n

-Definición: Sea A un conjunto de \mathbb{R}^n . Diremos que un punto $x \in A$ es un **punto interior** de A si $\exists r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$. Al conjunto de puntos interiores de A se le denota $\overset{\circ}{A} \stackrel{\text{not}}{=} \text{int}(A)$.

Ejercicio 1: Dado $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, |y| \leq 1\}$. Hallar $\overset{\circ}{A}$.

1) $\forall (x, y) \in A : |y| = 1 \Rightarrow (x, \pm 1) \text{ (con } |x| < 1) \Rightarrow (x, 1) \in A, \forall r > 0 \rightarrow$
 $\rightarrow (x, 1 + r/2) \notin A \quad |1 + r/2| = 1 + r/2 > 1 \Rightarrow B_r(x, 1) \not\subset A$
 2) $\forall (x, y) \in A : |x|, |y| < 1:$

$$* \quad \left. \begin{aligned} r &\leq 1 - |x| \text{ donde } |y| \leq |x| \\ r &\leq 1 - |y| \text{ donde } |x| \leq |y| \end{aligned} \right\} \text{ en cualquier caso } r = 1 - \max\{|x|, |y|\} = \min\{1 - |x|, 1 - |y|\}$$

Tenemos que ver que $B_r(x, y) \subset A$, es decir, $\forall (a, b) \in B_r(x, y)$ se tiene que $|a| < 1$ y $|b| \leq 1 \Rightarrow (a, b) \in A$

$$|a| = |a - x + x| \stackrel{\text{D.T.}}{\leq} \underbrace{|a - x|}_{\sqrt{(a-x)^2}} + |x| \leq \underbrace{\|(a, b) - (x, y)\|}_{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}} + |x| < r + |x| \stackrel{*}{\leq} 1 - |x| + |x| = 1$$

$$|b| = |b - y + y| \stackrel{\text{D.T.}}{\leq} |b - y| + |y| < r + |y| \leq 1 - |y| + |y| = 1$$

$\forall (a, b) \in B_r(x, y)$ se tiene que $(a, b) \in A \checkmark$

• Propiedades:

(1) \mathring{A} es un conjunto abierto.

(2) $\mathring{A} \subset A$.

(3) Si A es un conjunto abierto, entonces $\mathring{A} = A$.

-Definición: Diremos que un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es un **conjunto cerrado** si su complementario $C^c \subset \mathbb{R}^n$, es un conjunto abierto.

Ejercicio 2: Demostrar que la bola $C = \{(x, y) : \underbrace{x^2 + y^2}_{\|(x, y)\|^2} \leq R^2\}$ es un conjunto cerrado en \mathbb{R}^2 .

C cerrado en \mathbb{R}^2 si $C^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + y^2}_{\|(x, y)\|^2} > R^2\}$ es un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 , es decir, $\forall (x_0, y_0) \in C^c \exists r > 0 : B_r(x_0, y_0) \subset C^c$.

Tomamos $r = \|(x_0, y_0)\| - R \Rightarrow \forall (a, b) \in B_r(x_0, y_0)$, $(a, b) \in C^c$, es decir, $\|(a, b)\| > R$?

$$\begin{aligned} \|(x_0, y_0)\| &= \|(x_0, y_0) - (a, b) + (a, b)\| \stackrel{\text{D.T.}}{\leq} \underbrace{\|(x_0, y_0) - (a, b)\|}_{< r = \|(x_0, y_0)\| - R} + \|(a, b)\| < \|(x_0, y_0)\| - R + \|(a, b)\| \Rightarrow \\ \|(x_0, y_0)\| &< \|(x_0, y_0)\| - R + \|(a, b)\| \Rightarrow \\ \Rightarrow R &< \|(a, b)\| \checkmark \end{aligned}$$

• Proposición 1:

(i) La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

(ii) La intersección (infinita o finita) de conjuntos cerrados, es un conjunto cerrado.

*Observación: La unión infinita de conjuntos cerrados no es, en general, un conjunto cerrado.

-Bolas **abiertas** en \mathbb{R}^2 : $B_R(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}_{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2} < R^2\}$

-Bolas **cerradas** en \mathbb{R}^2 : $\overline{B_R(x_0, y_0)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}_{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2} \leq R^2\}$

*Observación 1: No todos los conjuntos de \mathbb{R}^n son necesariamente abiertos o cerrados.

*Observación 2: El vacío y \mathbb{R}^n (por convención) son abiertos y cerrados al mismo tiempo.

• Proposición 2 (Caracterización de los conjuntos cerrados por sucesiones):

$C \subset \mathbb{R}^n \text{ es un cerrado} \iff \forall A_{k \in \mathbb{N}} \subset C \text{ con } \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = L \text{ se tiene que } L \in C$

Demostración: Argumentamos (en ambas implicaciones) por reducción al absurdo:

\Rightarrow) Supongamos que $L \notin C \Rightarrow L \in C^c$ abierto $\Rightarrow \exists r > 0$ tal que $B_r(L) \subset C^c$. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = L$, $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|A_k - L| > \epsilon \quad \forall k > N$, es decir, $A_k \in B_\epsilon(L) \quad \forall k > N$. Si tomamos $\epsilon = r : A_k \in B_r(L)$ Contradicción $A_k \in C$ y $B_r(L) \subset C^c$

\Leftarrow) Supongamos que C no es un cerrado $\Rightarrow C^c$ no es un abierto $\Rightarrow \exists x_0 \in C^c$ tal que $\forall r > 0 \quad B_r(x) \not\subset C^c$, es decir, $B_r(x_0) \cap C \neq \emptyset \quad \forall r > 0$. Tomamos $r = \frac{1}{k} \Rightarrow B_{1/k}(x_0) \cap C \neq \emptyset \Rightarrow \exists \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset B_{1/k} \cap C, \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow x_0 \in C$ Contradicción porque $x_0 \in C^c$.

-Definición: Sea C un conjunto cualquiera en \mathbb{R}^n y $x \in \mathbb{R}^n$, diremos que x es un **punto de adherencia/clausura** de C si $\forall r > 0 \quad B_r(x) \cap C \neq \emptyset$ y el conjunto de puntos que cumplen esta condición se denota:

$$\overline{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0 \quad B_r(x) \cap C \neq \emptyset\}$$

Propiedades:

- (1) \overline{C} es un conjunto cerrado.
- (2) $C \subset \overline{C}$.
- (3) Si C es cerrado $C = \overline{C}$.

Ejercicio 3: Sea $C = \left\{ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ probar que $C \in \overline{C}$.

$\lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) = (0, 0) \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N$ tal que $\left\| \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) - (0, 0) \right\| < \epsilon$
 $\forall k > N$. Basta tomar $r = \epsilon \Rightarrow \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \in B_\epsilon(0, 0) \forall k \geq N \Rightarrow$
 $\Rightarrow C \cap B_r(0, 0) \neq \emptyset$

-Definición: Sea C un conjunto cualquiera de \mathbb{R}^n y $x \in \mathbb{R}^n$. Diremos que x es un **punto de acumulación** de C si $\forall r > 0 \quad B_r(x) \setminus \{x\} \cap C \neq \emptyset$. A los puntos de acumulación se los denota por C' .

Propiedades:

- (1) $C' \subset \overline{C}$
- (2) En general $\overline{C} \not\subset C'$

-Definición: Los puntos de adherencia que no son de acumulación ($\overline{C} \setminus C'$) se llaman **puntos aislados**, es decir, $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto aislado de un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ si $\exists r > 0$ tal que $B_r(x) \cap C = \{x\}$.

-Definición: Sea $C \subset \mathbb{R}^n$, diremos que un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un **punto frontera** de C si $\forall r > 0$ se tiene que $B_r(x) \cap C \neq \emptyset$ y $x \notin \overset{\circ}{C}$. A este conjunto de puntos se le denota por ∂C .

-Definición: Un conjunto cualquiera $C \subset \mathbb{R}^n$ está **acotado** si $\exists M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ tal que $\forall x \in C$ se tiene que $\|x\| < M$, es decir, $C \subset B_M(0, \dots, 0)$.

-Definición: Un **recubrimiento numerable por abiertos** de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es una colección numerable de abiertos $\{A_i\}$ tal que $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

-Definición: Un conjunto es **compacto** si para todo recubrimiento por abiertos del conjunto se puede extraer un subrecubrimiento finito.

- Teorema de Heine-Borel: $C \subset \mathbb{R}^n$ es compacto $\iff C$ es cerrado y acotado en \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1: $B_r(x_0, y_0)$ no compactos (n son cerrados).

Ejemplo 2: $\overline{B_r(x_0, y_0)}$ si son compactos.

Ejemplo 3: $S = \left\{ \left(\frac{(-1)^k}{k}, \frac{1}{k^2} \right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$

Por la proposición 2, como $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(-1)^k}{k}, \frac{1}{k^2} \right) = (0, 0)$ y $(0, 0) \notin S$, no es cerrado y por el teorema de Heine-Borel no es compacto.

Ejemplo 4: $S = \{(k, k^2 + 1)\}_{k \in \mathbb{N}}$ no está acotado, por tanto por el teorema de Heine-Borel tampoco es compacto.

- Teorema de Bolzano-Weierstrass: Si C es un conjunto de infinitos elementos y acotado $\Rightarrow C' \neq \emptyset$. Es decir, toda sucesión $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ definida en un compacto C posee una subsucesión convergente en C .

2.4 Funciones de varias variables y superficies de nivel

-Definición: Llamamos **función de varias variables** a la función:

$$\begin{array}{c} f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)) \end{array}$$

Si $m = 1$, entonces $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ y se llama **función escalar**.

Si $m > 1$, entonces se llama **función vectorial**.

-Definición: Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, llamaremos **gráfica** de f al subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1} : (x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

-Definición: Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $C \in \mathbb{R}$, el **conjunto de nivel** del valor C son los puntos : $\{x \in D : f(x) = C\}$.

$n = 2$: curvas de nivel.

$n = 3$: superficies de nivel.

Ejemplo 1: Usando curvas de nivel. describir la gráfica $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Curvas de nivel: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = C, C \geq 0\}$

$C = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$

$C = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1^2 \Rightarrow$ Circunferencia de radio 1

$C = 4 \rightarrow x^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow$ Circunferencia de radio 2

$C = 9 \rightarrow x^2 + y^2 = 3^2 \Rightarrow$ Circunferencia de radio 3

Ejemplo 2: Describir las superficies de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Superficies de nivel: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = C, C \geq 0\} =$ esferas de radio \sqrt{C} .

Tema 2. Cálculo diferencial en varias variables

1 Límites y continuidad

1.1 Límites

-Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $x_0 \in A'$ y $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar. Dado $L \in \mathbb{R}$ diremos que el **límite** de $f(x)$ es L cuando x tiende a x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \quad \forall x \in A$$

O lo que es lo mismo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \forall x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(L)$$

Ejemplo 1: Demuestra, usando la definición, que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2x^2 + y^2 = 0$.

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta &\Rightarrow |(2x^2 + y^2) - 0| < \epsilon \\ \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2} < \delta}_{x^2 + y^2 < \delta^2} &\Rightarrow |2x^2 + y^2| < 2(x^2 + y^2) \leq 2\delta^2 < \epsilon, \text{ por tanto bastará} \end{aligned} \quad \text{con tomar } \delta < \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$$

Ejemplo 2: Demuestra, usando la definición, que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \underbrace{\|(x, y) - (0, 0)\|}_{\sqrt{x^2 + y^2} < \delta} < \delta &\Rightarrow \left| \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} \right| < \epsilon \\ \left| \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{5x^2y}{x^2} \right| = \underbrace{|5y|}_{5\sqrt{y^2}} \leq 5 \underbrace{\|(x, y) - (0, 0)\|}_{\sqrt{x^2 + y^2}} < 5\delta < \epsilon, \text{ por tanto} &\quad \text{bastará con tomar} \\ \delta < \frac{\epsilon}{5}. \end{aligned}$$

• Teorema: El límite de una función $f(x)$, si existe, es único.

$$\begin{aligned} \text{Demostración: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \neq L_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \\ 2\epsilon < |L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq \underbrace{|L_1 - f(x)|}_{< \epsilon} + \underbrace{|f(x) - L_2|}_{< \epsilon} < \\ < 2\epsilon \quad \text{Contradicción} \quad 2\epsilon < 2\epsilon \end{aligned}$$

Propiedades: Sean $f, g : A(\text{abierto}) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \text{ si } L_2 \neq 0 \text{ y } g(x) \neq 0 \text{ en un entorno de } x_0.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow x_0} \lambda f(x) = \lambda L_1$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = L_1^{L_2} \text{ si tiene sentido.}$$

★ Observación: Si $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Rightarrow f(x)$ está acotada en un entorno de x_0 .

$$\text{Demostración: } |f(x)| - L \leq |f(x) - L| < \epsilon \Rightarrow |f(x)| \leq L + \epsilon$$

• Proposición 1: Sea $f : A \text{ (abierto)} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función vectorial, $x_0 \in A'$ y $L \in \mathbb{R}^m$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = l_i$$

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) \\ L = (l_1, l_2, \dots, l_m) \end{cases}$$

• Proposición 2: "Caracterización de límites de funciones por sucesiones"

Sea $f : A \text{ (abierto)} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \forall \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in A \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \text{ y } x_k \neq x_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = L$$

Demostración:

$$\Rightarrow) \forall \{x_k\} \text{ tal que } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0, \text{ ¿se tiene que } \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = L?$$

Por convergencia de sucesiones tenemos que $\forall \epsilon_1 > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} :$

$$\|x_k - x_0\| < \epsilon_1 \forall k \geq N_1, \text{ tomando } \epsilon_1 = \delta \Rightarrow |f(x_k) - L| < \epsilon.$$

\Leftarrow) Argumentamos por reducción a lo absurdo.

Suponemos que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq L$, es decir, $\exists \epsilon_2 > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ se tiene que

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon_2 \text{ (es decir, } f(b_\delta) \cap B_{\epsilon_2}(L) \neq \emptyset).$$

Se cumple $\forall \delta$, en particular para $\delta = \left\{ \frac{1}{k} \right\} \Rightarrow$ tomamos una sucesión

$$\{x_k\} \in b_{1/k}(x_0) \text{ tal que } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \Rightarrow |f(x_k) - L| < \epsilon \text{ Contradicción}$$

(II \Rightarrow I).

★ Observación: La caracterización de límites por sucesiones será muy útil para demostrar la NO existencia de límites, encontrando dos sucesiones con límites diferentes.

1.2 Continuidad

-Definición: Una función $f : A \text{ (abierto)} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es **continua** en $x_0 \in A$ si:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Es decir:

$$(1) \exists f(x_0)$$

$$(2) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$(3) f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

★ Observación: Una función vectorial $f : A \text{ (abierto)} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua $\iff f_i$ es continua $\forall i = 1, 2, \dots, m$.

Propiedades: Sean f y g funciones continuas en x_0 , entonces:

- (1) $(f \pm g)(x)$ es continua en x_0 .
- (2) $(\lambda f)(x)$ es continua en $x_0 \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- (3) $(f \cdot g)(x)$ es continua en x_0 .
- (4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es continua en x_0 si $g(x_0) \neq 0$.
- (5) $[f(x)]^{g(x)}$ es continua en x_0 si tiene sentido.

• Proposición 1: "Caracterización de las funciones continuas por sucesiones"

Sea $x_0 \in A$ y $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f \text{ continua en } x_0 \iff \forall \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \text{ y } x_k \neq x_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0)$$

Ejemplo 1: ¿Es continua en \mathbb{R}^2 la siguiente función f ?:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(1) f(0, 0) = 0$$

$$(2) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

$$(3) f(0, 0) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

$f(x, y)$ es continua en todo \mathbb{R}^2 .

• Teorema: Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$:

$$f(x) \text{ continua en } x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ y } g(y) \text{ continua en } f(x_0) \in \mathbb{R}^m \Rightarrow (g \circ f)(x) \text{ continua en } x_0$$

1.3 Conjuntos abiertos, cerrados y funciones continuas

-Definición: Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$, se define la **imagen inversa** o **preimagen** del conjunto Y mediante la función f como:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in Y\}$$

Propiedades:

(1) Si $X = f^{-1}(Y) \Rightarrow f(X) \subset Y \Rightarrow f(f^{-1}(Y)) \subset Y$

Ejemplo: $f = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$f^{-1}(\underbrace{[0, 2]}_Y) : \underbrace{[0, \infty)}_X \Rightarrow f([0, +\infty)) = 1 \subset [0, 2]$$

(2) Si $Y = f(X) \Rightarrow X \subset f^{-1}(Y) \Rightarrow X \subset f^{-1}(f(X))$

Ejemplo: $f(x) = x^2$

$$f(\{2\}) = 4 \Rightarrow \{2\} \subset f^{-1}(\{4\}) = \{2, 2\}$$

Ejemplo 1: $f = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{1\}) &= [0, +\infty) & f^{-1}(\{-1\}) &= (-\infty, 0) \\ f^{-1}([-1, 1]) &= \mathbb{R} & f^{-1}([0, 2]) &= [0, +\infty) \\ f^{-1}([-2, 0]) &= (-\infty, 0) \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Sea $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4$ ¿ $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}([-\infty, 0])$?

$f^{-1}(\{3\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = 1\} \rightarrow$ Elipse de altura $z = 1$

$f^{-1}((-\infty, 0]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 4\} \rightarrow$ Elipses de alturas desde 0 hasta -4.

Esto tiene sentido dado que la función forma un paraboloide elíptico.

• Teorema 1: Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$f \text{ es continua} \iff \forall V \subset \mathbb{R}^m \text{ abierto} : f^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n \text{ es abierto}$$

Demostación: \Rightarrow Hipótesis $\begin{cases} \text{(I)} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x)) \\ \text{(II)} \forall y \in V \subset \mathbb{R}^m \exists \delta > 0 : B_\delta(y) \subset V \subset \mathbb{R}^m \end{cases}$

¿ $f^{-1}(V)$ abierto en \mathbb{R}^n , es decir, $\forall x \in f^{-1} \exists r > 0 : B_r(x) \subset f^{-1}(V)$?

$\forall x \in f^{-1}(V) \exists y \in V : y = f(x) \subset V \xrightarrow{I} \epsilon = \delta \Rightarrow B_\epsilon(f(x)) \subset V$.

Por II $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x)) \in V$ y tomamos preimágenes $B_\delta(x) \overset{\text{Prop. (2)}}{\subset} f^{-1}(f(B_\delta(x))) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \subset f^{-1}(V)$. Basta con $r = \delta$. ✓

\Leftarrow Hipótesis: Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se tiene que $V \in \mathbb{R}^m$ abierto $\Rightarrow f^{-1}(V)$ abierto en \mathbb{R}^n .

¿ f es continua, es decir, $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\epsilon(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$?

$\forall x \in f^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n \exists y \in V \subset \mathbb{R}^m : y = f(x)$ y $B_\epsilon(f(x))$ abierto en $\mathbb{R}^m \xrightarrow{hip.} \Rightarrow f^{-1}(\underbrace{B_\epsilon(f(x))}_V)$ abierto en \mathbb{R}^n .

$\exists r : B_r(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ tenemos $r = \delta : B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \Rightarrow f(B_\delta(x)) \subset f(f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))) \overset{\text{Prop. (1)}}{\subset} B_\epsilon(f(x))$. ✓

Ejemplo 1: $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 - 4y^2 + z^2 = 5\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :$

$f(x, y, z) = 5\} = f^{-1}(\underbrace{\{5\}}_{\text{cerrado}}) \xrightarrow{T.2} A$ es un cerrado.

Ejemplo 2: $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 < 1 + \cos y\} =$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 - \cos y < 1\} = f^{-1}((-\infty, 1)) \Rightarrow B \text{ es un abierto en } \mathbb{R}^2.$$

Ejemplo 3: $f(x) = 7, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(\underbrace{(-\infty, +\infty)}_{\text{abierto}}) = \{7\} \rightarrow \text{cerrado}.$$

Ejemplo 4: Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b] \Rightarrow G(f) =$

$$= \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]\} \text{ es un cerrado.}$$

Usamos la caracterización de cerrados por sucesiones.

$$\text{Sea } \{A_k\} = \{(x_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ tal que } y_k = f(x_k) \text{ y } x_k \in [a, b] \text{ (¡cerrado!)} : \quad \{A_k\}_k = \{(x_k, y_k)\} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (x_0, y_0) \stackrel{?}{\in} G(f).$$

$$\text{Como } \{A_k\} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (x_0, y_0) \Rightarrow \|(x_k, y_k) - (x_0, y_0)\| < \epsilon \Rightarrow (x_k - x_0) +$$

$$+ (y_k - y_0) \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_0 \in [a, b] \\ f(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} y_0 \xrightarrow{f \text{ cont}} f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\{(x_k, f(x_k))\}}_{\in G(f)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \{(x_0, f(x_0)) : x_0 \in [a, b]\} \exists G(f) \rightarrow \text{cerrado. } \checkmark$$

• Teorema 2: Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$f \text{ es continua} \iff \forall C \subset \mathbb{R}^m \text{ cerrado} : f^{-1}(C) \subset \mathbb{R}^n \text{ es cerrado}$$

Demostración: Es igual que la del Teorema 1 pero usando la premisa de que un conjunto es cerrado si su complementario es abierto.

2 Diferencial, derivadas parciales y gradiente

En \mathbb{R} se tiene que:

$$\text{Derivabilidad} \Rightarrow \text{Continuidad}$$

2.1 Derivadas parciales

-Definición: Sea $f : U \text{ (abierto)} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definimos la **derivada parcial i-ésima** de $f, \frac{\partial f}{\partial x_i}$, como la derivada de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ respecto a la variable x_i , manteniendo fijas el resto de variables, es decir:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h}$$

Notación en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \stackrel{\text{not}}{=} f_x(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \stackrel{\text{not}}{=} f_y(x, y)$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \stackrel{\text{not}}{=} f_x(x, y, z), \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \stackrel{\text{not}}{=} f_y(x, y, z), \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \stackrel{\text{not}}{=} f_z(x, y, z)$$

Ejemplo: Hallar las derivadas parciales de la función $f(x, y) = x^2 +$

+ y^4 en el punto $(1, 0)$.

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(1, 0)} = 2x|_{(1, 0)} = 2$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(1, 0)} = 4y^3|_{(1, 0)} = 0$$

Interpretación geométrica: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Fijamos $y = y_0$ e intersecamos dicho plano con la gráfica $z = f(x, y)$ y obtenemos una curva $C(x)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $C(x)$ en el punto (x_0, y_0) .

★ Observación: La existencia de derivadas parciales no garantiza que el plano tangente sea "bueno", es decir, que sea una buena aproximación a la curva:

En $\mathbb{R}^n, n > 1, \exists$ derivadas parciales \nRightarrow Continuidad.

2.2 Diferenciación

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, para que la función sea diferenciable tiene que existir un plano que se aproxime muy bien a la curva en el punto (x_0, y_0) , es decir:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{\overbrace{f(x, y) - (ax + by + c)}^{\text{plano}}}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0 \quad \text{¿} a, b, c \text{?}$$

De esta forma estamos "pidiendo" al numerador que se acerque a cero más rápido que el denominador, es decir, que el plano se acerque a la curva más rápido de lo que lo hacen x e y al punto.

- En $(x_0, y_0) \rightarrow z = f(x_0, y_0)$ siendo z el plano y $f(x_0, y_0)$ la gráfica. $f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c \Rightarrow c = f(x_0, y_0) - ax_0 - by_0$. (1)

- Con $y = y_0$ la pendiente de la gráfica $f(x, y)$ en (x_0, y_0) es "a" $\Rightarrow a = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$. (2)

- De igual forma $b = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$. (3)

De (1), (2), y (3) obtenemos la ecuación del plano tangente a la curva:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Por tanto, la condición de diferenciabilidad para la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0$$

Ejemplo: Hallar el plano tangente a la gráfica $z = x^2 + y^4$ en el punto $(1, 0, 1)$ y comprobar que es diferenciable en dicho plano.

$$i) \frac{\partial f}{\partial x} = 2x|_{(1, 0)} = 2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3|_{(1, 0)} = 0 \Rightarrow z = 1 + 2(x - 1) - 0 \cdot (y - 0) \Rightarrow z = 2x - 1$$

$$ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{f(x,y) - f(1,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(y-0)}{\|(x,y) - (1,0)\|} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x^2+y^4) - 1 - 2x + 2}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x^2+y^4) - (2x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)^2 + y^4}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$$

Ahora comprobamos si da 0 a partir de la definición de límite.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|(x,y) - (1,0)\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{(x-1)^2 + y^4}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} - 0 \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{(x-1)^2 + y^4}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} - 0 \right| \leq \frac{(x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} + \frac{y^4}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \leq \frac{(x-1)^2 + y^2}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} + \frac{[(x-1)^2 + y^2]^3}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \leq \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{[(x-1)^2 + y^2]^3} < \delta + \underbrace{\delta^2}_{< \delta} < 2\delta$$

Bastará con tomar $\delta < \epsilon/2$.

-Definición: Sea U un abierto en \mathbb{R}^n decimos que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es **diferenciable** en un punto $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \in U$ si existen todas las derivadas parciales de f en x_0 , y se cumple:

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

★ Observación: A $Df(x_0)$, además de derivada de f en x_0 , también se le llama **matriz jacobiana** de f en x_0 .

-Definición: Un caso particular de Df es cuando $m = 1$, es decir, el conunto de llegada de la función es \mathbb{R} . A esta matriz jacobiana se le llama **gradiente** y se denota:

$$\vec{\nabla} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

• Teorema: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x_0 \in U \Rightarrow f$ es continua en un entorno del punto $x_0 \in U$.

$$\begin{aligned} & \text{Demostración: } \lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x) - f(x_0)\| = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0) + Df(x_0)(x - x_0)\| \cdot \|x - x_0\|}{\|x - x_0\|} \stackrel{\text{D. T.}}{\leq} \\ & \leq D.T. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \cdot \underbrace{\|x - x_0\|}_{\rightarrow 0 \text{ por ser diferenciable}} \\ &+ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \|x - x_0\| = \lim_{x \rightarrow x_0} \|Df(x_0)(x - x_0)\| = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\|Df(x_0)\|}_{\text{es un número}} \cdot \underbrace{\|x - x_0\|}_{\rightarrow 0} = 0 \end{aligned}$$

- Teorema 1: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$\boxed{f \text{ diferenciable} \Rightarrow f \text{ continua}}$$

- Teorema 2: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in U$, si $\exists \frac{\partial f_j(x_0)}{\partial x_i}$
 $\forall i = 1, \dots, n$ y $\forall j = 1, \dots, m$ y son continuas en un entorno de x_0 , entonces $f(x)$ es diferenciable en x_0 .

$$\text{Ejemplo: } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (i) Probar que es continua en todo \mathbb{R}^2 (en el origen).
- (ii) Probar que es diferenciable en todo \mathbb{R}^2 (en el origen).
- (iii) Probar que existen las derivadas parciales y que son continuas en $(0, 0)$ (aunque no tienen por qué serlo).

$$(i) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| \leq \frac{1}{2} \overbrace{(x^2+y^2)}^{\text{plano}} |y| \stackrel{**}{\leq} \frac{1}{2} \delta^2 < \delta.$$

Bastará con tomar $\delta < \sqrt{2\epsilon}$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$$

$$\star xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

$$\star \star |y| \leq \|(x, y)\| < \delta$$

$$(ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)(x-0) - f_y(0,0)(y-0)}{\|(x,y) - (0,0)\|}$$

$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0^2}{\sqrt{h^2+0^2}} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^2} = 0$$

$$f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot h^2}{\sqrt{0^2+h^2}} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| \leq \frac{1}{2} \frac{(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \|(x, y)\| \leq \frac{1}{2} \delta < \epsilon.$$

Bastará con tomar $\delta < \epsilon/2$.

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad f_x &= \frac{y^2 \sqrt{x^2+y^2} - xy^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2(x^2+y^2) - x^2 y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\cancel{(yx)^2} + y^4 - \cancel{(xy)^2}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \\ &= \frac{y^4}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \begin{cases} \frac{y^4}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora veremos si f_x es continua en el punto $(0, 0)$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \stackrel{?}{=}$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - 0| < \epsilon$$

$$\left| \frac{y^4}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - 0 \right| \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

Bastará con tomar $\delta < \epsilon$, por lo que f_x es continua.

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{2xy\sqrt{x^2+y^2} - xy^2 \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{2xy(x^2+y^2) - xy^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \frac{2x^3y + 2xy^3 - xy^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \\ &= \frac{2x^3y + xy^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3y + xy^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ahora repetiremos el procedimiento con f_y .

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - 0| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x^3y + xy^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \right| &\stackrel{\text{D.T}}{\leq} \frac{2|x^3y|}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + \frac{|xy^3|}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \stackrel{*}{\leq} \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \leq 2 \frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \leq 2\sqrt{x^2+y^2} < 2\delta \end{aligned}$$

$$*2xy < x^2 + y^2$$

Bastará con tomar $\delta < \epsilon/2$, por lo que f_y también es continua.

-Definición: Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, decimos que f es de **clase** $C'(U)$, y escribimos $f \in C'(U)$ si:

$$\boxed{\exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \text{ y } \forall j = 1, 2, \dots, n}$$

- Teorema: Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tales que $\exists Df(x_0), Dg(x_0)$ matrices acobianas:

- (1) $D(\lambda f(x_0)) = \lambda Df(x_0)$
- (2) $D(f+g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$
- (3) $D(f \cdot g)(x_0) = g(x_0)Df(x_0) + f(x_0)Dg(x_0)$
- (4) $D\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)Df(x_0) - f(x_0)Dg(x_0)}{[g(x_0)]^2}$
- (5) $D(f \circ g)(x_0) \rightarrow$ Regla de la cadena, que se explica en el apartado 2.3.

2.3 Derivadas direccionales

-Definición: Dado un vector \vec{u} unitario en \mathbb{R}^n , un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, se define la **derivada direccional** de f , según el vector \vec{u} , en un punto $x_0 \in U$ como:

$$D_{\vec{u}}f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\vec{u}) - f(x_0)}{t} = \left. \frac{d}{dt} f(x_0 + t\vec{u}) \right|_{t=0}$$

Ejemplo: Hallar la derivada direccional de $f : (x, y) = x^2 + y^2$ en la dirección del vector $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}$$

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(1,2) &= \frac{d}{dt} \left[f\left(1 + \frac{2t}{\sqrt{13}}, 2 - \frac{3t}{\sqrt{13}}\right) \right] \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[\left(1 + \frac{2t}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(2 - \frac{3t}{\sqrt{13}}\right)^2 \right] \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{4-12}{\sqrt{13}} = \frac{-8}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

- Proposición: Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in U$ y \vec{u} un vector unitario, entonces:

$$D_{\vec{u}}f(x_0) = \langle \vec{\nabla} f(x_0), \vec{u} \rangle$$

$$\boxed{n=2} \quad f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + t(u_1, u_2)) - f(x_0, y_0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - tu_1, y_0 - tu_2) - f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0 - tu_2)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 - tu_2) - f(x_0, y_0 - tu_2)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t} = \\ h = tu_1 \quad t \rightarrow 0 &\iff h \rightarrow 0 \quad h' = tu_2 \quad t \rightarrow 0 \iff h' \rightarrow 0 \quad \hat{y}_0 = y_0 + tu_2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} y_0 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h, \hat{y}_0) - f(x_0, \hat{y}_0)}{h}}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} u_1 + \lim_{h' \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0, y_0 + h') - f(x_0, y_0)}{h'}}_{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} u_2 \end{aligned}$$

2.4 Más sobre funciones diferenciables y el vector gradiente

(I) Dirección de máximo crecimiento de $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.