

# Cálculo II

Carlos Gómez-Lobo Hernaiz

# Tema 1. Intrducción al espacio de varias variables $\mathbb{R}^n$

## 1 Vectores, producto escalar y distancia

- En  $\mathbb{R}^2$  los puntos,  $p \in \mathbb{R}^2$ , se representan mediante pares ordenados de números reales,  $p = (a, b)$ .  
 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$
- En  $\mathbb{R}^3$  los puntos,  $p \in \mathbb{R}^3$ , se representan mediante ternas ordenadas de números reales,  $p = (a, b, c)$ .  
 $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$
- En  $\mathbb{R}^n$  los puntos,  $p \in \mathbb{R}^n$ , se representan mediante pares ordenados de números reales,  $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .  
 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$

-Definición: Geométricamente, un **vector** se define como un segmento de recta "orientado" con punto inicial en el origen de coordenadas y punto final en un punto de  $\mathbb{R}^n$ .

\*Observación: Si  $n=3$ , la notación habitual para la base canónica es:  
 $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1).$

### 1.1 Operaciones entre elementos de $\mathbb{R}^n : \tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n),$ $\tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$

1. Suma:  $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
2. Multiplicación por un escalar,  $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$
3. Producto escalar:  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \stackrel{\text{not}}{=} \vec{x} \cdot \vec{y} =$   
 $= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

## Propiedades

Sean  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  y  $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$

1. Linealidad:  $(\lambda \vec{x} + \beta \vec{y}) \cdot \vec{z} = \lambda \vec{x} \cdot \vec{z} + \beta \vec{y} \cdot \vec{z}$
2. Conmutativa:  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$
3.  $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$  y  $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \iff \vec{x} = \vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$

-Definición: La **norma euclídea** de un vector  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  (y se escribe  $\|\vec{x}\|$ ) como:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

\*Observación: Sea  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|\vec{x}\| = 1$ , se dice que es **unitario**. Sea  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  un vector no unitario, podemos **normalizarlo**:  
 $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \rightarrow$  vector unitario.

## Significado geométrico de la norma euclídea

La norma  $\|\vec{x}\|$  representa la **longitud** del vector  $\vec{x}$ . Not.:  $long(\vec{x}) = |x| = d(0, x)$ .

## Desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$

Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}$$

Demostración: Tomamos  $a = \vec{y} \cdot \vec{y} = \|\vec{y}\|^2$  y  $b = -\vec{x} \cdot \vec{y}$  y aplicamos propiedades del producto escalar al vector  $a\vec{x} + b\vec{y}$ .

-Si  $a = 0 \Rightarrow \vec{y} = 0 \checkmark$

$$\begin{aligned} &\text{-Si } a \neq 0 \Rightarrow 0 \leq (a\vec{x} + b\vec{y})(a\vec{x} + b\vec{y}) = a^2\vec{x} \cdot \vec{x} + 2ab\vec{x} \cdot \vec{y} + b^2\vec{y} \cdot \vec{y} = \\ &= \|\vec{y}\|^4 \cdot \|\vec{x}\|^2 - 2\|\vec{y}\|^2 (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 + (-\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{y}\|^4 \cdot \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 \leq \|\vec{y}\|^2 \cdot \|\vec{x}\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \Rightarrow (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \Rightarrow |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \checkmark \end{aligned}$$

$$- \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \leq \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \Rightarrow -1 \leq \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \iff \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta$$

-Definición: Dos vectores  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  son **perpendiculares/ortogonales** si y solo si  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ . Not.:  $\vec{x} \perp \vec{y}$ .

### Teorema de Pitágoras en $\mathbb{R}^n$

Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\vec{x} \perp \vec{y}$ , entonces:

$$\boxed{\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2}$$

Demostración:  $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y})(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x}\vec{x} + 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}\vec{y} = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \checkmark$

### Teorema del coseno

Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  vectores cualesquiera, entonces:

$$\boxed{\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2 \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta}$$

Demostración:  $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = (\vec{x} - \vec{y})(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{x}\vec{x} - 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}\vec{y} = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2 \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta \checkmark$

### Propiedades de la norma euclídea

Sea  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$(i) \|\vec{x}\| \geq 0 \text{ y } \|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$$

$$(ii) \|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$$

$$(iii) \text{Desigualdad triangular: } \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

$$(iv) \text{Desigualdad triangular al revés: } \left| \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \right| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Demostraciones:

$$(i) \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \geq 0 \text{ y } \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = 0 \iff$$

$$\iff x_1, x_2, \dots, x_n = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

$$(ii) \|\lambda \vec{x}\| = \left( \sum_{i=1}^n \lambda^2 x_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\lambda^2} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} = |\lambda| \|\vec{x}\|$$

$$(iii) \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y})(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x}\vec{x} + 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}\vec{y} \stackrel{\text{C-S}}{\leq} \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \Rightarrow \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

-Definición: Una **distancia/métrica** es una función  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que cumple:

- (1)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$
- (3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

-Definición: La **distancia euclídea** entre dos puntos  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  se define como:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

- (1)  $\|\vec{x} - \vec{y}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$
- (2)  $\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{y} - \vec{x}\|$
- (3)  $\|\vec{x} - \vec{z}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\|$

## 2 Conceptos métricos en el espacio euclídeo en $\mathbb{R}^n$

### 2.1 Bolas abiertas y conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$

-Definiciones:

(1) Dado un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y un número real  $r > 0$ , llamaremos **bola abierta** de centro  $x_0$  y radio  $r$  (y escribiremos  $B_r(x_0)$  o  $B(x_0, r)$ ) al conjunto:

$$B_r(x_0) \stackrel{\text{not}}{=} B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$$

$$n = 1 \rightarrow x_0 \in \mathbb{R} \quad -r < x - x_0 < r$$

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : x \in (x_0 - r, x_0 + r)\}$$

$$n = 2 \rightarrow (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

$$B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\|(x - y) - (x_0 - y_0)\|}_{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r\}$$

$$n = 3 \rightarrow (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$$

$$B_r(x_0, y_0, z_0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r\}$$

(2) Decimos que  $A \in \mathbb{R}^n$  es un **conjunto abierto** si  $\forall x_0 \in A \exists r > 0$  tal que  $B_r(x_0) \subset A$ .

(3) Un **entorno** del punto  $x \in \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto que lo contiene.

- Proposición 1: Si  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $r > 0 \Rightarrow$  la bola abierta  $B_r(x_0)$  es un conjunto abierto.

Demostración:  $\forall x \in B_r(x_0) \exists s \in \mathbb{R}, s > 0$  tal que  $B_s(x) \subset B_r(x_0)$ .

Basta con tomar  $s = r - \|x - x_0\|$ , entonces  $\forall y \in B_s(x) \quad \|y - x_0\| = \|y - x + x - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < s + \|x - x_0\| = r - \|x - x_0\| + \|x - x_0\| = r$

Ejemplo: Demostrar que  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  es un conjunto abierto.

$\forall (x_0, y_0) \in A \exists r : B_r(x_0, y_0) \subset A$ , es decir,  $y_0 > 0$

Basta con tomar  $r = y_0 > 0$ .

$\forall (a, b) \in B_r(x_0, y_0) \Rightarrow (a, b) \in A$ , es decir,  $b > 0$ ?

Como  $(a, b) \in B_r(x_0, y_0) \Rightarrow \|(a, b) - (x_0, y_0)\| < r = y_0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (a - x_0)^2 + (b - y_0)^2 < y_0^2 \Rightarrow (b - y_0)^2 < y_0^2 \Rightarrow -y_0 < b - y_0 < y_0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 0 < b < 2y_0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow (a, b) \in A$

- Proposición 2: La unión (finita o infinita) de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
- Proposición 3: La intersección finita de abiertos es un conjunto abierto.

\*Observación: La intersección finita de abiertos no es, en general, un abierto.

Demostración:  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  conjuntos abiertos y  $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$ . ¿A es un conjunto abierto?

Dado  $x \in A \Rightarrow x \in A_1, x \in A_2, \dots, x \in A_n \Rightarrow \exists r_1, r_2, \dots, r_n$  tal que  $B_{r_1}(x) \subset A_1, B_{r_2}(x) \subset A_2, \dots, B_{r_n}(x) \subset A_n$ , tomando  $r \leq \min\{r_i\}_{i=1}^n \Rightarrow B_r(x) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i = A$ .

## 2.2 Límites de sucesiones en $\mathbb{R}^n$ . Completitud.

-Definición: Una **sucesión en  $\mathbb{R}^n$**  es una colección de n sucesiones en  $\mathbb{R}$  :  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

Ejemplos:  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \left\{ \left( k, \frac{1}{k^2}, e^{-k} \right) \right\}_{k \in \mathbb{N}} ; \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \left\{ \left( \frac{3k^2}{k^2-1}, \frac{1}{k}, \log \frac{k+1}{k} \right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

-Definición: Dada una sucesión  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$  y un punto  $L \in \mathbb{R}^n$ , diremos que el límite de  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es  $L$  y escribimos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = L \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \|A_k - L\| < \epsilon \quad \forall k > N, \text{ es decir, } \forall k > N \quad A_k \in B_\epsilon(l)$$

• Lema: Dada una sucesión en  $\mathbb{R}^n$  :  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  y un punto  $L = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ , se tiene:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = L \iff \lim_{k \rightarrow \infty} a_i^k = l_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Demostración:  $\Rightarrow$ ) Queremos ver que  $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |a_i^k - l_i| < \epsilon \quad \forall k > N \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

$$|a_i^k - l_i| = \sqrt{(a_i^k - l_i)^2} \leq \sqrt{(a_1^k - l_1)^2 + (a_1^k - l_2)^2 + \dots + (a_i^k - l_i)^2 + \dots + (a_n^k - l_n)^2} = \|A_k - L\| \leq \epsilon \quad \checkmark$$

$\Leftarrow$ ) Como  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_i^k = l_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ , sabemos que  $\forall \epsilon > 0$  :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_1^k - l_1| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \quad \forall k > N_1$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_2^k - l_2| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \quad \forall k > N_2$$

$\vdots$

$$\exists N_n \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_n^k - l_n| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \quad \forall k > N_n$$

Entonces,  $\forall k \geq \max\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$  tenemos simultáneamente que  $|a_i^k - l_k| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ , por tanto:

$$\begin{aligned} \|A_k - L\| &= \sqrt{(a_1^k - l_1)^2 + (a_1^k - l_2)^2 + \dots + (a_i^k - l_i)^2 + \dots + (a_n - l_n)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{n \left( \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \right)^2} = \epsilon \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ejemplo: Hallar el límite  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left( \frac{\log x}{x^2}, \frac{x^2-1}{5x^2} \right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

$$\left. \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{k^2} &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1/k}{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k^2} = 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{5x^2} &= \frac{1}{5} \end{aligned} \right\} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left( \frac{\log x}{x^2}, \frac{x^2-1}{5x^2} \right) \right\} = (0, 5)$$

-Definición: La **propiedad de completitud** dice que toda sucesión de Cauchy converge en el espacio.

-Definición: Una sucesión  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es de **Cauchy** en  $\mathbb{R}^n$  si  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \|A_{k_1} - A_{k_2}\| < \epsilon \quad \forall k_1, k_2 > N$ .

• Teorema: El espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  es **completo**, es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente.

Demostación: Pendiente como ejercicio.

## 2.3 Más sobre la topología de $\mathbb{R}^n$

-Definición: Sea  $A$  un conjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Diremos que un punto  $x \in A$  es un **punto interior** de  $A$  si  $\exists r > 0$  tal que  $B_r(x) \subset A$ . Al conjunto de puntos interiores de  $A$  se le denota  $\overset{\circ}{A} \stackrel{\text{not}}{=} \text{int}(A)$ .

Ejercicio 1: Dado  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, |y| \leq 1\}$ . Hallar  $\overset{\circ}{A}$ .

1)  $\forall (x, y) \in A : |y| = 1 \Rightarrow (x, \pm 1) \text{ (con } |x| < 1) \quad (x, 1) \in A, \forall r > 0 \rightarrow$   
 $\rightarrow (x, 1 + r/2) \stackrel{?}{\in} A \quad |1 + r/2| = 1 + r/2 > 1 \Rightarrow B_r(x, 1) \not\subset A$



$$2) \forall (x, y) \in A \quad |x|, |y| < 1:$$

$$* \left. \begin{array}{l} r \leq 1 - |x| \text{ donde } |y| \leq |x| \\ r \leq 1 - |y| \text{ donde } |x| \leq |y| \end{array} \right\} \text{ en cualquier caso } r = 1 - \max\{|x|, |y|\} = \min\{1 - |x|, 1 - |y|\}$$

Tenemos que ver que  $B_r(x, y) \subset A$ , es decir,  $\forall (a, b) \in B_r(x, y)$  se tiene que  $|a| < 1$  y  $|b| \leq 1 \Rightarrow (a, b) \in A$

$$\begin{aligned} |a| &= |a - x + x| \stackrel{\text{D.T.}}{\leq} \underbrace{|a - x|}_{\sqrt{(a-x)^2}} + |x| \leq \underbrace{\|(a, b) - (x, y)\|}_{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}} + |x| < r + |x| \stackrel{*}{\leq} \\ &\stackrel{*}{\leq} 1 - |x| + |x| = 1 \end{aligned}$$

$$|b| = |b - y + y| \stackrel{\text{D.T.}}{\leq} |b - y| + |y| < r + |y| \leq 1 - |y| + |y| = 1$$

$\forall (a, b) \in B_r(x, y)$  se tiene que  $(a, b) \in A \checkmark$

- Propiedades:

(1)  $\overset{\circ}{A}$  es un conjunto abierto.

$$(2) \ \mathring{A} \subset A.$$

(3) Si  $A$  es un conjunto abierto, entonces  $\overset{\circ}{A} = A$ .

-Definición: Diremos que un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  es un **conjunto cerrado** si su complementario  $C^c \subset \mathbb{R}^n$ , es un conjunto abierto.

Ejercicio 2: Demostrar que la bola  $C = \{(x, y) : \underbrace{x^2 + y^2}_{\|(x,y)\|} \leq R^2 \leq R\}$  es

un conjunto cerrado en  $\mathbb{R}^2$ .

$C$  cerrado en  $\mathbb{R}^2$  si  $C^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + y^2}_{\|(x, y)\|} > R\}$  es un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^2$ , es decir,  $\forall (x_0, y_0) \in C^c \exists r > 0 : B_r(x_0, y_0) \subset C^c$ .

Tomamos  $r = \|(x_0, y_0)\| - R \Rightarrow \forall (a, b) \in B_r(x_0, y_0)$ ,  $a, b \in C^c$ , es decir,  $\|(a, b)\| > R$ ?

$$\|(x_0, y_0)\| = \|(x_0, y_0) - (a, b) + (a, b)\| \stackrel{\text{D.T.}}{\leq} \underbrace{\|(x_0, y_0) - (a, b)\|}_{< r = \|(x_0, y_0)\| - R} + \|(a, b)\| <$$

$$< \|(x_0, y_0)\| - R + \|(a, b)\| \Rightarrow \|(x_0, y_0)\| < \|(x_0, y_0)\| - R + \|(a, b)\| \Rightarrow \\ \Rightarrow R < \|(a, b)\| \checkmark$$

• Proposición 1:

- (i) La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
- (ii) La intersección (infinita o finita) de conjuntos cerrados, es un conjunto cerrado.

\*Observación: La unión infinita de conjuntos cerrados no es, en general, un conjunto cerrado.

$$\begin{aligned} \text{-Bolas } \mathbf{abiertas} \text{ en } \mathbb{R}^2 : B_R(x_0, y_0) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}_{\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < R} < R^2\} \\ \text{-Bolas } \mathbf{cerradas} \text{ en } \mathbb{R}^2 : \overline{B_R(x_0, y_0)} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}_{\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq R} \leq R^2\} \end{aligned}$$

\*Observación 1: No todos los conjuntos de  $\mathbb{R}^n$  son necesariamente abiertos o cerrados.

\*Observación 2: El vacío y  $\mathbb{R}^n$  (por convención) son abiertos y cerrados al mismo tiempo.

• Proposición 2 (Caracterización de los conjuntos cerrados por sucesiones):

$$C \subset \mathbb{R}^n \text{ es un cerrado} \iff \forall A_{k \in \mathbb{N}} \subset C \text{ con } \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = L \text{ se tiene que } L \in C$$

Demostación: Argumentamos (en ambas implicaciones) por reducción al absurdo:

$\Rightarrow$  ) Supongamos que  $L \notin C \Rightarrow L \in C^c$  abierto  $\Rightarrow \exists r > 0$  tal que  $B_r(L) \subset C^c$ . Como  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = L$ ,  $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $|A_k - L| > \epsilon \forall k > N$ , es decir,  $A_k \in B_\epsilon(L) \forall k > N$ . Si tomamos  $\epsilon = r : A_k \in B_r(L)$  Contradicción  $A_k \in C$  y  $B_r(L) \subset C^c$

$\Leftarrow$  ) Supongamos que  $C$  no es un cerrado  $\Rightarrow C^c$  no es un abierto  $\Rightarrow \exists x_0 \in C^c$  tal que  $\forall r > 0 B_r(x_0) \not\subset C^c$ , es decir,  $B_r(x_0) \cap C \neq \emptyset \forall r > 0$ . Tomamos  $r = \frac{1}{k} \Rightarrow B_{1/k}(x_0) \cap C \neq \emptyset \Rightarrow \exists \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset B_{1/k} \cap C, \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow x_0 \in C$  Contradicción porque  $x_0 \in C^c$ .

-Definición: Sea  $C$  un conjunto cualquiera en  $\mathbb{R}^n$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ , diremos que  $x$  es un **punto de adherencia/clausura** de  $C$  si  $\forall r > 0 \ B_r(x) \cap C \neq \emptyset$  y el conjunto de puntos que cumplen esta condición se denota:

$$\overline{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0 \ B_r(x) \cap C \neq \emptyset\}$$

Propiedades:

- (1)  $\overline{C}$  es un conjunto cerrado.
- (2)  $C \subset \overline{C}$ .
- (3) Si  $C$  es cerrado  $C = \overline{C}$ .

Ejercicio 3: Sea  $C = \left\{ \left( \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$  probar que  $C \in \overline{C}$ .

$\lim_{k \rightarrow 0} \left( \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) = (0, 0) \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N$  tal que  $\left\| \left( \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) - (0, 0) \right\| < \epsilon$

$\forall k > N$ . Basta tomar  $r = \epsilon \Rightarrow \left( \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \in B_\epsilon(0, 0) \forall k \geq N \Rightarrow$   
 $\Rightarrow C \cap B_r(0, 0) \neq \emptyset$

-Definición: Sea  $C$  un conjunto cualquiera de  $\mathbb{R}^n$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ . Diremos que  $x$  es un **punto de acumulación** de  $C$  si  $\forall r > 0 \ B_r(x) \setminus \{x\} \cap C \neq \emptyset$ . A los puntos de acumulación se los denota por  $C'$ .

Propiedades:

- (1)  $C' \subset \overline{C}$
- (2) En general  $\overline{C} \not\subset C'$

-Definición: Los puntos de adherencia que no son de acumulación ( $\overline{C} \setminus C'$ ) se llaman **puntos aislados**, es decir,  $x \in \mathbb{R}^n$  es un punto aislado de un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  si  $\exists r > 0$  tal que  $B_r(x) \cap C = \{x\}$ .

-Definición: Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$ , diremos que un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  es un **punto frontera** de  $C$  si  $\forall r > 0$  se tiene que  $B_r(x) \cap C \neq \emptyset$ , y este conjunto de puntos se denotan por  $\partial C$ .

-Definición: Un conjunto cualquiera  $C \subset \mathbb{R}^n$  está **acotado** si  $\exists M \in \mathbb{R}$ ,  $M > 0$  tal que  $\forall x \in C$  se tiene que  $\|x\| < M$ , es decir,  $C \subset B_M(0, \dots, 0)$ .

-Definición: Un **recubrimiento numerable por abiertos** de un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  es una colección numerable de abiertos  $\{A_i\}$  tal que  $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ .

-Definición: Un conjunto es **compacto** si para todo recubrimiento por abiertos del conjunto se puede extraer un subrecubrimiento finito.

• Teorema de Heine-Borel:  $C \subset \mathbb{R}^n$  es compacto  $\iff C$  es cerrado y acotado en  $\mathbb{R}^n$ .

Ejemplo 1:  $B_r(x_0, y_0)$  no compactos (n son cerrados).

Ejemplo 2:  $\overline{B_r(x_0, y_0)}$  si son compactos.

Ejemplo 3:  $S = \left\{ \left( \frac{(-1)^k}{k}, \frac{1}{k^2} \right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$

Por la proposición 2, como  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{(-1)^k}{k}, \frac{1}{k^2} \right) = (0, 0)$  y  $(0, 0) \notin S$ , no es cerrado y por el teorema de Heine-Borel no es compacto.

Ejemplo 4:  $S = \{(k, k^2 + 1)\}_{k \in \mathbb{N}}$  no está acotado, por tanto por el teorema de Heine-Borel tampoco es compacto.

• Teorema de Bolzano-Weierstrass: Si  $C$  es un conjunto de infinitos elementos y acotado  $\Rightarrow C' \neq \emptyset$ . Es decir, toda sucesión  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  definida en un compacto  $C$  posee una subsucesión convergente en  $C$ .

## 2.4 Funciones de varias variables y superficies de nivel

-Definición: Llamamos **función de varias variables** a la función:

$$\begin{array}{c} f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)) \end{array}$$

Si  $m > 1$ , entonces  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$  y se llama **función escalar**.

Si  $m > 1$ , entonces se llama **función vectorial**.

-Definición: Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , llamaremos **gráfica** de  $f$  al subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1} : (x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

-Definición: Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $C \in \mathbb{R}$ , el **conjunto de nivel** del valor  $C$  son los puntos :  $\{x \in D : f(x) = C\}$ .

$n = 2$  : curvas de nivel.

$n = 3$  : superficies de nivel.