

Cálculo II

Carlos Gómez-Lobo Hernaiz

Tema 1. Intrducción al espacio de varias variables \mathbb{R}^n

1 Vectores, producto escalar y distancia

- En \mathbb{R}^2 los puntos, $p \in \mathbb{R}^2$, se representan mediante pares ordenados de números reales, $p = (a, b)$.
 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- En \mathbb{R}^3 los puntos, $p \in \mathbb{R}^3$, se representan mediante ternas ordenadas de números reales, $p = (a, b, c)$.
 $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
- En \mathbb{R}^n los puntos, $p \in \mathbb{R}^n$, se representan mediante pares ordenados de números reales, $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$.

-Definición: Geométricamente, un **vector** se define como un segmento de recta "orientado" con punto inicial en el origen de coordenadas y punto final en un punto de \mathbb{R}^n .

*Observación: Si $n=3$, la notación habitual para la base canónica es:
 $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$.

1.1 Operaciones entre elementos de $\mathbb{R}^n : \tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n), \tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$

1. Suma: $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
2. Multiplicación por un escalar, $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$
3. Producto escalar: $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \stackrel{\text{not}}{=} \vec{x} \cdot \vec{y} =$
$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Propiedades

Sean $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$

1. Linealidad: $(\lambda \vec{x} + \beta \vec{y}) \cdot \vec{z} = \lambda \vec{x} \cdot \vec{z} + \beta \vec{y} \cdot \vec{z}$
2. Conmutativa: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$
3. $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ y $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \iff \vec{x} = \vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$

-Definición: La **norma euclídea** de un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (y se escribe $\|\vec{x}\|$) como:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

*Observación: Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\vec{x}\| = 1$, se dice que es **unitario**. Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ un vector no unitario, podemos **normalizarlo**:
 $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \rightarrow$ vector unitario.

Significado geométrico de la norma euclídea

La norma $\|\vec{x}\|$ representa la **longitud** del vector \vec{x} . Not.: $long(\vec{x}) = |x| = d(0, x)$.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz en \mathbb{R}^n

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}$$

Demostración: Tomamos $a = \vec{y} \cdot \vec{y} = \|\vec{y}\|^2$ y $b = -\vec{x} \cdot \vec{y}$ y aplicamos propiedades del producto escalar al vector $a\vec{x} + b\vec{y}$.

-Si $a = 0 \Rightarrow \vec{y} = 0 \checkmark$

$$\begin{aligned} &\text{-Si } a \neq 0 \Rightarrow 0 \leq (a\vec{x} + b\vec{y})(a\vec{x} + b\vec{y}) = a^2\vec{x} \cdot \vec{x} + 2ab\vec{x} \cdot \vec{y} + b^2\vec{y} \cdot \vec{y} = \\ &= \|\vec{y}\|^4 \cdot \|\vec{x}\|^2 - 2\|\vec{y}\|^2 (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 + (-\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{y}\|^4 \cdot \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 \leq \|\vec{y}\|^2 \cdot \|\vec{x}\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \Rightarrow (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \Rightarrow |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \checkmark \end{aligned}$$

$$- \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \leq \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \Rightarrow -1 \leq \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \iff \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta$$

-Definición: Dos vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ son **perpendiculares/ortogonales** si y solo si $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$. Not.: $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Teorema de Pitágoras en \mathbb{R}^n

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{x} \perp \vec{y}$, entonces:

$$\boxed{\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2}$$

Demostración: $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y})(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x}\vec{x} + 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}\vec{y} = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \checkmark$

Teorema del coseno

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ vectores cualesquiera, entonces:

$$\boxed{\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2 \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta}$$

Demostración: $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = (\vec{x} - \vec{y})(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{x}\vec{x} - 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}\vec{y} = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2 \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta \checkmark$

Propiedades de la norma euclídea

Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(i) \|\vec{x}\| \geq 0 \text{ y } \|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$$

$$(ii) \|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$$

$$(iii) \text{Desigualdad triangular: } \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

$$(iv) \text{Desigualdad triangular al revés: } \left| \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \right| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Demostraciones:

$$(i) \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \geq 0 \text{ y } \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = 0 \iff$$

$$\iff x_1, x_2, \dots, x_n = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}
(ii) \quad \|\lambda \vec{x}\| &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda^2 x_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\lambda^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} = |\lambda| \|\vec{x}\| \\
(iii) \quad \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} + \vec{y})(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x}\vec{x} + 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}\vec{y} \stackrel{\text{C-S}}{\leq} \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = \\
&= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \Rightarrow \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|
\end{aligned}$$

-Definición: Una **distancia/métrica** es una función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que cumple:

- (1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$
- (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

-Definición: La **distancia euclídea** entre dos puntos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de \mathbb{R}^n se define como:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

- (1) $\|\vec{x} - \vec{y}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$
- (2) $\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{y} - \vec{x}\|$
- (3) $\|\vec{x} - \vec{z}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\|$

2 Conceptos métricos en el espacio euclídeo en \mathbb{R}^n

2.1 Bolas abiertas y conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n

-Definiciones:

(1) Dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un número real $r > 0$, llamaremos **bola abierta** de centro x_0 y radio r (y escribiremos $B_r(x_0)$ o $B(x_0, r)$) al conjunto:

$$B_r(x_0) \stackrel{\text{not}}{=} B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$$

$$n = 1 \rightarrow x_0 \in \mathbb{R} \quad -r < x - x_0 < r$$

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : x \in (x_0 - r, x_0 + r)\}$$

$$n = 2 \rightarrow (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

$$B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\|(x - y) - (x_0 - y_0)\|}_{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r\}$$

$$n = 3 \rightarrow (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$$

$$B_r(x_0, y_0, z_0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r\}$$

(2) Decimos que $A \in \mathbb{R}^n$ es un **conjunto abierto** si $\forall x_0 \in A \exists r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset A$.

(3) Un **entorno** del punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto que lo contiene.

- Proposición 1: Si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0 \Rightarrow$ la bola abierta $B_r(x_0)$ es un conjunto abierto.

Demostración: $\forall x \in B_r(x_0) \exists s \in \mathbb{R}, s > 0$ tal que $B_s(x) \subset B_r(x_0)$.

Basta con tomar $s = r - \|x - x_0\|$, entonces $\forall y \in B_s(x) \quad \|y - x_0\| = \|y - x + x - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < s + \|x - x_0\| = r - \|x - x_0\| + \|x - x_0\| = r$

Ejemplo: Demostrar que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ es un conjunto abierto.

$\forall (x_0, y_0) \in A \exists r : B_r(x_0, y_0) \subset A$, es decir, $y_0 > 0$

Basta con tomar $r = y_0 > 0$.

$\forall (a, b) \in B_r(x_0, y_0) \Rightarrow (a, b) \in A$, es decir, $b > 0$?

Como $(a, b) \in B_r(x_0, y_0) \Rightarrow \|(a, b) - (x_0, y_0)\| < r = y_0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (a - x_0)^2 + (b - y_0)^2 < y_0^2 \Rightarrow (b - y_0)^2 < y_0^2 \Rightarrow -y_0 < b - y_0 < y_0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0 < b < 2y_0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow (a, b) \in A$

- Proposición 2: La unión (finita o infinita) de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
- Proposición 3: La intersección finita de abiertos es un conjunto abierto.

*Observación: La intersección finita de abiertos no es, en general, un abierto.

Demostración: $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ conjuntos abiertos y $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$. ¿A es un conjunto abierto?

Dado $x \in A \Rightarrow x \in A_1, x \in A_2, \dots, x \in A_n \Rightarrow \exists r_1, r_2, \dots, r_n$ tal que $B_{r_1}(x) \subset A_1, B_{r_2}(x) \subset A_2, \dots, B_{r_n}(x) \subset A_n$, tomando $r \leq \min\{r_i\}_{i=1}^n \Rightarrow B_r(x) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i = A$.

2.2 Límites de sucesiones en \mathbb{R}^n . Completitud.

-Definición: Una **sucesión en \mathbb{R}^n** es una colección de n sucesiones en \mathbb{R} : $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Ejemplos: $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \left\{ \left(k, \frac{1}{k^2}, e^{-k} \right) \right\}_{k \in \mathbb{N}} ; \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \left\{ \left(\frac{3k^2}{k^2-1}, \frac{1}{k}, \log \frac{k+1}{k} \right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$.

-Definición: Dada una sucesión $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ y un punto $L \in \mathbb{R}^n$, diremos que el límite de $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es L y escribimos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = L \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \|A_k - L\| < \epsilon \quad \forall k > N, \text{ es decir, } \forall k > N \quad A_k \in B_\epsilon(l)$$

• Lema: Dada una sucesión en \mathbb{R}^n : $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ y un punto $L = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$, se tiene:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = L \iff \lim_{k \rightarrow \infty} a_i^k = l_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Demostración: \Rightarrow) Queremos ver que $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |a_i^k - l_i| < \epsilon \quad \forall k > N \forall i = 1, 2, \dots, n$.

$$|a_i^k - l_i| = \sqrt{(a_i^k - l_i)^2} \leq \sqrt{(a_1^k - l_1)^2 + (a_1^k - l_2)^2 + \dots + (a_i^k - l_i)^2 + \dots + (a_n^k - l_n)^2} = \|A_k - L\| \leq \epsilon \quad \checkmark$$

\Leftarrow) Como $\lim_{k \rightarrow \infty} a_i^k = l_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$, sabemos que $\forall \epsilon > 0$:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_1^k - l_1| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \quad \forall k > N_1$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_2^k - l_2| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \quad \forall k > N_2$$

\vdots

$$\exists N_n \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_n^k - l_n| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \quad \forall k > N_n$$

Entonces, $\forall k \geq \max\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$ tenemos simultáneamente que $|a_i^k - l_k| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$, por tanto:

$$\begin{aligned} \|A_k - L\| &= \sqrt{(a_1^k - l_1)^2 + (a_1^k - l_2)^2 + \dots + (a_i^k - l_i)^2 + \dots + (a_n - l_n)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{n \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \right)^2} = \epsilon \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ejemplo: Hallar el límite $\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{\log x}{x^2}, \frac{x^2-1}{5x^2} \right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{k^2} &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1/k}{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k^2} = 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{5x^2} &= \frac{1}{5} \end{aligned} \right\} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{\log x}{x^2}, \frac{x^2-1}{5x^2} \right) \right\} = (0, 5)$$

-Definición: La **propiedad de completitud** dice que toda sucesión de Cauchy converge en el espacio.

-Definición: Una sucesión $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de **Cauchy** en \mathbb{R}^n si $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \|A_{k_1} - A_{k_2}\| < \epsilon \quad \forall k_1, k_2 > N$.

• Teorema: El espacio euclídeo \mathbb{R}^n es **completo**, es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente.

Demostación: Pendiente como ejercicio.

2.3 Más sobre la topología de \mathbb{R}^n

-Definición: Sea A un conjunto de \mathbb{R}^n . Diremos que un punto $x \in A$ es un **punto interior** de A si $\exists r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$. Al conjunto de puntos interiores de A se le denota $\overset{\circ}{A} \stackrel{\text{not}}{=} \text{int}(A)$.

Ejercicio 1: Dado $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, |y| \leq 1\}$. Hallar $\overset{\circ}{A}$.

1) $\forall (x, y) \in A : |y| = 1 \Rightarrow (x, \pm 1) \text{ (con } |x| < 1) \quad (x, 1) \in A, \forall r > 0 \rightarrow$
 $\rightarrow (x, 1 + r/2) \stackrel{?}{\in} A \quad |1 + r/2| = 1 + r/2 > 1 \Rightarrow B_r(x, 1) \not\subset A$

2) $\forall (x, y) \in A \quad |x|, |y| < 1$:

$$* \quad \left. \begin{array}{l} r \leq 1 - |x| \text{ donde } |y| \leq |x| \\ r \leq 1 - |y| \text{ donde } |x| \leq |y| \end{array} \right\} \text{ en cualquier caso } r = 1 - \max\{|x|, |y|\} = \min\{1 - |x|, 1 - |y|\}$$

Tenemos que ver que $B_r(x, y) \subset A$, es decir, $\forall (a, b) \in B_r(x, y)$ se tiene que $|a| < 1$ y $|b| < 1 \Rightarrow (a, b) \in A$

$$|a| = |a - x + x| \stackrel{\text{D.T.}}{\leq} \underbrace{|a - x|}_{\sqrt{(a-x)^2}} + |x| \leq \underbrace{\|(a, b) - (x, y)\|}_{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}} + |x| < r + |x| \stackrel{*}{\leq} 1 - |x| + |x| = 1$$

$$|b| = |b - y + y| \stackrel{\text{D.T.}}{\leq} |b - y| + |y| < r + |y| \leq 1 - |y| + |y| = 1$$

$\forall (a, b) \in B_r(x, y)$ se tiene que $(a, b) \in A \checkmark$

• Propiedades:

(1) $\overset{\circ}{A}$ es un conjunto abierto.

(2) $\overset{\circ}{A} \subset A$.

(3) Si A es un conjunto abierto, entonces $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = A$.

-Definición: Diremos que un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es un **conjunto cerrado** si su complementario $C^c \subset \mathbb{R}^n$, es un conjunto abierto.

Ejercicio 2: Demostrar que la bola $C = \{(x, y) : \underbrace{x^2 + y^2}_{\|(x,y)\|} \leq R^2\} \leq R\}$ es

un conjunto cerrado en \mathbb{R}^2 .

C cerrado en \mathbb{R}^2 si $C^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + y^2}_{\|(x,y)\|} > R^2\}$ es un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 , es decir, $\forall (x_0, y_0) \in C^c \exists r > 0 : B_r(x_0, y_0) \subset C^c$.

Tomamos $r = \|(x_0, y_0)\| - R \Rightarrow \forall (a, b) \in B_r(x_0, y_0)$, ¿ $a, b \in C^c$, es decir, $\|(a, b)\| > R$?

$$\|(x_0, y_0)\| = \|(x_0, y_0) - (a, b) + (a, b)\| \stackrel{\text{D.T.}}{\leq} \underbrace{\|(x_0, y_0) - (a, b)\|}_{< r = \|(x_0, y_0)\| - R} + \|(a, b)\| <$$

$$< \|(x_0, y_0)\| - R + \|(a, b)\| \Rightarrow \|(x_0, y_0)\| < \|(x_0, y_0)\| - R + \|(a, b)\| \Rightarrow \\ \Rightarrow R < \|(a, b)\| \checkmark$$

• Proposición 1:

- (i) La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
- (ii) La intersección (infinita o finita) de conjuntos cerrados, es un conjunto cerrado.

*Observación: La unión infinita de conjuntos cerrados no es, en general, un conjunto cerrado.

$$\begin{aligned} \text{-Bolas } \mathbf{abiertas} \text{ en } \mathbb{R}^2 : B_R(x_0, y_0) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}_{\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < R} < R^2\} \\ \text{-Bolas } \mathbf{cerradas} \text{ en } \mathbb{R}^2 : \overline{B_R(x_0, y_0)} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}_{\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq R} \leq R^2\} \end{aligned}$$

*Observación 1: No todos los conjuntos de \mathbb{R}^n son necesariamente abiertos o cerrados.

*Observación 2: El vacío y \mathbb{R}^n (por convención) son abiertos y cerrados al mismo tiempo.

• Proposición 2 (Caracterización de los conjuntos cerrados por sucesiones):

$$C \subset \mathbb{R}^n \text{ es un cerrado} \iff \forall A_{k \in \mathbb{N}} \subset C \text{ con } \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = L \text{ se tiene que } L \in C$$

Demostación: Argumentamos (en ambas implicaciones) por reducción al absurdo:

\Rightarrow) Supongamos que $L \notin C \Rightarrow L \in C^c$ abierto $\Rightarrow \exists r > 0$ tal que $B_r(L) \subset C^c$. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = L$, $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|A_k - L| > \epsilon \forall k > N$, es decir, $A_k \in B_\epsilon(L) \forall k > N$. Si tomamos $\epsilon = r : A_k \in B_r(L)$ Contradicción $A_k \in C$ y $B_r(L) \subset C^c$

\Leftarrow) Supongamos que C no es un cerrado $\Rightarrow C^c$ no es un abierto $\Rightarrow \exists x_0 \in C^c$ tal que $\forall r > 0 B_r(x_0) \not\subset C^c$, es decir, $B_r(x_0) \cap C \neq \emptyset \forall r > 0$. Tomamos $r = \frac{1}{k} \Rightarrow B_{1/k}(x_0) \cap C \neq \emptyset \Rightarrow \exists \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset B_{1/k} \cap C, \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow x_0 \in C$ Contradicción porque $x_0 \in C^c$.

-Definición: Sea C un conjunto cualquiera en \mathbb{R}^n y $x \in \mathbb{R}^n$, diremos que x es un **punto de adherencia/clausura** de C si $\forall r > 0 \ B_r(x) \cap C \neq \emptyset$ y el conjunto de puntos que cumplen esta condición se denota:

$$\overline{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0 \ B_r(x) \cap C \neq \emptyset\}$$

Propiedades:

- (1) \overline{C} es un conjunto cerrado.
- (2) $C \subset \overline{C}$.
- (3) Si C es cerrado $C = \overline{C}$.

Ejercicio 3: Sea $C = \left\{ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ probar que $C \in \overline{C}$.

$\lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) = (0, 0) \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N$ tal que $\left\| \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) - (0, 0) \right\| < \epsilon$
 $\forall k > N$. Basta tomar $r = \epsilon \Rightarrow \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \in B_\epsilon(0, 0) \forall k \geq N \Rightarrow$
 $\Rightarrow C \cap B_r(0, 0) \neq \emptyset$

-Definición: Sea C un conjunto cualquiera de \mathbb{R}^n y $x \in \mathbb{R}^n$. Diremos que x es un **punto de acumulación** de C si $\forall r > 0 \ B_r(x) \setminus \{x\} \cap C \neq \emptyset$. A los puntos de acumulación se los denota por C' .

Propiedades:

- (1) $C' \subset \overline{C}$
- (2) En general $\overline{C} \not\subset C'$

-Definición: Los puntos de adherencia que no son de acumulación ($\overline{C} \setminus C'$) se llaman **puntos aislados**, es decir, $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto aislado de un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ si $\exists r > 0$ tal que $B_r(x) \cap C = \{x\}$.

-Definición: Sea $C \subset \mathbb{R}^n$, diremos que un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un **punto frontera** de C si $\forall r > 0$ se tiene que $B_r(x) \cap C \neq \emptyset$, y este conjunto de puntos se denotan por ∂C .

-Definición: Un conjunto cualquiera $C \subset \mathbb{R}^n$ está **acotado** si $\exists M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ tal que $\forall x \in C$ se tiene que $\|x\| < M$, es decir, $C \subset B_M(0, \dots, 0)$.

-Definición: Un **recubrimiento numerable por abiertos** de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es una colección numerable de abiertos $\{A_i\}$ tal que $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

-Definición: Un conjunto es **compacto** si para todo recubrimiento por abiertos del conjunto se puede extraer un subrecubrimiento finito.

• Teorema de Heine-Borel: $C \subset \mathbb{R}^n$ es compacto $\iff C$ es cerrado y acotado en \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1: $B_r(x_0, y_0)$ no compactos (n son cerrados).

Ejemplo 2: $\overline{B_r(x_0, y_0)}$ si son compactos.

Ejemplo 3: $S = \left\{ \left(\frac{(-1)^k}{k}, \frac{1}{k^2} \right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$

Por la proposición 2, como $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(-1)^k}{k}, \frac{1}{k^2} \right) = (0, 0)$ y $(0, 0) \notin S$, no es cerrado y por el teorema de Heine-Borel no es compacto.

Ejemplo 4: $S = \{(k, k^2 + 1)\}_{k \in \mathbb{N}}$ no está acotado, por tanto por el teorema de Heine-Borel tampoco es compacto.

• Teorema de Bolzano-Weierstrass: Si C es un conjunto de infinitos elementos y acotado $\Rightarrow C' \neq \emptyset$. Es decir, toda sucesión $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ definida en un compacto C posee una subsucesión convergente en C .

2.4 Funciones de varias variables y superficies de nivel

-Definición: Llamamos **función de varias variables** a la función:

$$\begin{array}{c} f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)) \end{array}$$

Si $m > 1$, entonces $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ y se llama **función escalar**.

Si $m > 1$, entonces se llama **función vectorial**.

-Definición: Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, llamaremos **gráfica** de f al subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1} : (x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

-Definición: Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $C \in \mathbb{R}$, el **conjunto de nivel** del valor C son los puntos : $\{x \in D : f(x) = C\}$.

$n = 2$: curvas de nivel.

$n = 3$: superficies de nivel.

Ejemplo 1: Usando curvas de nivel. describir la gráfica $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Curvas de nivel: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = C, C \geq 0\}$

$C = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x, y) = 0$

$C = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1^2 \Rightarrow$ Circunferencia de radio 1

$C = 4 \rightarrow x^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow$ Circunferencia de radio 2

$C = 9 \rightarrow x^2 + y^2 = 3^2 \Rightarrow$ Circunferencia de radio 3

Ejemplo 2: Describir las superficies de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Superficies de nivel: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = C, C \geq 0\} =$
= esferas de radio \sqrt{C} .

Tema 2. Cálculo diferencial en varias variables

1 Límites y continuidad

1.1 Límites

-Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $x_0 \in A'$ y $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar. Dado $L \in \mathbb{R}$ diremos que el **límite** de $f(x)$ es L cuando x

tiende a x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \quad \forall x \in A$$

O lo que es lo mismo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \forall x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(L)$$

Ejemplo 1: Demuestra, usando la definición, que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2x^2 + y^2 = 0$.

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta &\Rightarrow |(2x^2 + y^2) - 0| < \epsilon \\ \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2} < \delta}_{x^2 + y^2 < \delta^2} &\Rightarrow |2x^2 + y^2| < 2(x^2 + y^2) \leq 2\delta^2 < \epsilon, \text{ por tanto bastará} \\ \text{con tomar } \delta &< \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Demuestra, usando la definición, que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \underbrace{\|(x, y) - (0, 0)\|}_{\sqrt{x^2+y^2} < \delta} < \delta &\Rightarrow \left| \frac{5x^2y}{x^2+y^2} \right| < \epsilon \\ \left| \frac{5x^2y}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{5x^2y}{x^2} \right| = \underbrace{|5y|}_{5\sqrt{y^2}} &\leq 5 \underbrace{\|(x, y) - (0, 0)\|}_{\sqrt{x^2+y^2}} < 5\delta < \epsilon, \text{ por tanto} \\ \text{bastará con tomar } \delta &< \frac{\epsilon}{5}. \end{aligned}$$

- Teorema: El límite de una función $f(x)$, si existe, es único.

$$\begin{aligned} \text{Demostración: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \neq L_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \\ 2\epsilon < |L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq \underbrace{|L_1 - f(x)|}_{< \epsilon} + \underbrace{|f(x) - L_2|}_{< \epsilon} < \\ < 2\epsilon \quad \text{Contradicción} \quad 2\epsilon < 2\epsilon \end{aligned}$$

Propiedades: Sean $f, g : A(\text{abierto}) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \text{ si } L_2 \neq 0 \text{ y } g(x) \neq 0 \text{ en un entorno de } x_0.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow x_0} \lambda f(x) = \lambda L_1$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = L_1^{L_2} \text{ si tiene sentido.}$$

★ Observación: Si $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Rightarrow f(x)$ está acotada en un entorno de x_0 .

$$\text{Demostración: } |f(x)| - L \leq |f(x) - L| < \epsilon \Rightarrow |f(x)| \leq L + \epsilon$$

• Proposición 1: Sea $f : A \text{ (abierto)} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función vectorial ,
 $x_0 \in A'$ y $L \in \mathbb{R}^m$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = l_i$$

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) \\ L = (l_1, l_2, \dots, l_m) \end{cases}$$

• Proposición 2: "Caracterización de límites de funciones por sucesiones"

Sea $f : A \text{ (abierto)} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \forall \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in A \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \text{ y } x_k \neq x_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = L$$

Demostración:

\Rightarrow $\forall \{x_k\}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$, ¿se tiene que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = L$?

Por convergencia de sucesiones tenemos que $\forall \epsilon_1 > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} :$

$$\|x_k - x_0\| < \epsilon_1 \forall k \geq N_1, \text{ tomando } \epsilon_1 = \delta \Rightarrow |f(x_k) - L| < \epsilon.$$

\Leftarrow Argumentamos por reducción a lo absurdo.

Suponemos que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq L$, es decir, $\exists \epsilon_2 > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ se tiene que

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon_2 \text{ (es decir, } f(b_\delta) \cap B_{\epsilon_2}(L) \neq \emptyset).$$

Se cumple $\forall \delta$, en particular para $\delta = \left\{ \frac{1}{k} \right\} \Rightarrow$ tomamos una sucesión $\{x_k\} \in b_{1/k}(x_0)$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \Rightarrow |f(x_k) - L| < \epsilon$ Contradicción ($II \Rightarrow I$).

★ Observación: La caracterización de límites por sucesiones será muy útil para demostrar la NO existencia de límites, encontrando dos sucesiones con límites diferentes.

1.2 Continuidad

-Definición: Una función $f : A$ (abierto) $\subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es **continua** en $x_0 \in A$ si:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon}$$

Es decir:

- (1) $\exists f(x_0)$
- (2) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- (3) $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

★ Observación: Una función vectorial $f : A$ (abierto) $\subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua $\iff f_i$ es continua $\forall i = 1, 2, \dots, m$.

Propiedades: Sean f y g funciones continuas en x_0 , entonces:

- (1) $(f \pm g)(x)$ es continua en x_0 .
- (2) $(\lambda f)(x)$ es continua en $x_0 \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- (3) $(f \cdot g)(x)$ es continua en x_0 .
- (4) $\left(\frac{f}{g} \right)(x)$ es continua en x_0 si $g(x_0) \neq 0$.
- (5) $[f(x)]^{g(x)}$ es continua en x_0 si tiene sentido.

- Proposición 1: "Caracterización de las funciones continuas por sucesiones"
Sea $x_0 \in A$ y $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f \text{ continua en } x_0 \iff \forall \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \text{ y } x_k \neq x_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0)$$

Ejemplo 1: ¿Es continua en \mathbb{R}^2 la siguiente función f ?:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(1) f(0, 0) = 0$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

$$(3) f(0, 0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

$f(x, y)$ es continua en todo \mathbb{R}^2 .

- Teorema: Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$:

$$f(x) \text{ continua en } x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ y } g(y) \text{ continua en } f(x_0) \in \mathbb{R}^m \Rightarrow (g \circ f)(x) \text{ continua en } x_0$$

1.3 Conjuntos abiertos, cerrados y funciones continuas

-Definición: Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$, se define la **imagen inversa** o **preimagen** del conjunto Y mediante la función f como:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in Y\}$$

Propiedades:

$$(1) \text{ Si } X = f^{-1}(Y) \Rightarrow f(X) \subset Y \Rightarrow f(f^{-1}(Y)) \subset Y$$

Ejemplo: $f = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$f^{-1}(\underbrace{[0, 2]}_Y) : \underbrace{[0, \infty)}_X \Rightarrow f([0, +\infty)) = 1 \subset [0, 2]$$

(2) Si $Y = f(X) \Rightarrow X \subset f^{-1}(Y) \Rightarrow X \subset f^{-1}(f(X))$

Ejemplo: $f(x) = x^2$

$$f(\{2\}) = 4 \Rightarrow \{2\} \subset f^{-1}(\{4\}) = \{2, 2\}$$

Ejemplo 1: $f = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{1\}) &= [0, +\infty) & f^{-1}(\{-1\}) &= (-\infty, 0) \\ f^{-1}([-1, 1]) &= \mathbb{R} & f^{-1}([0, 2]) &= [0, +\infty) \\ f^{-1}([-2, 0]) &= (-\infty, 0) \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Sea $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4$ ¿ $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}([-\infty, 0])$?

$$f^{-1}(\{3\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = 1\} \rightarrow \text{Elipse de altura } z = 1$$

$$f^{-1}((-\infty, 0]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 4\} \rightarrow \text{Elipses de alturas desde 0 hasta -4.}$$

Esto tiene sentido dado que la función forma un paraboloide elíptico.

- Teorema 1: Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$f \text{ es continua} \iff \forall V \subset \mathbb{R}^m \text{ abierto} : f^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n \text{ es abierto}$$

- Teorema 2: Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$f \text{ es continua} \iff \forall C \subset \mathbb{R}^m \text{ cerrado} : f^{-1}(C) \subset \mathbb{R}^n \text{ es cerrado}$$