PhaseTensor簡介

以程式設計的實作為目的，整理相關數學公式。

> 作者: HsiupoYeh
> 更新日期: 2022-09-15

參考資料

- Caldwell, T. G., Bibby, H. M., & Brown, C. (2004). The magnetotelluric phase tensor. Geophysical Journal International, 158(2), 457-469.
- Bibby, H. M., Caldwell, T. G., & Brown, C. (2005). Determinable and non-determinable parameters of galvanic distortion in magnetotellurics. Geophysical Journal International, 163(3), 915-930.
- Booker, J. R. (2014). The magnetotelluric phase tensor a critical review. Surveys in Geophysics, 35(1), 7-40.

水平電場定義

- 大地電磁法中，E單位為[mV/km]，f單位為[Hz]。
- 大地電磁法中，量測時x方向朝正北，y方向朝正東。
- 不同頻率互相獨立，一次討論一個頻率。
- 矩陣中每個元素都是複數型式。

$$\mathbf{E}(f) = \begin{bmatrix} E_x(f) \\ E_y(f) \end{bmatrix} \qquad (1)$$

水平磁場定義

- 大地電磁法中，單位為[nT]。
- 大地電磁法中，量測時x方向朝正北，y方向朝正東。
- 不同頻率互相獨立，一次討論一個頻率。
- 矩陣中每個元素都是複數型式。

$$\mathbf{H}(f) = \begin{bmatrix} H_x(f) \\ H_y(f) \end{bmatrix} \qquad (2)$$

阻抗張量(Impedance Tensor)定義

- 大地電磁法中，單位為[Ohm]。
- 不同頻率互相獨立，一次討論一個頻率。
- 矩陣中每個元素都是複數型式。

$$\mathbf{Z}(f) = \begin{bmatrix} Z_{xx}(f) & Z_{xy}(f) \\ Z_{yx}(f) & Z_{yy}(f) \end{bmatrix} \qquad (3)$$

關係式

$$\mathbf{E}(f) = \mathbf{Z}(f)\mathbf{H}(f) \qquad (4)$$

$$\begin{bmatrix} E_x(f) \\ E_y(f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{xx}(f) & Z_{xy}(f) \\ Z_{yx}(f) & Z_{yy}(f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x(f) \\ H_y(f) \end{bmatrix} \qquad (5)$$

關係式(只看單一頻率時)

$$\mathbf{E} = \mathbf{Z}\mathbf{H} \qquad (6)$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} \qquad (7)$$

阻抗張量實部矩陣定義(只看單一頻率時)

- 大地電磁法中，單位為[Ohm]。
- 不同頻率互相獨立，一次討論一個頻率。
- 矩陣中每個元素都是實數型式。

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{xx} & X_{xy} \\ X_{yx} & X_{yy} \end{bmatrix} \tag{8}$$

阻抗張量實部矩陣關係式(只看單一頻率時)

$$\mathbf{X} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{Z}\right\} \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} X_{xx} & X_{xy} \\ X_{yx} & X_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\left\{Z_{xx}\right\} & \mathrm{Re}\left\{Z_{xy}\right\} \\ \mathrm{Re}\left\{Z_{yx}\right\} & \mathrm{Re}\left\{Z_{yy}\right\} \end{bmatrix} \tag{10}$$

阻抗張量虛部矩陣定義(只看單一頻率時)

- 大地電磁法中，單位為[Ohm]。
- 不同頻率互相獨立，一次討論一個頻率。
- 矩陣中每個元素都是實數型式。

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{xx} & Y_{xy} \\ Y_{yx} & Y_{yy} \end{bmatrix} \tag{11}$$

阻抗張量虛部矩陣關係式(只看單一頻率時)

$$\mathbf{Y} = \mathrm{Im}\left\{\mathbf{Z}\right\} \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{xx} & Y_{xy} \\ Y_{yx} & Y_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Im}\left\{Z_{xx}\right\} & \mathrm{Im}\left\{Z_{xy}\right\} \\ \mathrm{Im}\left\{Z_{yx}\right\} & \mathrm{Im}\left\{Z_{yy}\right\} \end{bmatrix} \tag{13}$$

相位張量(Phase Tensor)定義

- 大地電磁法中，無單位。
- 不同頻率互相獨立，一次討論一個頻率。
- 矩陣中每個元素都是實數型式。

$$\mathbf{\Phi}\left(f\right) = \begin{bmatrix} \Phi_{xx}\left(f\right) & \Phi_{xy}\left(f\right) \\ \Phi_{yx}\left(f\right) & \Phi_{yy}\left(f\right) \end{bmatrix} \tag{14}$$

關係式

$$\mathbf{\Phi}\left(f\right) = \mathbf{X}(f)^{-1}\mathbf{Y}\left(f\right) \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{xx}\left(f\right) & \Phi_{xy}\left(f\right) \\ \Phi_{yx}\left(f\right) & \Phi_{yy}\left(f\right) \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(X_{xx}\left(f\right)X_{yy}\left(f\right) - X_{yx}\left(f\right)X_{xy}\left(f\right)\right)} \begin{bmatrix} X_{yy}\left(f\right)Y_{xx}\left(f\right) - X_{xy}\left(f\right)Y_{yx}\left(f\right) & X_{yy}\left(f\right)Y_{xy}\left(f\right) - X_{xy}\left(f\right)Y_{yy}\left(f\right) \\ X_{xx}\left(f\right)Y_{yx}\left(f\right) - X_{yx}\left(f\right)Y_{xx}\left(f\right) & X_{xx}\left(f\right)Y_{yy}\left(f\right) - X_{yx}\left(f\right)Y_{xy}\left(f\right) \end{bmatrix} \tag{16}$$

關係式(只看單一頻率時)

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y} \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(X_{xx}X_{yy} - X_{yx}X_{xy}\right)} \begin{bmatrix} X_{yy}Y_{xx} - X_{xy}Y_{yx} & X_{yy}Y_{xy} - X_{xy}Y_{yy} \\ X_{xx}Y_{yx} - X_{yx}Y_{xx} & X_{xx}Y_{yy} - X_{yx}Y_{xy} \end{bmatrix} \tag{18}$$

> 注意!計算上有可能存在分母為0，無法求取反矩陣的狀況。這樣的狀況下無法分析相位張量。

二維狀況下的特殊情形(只看單一頻率)

- 在探討二維構造的阻抗張量時，必須先說明清楚阻抗張量量測的座標配置。
- 當存在一個二維構造，其構造走向為方位角0度或180度時，阻抗張量量測時x方向朝正北，y方向朝正東。此時阻抗張量為:

$$\mathbf{Z}^{2D,0^\circ}=\begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & Z_{xy} \\ Z_{yx} & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

- 其相位張量為:

$$\mathbf{\Phi}^{2D,0^\circ}=\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} \end{bmatrix}=\frac{1}{(X_{xx}X_{yy}-X_{yx}X_{xy})}\begin{bmatrix} X_{yy}Y_{xx}-X_{xy}Y_{yx} & X_{yy}Y_{xy}-X_{xy}Y_{yy} \\ X_{xx}Y_{yx}-X_{yx}Y_{xx} & X_{xx}Y_{yy}-X_{yx}Y_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}^{2D,0^\circ}=\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} \end{bmatrix}=\frac{1}{(0-X_{yx}X_{xy})}\begin{bmatrix} 0-X_{xy}Y_{yx} & 0-0 \\ 0-0 & 0-X_{yx}Y_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}^{2D,0^\circ}=\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} \end{bmatrix}=\frac{1}{(-X_{yx}X_{xy})}\begin{bmatrix} -X_{xy}Y_{yx} & 0 \\ 0 & -X_{yx}Y_{xy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{Y_{yx}}{X_{yx}} & 0 \\ 0 & \frac{Y_{xy}}{X_{xy}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}^{2D,0^\circ}=\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{Y_{yx}}{X_{yx}} & 0 \\ 0 & \frac{Y_{xy}}{X_{xy}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tan(\phi_{yx}) & 0 \\ 0 & \tan(\phi_{xy}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \arg(Z_{yx}) & 0 \\ 0 & \arg(Z_{xy}) \end{bmatrix} \tag{20}$$

- 當存在一個二維構造，其構造走向為方位角90度或270度時(不是常用的假設)，阻抗張量量測時x方向朝正北，y方向朝正東。此時阻抗張量為:

$$\mathbf{Z}^{2D,90^\circ}=\begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & Z_{xy} \\ Z_{yx} & 0 \end{bmatrix}$$

- 其相位張量為:

$$\mathbf{\Phi}^{2D,90^\circ}=\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} \end{bmatrix}=\frac{1}{(X_{xx}X_{yy}-X_{yx}X_{xy})}\begin{bmatrix} X_{yy}Y_{xx}-X_{xy}Y_{yx} & X_{yy}Y_{xy}-X_{xy}Y_{yy} \\ X_{xx}Y_{yx}-X_{yx}Y_{xx} & X_{xx}Y_{yy}-X_{yx}Y_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}^{2D,90^\circ}=\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} \end{bmatrix}=\frac{1}{(0-X_{yx}X_{xy})}\begin{bmatrix} 0-X_{xy}Y_{yx} & 0-0 \\ 0-0 & 0-X_{yx}Y_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}^{2D,90^\circ}=\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} \end{bmatrix}=\frac{1}{(-X_{yx}X_{xy})}\begin{bmatrix} -X_{xy}Y_{yx} & 0 \\ 0 & -X_{yx}Y_{xy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{Y_{yx}}{X_{yx}} & 0 \\ 0 & \frac{Y_{xy}}{X_{xy}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}^{2D,90^\circ}=\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{Y_{yx}}{X_{yx}} & 0 \\ 0 & \frac{Y_{xy}}{X_{xy}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tan(\phi_{yx}) & 0 \\ 0 & \tan(\phi_{xy}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \arg(Z_{yx}) & 0 \\ 0 & \arg(Z_{xy}) \end{bmatrix} \tag{21}$$

> 實際上不會知道二維構造是哪一種，阻抗張量對角線元素都會是0。量測時是依照X朝北，Y朝東的方式去進行。
> 這裡只是想指出相位張量與阻抗張量的相位角度是有關連的。

相位張量的旋轉不變量

- 相位張量的旋轉不變量「trace」:

$$\text{phase tensor invariants trace}=\Phi_{xx}+\Phi_{yy} \tag{22}$$

> 參考 Caldwell, T. G., Bibby, H. M., & Brown, C. (2004).

- 相位張量的旋轉不變量「skew」:

$$\text{phase tensor invariants skew}=\Phi_{xy}-\Phi_{yx} \tag{23}$$

> 參考 Caldwell, T. G., Bibby, H. M., & Brown, C. (2004).

- 相位張量的旋轉不變量「determinant」:

$$\text{phase tensor invariants determinant}=\Phi_{xx}\Phi_{yy}-\Phi_{xy}\Phi_{yx} \tag{24}$$

> 參考 Caldwell, T. G., Bibby, H. M., & Brown, C. (2004).

- 相位張量的旋轉不變量「beta」，單位為[rad]:

$$\text{phase tensor invariants beta}=\beta=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\Phi_{xy}-\Phi_{yx}}{\Phi_{xx}+\Phi_{yy}}\right) \tag{25}$$

> 參考 Caldwell, T. G., Bibby, H. M., & Brown, C. (2004).

- 相位張量的旋轉不變量「phimax」:

$$\text{phase tensor invariants phimax} = \Phi_{max} = \frac{1}{2}\left[(\Phi_{xx}+\Phi_{yy})^2+(\Phi_{xy}-\Phi_{yx})^2\right]^{1/2} + \frac{1}{2}\left[(\Phi_{xx}-\Phi_{yy})^2+(\Phi_{xy}+\Phi_{yx})^2\right]^{1/2} \tag{26}$$

> 參考 Bibby, H. M., Caldwell, T. G., & Brown, C. (2005).

- 相位張量的旋轉不變量「phimin」:

$$\text{phase tensor invariants phimin} = \Phi_{min} = \frac{1}{2}\left[(\Phi_{xx}+\Phi_{yy})^2+(\Phi_{xy}-\Phi_{yx})^2\right]^{1/2} - \frac{1}{2}\left[(\Phi_{xx}-\Phi_{yy})^2+(\Phi_{xy}+\Phi_{yx})^2\right]^{1/2} \tag{27}$$

> 參考 Bibby, H. M., Caldwell, T. G., & Brown, C. (2005).

相位張量的其他變量

- 相位張量的變量「alpha」，單位為[rad]，與座標系統有關的變量:

$$\text{phase tensor alpha} = \alpha = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\Phi_{xy}+\Phi_{yx}}{\Phi_{xx}-\Phi_{yy}}\right) \tag{28}$$

> 參考 Caldwell, T. G., Bibby, H. M., & Brown, C. (2004).

繪圖用的橢圓參數

- 橢圓半長軸a(semi-major-a)，就是phimax。

$$\text{phase tensor ellipse semi major a} = \Phi_{max} \tag{29}$$

> 參考 Caldwell, T. G., Bibby, H. M., & Brown, C. (2004).

- 橢圓半短軸b(semi-minor-b)，就是phimin。

$$\text{phase tensor ellipse semi minor b} = \Phi_{min} \tag{30}$$

> 參考 Caldwell, T. G., Bibby, H. M., & Brown, C. (2004).

- 橢圓旋轉角度theta(theta_in_degrees):
  - 旋轉角度值就是alpha-beta，使用時可將弧度轉成角度。
  - 若要繪製在地理系統上，參考座標x朝北，y朝東，則角度正向為北往東增加(順時鐘為正)，也就是方位角(Azimuth)的定義。

$$\text{phase tensor ellipse angle theta} = \alpha - \beta \tag{31}$$

> 參考 Caldwell, T. G., Bibby, H. M., & Brown, C. (2004).
> 文章中座標軸是使用x1，x2。對應我這裡的座標軸x，y。
